Funktionaalianalyysi 2006 **Demoratkaisut 8**

Lauri Kahanpää

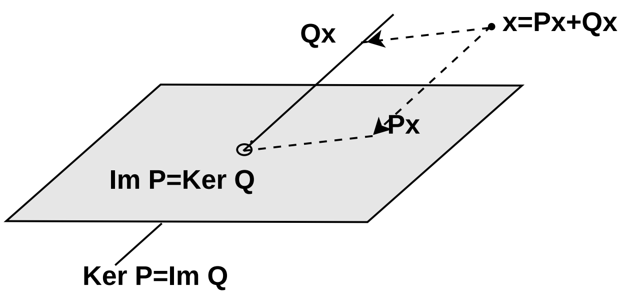
1. Askel:

$$\begin{aligned}\|x_1+\cdots+x_{n+1}\|^2 &= \|(x_1+\cdots+x_n)+x_{n+1}\|^2\\ &= \|x_1+\cdots+x_n\|^2+\|x_{n+1}\|^2 \quad \text{(Pytharoras! Tarkasta, että } (x_1+\cdots+x_n)\perp x_{n+1}.\text{)}\\ &= \|x_1\|^2+\cdots+\|x_n\|^2+\|x_{n+1}\|^2. \quad \text{(Induktio-oletus!)} \qquad \square\end{aligned}$$

2. Sarjan $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ k:s osasumma on $s_k = \sum_{n=0}^{k} x_n$. Tutkimme, milloin jono $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on Cauchyn jono Hilbert-avaruudessa H. Kun $m < k$, niin $s_k - s_m = \sum_{n=m+1}^{k} x_n$ ja siis ortogonaalisuusoletuksen ja tehtävän 1 mukaan $\|s_k - s_m\|^2 = \sum_{n=m+1}^{k} \|x_n\|^2$, joka puolestaan on normien neliösarjan $\sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\|^2$ vastaavien osasummien erotus $\mathbb{R}$:ssä. Kumpikin jono on selvästi Cauchy samoin ehdoin. Väite seuraa siis siitä, että sekä $\mathbb{R}$ että H ovat täydellisiä.

3. Lineaarikuvaus $P\colon E \to E$ on vektoriavaruuden E projektio **joss** $P^2 = P$. Huomaa, että tässä $P^2 = P \circ P$. Jos P on projektio, niin silloin Q eli $I - P$ on kahden lineaarikuvauksen lineaarikombinaationa myös lineaarikuvaus ja $Q^2 = (I-P)^2 = (I-P)\circ(I-P) \overset{(!)}{=} I - 2P + P^2 = I - 2P + P = I - P = Q$, joten Q on projektio. Koska $P = I - Q$, pätee käänteinenkin implikaatio. (Huomaa, että lineaarikuvausten yhdistämiseen ja summaan pätee osittelulaki, jota käytettiin kohdassa (!). Yhdistettyä kuvausta voi siis tässä mielessä pitää "tulona". Mieti, päteekö vastaava muille funktioille!)

$\mathrm{Im}(P) \subset \mathrm{Ker}\,(Q)$, sillä $x \in \mathrm{Im}(P) \implies x = P(y) \implies Q(x) = (I-P)(P(y)) = P(y) - P^2(y) = 0$. Toisaalta $\mathrm{Im}(P) \supset \mathrm{Ker}\,(Q)$, sillä $Q(x) = 0 \implies (I-P)(x) = 0 \implies x = P(x) \implies x \in P(E) = \mathrm{Im}(P)$. Kaikenkaikkiaan $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}\,(Q)$ ja roolit vaihtaen: $\mathrm{Im}(Q) = \mathrm{Ker}\,(P)$.



4. Lineaarikuvauksen ydin ja kuva ovat tunnetusti aina aliavaruuksia. Jos P on jatkuva, niin ydin $P^{-1}\{0\}$ on yhden pisteen alkukuva jatkuvassa kuvaukssa metriseen avaruuteen E, siis suljettu joukko. Jos projektio P on jatkuva , niin myös *komplementaarinen projektio* $Q = I - P$ on tietenkin jatkuva, jolloin edellinen tehtävä osoittaa, että $\mathrm{Im}(P)$ on suljettu.

5. Tiedetään, että $K \subset H$ on suljettu ja konveksi, $x \in H$, $u = P_K(x) \in K$ ja $\|x - p_{_K}(x)\| = \min_{v \in K} \|x - v\|$ kaikilla $x \in K$. Väitetään, että kaikilla $v \in K$ on $0 \leq \operatorname{Re}(x - u|u - v)$.

1. todistus: Rajoitutaan H:n kolmiulottiesen aliavaruuteen, jonka virittävät x, u ja v. Tämä on (euklidinen tai tässä kompleksinen) avaruus $\mathbb{C}^3$. Väite seuraa siitä, että $M \cap \mathbb{C}^3$ on sekin konveksi ja väite pätee 3-ulotteisessa tilanteessa (asia, jonka voi todistaa monellakin tavalla - itse asiassa kuitenkin helpoiten tavalla 2, jolla sen nyt teemme suoraan yleisessä tapauksessa. Reaalisena versiona väite muuten sanoo aika ilmeisen asian, että kulma $\measuredangle xuv$ on tylppä!).

2. todistus: $u + \lambda(v - u) \in K$ ja siis $\|x - u\| \leq \|x - (u + \lambda(v - u))\|$ kaikilla $0 \leq \lambda \leq 1$.

$$
\begin{aligned}
\|x-u\|^2 &\leq \|x - (u + \lambda(v-u))\|^2 = \|(x-u) + \lambda(u-v)\|^2 && \text{(kaikilla } 0 \leq \lambda \leq 1.) \\
&= \|(x-u)\|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda(x-u|u-v) + \lambda^2\|u-v\|^2 && \text{(Huomaa: } \lambda \in \mathbb{R}) \\
0 &\leq 2\lambda \operatorname{Re}(x-u|u-v) + \lambda^2\|u-v\|^2 && \text{kaikilla } 0 \leq \lambda \leq 1. \\
0 &\leq 2\operatorname{Re}(u-v|u-v) + \lambda\|u-v\|^2 && \text{kaikilla } 0 < \lambda \leq 1.
\end{aligned}
$$

Rajalla $\lambda \to 0$ tästä seuraa $\operatorname{Re}(x - u|u - v) \geq 0$.

6. Tiedetään, että $K \subset H$ on suljettu ja konveksi, $x \in H$, $u = P_K(x) \in K$ ja $\|x - p_{_K}(x)\| = \inf_{v \in K} \|x - v\|$ kaikilla $x \in K$. Väitetään, että $p_{_K}$ on *kutistava kuvaus*, $\|p_{_K}(x) - p_{_K}(y)\| \leq \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in H$.

Merkitään edellisen tehtävän mukaisesti $P_K x = u$ ja $P_K y = v$, jolloin

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq \operatorname{Re}(x-u|u-v) \\
\text{ja vastaavasti myös} \qquad & 0 \leq \operatorname{Re}(y-v|v-u).
\end{aligned}
$$

Kerrotaan alemmassa molemmat tekijät -1:llä, jolloin arvo ei muutu:

$$0 \leq \operatorname{Re}(v - y|u - v).$$

Summa tästä ja ylemmästä yhtälöstä antaa

$$
\begin{aligned}
& 0 \leq \operatorname{Re}(x-u+v-y|u-v) \\
\text{eli} \qquad & 0 \leq \operatorname{Re}((x-y)+(v-u)|u-v) \\
& \quad = \operatorname{Re}(x-y|u-v) - (u-v|u-v)) \\
& \quad = \operatorname{Re}(x-y|u-v) - \|u-v\|^2) \\
& \quad = \operatorname{Re}(x-y|v-u)) - \|v-u\|^2 \\
& \quad \overset{\text{Schwarz}}{\leq} \|x-y\|\,\|u-v\| - \|u-v\|^2. \qquad \square
\end{aligned}
$$

7. Kun $f \in L^1(A)$, määritellään f_n kaikilla $n \in \mathbb{N}$ asettamalla

$$
f_n(x) = \begin{cases} f(x) \text{ kun } |f(x)| \leq n & \text{ja} \\ f_n(x) = 0, \text{ kun } |f(x)| > n. \end{cases}
$$

Tällöin tietenkin $|f_n(x) - f(x)| \leq |f(x)|$ kaikilla $x \in A$ ja $n \in \mathbb{N}$. Koska $f \in L^1(A)$, niin $f(x) < \infty$ mk. ja siis $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ mk. A:ssa. Lisäksi $|f_n| \leq |f|$, joten $|f_n - f| \leq 2|f| \in L^1$ ja konvergenssi

$$\|f_n - f\|_1 = \int_A |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

seuraa siitä, että *Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen* ehdot täyttyvät. Tarkastetaan lopuksi, että $f_n \in L^{1,2}$:

Määritelmän mukaan $|f_n| \leq \min\{n, |f|\}$. Siis

$$\|f_n\|_2 = \sqrt{\int_A |f_n|^2} \leq \sqrt{\int_A n|f|} = \sqrt{n\|f\|_1} < \infty,$$

joten $f_n \in L^2$ ja siis $f_n \in L^{1,2}$, onhan $f_n \in L^1$, koska $|f_n| \leq |f|$.

VÄLIKOEPÄIVÄ ON 15.3.!