Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 13

12.4.2006

1. $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ on diskreetti topologinen avaruus: kaikki sen osajoukot ovat avoimia ja suljettuja. Diskreetissä avaruudessa jokainen joukko on itsensä sulkeuma, joten $\mathbb{Z}$:n ainoa tiheä osajoukko on $\mathbb{Z}$ itse. *Osajoukko $A \subset B$ on harva joukossa B* , jos sen sulkeumalla ei ole sisäpisteitä. Mutta diskreetin avaruuden osajoukon kaikki pisteet ovat sisäpisteitä. Siksi ainoastaan $\emptyset$ on harva $\mathbb{Z}$:ssa. *Ensimmäisen kategorian* joukko on numeroituva yhdiste harvoista joukoista, tehtävän tapauksessa siis $\emptyset$. Kaikki muut osajoukot ovat *toista kategoriaa.*

2. Metrinen avaruus X on *perfekti*, jos $X \neq \emptyset$ ja $X = \overline{X \setminus \{x_o\}}$ kaikilla $x_o \in X$. Esimerkiksi $\mathbb{Q}$ on perfekti metrinen avaruus, mutta ei täydellinen. Osoitetaan Bairen kategorialauseen avulla, että itse asiassa jokainen perfekti täydellinen metrinen avaruus X on ylinumeroituva. Vastaoletus: $X = \{x_1, \ldots, \}$ on perfekti, täydellinen, metrinen ja numeroituva. Perfektin avaruuden määritelmä merkitsee, että jokainen yksiö $\{x_n\}$ on harva, joten $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$ on ensimmäistä kategoriaa. Mutta Bairen kategorialauseen mukaan täydellinen metrinen avaruus on (itsensä osajoukkona) toista kategoriaa. Ristiriita $\square$

3. *Cantorin joukko*

$$C = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \left[[0,1] \setminus \Big(\bigcup_{k=1}^{3^n} 3^{-n} \,]k - 2/3,\, k - 1/3[\Big) \right]$$

on leikkaus suljetuista joukoista, siis suljettu. Koska $\mathbb{R}$ on täydellinen, on myös C siis täydellinen. Lisäksi C on perfekti joukko: tämä johtuu siitä, että C sisältää ainakin kaikki poistettujen välien päätepisteet ja näiden joukko Pä on myös ilmiselvästi tiheä[1] C:ssä, joten ainakin jokaiselle $x \in C \setminus P$ä on $x \in \overline{P}$ä $= \overline{P\text{ä} \setminus \{x\}} \subset \overline{C \setminus \{x\}}$ ja helposti huomaa, että myös jokainen päätepiste p kuuluu sulkeumaan $\overline{P\text{ä} \setminus \{p\}} \subset \overline{C \setminus \{p\}}$. Bairen kategorialauseeseen perustuvan edellisen tehtävän nojalla siis C on ylinumeroituva, erityisesti C sisältää paljon muitakin pisteitä kuin em. päätepisteet.

On syytä varovaisuuteen: Todistimme juuri, että metrinen avaruus C on toista kategoriaa **itsensä osajoukkona**. Mutta siitä ei suinkaan seuraa, että C olisi toista kategoriaa esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}$ osajoukkona. Itse asiassa C on jopa harva lukusuoralla $\mathbb{R}$, onhan $C \subset \mathbb{C}$ suljettu, mutta selvästi sisäpisteetön. (On yleisemminkin syytä oppia erottamaan osajoukon ominaisuudet vastaavan aliavaruuden ominaisuuksista.)

(Toinen todistus ylinumeroituvuudelle: Poistettujen välien päätepisteet ovat tasan ne välin $[0,1]$ reaaliluvut, joiden 3-kantaisessa kehitelmässä on nollien lisäksi vain äärellinen määrä ykkösiä. Muut Cantorin joukkoon C kuuluvat luvut ovat puolestaan ne, joiden 3-esityksessä ei ole kokonaisosaa eikä yhtään ykköstä, siis esim. $0,20020002000020 \cdots \in C$. Vaihtamalla kolmoset ykkösiksi saa surjektion näiden joukolta välin $[0,1]$ lukujen binäärikehitelmille! Kehitelmistä näkyy tietenkin myös, että C on harva.)

[1] Vaiheessa n on jäljelläolevien pisteiden etäisyys lähimmästä päätepisteestä alle $\frac{1}{n}$.

4. a) Tehtävässä 11.7 määriteltiin Fejérin ytimet

$$0 \leq F_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin[\frac{1}{2}(n+1)t]}{\sin[\frac{1}{2}t]}\right)^2 \leq n+1 \quad .$$

Samalla todistettiin, että $F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$. Tässä tehtävässä haluttu integraali voidaan siis lausua Dirichlet'n ytimien avulla:

$$\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(s)\,ds = \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(s)\,ds = \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(s)\,ds\,.$$

Kun muistamme, että tehtävän 7.4. mukaan Dirihclet'n ytimellä saadaan Fourier-osasummat: $s_n^f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} D_n(t-s)f(s)\,ds$, niin huomaamme, että $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(s)\,ds$ on vakiofunktion 1 Fourier-sarjan osasumma. Mutta tämä osasumma on tietenkin pelkkä vakio 1 itse, onhan vakio Fourier-sarjan muodostamista vastaavan kannan kantavektori. Siis $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(s)\,ds = 1$, joten ykkösten keskiarvona myös etsitty integraali on 1.

b) $F_n(s) \to 0$ tasaisesti väleillä $[\delta, \pi]$ ja $[-\pi, -\delta]$ koska näillä väleillä pätee

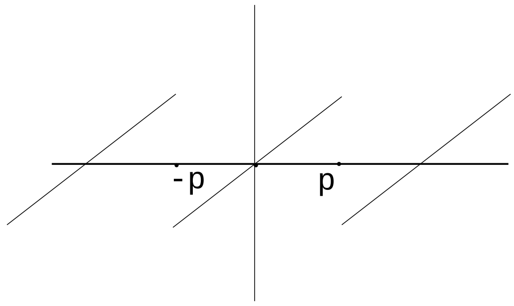
$$0 \leq F_n(s) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin[\frac{1}{2}(n+1)t]}{\sin[\frac{1}{2}t]}\right)^2 \leq \frac{1}{n+1}\frac{|\sin[\frac{1}{2}(n+1)t]|^2}{|\sin[\frac{1}{2}\delta]|^2} \leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{|\sin[\frac{1}{2}\delta]|^2} \to 0.$$

c) Olkoon seuraavaksi $f \in C(2\pi)$. Väitetään, että $\sigma_n^f \to f$ tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä. Kompaktilla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva, joten myös jaksollinen jatkuva f on tas. jatkuva. Olkoon $t \in \mathbb{R}$ ja $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että $|(f(x) - f(y))| \leq \epsilon$, kun $|x-y| \leq \delta$. Koska $\frac{1}{2\pi}\int F_n = 1$, niin

$$\begin{aligned}
|\sigma_n^f(t) - f(t)| &= \left|\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(s)\,(f(t-s) - f(t))\,ds\right| \\
&\leq \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(s)\,\underbrace{|(f(t-s) - f(t))|}_{\leq\epsilon}\,ds + \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(s)\,\underbrace{|(f(t-s) - f(t))|}_{\leq 2\sup|f|}\,ds \\
&\leq \underbrace{\tfrac{\epsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(s)\,ds}_{1} + 2\underbrace{\sup_{|t|\geq\delta} F_n(t)}_{\to 0}\,\sup|f|\,.
\end{aligned}$$

Huomaa, että tekniikkana oli — kuten analyysissä usein — hajottaa integrointiväli osiin, joissa pätee samantapaiset arviot, mutta eri syistä.

5. Reaaliluvun $t \in \mathbb{R}$ *kokonaisosa* on $[t] = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq t\}$, toisin sanoen $[t]$ on kokonaisluku siten, että $0 \leq t - [t] < 1$. Tässä tehtävässä tutkittava funktio 2π-jaksollinen funktio $f(t) = t - 2\pi\,[(t+\pi)/2\pi]$ saadaan siis funktiosta $f(x) = x$ rajoittamalla se välille $[-\pi, \pi[$ ja jatkamalla 2π-jaksolliseksi.



Erityisesti f on paloittain jatkuvasti differentioituva ja $f(t) = t$ kaikilla $t \in [-\pi, \pi[$.
Funktion f Fourier-kertoimet ovat $\hat{f}(0) = 0$ ja (muut:)

$$\hat{f}(k) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t\, e^{-ikt}\, dt = \tfrac{i}{2\pi k} \left(\Big|_{-\pi}^{\pi} t e^{-ikt} - \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt}\, dt \right) = \frac{i(-1)^k}{k}.$$

Siis

$$f(t) = \sum_{k \neq 0} \frac{i(-1)^k}{k} e^{ikt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin(nt) \quad , \qquad -\pi < t < \pi,$$

Parsevalin kaavan mukaan

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k \neq 0} \frac{1}{k^2} = 2 \sum_{1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Toisaalta suoraan laskemalla saadaan

$$\tfrac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{\pi} t^2\, dt = \frac{\pi^2}{3}.$$

Siis

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

joka löytyy mm. laitoksen T-paidasta.

Tehtävän 5 lopuksi ehkä voisi mainita seuraavasta.

Integroimalla f:ää ja valitsemalla integroimisvakion siten, että että myös kantafunktiolla eli integraalilla F (siis $f = DF$) nollas Fourier-kerroin $\hat{F}(0)$ on nolla, saadaan funktionaalialalyysimonisteen sivulla 93 mainittu sarja summattua Parsevalilla, sillä $\hat{F}(k) = (-1)^{k-1}/(ik)^2$ kaikilla $k \neq 0$. Homma vain on vähän työläs. Menettelyä voi sitten toistaakin ja integroida uudelleen valitsemalla ylemmät kantafunktiot F_n (siis $f = D^n F_n$) siten, että sen nollas Fourier-kerroin $\hat{F}_n(0)$ säilyy nollana. Näin saadaan muutkin monisteen sivulla 93 mainitut sarjat summattua Parsevalilla, sillä $\hat{F}_n(k) = (-1)^{k-1}/(ik)^{n+1}$ kaikilla $k \neq 0$ (ja siis $F_0 = f$). Homma vaan on kaikkiaan aika työläs.