Funktionaalianalyysi 2006 **Demoratkaisut 7**

Lauri Kahanpää

1. Kolmioepäyhtälö $\|a-b\| \le \|a\| + \|b\|$ sovellettuna vektoreihin $a = x-y$ ja $b = -y$ antaa $\|x\| \le \|x-y\| + \|-y\|$ eli $\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$. Samoin $\|y\| - \|x\| \le \|y-x\| = \|x-y\|$.

Normi on siis metristen avaruuksien välisenä kuvauksena $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ Lipschitz-jatkuva vakiolla 1, siis tasaisesti jatkuva ja sitä suuremmalla syyllä jatkvua. (Tehtäväpaperin ohjeen mukaan voi todeta tämän suoraan $\epsilon - \delta$ - odistuksena.)

2. Aluksi tarkastetaan, että T_λ on ollenkaan kuvaus $\ell^p \to \ell^p$, siis *hyvin määritelty*: Olkoon $1 \le p \le \infty$ ja $x = (x_0, \dots) \in \ell^p$. Nyt $T_\lambda x = (\lambda_0 x_0, \dots) \in \ell^p$, sillä tapauksessa $p = \infty$ on

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n x_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n||x_n| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = \|\lambda\|_\infty \|x\|_\infty < \infty$$

ja tapauksessa $p < \infty$ on

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda x_n|^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^p |x_n|^p \le \sum_{n\in\mathbb{N}} \|\lambda\|_\infty^p |x_n|^p = \|\lambda\|_\infty^p \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p = \|\lambda\|_\infty^p \|x\|_p^p < \infty.$$

Kuvauksen T_λ lineaarisuus on ilmeinen asia ja jatkuvuus sekä tieto $\|T_\lambda\| \le \|\lambda\|_\infty$ on juuri yllä johdettu. Osoitetaan lopuksi, että $\|T_\lambda\| \ge \|\lambda\|_\infty - \varepsilon$, kun $\varepsilon > 0$. Valitaan $n \in \mathbb{N}$ siten, että $|\lambda_n| > \|\lambda\|_\infty - \varepsilon$ ja valitaan $x = (0, \dots, \overset{(n)}{1}, \dots) \in \ell^p$. Nyt $\|T_\lambda x\|_p = |\lambda_n| > (\|\lambda\|_\infty - \varepsilon) \cdot 1 = (\|\lambda\|_\infty - \varepsilon) \cdot \|x\|_p$. $\square$

3. (jatkoa) Koska jatkuvista funktioista yhdistetty funktio on jatkuva kuvaus, niin edellisen tehtävän nojalla riittää nyt osoittaa, että tämän tehtävän lauseke on hyvin määritelty; nollalla ei jaeta. Tämän tehtävän lisäehdoin $\|T_\lambda\| = \|\lambda\|_\infty = 1$. Normia laskiessa on hyvä huomata, että nyt on oletettu $p \ne \infty$. Olkoon $0 \ne x = (x_0, \dots) \in B_{\ell^p}$. Valitaan sellainen $m \in \mathbb{N}$, että $x_m \ne 0$. Nyt $\|T_\lambda x\|_p^p = \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^p |x_n|^p < \sum_{n=1}^\infty \|\lambda\|_\infty^p |x_n|^p \le 1$, missä aito epäyhtälö tulee siitä, että vasemmalla puolella on termi $|\lambda_m|^p |x_m|^p$ kohdassa, jossa oikealla on aidosti suurempi $\|\lambda\|_\infty^p |x_m|^p$. $\square$

4. Määritelmät tehtävästä 6.5: $\hat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt$ ja (muuttuja t nyt merkitty näkyviin:) $s_n(t) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikt}$.

Dirichlet'n ydin on geom. summa

$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{ikt} = \frac{\left(e^{it}\right)^{-n} - \left(e^{it}\right)^{n+1}}{1-e^{it}} = \frac{e^{-i(n+\frac{1}{2})t} - e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{e^{-i\frac{1}{2}t} - e^{i\frac{1}{2}t}} = \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}$.

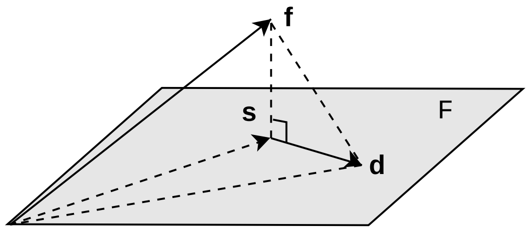
Lasketaan:

$$s_n(f) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikt} = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt e^{ikt} = \sum_{k=-n}^n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx}\, dx e^{ikt}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^n e^{-ik(x-t)} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(x)\, dx \overset{\text{jaksollinen}}{=} \int_a^{a+2\pi} D_n(t-x) f(x)\, dx$$

Tulos on aika ihmeellinen ja yllättävä!

5. (jatkoa) Tässä on sama geometria kuin tehtävässä 6.5., jonka tuloksena oli, että



$$\|f-d\|_2^2 = \|f-s_n\|_2^2 + \|s_n-d\|_2^2 \tag{1}$$

ja siis $\|f-d\|_2 \geq \|f-s_n\|_2$. (Kerroin $\frac{1}{2\pi}$ ei vaikuta näihin, koska se on kaikissa 2-normeissa, kun vaihdetaan merkintöjä viimekertaisista tämänkertaisiin.) Nyt pitää todistaa, että $\sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \|f\|_2^2$.

Kuviosta tulee mieleen, että voimme soveltaa yhtälöä (1) pisteeseen $d = 0 \in \mathcal{F}_n$, jolloin saamme yhtälön $\|f\|_2^2 = \|f-s_n\|_2^2 + \|s_n\|_2^2$ ja siis (toinen kateetti kuin tehtävässä 6.5.) $\|s_n\|_2 \leq \|f\|_2$. Lasketaan $\|s_n\|_2$:

$$\begin{aligned}
\|s_n\|_2^2 = \|s_n(t)\|_2^2 &= \|\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt}\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt}|^2\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)e^{ikt}\right)\left(\sum_{l=-n}^{n}\overline{\hat{f}(l)}e^{-ilt}\right)dt \\
&= \sum_{k=-n}^{n}\sum_{l=-n}^{n}\hat{f}(k)\overline{\hat{f}(l)}\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t}\,dt}_{2\pi\cdot\delta_{lk}} = \sum_{k=-n}^{n}\hat{f}(k)\overline{\hat{f}(k)} = \sum_{k=-n}^{n}|\hat{f}(k)|^2
\end{aligned}$$

Siis kaikilla n pätee $\sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 = \|s_n\|_2^2 \leq \|f\|_2^2$, joten myös $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=-n}^{n} |\hat{f}(k)|^2 \leq \|f\|_2^2$. $\square$