Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 4
08.02.06

Seuraavissa tehtävissä tarkastellaan vain $\mathbb{R}$-lineaariavaruuksia.

1. Kun $e_1, \ldots, e_n \in E$ ovat normiavaruuden $(E, \|.\|)$ vektoreita, niin yleistä tehtävä 2.1 ja näytä, että lausekkeen

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k \in E$$

kaikilla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ määräämä lineaarikuvaus $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to E$ on aina jatkuva. (Näytä, että on vakio $0 \le M \in \mathbb{R}$ siten, että $\|\Phi(x)\| \le M\,|x|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.)

2. Kun E on n-ulotteinen normiavaruus ja $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset E$ sen kanta, niin näytä, että lineaarikuvauksella $\Phi\colon \mathbb{R}^n \to E$ on tällöin käänteiskuvaus $\Phi^{-1}\colon E \to \mathbb{R}^n$ ja että on olemassa vakio $0 < m \in \mathbb{R}$ niin, että $m\,|x| \le \|\Phi(x)\|$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$.

3. Näytä, että äärellisulotteisen lineaariavaruuden E kaksi normia $\|.\|_a$ ja $\|.\|_b$ ovat aina eksivalentteja, ts. että on vakiot $0 < c < C < +\infty$ siten, että $c\,\|x\|_a \le \|x\|_b \le C\,\|x\|_a$ kaikilla $x \in E$ ja että äärellisulotteisen lineaariavaruuden E kaksi normia määräävät siten E:ssä aina saman topologian. (Sovella kahta edellistä tehtävää.)

4. Merkitsemme seuraavassa avaruuden R^n euklidista normia
$\|x\|_2 := |x| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$. Totea, että myös

$$\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \quad ,$$
$$\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) \quad ,$$

$x \in \mathbb{R}^n$, ovat normeja avaruudessa R^n ja näytä, että kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \quad .$$

5. Totea edelleen, että kaikille $x \in \mathbb{R}^n$ pätee myös

$$\|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2 \le n\,\|x\|_\infty$$

ja että tämä samoin kuin edellisen tehtävän epäyhtälöt ovat parhaat mahdolliset. (Käytä summien Schwarzin epäyhtälöä normin $\|x\|_1$ arvioimiseen.)

6. Merkiten lyhyesti $C_\mathbb{R} = C_\mathbb{R}([0,1])$ näytä, että kaikilla $f \in C_\mathbb{R}$ tehtävien 3.3 - 4 normeille pätevät epäyhtälöt

$$\|f\|_1 \le \|f\|_2 \le \|f\|_\infty \quad .$$

(Käytä edelleenkin Schwarzin epäyhtälöä.)

7. Kun $j > k$, niin näytä, ettei voi olla sellaista vakiota $0 < M < +\infty$, että

$$\|f\|_j \le M\,\|f\|_k$$

kaikilla $f \in C_\mathbb{R}$. (Tutki esim. funktioiden x^r, $r > 0$, normeja.)