**Funktionaalianalyysi 2006** **Demoratkaisut 3**

Lauri Kahanpää

**1.** Tehtävän ratkaisu on esitettu kieroksen 1 yhteydessä.

**2.** $B_n(x) = x$ voidaan todistaa vetoamalla binomijakauman tunnettuun odotusarvoon (Vertaa kierroksen 2 ratkaisutapaan) $np$ seuraavasti. Tunnetusti

$$E_p, n = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = np.$$

Merkitsemällä $p = x \in [0,1]$ ja jakamalla puolittain $n$:llä saadaan Bernsteinin polynomin lauseke:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x.$$

Voi myös laskea suoraan, jolloin samalla tulee todistettua em. kaava.

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n}\binom{n}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{n}\frac{n!}{(k+1)!(n-1-k)!} x^{k+1}(1-x)^{n-1-k} \\
&= x\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-1!}{k!(n-1-k)!} x^{k}(1-x)^{n-1-k} = x\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{k}(1-x)^{n-1-k} = x. \quad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n(x^m) &= \sum_{k=0}^{n} (\frac{k}{n})^m \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^m \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= (\frac{1}{n})^m \binom{n}{1} x(1-x)^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} (\frac{k}{n})^m \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \\
&= \underbrace{(\frac{1}{n-1})^m x(1-x)^{n-1}}_{(\frac{1}{n-1})^m x + x^2\cdot\text{polynomi}} + \underbrace{x^2 \sum_{k=2}^{n} (\frac{k}{n})^m \binom{n}{k} x^{k-2}(1-x)^{n-k}}_{x^2\cdot\text{polynomi}} \\
&= (\frac{1}{n-1})^m x + x^2 \cdot \text{polynomi} \neq x^m. \quad \square
\end{aligned}$$

**3.** Huom: Tässä ja seuraavassa tehtävässä kuntana voii olla yhtä lailla $\mathbb{C}$ kuin $\mathbb{R}$. Oletetaan tietenkin, että $a < b$. Tällöin $\|f\|_1 = \int_a^b |f|\,dt \geq 0$ ja yhtäläisyys pätee ainoastaan, kun $f(x) = 0$ koko välillä $[a,b]$, sillä $|f|$on jatkuva ja ei-negatiivinen. (Tarkasta asia tekemällä antiteesi $|f(x)| > 0$ jollain $x$ ja käyttämällä jatkuvuuden määritelmää valiten $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x)|$.) Lisäksi tietenkin kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$ pätevät positiivihomogeenisuusehto $\|\lambda f\|_1 = \int_a^b |\lambda||f|\,dt = |\lambda| \int_a^b |f|\,dt = |\lambda|\|f\|_1$ ja kolmioepäyhtälö $\|f+g\|_1 = \int_a^b |f+g|\,dt \leq \int_a^b |f| + |g|\,dt = \int_a^b |f|\,dt + \int_a^b |g|\,dt = \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

**4.** Nytkin $\|f\|_2 = \int_a^b |f|^2\,dt \geq 0$ ja yhtäläisyys pätee ainoastaan, kun $f = 0$. Samoin positivihomogeenisuus on ilmeinen: $(\|\lambda f\|_2)^2 = \int_a^b |\lambda|^2|f|^2\,dt = |\lambda|^2\int_a^b |f|^2\,dt = |\lambda|^2(\|f\|_2)^2$. Mutta kolmioepäyhtälöön — kuten euklidisen normin kolmioepäyhtälökin — todistettava Cauchyn ja Schwarzin epäyhtälön avulle; suora todistus olisi vaikea.

$$
\begin{aligned}
(\|f+g\|_2)^2 &= \int_a^b |f+g|^2\,dt \leq \int_a^b |f|^2 + 2|f||g| + |g|^2\,dt \\
\text{(C-S)} \qquad &= \underbrace{\int_a^b |f|^2\,dt}_{\|f\|_2^2} + 2\underbrace{\int_a^b |f||g|\,dt}_{\leq\|f\|\|g\|} + \underbrace{\int_a^b |g|^2\,dt}_{\|g\|_2^2} \\
&\leq \big(\|f\|_2 + \|g\|_2\big)^2.
\end{aligned}
$$

**5.** Tarkastellaan aluksi välillä polynomien $p_{0,n}$ ominaisuuksia välillä $[0,1]$. $p_{0,n} = x(1-x)^{n-1}$, nollakohdat 0 ja 1, maksimikohta $\frac{1}{n}$, maksimin arvo

$$
p_{0,n}(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{n}(1-\tfrac{1}{n})^{n-1} = \frac{1}{n}\frac{(1-\frac{1}{n})^n}{(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{n-1}\underbrace{(1-\tfrac{1}{n})^n}_{\to e^{-1}}.
$$

a) Olkoon $x \in ]0,1[$. Nyt $p_{s,n}(x) = n^s x(1-x)^{n-1} = \frac{n^s}{(\frac{1}{(1-x)})^{n-1}} \cdot x \to 0$, koska osoittaja on potenssifunktio ja nimittäjässä on eksponenttifunktio, jonka kantaluku on suurempi kuin 1. Erikseen huomataan, että $p_{s,n}(0) = p_{s,n}(1) = 0$ kaikilla $n$ ja $s$.

b) $\|p_{s,n}\|_\infty = \frac{n^s}{n-1}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{n^{s-1}}{1-\frac{1}{n}}\underbrace{(1-\tfrac{1}{n})^n}_{\to e^{-1}} \to \begin{cases} \infty, \text{ kun } s > 1 \\ e^{-1}, \text{ kun } s = 1 \\ 0, \text{ kun } s < 1\,. \end{cases}$

c) $\|p_{s,n}\|_1 = n^s\int_0^1 x(1-x)^{n-1}\,dx = n^s\int_0^1 (1-x)x^n\,dx = n^s(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{n^s}{n(n+1)} = \frac{n^{s-2}}{1+\frac{1}{n}} \to \begin{cases} \infty, \text{ kun } s > 2 \\ 1, \text{ kun } s = 2 \\ 0, \text{ kun } s < 2\,. \end{cases}$

d) $\|p_{s,n}\|_2^2 = n^{2s}\int_0^1 x^2(1-x)^{2(n-1)}\,dx = n^{2s}\int_0^1 \underbrace{(1-x)^2}_{1-2x+x^2} x^{2n}\,dx$

$= n^{2s}\int_0^1 x^{2n} - 2x^{2n+1} + x^{2n+2}\,dx = n^{2s}\big(\frac{1}{2n+1} - 2\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3}\big) = n^{2s}\frac{2}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \to \begin{cases} \infty, \text{ kun } 2s > 3 \text{ elis} > \frac{3}{2} \\ 1, \text{ kun } 2s = 3 \text{ elis} = \frac{3}{2} \\ 0, \text{ kun } 2s < 3 \text{ elis} < \frac{3}{2}\,. \end{cases}$