Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

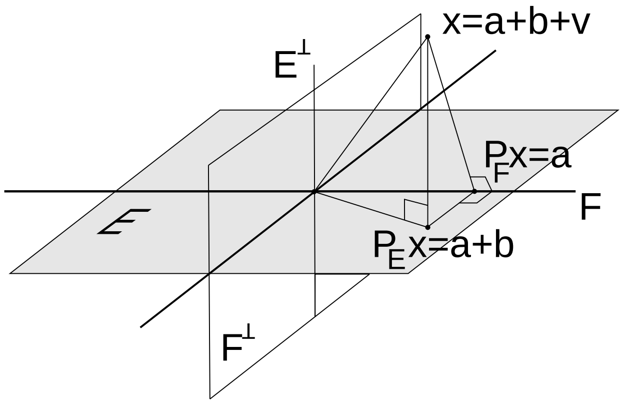
Funktionaalianalyysi 11
29.3.2006

1. Vastaoletus: H:lla on kuitenkin numeroituva Hamel-kanta $B = (b_1, \dots)$. Muodostetaan Gramin ja Schmidtin menetelmällä ortonormaalijono $E = (e_1, \dots)$, jolla $\langle e_1, \dots, e_n\rangle = \langle b_1, \dots, b_n\rangle$ kaikilla n. Otetaaan tarkasteltavaksi jokin ortonormaalien vektoreiden $\{e_1, \dots\}$ "numeroituva lineaarikombinaatio", siis suppeneva summa $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$, esimerkiksi $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e_n$. (Todella, $(\frac{1}{n})$ on ℓ^2-jono!). Ristiriita tulee siitä, että jokainen vektori, siis myös tällainen $x \in H$ on äärellinen lineaarikombinaatio Hamel-kantavektoreista. Mutta $b_j \in \langle b_1, \dots, b_n\rangle = \langle e_1, \dots, e_n\rangle$, joten b_t:t ovat äärellisiä lineaarikombinaatioita vektoriesta e_j. Siis myös x on *äärellinen* lineaarikombinaatio vektoreista e_j. Tämä on mahdotonta, sillä x on määritelty kertoimin $\lambda_i \neq 0$ ja ortonormaalin jonon alkioista muodostetun sarjan $x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ kertoimet λ_n ovat yksikäsitteiset!

2. a) Kaikilla $x \in H$ on $P_E(\underbrace{P_F(x)}_{\in F \subset E}) = P_F(x)$, olivatpa projektiot ortogonaalisia tai eivät.

b) $H = E \oplus E^\perp$ ortogonaalisena suorana summana. Olkoon $x = u + v \in E \oplus E^\perp = H$. Nyt $v \in E^\perp \subset F^\perp$. Koska myös $H = F \oplus F^\perp$, niin $u = a + b$, missä $a \in F \subset E$ ja $b \in F^\perp$, ja itse asiassa $b \in F^\perp \cap E$, koska $b = u - a$ ja $u, a \in E$. Nyt on helppoa laskea:

$$P_F(x) = P_F(a + b + v) = P_F(a) + P_F(b) + P_F(v) = a + 0 + 0 = a.$$
$$P_F P_E(x) = P_F P_E(\underbrace{a + b}_{= u \in E} + v) = P_F(a + b) + P_F \underbrace{P_E(v)}_{0} = P_F(a) + 0 + 0 = a.$$



3. a) Oletetaan $P_E P_F = P_F$. Nyt kaikilla $x \in F$ on $x = P_F x \overset{\text{ol}}{=} P_E P_F x \in P_E(H) = E$.
b) Oletetaan $P_F P_E = P_F$. Osoitetaan aluksi, että $E^\perp \subset F^\perp$: Olkoon $x \in E^\perp = \operatorname{Ker} P_E$. Nyt $P_F x \overset{\text{ol}}{=} P_F P_E x = 0$. Siis $x \in \operatorname{Ker} P_F = F^\perp$, kuten pitikin. Lopuksi päätellään

$$E^\perp \subset F^\perp \implies F^{\perp\perp} \subset E^{\perp\perp}$$

ja muistetaan, että $E^{\perp\perp} = E$ ja $F^{\perp\perp} = F$, koska E ja F ovt suljettuja(!) aliavaruuksia. (Kohta b) edellytti orotgonaalisuuden lisäksi vielä täydellisyydenkin käyttöä, perustuuhan yhtälö $E^{\perp\perp} = E$ "projektiolauseeseen".)

4. a) Osoitetaan aluksi, että lineaarikuvaus U on isometrinen aina ja vain, kun $U^*U = I$. Koska sisätulo voidaan *polaarikaavalla* lausua pelkkien normien avulla, (Muista luennolta, että polaarikaava saadaan laskemalla $\|x - y\|^2$ auki määritelmän mukaan.) on U isometrinen tasan silloin, kun $(Ux|Uy) = (x|y)$ kaikille $x, y \in H$. Mutta $(Ux|Uy) = (U^*Ux|y)$, joten U:n isometrisuus on yhtäpitävää sen kanssa, että $(U^*Ux|y) = (x|y)$ kaikilla $x, y \in H$.

Olkoon U isometrinen ja $x \in H$. Nyt $(U^*Ux - x|y) = (U^*Ux|y) - (x|y) = 0$ kaikilla $y \in H$. Siis $U^*Ux - x \in H^\perp = \{0\}$, joten $U^*Ux = x$. Siis $U^*U = I$.

Jos taas oletetaan $U^*U = I$, niin kaikilla $x \in H$ on $U^*Ux = x$ ja siis $(U^*Ux|y) = (x|y)$ kaikilla $x, y \in H$.

b) Jos operaattorin eli lineaarikuvauksen $U : H \to H$ matriisia jossain ortonormaalissa eli Hilbertin kannassa $E \subset H$ on merkitty $\mathrm{Mat}_E\, U = [u_{ij}]_{i,j\in\mathbb{N}}$, niin U^*:n matriisi on $\mathrm{Mat}_E\, U^* = [\bar{u}_{ji}]_{i,j\in\mathbb{N}}$ ja yhdistetyn kuvauksen matriisi on siis (huomaa indeksien järjestys!)

$$\mathrm{Mat}_E\, U^*U = [\sum_j \overline{u_{ji}} u_{jk}]_{i,k\in\mathbb{N}}.$$

Koska jatkuva lineaarikuvaus määräytyy Hilbert-kantavektorien kuvista, jotka (kannassa lausuttuna) ovat matriisin sarakkeet, niin matriisi määrää kuvauksen — ja tietysti kuvaus matriisinsa. Siksi kuvaukset U^*U ja I ovat samat tasan silloin kun niiden matriisit ovat samat, toisin sanoen kun

$$[\sum_j \overline{u_{ji}} u_{jk}]_{j,k\in\mathbb{N}} = [\delta_{ik}]_{j,k\in\mathbb{N}}.$$

Mutta matriisit ovat samat, kun kummassakin on samat luvut samoissa kohdissa. Tästä väite seuraa.

5. Kuten edellisessä tehtävässä saadaan, että

$$\mathrm{Mat}_E\, UU^* = [\sum_j u_{ij} \overline{u_{kj}}]_{i,k\in\mathbb{N}}.$$

Siis $U^*U = I$, jos ja vain jos $\sum_j u_{ij}\overline{u_{kj}} = \delta_{ik}$.

6. Oletetaan, että $x_n \to x \in E$. Olkoon $\epsilon > 0$. Valitaan $N \in \mathbb{N}$ siten, että $\|x_n - x\| < \epsilon$, kun $n \geq N$. Olkoon $n \geq N$.

$$\begin{aligned}
&\|\tfrac{1}{n+1}(x_0 + x_1 + \cdots + x_n) - x\| \\
=&\|\tfrac{1}{n+1}(x_0 + x_1 + \cdots + x_N) + \tfrac{1}{n+1}(x_{N-1} + \cdots + x_n) - x)\| \\
\leq&\tfrac{1}{n+1}\|x_0 + x_1 + \cdots + x_N\| + \tfrac{n-N}{n+1} \cdot \|\tfrac{1}{n-N}(x_{N-1} + \cdots + x_n) - x\| \\
=&\underbrace{\tfrac{1}{n+1}}_{\to 0}\underbrace{\|x_0 + x_1 + \cdots + x_N\|}_{\leq \text{ vakio}} + \underbrace{\tfrac{n-N}{n+1}}_{\leq 1}\Big(\tfrac{1}{n-N}\underbrace{\|x_{N-1} - x\|}_{\leq\epsilon} + \cdots + \tfrac{1}{n-N}\underbrace{\|x_n - x\|}_{\leq\epsilon}\Big)
\end{aligned}$$

Tämä on mielivaltaisen pieni. (Viimeisessä summassa on $n - N$ yhteenlaskettavaa, joten summa on alle ϵ.)

7. Funktion $f \in L^2(2\pi)$ Fourier-sarja suppenee L^2-normin suhteen kohti funktiota f, toisin sanoen $\|s_n^f - f\|_2 \to 0$ kun $n \to +\infty$. Merkitään funktion $f \in L^2(2\pi)$ Fourier-sarjan osasaummien jonon $s_n^f = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ikt}$ keskiarvoja

$$\sigma_n^f = \tfrac{1}{n+1}(s_0^f + s_1^f + \cdots + s_n^f) \quad .$$

Tällöin edellisen tehtävän nojalla myös $\sigma_n^f \to f$ avaruuden L^2 normin suhteen. Tässä tehtävässä väitetään, että

$$\sigma_n^f = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} F_n(t-s)f(s)\,ds \quad ,$$

missä F_n on FEJÉR*in ydin*,

$$0 \le F_n(t) = \tfrac{1}{n+1}\left(\frac{\sin[\frac{1}{2}(n+1)t]}{\sin[\frac{1}{2}t]}\right)^2 \le n+1\,.$$

Tehtävän 7.4. mukaan osasummat voi lausua Dirichlet'n ytimen $D_k(t) = \frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ avulla:

$$s_n^f(t) = \int_a^{a+2\pi} D_n(t-x)f(x)\,dx$$

Siksi

$$\sigma_n^f = \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k^f = \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\int_a^{a+2\pi} D_k(t-x)f(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi} \tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t-x)f(x)\,dx.$$

Näytetään, että $F_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k$. Summaa laskiessa pääsee helpoimmalla, kun katsoo väitettä ja huomaa laventaa niin, että saadaan ainakin oikea nimittäjä:

$$D_k(t) = \frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} = \frac{\sin((k+\frac{1}{2})t)\sin(\frac{t}{2})}{\sin^2(\frac{t}{2})} = \frac{\frac{1}{2}\Big[\cos\big((k+\overbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}^{0})t\big) - \cos\big((k+\overbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}^{1})t\big)\Big]}{\sin^2(\frac{t}{2})},$$

jolloin osoittajaan syntyy onnekkaasti "teleskooppisumma" ja siis

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k &= \tfrac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{t}{2})}\tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\Big[\cos\big(kt\big) - \cos\big((k+1)t\big)\Big] \\
&= \tfrac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{t}{2})}\tfrac{1}{2}\sum_{k}\Big[\cos\big(kt\big) - \cos\big((k+1)t\big)\Big] \\
&= \tfrac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{t}{2})}\tfrac{1}{2}\Big[\cos\big(0t\big) - \cos\big((n+1)t\big)\Big] \\
&= \tfrac{1}{(n+1)\sin^2(\frac{t}{2})}\sin^2(\tfrac{1}{2}(n+1)t) = F_n(t). \qquad \square
\end{aligned}$$