Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 3

01.02.06

Merkitsemme tässä lyhyesti $C_{\mathbb{R}}(a,b) = C_{\mathbb{R}}([a,b])$. Tehtävässä 1.3 määriteltiin jatkuvan funktion $f \in C_{\mathbb{R}}(0,1)$ Bernsteinin polynomit $B_n f$ ja näytettiin, että $B_n f \to f$ tasaisesti välillä $[0,1]$ eli että $\|B_n f - f\| \to 0$ kun $n \to +\infty$.

1. Kun merkitään $P_n \subset C_{\mathbb{R}}(0,1)$ enintään astetta n olevien polynomien muodostamaa aliavaruutta, niin näytä että kuvaus $B_n \colon C_{\mathbb{R}}(0,1) \to P_n$ on avaruuden $C_{\mathbb{R}}(0,1)$ $\mathbb{R}$-lineaarikuvaus aliavaruuteen P_n ja että

$$\begin{aligned}
&f \le g \Rightarrow B_n(f) \le B_n(g),\\
&B_n(1) = 1,\\
&\|B_n(f)\| \le \|f\|
\end{aligned}$$

kaikilla $f, g \in C_{\mathbb{R}}(0,1)$.

2. Totea, että $B_n(x) = x$ kaikilla $n \ge 1$, mutta että $B_n(x^m) \ne x^m$ kaikila n kun $m > 1$. (Näytä, että termin x kerroin on aina nollasta poikkeava.)

Näytä, että sup-normin $\|f\|_\infty = \|f\| = \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$ lisäksi myös

3.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt \quad ,$$

4.

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2\,dt \right)^{1/2}$$

määrittelevät normin avaruudessa $C(a,b)$. (Käytä tehtävässä 4 Schwarzin epäyhtälöä normin kolmioepäyhtälön todistamiseen.)

5. Eräs n. Bernsteinin polynomin ”osista” on n. asteen polynomi $x(1-x)^{n-1}$. Kun kaikilla $s \in \mathbb{R}$, $1 \le n \in \mathbb{N}$ merkitään

$$p_{s,n}(x) = n^s x(1-x)^{n-1} \quad ,$$

niin näytä että $p_{s,n}(x) \to 0$ kaikilla $x \in [0,1]$ kun $n \to +\infty$, olipa $s \in \mathbb{R}$ mikä tahansa. Tutki edelleen, millä parametrin $s \in \mathbb{R}$ arvoilla $\|p_{s,n}\|_k \to 0$ kun $n \to +\infty$ ja k saa arvot $1, 2$ tai ∞.