Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 12
5.4.2006

1. $(AB)^* = B^*A^*$, joten $[A,B]^* = (AB)^* - (BA)^* = B^*A^* - A^*B^* = [B,A]^* = -[A,B]^*$
$(\lambda A)^* = \overline{\lambda}A^*$, joten $(i[A,B])^* = (-i)[A,B]^* \overset{\text{ed}}{=} -i(-[A,B]^*) = [A,B]$.

2. $(Df|g) = \int -i\frac{d}{dt}f\overline{g}\,dt = -i\int f'\overline{g}$ ja $(f|Dg) = (\overline{-i})\int f\overline{g}' = i\int f\overline{g}' = \underbrace{\Big|_0^{2\pi}\ldots}_{0} - i\int f'\overline{g}$.

3. $(M_a f|g) = (f|M_a g) \iff \int af\bar{g} = \int f\bar{a}g \iff \int(a-\bar{a})f\bar{g} = 0$, nimittäin $\forall\, f,g$!

4. $[\mathrm{Sin}, D]f(t) = (\mathrm{Sin}\, Df - D\,\mathrm{Sin}\, f)(t) = -i\sin t f'(t) - \big(-i\cos t f(t) - i\sin t f'(t)\big) = i\,\mathrm{Cos}\, f(t)$.
(Tässä voisi myös laskea operaattorien matriisit kannassa $e_k = e^{ikt}$. Sivutuotteena saataisiin, etä operaattorit laajenevat koko Hilbert-avaruuteen $L^2(2\pi)$.

5. Valitaan $d_k \in]c_{k-1}, c_k[$ ja määritellään: $f_k(t) = f(d_k) + \int_{d_k}^t f'(s)\,ds$. Huomataan, että f_k on jatkuva välillä $[c_{k-1}, c_k]$, jonka sisäpisteissä taas $f_k = f$.

6. Jaksollisuuden nojalla voidaan olettaa, että $[a,b] \subset [a, 2\pi]$. Olkoon $t \in]a,b[$. Määritellään funktio $g : [a, 2\pi] \to \mathbb{C}$:

$$g(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a,b] \\ \frac{a+2\pi-t}{a+2\pi-b}f(b) + \frac{t-b}{a+2\pi-b}f(a), & t \in [b, a+2\pi] \end{cases}$$

ja jatketaan se $2\pi-$jaksolliseksi koko $\mathbb{R}$:ään. Tällöin f ja g yhtyvät välillä $[a,b]$ ja $f-g$ täyttää sii tehtävän 9.7 ehdot: $f - g \in L^1(2\pi)$ ja $f - g = 0$ m.k. avoimella osavälillä $]a,b[$. Siksi $f-g$:n Fourier-sarjakin on nolla tuolla osavälillä $]a,b[$. Mutta tehtävän 9.5 mukaan paloittain jatkuvasti differentioituvan funktion $g \in C(2\pi)$ Fourier-sarja suppenee kaikilla $t \in \mathbb{R}$ tasaisesti kohti funktiota g. Valmis tuli!

7. Nyt on helpointa huomata, että

$$s_n^{R_a f} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t-s)R_a f(s)\,ds = R_a s_n^f(t),$$

sillä selvästihän Dirichlet'n ydin D_n on **parillinen** funktio.
(Toinen tapa olisi vedota siihen, että $\widehat{R_a f}(k) = e^{-2aki}\hat{f}(-k)$, mutta tässä tulee enemmän laskemista.)

8. Edellisen tehtävän nojalla funktioilla f ja sen heijasteelle $R_a f$ on **pisteessä** $t = a$ sama Fourier-sarja ja siis triviaalisti

$$s^f(a) = \frac{1}{2}\big(s^f(a) + s^{R_a f}(a)\big) = s^{\frac{1}{2}(f + R_a f)}(a).$$

mutta funktio $g = \frac{1}{2}(f + R_a f)$ on **jatkuva** pisteessä a ja jopa jollain avoinella välillä $\ni a$.