Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 14
26.4.2006

1. Äärettömän "neliömatriisin" $\mathbf{U} = [u_{ij}]_{i,j\in\mathbb{N}^*}$, $u_{ij} = (1+|i-j|)^{-1}$, pysty- ja vaaka–vektorit toteuttavat kaikilla $i, j \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N}\setminus\{0\}$ epäyhtälöt

$$\sum_k u_{kj}^2 < \frac{\pi^2}{3} - 1 \quad , \qquad \sum_k u_{ik}^2 < \frac{\pi^2}{3} - 1 \quad ,$$

vrt. teht. 13.5. Näytä, ettei kuitenkaan ole olemassa Hilbert-avaruuden ℓ^2 jatkuvaa lineaarioperaattoria $U\colon \ell^2 \to \ell^2$ niin, että $\mathrm{Mat}(U) = \mathbf{U}$. (Vrt. lause 1.7.3, s. 73. Arvioi kuvavektoreiden $x_n = U(e_1 + \cdots + e_n) \in \ell^2$ normeja kun $n \to +\infty$.)

2. Sen sijaanos jos matriisille $\mathbf{V} = [v_{ij}]$ pätee

$$\|\mathbf{V}\|_2 := \left(\sum_{i,j=1}^{+\infty} |v_{ij}|^2\right)^{1/2} < +\infty \ ,$$

niin operaattorin $V\colon \ell^2 \to \ell^2$, $\mathrm{Mat}(V) = \mathbf{V}$, operaattorinormi $\|V\|$ toteuttaa epä–yhtälön $\|V\| \le \|\mathbf{V}\|_2$. (Sovella Schwarzin epäyhtälöä kuvavektoreiden komponenttien arviointiin. $V\colon \ell^2 \to \ell^2$ on tällöin ns. *Hilbert-Schmidtin operaattori.*)

3. Osoita Bairen lauseen avulla, ettei ääretönulotteisella Banach-avaruudella E voi olla numeroituvaa vektoriavaruus- eli Hamelin kantaa. (E:n jokainen äärellisulotteinen aliavaruus on harva lauseiden 1.3.4 ja 1.3.5 nojalla.)

4. Lineaariavaruuden E normi $\|.\|_b$ on *vahvempi* kuin normi $\|.\|_a$, $\|.\|_a \prec \|.\|_b$, jos on vakio $C < +\infty$ siten, että kaikilla $x \in E$ pätee

$$\|x\|_a \le C\,\|x\|_b \quad .$$

Jos $\|.\|_a \prec \|.\|_b$ tai $\|.\|_b \prec \|.\|_a$ pätee normeille $\|.\|_a$ ja $\|.\|_b$, niin normit $\|.\|_a$ ja $\|.\|_b$ ovat (keskenään) *vertautuvia*, ja jos sekä $\|.\|_a \prec \|.\|_b$ että $\|.\|_b \prec \|.\|_a$ pätevät yhtä aikaa, niin normit $\|.\|_a$ ja $\|.\|_b$ ovat määritelmän 1.3.2 mukaisesti E:n ekvivalentteja normeja. Näytä avoimen kuvauksen lauseen avulla, että lineaariavaruuden E kaksi keskenään vertautuvaa *Banach-normia* ovat aina ekvivalentteja. (Tutki identtisen kuvauksen $I\colon E \to E$, $I(x) = x$ kaikilla $x \in E$, jatkuvuuutta eri normien suhteen.)

5. Kahden 2π-jaksollisen L^1-funktion $f, g \in L^1(2\pi)$ *konvoluutio* $f * g$ määritellään asettamalla pisteessä $t \in \mathbb{R}$

$$f * g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)\,g(s)\,ds$$

kun $f(t-s)\,g(s)$ on integroituva muuttujan s funktiona. Näytä, että konvoluutio $f * g(t)$ on määritelty m.k. $t \in \mathbb{R}$, että $f * g = g * f \in L^1(2\pi)$ ja että

$$\|f * g\|_1 \le \|f\|_1\,\|g\|_1 \quad .$$

(Käytä Fubinin lausetta, lisäksi sopivaa muuttujanvaihtoa kommutatiivisuuden $f * g = g * f$ osoittamiseksi.)

6. Näytä, että $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\,\hat{g}(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$ kun $f, g \in L^1(2\pi)$. (Fubini!)