Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 15
3.5.2006

Fourier'n ja Fejérin m. osasummat määräävät lineaarikuvaukset $S_m\colon L^1(2\pi) \to C(2\pi)$ ja $F_m\colon L^1(2\pi) \to C(2\pi)$, tehtävän 14.5 konvoluutiomerkinnöin

$$S_m(g) = D_m * g = s_m^g \in C(2\pi)\ ,\quad F_m(g) = F_m * g = \sigma_m^g \in C(2\pi)$$

kaikilla $g \in L^1(2\pi)$, missä D_m ja F_m ovat Dirichlet'n ja Fejérin ytimet, ks. tehtävät 7.4 ja 11.7.

1. Näytä Parsevalin yhtälön avulla, että Hilbert-avaruuden $L^2(2\pi)$ operaattoreina $S_m\,,\ F_m\colon L^2(2\pi) \to L^2(2\pi)$ kuvausten S_m ja F_m operaattorinormit ovat $\|S_m\| = 1$ ja $\|F_m\| = 1$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$.

2. Näytä, että avaruuden $L^1(2\pi)$ operaattorina $S_m\colon L^1(2\pi) \to L^1(2\pi)$ kuvauksen S_m operaattorinormille pätee $\|S_m\| = \|D_m\|_1 = L_m > \frac{4}{\pi^2}\log(m+1)$. (Vrt. luennot, s. 82. Tehtävän 13.4 nojalla $\|F_n\|_1 = 1$ ja $S_m(F_n) = D_m * F_n \to D_m$ tasaisesti kun $n \to +\infty$.)

3. Osoita edellisen tehtävän avulla, että on olemassa finktio $g \in L^1(2\pi)$, jonka Fourier'n sarja hajaantuu L^1-normin suhteen, $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|s_n^g\|_1 = +\infty$.

4. Tehtävän 11.7 mukaan $F_n(h) \to h\ \ L^2$-normin suhteen kaikilla $h \in L^2(2\pi)$ kun $n \to +\infty$ ja siten tehtävän 7.3 nojalla myös L^1-normin suhteen. Näytä tehtävän 8.7 avulla, että päinvastoin kuin Fourier'n osasummat niin funktion $g \in L^1(2\pi)$ Fejérin osasummat $F_n(g) = \sigma_n^g$ suppenevat L^1-normin suhteen aina kohti funktiota g kun $n \to +\infty$. (Vrt. myös tehtävä 14.5 huomioiden, että $\|F_n\|_1 = 1$.)

5. Merkitään funktion $f \in L^1(2\pi)$ *konvoluutiopotensseja* lyhyesti

$$f^{*n} = f * \cdots * f \quad (n \text{ kpl}).$$

Kun f on tehtävän 13.5 "sahalaitafunktio", niin on helppo nähdä, että f^{*n} on jatkuva, palottain jatkuvasti differentioituva funktio kaikilla $n > 1$. Näytä tehtävän 14.6 avulla, että

$$\zeta(2k) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{(-1)^k}{2}\, f^{*2k}(0)$$

kaikilla $k \geq 1$. Integrointimuuttujaa vaihtamalla on näin helppo nähdä, että Riemannin ζ-funktion arvo $\zeta(n)$ kaikilla *parillisilla kokonaisluvuilla* $n \geq 2$ on muotoa $\pi^n \times$ *rationaaliluku.*