Funktionaalianalyysi 2006 **Demoratkaisut 5**

Lauri Kahanpää

Yleistämme nyt tehtävät **4.4 - 5** eräille äärettömien jonojen $x = (x_n) = (x_n)_{n=0}^{+\infty}$ muodostamille $\mathbb{R}$-lineaariavaruuksille määritellen aluksi

$$\begin{aligned} \ell^1 &= \{x = (x_n) \mid x_n \in \mathbb{R},\ \|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty\} \quad \text{ja} \\ \ell^\infty &= \{x = (x_n) \mid x_n \in \mathbb{R},\ \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}. \end{aligned}$$

Jonojen $x = (x_n)$ ja $y = (y_n)$ yhteenlasku määritellään asettamalla $x + y = (x_n + y_n)$, vastaavasti $\lambda x = (\lambda x_n)$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$. Näytä, että

1. ℓ^1 on $\mathbb{R}$-lineaariavaruus ja $\|.\|_1$ siinä määritelty normi.

On ilmeistä, että $x \in \ell^1 \ \ \& \ \ \lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x \in \ell^1 \ \ \& \ \ \|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$. Kolmioepäyhtälö sensijaan vaatii perustelun: Olkoot n $x = (x_n)$ ja $y = (y_n)$ ℓ_1-jonoja. Sovelletaan avaruuden $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ kolmioepäyhtälöä katkaisemalla saatuihin äärellisiin jonoihin $(x_1, \ldots, x_n)$ ja $(y_1, \ldots, y_n)$ ja saadaan

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \le \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \le \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Tämä pätee kaikilla (!) $n \in \mathbb{N}$, joten

$$\|x + y\|_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \le \|x\|_1 + \|y\|_1 < \infty.$$

2. Vastaavasti myös ℓ^∞ on $\mathbb{R}$-lineaariavaruus ja $\|.\|_\infty$ sen normi. (Vaihda ykkösen tilalle ∞)

3. Vastaavasti myös ℓ^2 on $\mathbb{R}$-lineaariavaruus ja $\|.\|_\infty$ sen normi. (Vaihda ykkösen tilalle kakkonen)

Sama metodi puree toisaalta myös Schwarzin epäyhtälön laajentamiseen. Kolmioepäyhtälön voi sitten todistaa Schwarzin epäyhtälön avulla. Toinen vaihtoehto on menetellä kuten edellä, siis laskea äärellisulottisen kolmioepäyhtälön avulla, mutta silloin jää Schwarz yleistämättä.

Schwarzin epäyhtälön yleistyksessä on muuten lisäjuju: Pitää TODISTAA, että kahden l^2-jonon *sisätulo eli* summa $\sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$ SUPPENEE. Tämä seuraa kyllä aika helposti (äärellisulotteisesta) CS-epäyhtälöstä tämäkin, onhan jäännöstermille arviot

$$\sup_{k=n}^{m} |\sum_{i=n}^{m} x_i y_i| \le \sup_{k=n}^{m} \sqrt{\sum_{i=n}^{m} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=n}^{m} |y_i|^2} \le \sup_{k=n}^{m} \sqrt{\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=n}^{\infty} |y_i|^2} \to 0$$

4. Avaruudet ℓ^1 ja ℓ^2 ovat avaruuden ℓ^∞ sisäkkäisiä R-lineaarialiavaruuksia, $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$, sillä

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

pätee kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ ja siis myös kaikilla $x \in \ell^1$. Taas idea kuten tehtävässä 1, siis esimerkiksi: kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leq \|x\|_1.$$

joten myös

$$\|x\|_2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \leq \|x\|_1.$$

5. Kun $p, r \in \{1, 2, \infty\}$ ja $p < r$, niin näytä, ettei voi olla sellaista vakiota $0 < M < \infty$, että

$$\|x\|_p \leq M \|x\|_r$$

kaikilla $x \in \ell^p$.

Tutkin jonoja $0 \neq x = (x_n)$, joilla $x_n = x_0$ kun $n < m$, $x_n = 0$ kun $n \geq m$. Lasketaan

$$\frac{\|x\|_1}{\|x\|_2} = \frac{\sum^n |x_k|}{\sqrt{\sum^n |x_k|^2}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty.$$

$$\frac{\|x\|_2}{\|x\|_\infty} = \frac{\sqrt{\sum^n |x_k|^2}}{\sup |x_k|} = \frac{\sqrt{n}}{1} = \sqrt{n} \to \infty.$$

6. Näytä, että jonoavaruus ℓ^p on Banach-avaruus jokaisella $p \in \{1, 2, \infty\}$. Näytä aluksi, että kun $x_j = (x_{jn}) \in \ell^p$, $j \in \mathbb{N}$, on avaruuden ℓ^p Cauchyn jono, niin *koordinaattijonoilla* x_{jn} on kaikilla $n \in \mathbb{N}$ raja-arvo

$$x_n = \lim_{j \to +\infty} x_{jn} \in \mathbb{R} \quad .$$

Menettele sitten kuten monisteessa esimerkissä 9.26 eli sivulla sivulla 66, jossa on todistettu ℓ^2:m täydellisyys: Kopioimalla sieltä ja hiemen indeksejä muuttamalla saadaan tapauksessa $p = 1$ seuraavaa:

Avaruuden ℓ^1 täydellisyys todistetaan periaatteessa samaan tapaan kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ täydellisyys, nimittäin *koordinaateittain*. Todistus on siis melko suoraviivainen lasku, mutta edellyttää huolellista kirjanpitoa ja kelvollisia merkintöjä käsiteltäessä jonoja, joiden alkiotkin ovat jonoja.

Olkoon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avaruuden ℓ^1 Cauchy-jono. Tehtävänämme on todistaa, että se suppenee avaruudessa ℓ^1.

Jokainen tutkittavan jonon jäsen x_n on itsekin jono, nimittäin lukujono

$$x_n = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots).$$

Kirjoittamalla lukujonot x_n toistensa alle saamme havainnollistettua tilannetta äärettömällä matriisilla

$$\begin{array}{rcccc} x_1 = & \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} & \dots \\ x_2 = & \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \dots \\ x_3 = & \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Koska $|\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^{(m)}| \leq \|x_n - x_m\|_1$, niin jonojen x_n ensimmäisten termien muodostama jono, matriisin ensimmäinen sarake $(\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(3)}, \dots)$, on Cauchy-jono avaruudessa $\mathbb{R}$ ja suppenee siis kohti jotakin lukua: $\alpha_1^{(n)} \to \alpha_1$, kun $n \to \infty$. Sama pätee muillekin sarakkeille: $\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k$, kun $n \to \infty$. Näin tulee määritellyksi jonon $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainoa mahdollinen raja-arvoehdokas $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

$$\begin{array}{rccccc} x_1 = & \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} & \dots & \in \ell^1 \\ x_2 = & \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \dots & \in \ell^1 \\ x_3 = & \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & \dots & \in \ell^1 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ x = & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \end{array}$$

Tehtävänä on näyttää, että x kuuluu avaruuteen ℓ^1 ja että

$$\|x_n - x\|_1 \to 0, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Molemmat arviot saadaan samalla päättelyllä: Olkoon $\epsilon > 0$. On löydettävä luku n_ϵ siten, että $\|x_n - x\|_1 \leq \epsilon$, kun $n > n_\epsilon$. Cauchy-oletuksen nojalla on ainakin olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että kun $n, m > n_\varepsilon$, niin $\|x_n - x_m\|_1 \leq \epsilon$, eli

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}| \leq \epsilon.$$

Erityisesti jokaisella äärellisellä $N \in \mathbb{N}$ on siis

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}| \leq \epsilon,$$

kun $n, m > n_\varepsilon$. Kiinnittäkäämme hetkeksi $n > n_\varepsilon$. Koska epäyhtälön $(*)$ vasen puoli on muuttujien $\alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_N^{(m)}$ jatkuva funktio ja kukin $\alpha_k^{(m)} \to \alpha_k$, kun $m \to \infty$, niin myös

$$\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k| \leq \epsilon, \quad \text{kun } n > n_\varepsilon.$$

Positiiviterminen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k|$ suppenee siis, ja sen summa on enintään ϵ, kunhan $n > n_\varepsilon$. Toisin sanoen $\|x_n - x\|_1 \leq \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$. Nyt kumpikin tavoitteemme on saavutettu.

(1) Erotus $(x_n - x)$ kuuluu vektoriavaruuteen ℓ^1, joten myös

$$x = x_n - (x_n - x) \in \ell^1 \quad \text{ja}$$

(2)

$$\|x_n - x\|_1 \to 0, \text{ kun } n \to \infty. \quad \square$$

Tapaus ∞ on vähän helpompi.