Funktionaalianalyysi 2006 **Demoratkaisut 1**

Lauri Kahanpää

1. Olkoon $\epsilon > 0$. Kussakin pisteessä $x \in X$ on $u_n(x) \nearrow u(x)$, joten on olemassa (ja valitaan) luku $n_x \in \mathbb{N}$, jolla

$$n > n_x \implies u_{n_x}(x) \geq u(x) - \tfrac{\epsilon}{3}.$$

Koska u ja u_{n_x} ovat jatkuvia, on olemassa x:n avoimet ympäristöt V_x ja V'_x siten, että

$$\begin{aligned} y \in V_x &\implies |u(y) - u(x)| < \tfrac{\epsilon}{3} \text{ ja} \\ y \in V'_x &\implies |u_{n_x}(y) - u_{n_x}(x)| < \tfrac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Joukko $U_x = V_x \cap V'_x$ on x:n avoin ympäristö, jossa pätevät molemmat arviot ja siis kaikilla $y \in V_x \cap V'_x$ on

$$|u_{n_x}(y) - u(y)| < |u_{n_x}(y) - u_{n_x}(x)| + |u_{n_x}(x) - u(x)| + |u(x) - u(y)| = \epsilon.$$

Joukkojen U_x muodostamasta kompaktin joukon X avoimesta peitteestä valitaan äärellinen osapeite $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$, joka olkoon kirjoitettu siten, että $n_{x_1} \leq \cdots \leq n_{x_m}$, jolloin myös vastaavat funktiot $u_{n_{x_i}}$ ovat kasvavassa suuruusjärjestyksessä, erityisesti $u_{n_{x_m}}$ on niistä (pisteittäisessä mielessä) suurin. Nyt kaikilla $N > n_{x_m}$ ja $y \in U_x \subset X$ pätee:

$$0 \leq |u(y) - u_N(y)| = u(y) - u_N(y) \leq u(y) - u_{n_{x_m}} \leq u(y) - u_{n_x} < \epsilon. \quad \square$$

2. a) Osoitetaan induktiolla, että $0 \leq p_0(x) \leq p_1(x) \leq \cdots \leq \sqrt{x}$.
I) $0 \leq p_0(x) = \frac{x}{\sqrt{a}} \leq \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$.
II) $p_{n+1}(x) - p_n(x) = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(x - p_n(x)^2\right) \overset{\text{ind ol}}{\geq} 0$.

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - p_{n+1}(x) &= \sqrt{x} - p_n(x) - \tfrac{1}{2\sqrt{a}}\left(x - p_n(x)^2\right) \\ &\geq \sqrt{x} - p_n(x) - \tfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(x - p_n(x)^2\right) \\ &\geq \sqrt{x} - p_n(x) - \tfrac{1}{2}\Big(\sqrt{x} - \overbrace{\tfrac{\sqrt{x}}{p_n(x)}}^{>1} p_n(x)\Big) \geq \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{x} - p_n(x)\right) \geq 0. \end{aligned}$$

b) Osoitetaan, että $p_n(x) \to \sqrt{x}$ tasaisesti [0,a]:ssa. Dinin lauseen (teht 1) nojalla riittää todeta pisteittäinen konvergenssi. Koska jono $P : n(x)$ on kasvava ja rajoitettu, se suppenee ja siis

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \underbrace{(x - p_n(x)^2)}_{(\sqrt{x} - p_n(x))\underbrace{(\sqrt{x} + p_n(x))}_{>\sqrt{x}}} = p_{n+1}(x) - p_n(x) \to 0.$$

Tästä väite seuraa.

3. <u>Johdanto ja apulauseet</u>: Tunnetusti

$$(*) \qquad \sum_{k=0} n\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} = (x+(1-x))^n = 1^n = 1.$$

Merkitään hetkeksi $x = p$ ja $(1-x) = q$, jolloin binomijakauman varianssin lausekkeesta

$$D_{n,p}^2 = \sum_{k=0}^{n}(k - \overbrace{np}^{E})^2\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = npq$$

tunnistetaan, että

$$\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = nx(1-x)$$

$$\text{eli} \quad \sum_{k=0}^{n}(\tfrac{k}{n}-x)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} = \frac{x(1-x)}{n},$$

joka erityisesti merkitsee, että

$$\sum_{\substack{k=0 \\ \text{ja } |\frac{k}{n}-x|>\delta}}^{n} (\tfrac{k}{n}-x)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{x(1-x)}{n} \leq \frac{1}{4n},$$

koska $\max x(x-1) = \frac{1}{4}$. Siis kaikilla $\delta > 0$ on

$$(**) \qquad \sum_{\substack{k=0 \\ |\frac{k}{n}-x|>\delta}}^{n} \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

<u>Päätodistus</u>: Olkoon $f \in \mathcal{C}$, jolloin, koska $[0,1]$ on kompakti, f on tasaisesti jatkuva ja rajoitettu, erityisesti $\|f\|_\infty = \sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)| \leq \infty$.
Määritellään f:n $n:s$*Bernstein-polynomi* lausekkeellaan

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Väite on, että $B_n f$ lähenee tasaisesti funktiota f, kun $n \to \infty$. Katsomalla Bernstein-polynomin määritelmää ja kaavaa $(*)$ huomaa, että $f(x)$ saattaisi olla järkevää kirjoitta muotoon

$$f(x) = f(x)\cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} f(x)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

jolloin tutkittava erotus on

$$f(x) - B_n f(x) = \sum_{k=0}^{n}(f(x) - f(\tfrac{k}{n}))\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Tämän pitäisi väitteen mukaan olla kaikkialla pienempi kuin ϵ, kunhan n on tarpeeksi suuri. Koska f on tasaisesti jatkuva, on ainakin olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(x) - f(\frac{k}{n}) < \varepsilon$, kun $x - \frac{k}{n} \leq \delta$. Vastaava osa summasta on siis arvioitavissa:

$$\sum_{\substack{k=0 \\ |\frac{k}{n}-x|\leq\delta}}^{n} < \underbrace{|f(x) - f(\tfrac{k}{n})|}_{<\varepsilon} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \varepsilon.$$

Loput summasta on mahdollista arvioida kaavalla $(**)$, jossa on sama summausalue:

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=0 \\ |\frac{k}{n}-x|>\delta}}^{n} |f(x) - f(\tfrac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq \sum_{\substack{k=0 \\ |\frac{k}{n}-x|>\delta}}^{n} 2\|f\|_\infty \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= 2\|f\|_\infty \sum_{\substack{k=0 \\ |\frac{k}{n}-x|>\delta}}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq 2\|f\|_\infty / \left(\tfrac{1}{4n\delta^2}\right),
\end{aligned}$$

joka lähenee nollaa, kun $n \to \infty$. (Huomaa, että alussa kiinnitetään ϵ, jolloin myös δ on kiinteä ja vain jonossa $B_n(f)$ edetään.)

Lopuksi havaintoja:

a) Kuvaus $f \mapsto B_n f$ on lineaarikuvaus $\mathcal{C} \to \mathbb{R}[x] = \{\text{polynomit}\}$.

b) B_n on jatkuva eli funktionaalianalyysin mielessä "rajoitettu" lineaarikuvaus, sillä

$$\begin{aligned}
\|B_n f\|_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |B_n f(x)| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} \left|\sum_{k=0}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}\right| \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \sum_{k=0}^{n} |f(\tfrac{k}{n})| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leq \sup_{x\in[0,1]} \sum_{k=0}^{n} \|f\|_\infty \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \|f\|_\infty \sup_{x\in[0,1]} \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{1} = \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

c) Jos $f(x) \leq g(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$, niin silloin tietenkin myös $B_n f(x) \leq B_n g(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$.