Jyväskylän yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen laitos

Funktionaalianalyysi 10
22.3.2006

1. Vektorit $\{e_i\}_{i=1}^{+\infty}$ muodostavat Hilbert-avaruuden H Hilbertin kannan. Näytä, että

$$f_i = \sum_j a_{ij} e_j \quad , i = 1, 2, \ldots \quad ,$$

on H:n ortonormaalijono, **joss**

$$(*) \qquad \sum_j a_{ij} \overline{a_{kj}} = \delta_{ik}$$

kaikilla $i, k = 1, 2, \ldots$.

2. Näytä edelleen, että tehtävässä 1 määritelty ortonormaalijono $\{f_i\}_{i=1}^{+\infty}$ on H:n Hilbertin kanta, **joss** ehdon $(*)$ lisäksi myös

$$(**) \qquad \sum_i a_{ij} \overline{a_{ik}} = \delta_{jk}$$

pätee kaikilla $j, k = 1, 2, \ldots$. (Huomaa, että ortonormaalijono $\{f_i\}_{i=1}^{+\infty}$ on Hilbertin kanta, **joss** se on totaalinen.) Onko todella tarpeen vaatia lisäehto $(**)$, jotta $\{f_i\}_{i=1}^{+\infty}$ olisi kanta?

3. Voit hieman yleistää tehtävää 9.4: Jos myös funktion $f \in L^1(2\pi)$ jatkuva kantafunktio $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ on 2π-jaksollinen, niin funkitioiden f ja F Fourier-kertoimille pätee kaikilla $k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{f}(k) = ik\, \hat{F}(k) \quad .$$

(Huomaa, että $\hat{F}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\int_0^t f(s)\, e^{-ikt}\, ds \big) dt$ ja vaihda Fubinin lauseen avulla integrointijärjestys kolmiossa $\{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le s \le t \le 2\pi\}$.)

4. Todista seuraava Lemma: Jos avoimella välillä $I =]a, b[$ integroituvan funktion f integraali häviää kaikilla I:n osaväleillä,

$$\int_c^d f(t)\, dt = 0$$

kaikilla $a < c < d < b$, niin $f = 0$ m.k. välillä I. (Funktion f voi olettaa olevan reaaliarvoinen. Jos merkitään $A = \{t \in I \colon f(t) > 0\} \subset I$, niin jokaisella $\varepsilon > 0$ on avoin joukko $A \subset U \subset I$ siten, että erotusjoukon $U \setminus A$ Lebesguen mitalle pätee $m(U \setminus A) < \varepsilon$. Avoin joukko $U \subset I$ on yhdiste numeroituvasta joukosta välin I erillisiä avoimia osavälejä $J \subset I$.)

5. Todista Lebesguen lause: Jos funktion $f \in L^1(2\pi)$ kaikki Fourier-kertoimet häviävät, niin $f(t) = 0$ m.k. $t \in \mathbb{R}$. (Sovella tehtävää 9.3 funktion f kantafunktioon $F \in C(2\pi)$ ja näytä edelleen Lemman avulla, että f tällöin häviää m.k..)