Funktionaalianalyysi 2006 **Demoratkaisut 2**
Lauri Kahanpää

1. Annettuna $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C} = \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$. Määritellään $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathcal{C} : u = (u_1, \ldots, u_n) \mapsto \sum_{k=1}^n u_k f_k$.

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)\|_\infty &= \sup_{x\in X}\left|\sum_{k=1}^n u_k f_k(x)\right| \le \sup_{x\in X}\sum_{k=1}^n |u_k||f_k(x)| \\ &\le \sum_{k=1}^n \sup_{x\in X}|u_k||f_k(x)| = \sum_{k=1}^n |u_k| \sup_{x\in X} \underbrace{|f_k(x)|}_{\le\|f_k\|_\infty} \\ &= \sum_{k=1}^n |u_k|\|f_k\|_\infty \le L\sum_{k=1}^n |u_k|,\end{aligned}$$

missä $L = \max\{\|f_k\|_\infty \mid 1 \le k \le n\}$. Epäyhtälö on saatu, kun huomataan, että

$$\sum_{k=1}^n |u_k| \le \sum_{k=1}^n \max\{\underbrace{|u_k|}_{|u|_{eukl}} \mid 1 \le k \le n\}| \le n \cdot |u|_{\text{eukl}}.$$

Siis luku $M = nL$ kelpaa:

$$\|\Phi(u)\|_\infty \le M\,|u|_{\text{eukl}}.$$

Jatkuvuus on ilmeinen: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \frac{\varepsilon}{M+1}$, jolloin $M\delta < \varepsilon$ ja

$$|u-v|_{\text{eukl}} \le \delta \implies \|\Phi(u)-\Phi(v)\|_\infty = \|\Phi(u-v)\|_\infty \le M|u-v|_{\text{eukl}} \le M\delta \le \varepsilon.$$

Itse asiassa huomattiin, että Φ on Lipschitz-jatkuva!

2. (jatkoa) Oletetaan lisäksi, että $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}{=}\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ ovat lin. riippumattomat ja merkitään niiden virittämää aliavaruutta $F = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle \subset \mathcal{C}$. Koska $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{C}{=}\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(X)$ ovat lin. riippumattomat, Φ on injektio, siis bijektio kuvajoukolleen $\Phi(\mathbb{R}^n) = F$. (Injektiivisyys seuraa lin. algebrasta: Φ:n ydinhän on pelkkä $\{0\}$.) Siis Φ:llä on käänteiskuvaus $\Phi^{-1} : F \to \mathbb{R}^n$ ja sekin on (tietysti !) lineaaarikuvaus. Todistetaan sillekin (Lip-) jatkuvuus johtamalla vasaava epäuhtälö kuin tehtävässä 1:

Merkitään euklidista normia lyhyesti $|u| = |u|_{\text{eukl}}$ ja $\mu = \min_{|u|=1}\|\Phi(u)\|_\infty$. Tämä minimi on olemassa, sillä suljetun pallon pinta $\{u \in \mathbb{R}^n \mid |u| = 1\}$ on kompakti ja kuvaus $\|\Phi(\cdot)\|_\infty = \|\cdot\|_\infty \circ \Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on jatkuva. Minimin arvo μ on nollasta eroava, siis positiivinen, koska ϕ on injektio ja normi häviää vain origossa. Yksikkövektoreille u (siis vektoreille, joiden normi on 1 eli juuri 1-pallon pinnan vektoreille) väite pätee vakiolla $M = \frac{1}{\mu}$, onhan

$$|u| = 1 = 1 = \frac{1}{\mu}\min_{|u|=1}\|\Phi(u)\|_\infty \le \frac{1}{\mu}\|\Phi(u)\|_\infty.$$

Muille vektoreille tulos saadaan periaatteessa huomaamalla, että tämä epäyhtälö säilyy, kun u kerrotaan luvulla. Käytännössä lasketaan vaikka näin: olkoon $u \in \mathbb{R}^n$. Tällöin vektorin $\frac{u}{|u|}$ normi on 1 (Tapaus $u = 0$ pitää tietysti käsitellä erikseen), ja siis $1 = |\frac{u}{|u|}| \le M\|\Phi(\frac{u}{|u|})\|_\infty = \frac{1}{|u|}M\|\Phi(u)\|_\infty$, mikä onkin juuri väite.