JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Funktionaalianalyysi 14
26.4.2006

1. Tehtävän 13. 5. mukaan $\frac{\pi^2}{6} = \sum_1^\infty \frac{1}{k^2}$, joten äärettömän "neliömatriisin"

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

pysty- ja vaakavektorit toteuttavat kaikilla $i, j \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ epäyhtälöt

$$\sum_k u_{kj}^2 < \frac{\pi^2}{3} - 1 \quad , \qquad \sum_k u_{ik}^2 < \frac{\pi^2}{3} - 1 \quad .$$

Lauseen 1.7.3 mukaan jatkuvan lineaarioperaattorin T matriisin riveillä ja sarakkeilla on ominaisuus $\|t_i\|_2 \le \|T\|$, mutta luentotekstissä huomautetaan, että $\mathbb{N}^2$-matriisin rivien ja sarakkeiden $\|\cdot\|_2$-normien äärellisyys tai edes yhteinen yläraja eivät riitä takaamaan, että matriisi edustaisi jotain jatkuvaa lineaarioperaattoria. Nyt tehtävänä on antaa tarvittava vastaesimerkki näyttämällä, ettei ole olemassa Hilbert-avaruuden ℓ^2 **jatkuvaa** lineaarioperaattoria $U\colon \ell^2 \to \ell^2$ niin, että $\mathrm{Mat}(U)$ olisi $\mathbf{U}$. Arvioidaan normeja (lasken neliöt):

$$\|U(\underbrace{e_1 + \cdots + e_n}_{y_n})\|_2^2 = \|U(e_1 + \cdots + e_n)\|_2^2 = (1 + \tfrac{1}{2} + \ldots \tfrac{1}{n})^2 + \cdots + (\tfrac{1}{n} + \tfrac{1}{2} + \cdots + 1)^2$$

$$\ge (\log n)^2 + \cdots + (\log n)^2 = n(\log n)^2 \,.$$

Mutta $\|y_n\|^2 = n$, joten $\lim_{n\to\infty} \frac{\|U(y_n)\|_2}{\|y_n\|_2} = \lim_{n\to\infty} \log n = \infty$.

2. Oletetaan, että matriisille $\mathbf{V} = [v_{ij}]$ pätee Hilbertin ja Schmidtin ehto

$$\|\mathbf{V}\|_2 := \left(\sum_{i,j=1}^{+\infty} |v_{ij}|^2 \right)^{1/2} < +\infty \quad .$$

Määritellään $V\colon \ell^2 \to \ell^2$, $\mathrm{Mat}(V) = \mathbf{V}$ ja väitetään, että tämä on hyvin määritelty ja vieläpä operaattorinormi $\|V\|$ toteuttaa epäyhtälön $\|V\| \le \|\mathbf{V}\|_2$. Olkoon siis $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^2$, jolloin $Vy = \left(\sum_j v_{ij} y_j\right)_{i\in\mathbb{N}}$ ja

$$\|Vy\|_2^2 = \sum_i \big(\sum_j v_{ij} y_j\big)^2 \overset{CS}{\le} \sum_i \big(\|(v_{ij})_{j\in\mathbb{N}}\|_2 \; \|(y_j)_j\|_2\big)^2$$

$$= \big(\sum_i \|(v_{ij})_{j\in\mathbb{N}}\|_2^2\big) \; \|y\|_2^2 = \big(\sum_i \sum_j |(v_{ij}|^2\big) \; \|y\|_2^2$$

$$= \|\mathbf{V}\|_2^2 \; \|y\|_2^2. \qquad \square$$

3. Osoitamme Bairen lauseen avulla, ettei ääretönulotteisella Banach-avaruudella E voi olla numeroituvaa vektoriavaruus- eli Hamelin kantaa:

E:n jokainen äärellisulotteinen aliavaruus on suljettu ja sisäpisteetön, siis harva. Jos E:llä olisi Hamelin kanta $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$, niin olisi tietenkin $E = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_n$, missä $E_N = \langle e_1, \ldots, e_n \rangle$, jolloin E olisi harva vastoin Bairen lauseen tulosta.

4. Määritellään, että lineaariavaruuden E normi $\|.\|_b$ on *vahvempi* kuin normi $\|.\|_a$

$$\|.\|_a \prec \|.\|_b,$$

jos on vakio $C < +\infty$ siten, että kaikilla $x \in E$ pätee

$$\|x\|_a \leq C\,\|x\|_b \quad , \text{ eli}$$

jos identtinen kuvaus on jatkuva ja sen normi alle C suuntaan $(E;\|\cdot\|_b) \to (E;\|\cdot\|_a)$. Jos $\|.\|_a \prec \|.\|_b$ tai $\|.\|_b \prec \|.\|_a$ pätee normeille $\|.\|_a$ ja $\|.\|_b$, niin normit $\|.\|_a$ ja $\|.\|_b$ ovat (keskenään) *vertautuvia*, ja jos sekä $\|.\|_a \prec \|.\|_b$ että $\|.\|_b \prec \|.\|_a$ pätevät yhtä aikaa, niin normit $\|.\|_a$ ja $\|.\|_b$ ovat määritelmän 1.3.2 mukaisesti E:n *ekvivalentteja normeja.* tällöin siis identtinen kuvaus on **homeomorfismi** $(E;\|\cdot\|_a) \to (E;\|\cdot\|_b)$. Osoitetaan, että itse asiassa kaksi saman lineaariavaruuden E keskenään vertautuvaa **Banach**-normia ovat aina ekvivalentteja. Jos nimittäin identtinen kuvaus $(E;\|\cdot\|_b) \to (E;\|\cdot\|_a)$ on jatkuva, niin se on jatkuva surjektio Banach-avaruudelta toiselle ja siis avoimen kuvauksen lauseen mukaan avoin kuvaus. Siinä kaikki !

5. Olkoot $f, g \in L^1(2\pi)$. Määritellään

$$f * g\,(t) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\,g(s)\,ds,$$

niissä pisteissä t, joissa $f(t-s)\,g(s)$ on integroituva muuttujan s funktiona. Muissa pisteissä $f * g\,(t)$ ei ole määritelty. Osoitetaan, että konvoluutio $f * g\,(t)$ on määritelty m.k. $t \in \mathbb{R}$, että $f * g = g * f \in L^1(2\pi)$ ja että $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\,\|g\|_1$. Aloitetaan yrittämällä laskea normi $\|f * g\|_1$ ja saadaan Fubinin lauseen (F) mukaan

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_1 &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} |f * g(t)|\,dt \leq \tfrac{1}{4\pi^2} \int_{\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{\pi} |f(t-s)g(s)|\,dsdt \\
&\overset{F}{=} \tfrac{1}{4\pi^2} \int_{\pi}^{\pi} \Big(\int_{\pi}^{\pi} |f(t-s)||g(s)|\,dt \Big) ds \\
&= \tfrac{1}{4\pi^2} \int_{\pi}^{\pi} \Big(\int_{\pi}^{\pi} |f(t-s)|\,dt \Big) |g(s)| ds = \tfrac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \|f\|_1\,|g(s)| ds \\
&= \|f\|_1 \tfrac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} |g(s)| ds = \|f\|_1 \|g\|_1 = \|f\|_1\,\|g\|_1 < \infty,
\end{aligned}$$

joten erityisesti $|f(t-s)g(s)|$ on integroituva s:n funktiona eli $f * g(t)$ on määritelty melkein kaikilla t. On saatu myös $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1\,\|g\|_1$. Kommutointi $f * g = g * f$ saadaan (luonnollisesti!) muuttujanvaihdolla $t - s = u$, jolloin $ds = -du$ ja $s = t - u$, erityisesti arvoja $s = \pm\pi$ vastaa $u = t \mp \pi$ ja siis $f * g\,(t)$ on

$$\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\,g(s)\,ds = -\tfrac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(u)\,g(t-u)\,du \overset{\text{jaks.}}{=} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,g(t-u)\,du = g * f\,(t).$$

6. Konvoluution Fourier-sarja saadaan alkuperäisten funktioiden $f, g \in L^1(2\pi)$ Fourier-sarjoista näin: $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\,\hat{g}(k)$,

$$
\begin{aligned}
\widehat{f * g}(k) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \big(f * g(t)\big)\, e^{-ikt}\, dt \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\, g(s)\, ds \Big)\, e^{-ikt}\, dt \\
&= \tfrac{1}{4\pi^2} \int_{\pi}^{\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t-s)\, g(s)\, e^{-ikt}\, dsdt \\
&\overset{F}{=} \tfrac{1}{4\pi^2} \int_{\pi}^{\pi} \Big(\int_{\pi}^{\pi} f(t-s)\, g(s)\, e^{-ikt}\, dt \Big) ds \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \Big(\tfrac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} f(t-s)\, e^{-ik(t-s)}\, dt \Big) e^{-iks}\, g(s) ds \\
&= \tfrac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} \hat{f}(k) e^{-iks}\, g(s) ds \\
&= \hat{f}(k)\ \tfrac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} e^{-iks}\, g(s) ds \\
&= \hat{f}(k) \hat{g}(k). \qquad \square
\end{aligned}
$$

Huomaa, että integroitava $f(t-s)\, g(s)\, e^{-ikt}$ on jo edellisessä tehtävässä todettu integroituvaksi, onhan sen itseisarvo $|f(t-s)\, g(s)|$.