Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 5
15.02.06

Yleistämme nyt tehtävät **4.4 - 5** eräille äärettömien jonojen $x = (x_n) = (x_n)_{n=0}^{+\infty}$ muodostamille $\mathbb{R}$-lineaariavaruuksille määritellen aluksi

$$\begin{aligned} \ell^1 &= \{x = (x_n) \mid x_n \in \mathbb{R},\ \|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty\} \quad \text{ja} \\ \ell^\infty &= \{x = (x_n) \mid x_n \in \mathbb{R},\ \|x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < +\infty\}. \end{aligned}$$

Jonojen $x = (x_n)$ ja $y = (y_n)$ yhteenlasku määritellään asettamalla $x + y = (x_n + y_n)$, vastaavasti $\lambda x = (\lambda x_n)$ kaikilla $\lambda \in \mathbb{R}$. Näytä, että

1. ℓ^1 on $\mathbb{R}$-lineaariavaruus ja $\|.\|_1$ siinä määritelty normi.

2. Vastaavasti, että myös ℓ^∞ on $\mathbb{R}$-lineaariavaruus ja $\|.\|_\infty$ sen normi.

3. Määrittelemme edelleen avaruuden ℓ^2 :

$$\ell^2 = \{x = (x_n) \mid x_n \in \mathbb{R},\ \|x\|_2 = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} x_n^2\Big)^{1/2} < +\infty\} \quad .$$

Näytä, että myöskin ℓ^2 on $\mathbb{R}$-lineaariavaruus ja $\|.\|_2$ sen normi. (Kolmioepäyhtälöä varten tarvitset Schwarzin epäyhtälöä. Voit laajentaa sen helposti myös päättymättömille sarjoille.)

4. Osoita, että avaruudet ℓ^1 ja ℓ^2 ovat avaruuden ℓ^∞ sisäkkäisiä R-lineaarialiavaruuksia, $\ell^1 \subset \ell^2 \subset \ell^\infty$ ja että

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1$$

kaikilla $x \in \ell^1$.

5. Kun $p, r \in \{1, 2, \infty\}$ ja $p < r$, niin näytä, ettei voi olla sellaista vakiota $0 < M < +\infty$, että

$$\|x\|_p \le M\, \|x\|_r$$

kaikilla $x \in \ell^p$. (Tutki jonoja $x = (x_n)$, joilla $x_n = x_0$ kun $n < m$, $x_n = 0$ kun $n \ge m$.)

6. Näytä, että jonoavaruus ℓ^p on Banach-avaruus jokaisella $p \in \{1, 2, \infty\}$. Näytä aluksi, että kun $x_j = (x_{jn}) \in \ell^p$, $j \in \mathbb{N}$, on avaruuden ℓ^p Cauchyn jono, niin *koordinaattijonoilla* x_{jn} on kaikilla $n \in \mathbb{N}$ raja-arvo

$$x_n = \lim_{j\to+\infty} x_{jn} \in \mathbb{R} \quad .$$