LAUSE 8.4 (PYTHAGORAS)[26]. *Sisätuloavaruuden keskenään ortogonaalisille vektoreille $x_1, \ldots, x_n$ pätee*

$$\|\sum_{j=1}^{n} x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$$

TODISTUS. Kun $n = 2$, lasketaan tunnetusti

$$\|x_1+x_2\|^2 = (x_1+x_2|x_1+x_2) = \|x_1\|^2+\|x_2\|^2+(x_1|x_2)+(x_2|x_1) = \|x_1\|^2+\|x_2\|^2.$$

Yleistys saadaan induktiolla. □

LAUSE 8.5 (SUUNNIKASSÄÄNTÖ JA YLEINEN POLAARIKAAVA). *Sisätuloavaruudessa pätevät suunnikassääntö*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

ja kompleksinen *eli* yleinen polaarikaava

$$(x|y) = \tfrac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big) + \tfrac{i}{4}\big(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\big).$$

TODISTUS. Kaavat tarkastetaan suoralla laskulla. Huomaa, että kompleksiluvun reaali- ja imaginaariosa saadaan lausekkeista $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$ ja $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\, z$. □

HUOMAUTUS 8.6. (SISÄTULO JA NORMI). *a) Sisätuloavaruuksien välinen lineaarikuvaus säilyttää normin jos ja vain jos se säilyttää sisätulon.*

b) Normiavaruuksien joukossa sisätuloavaruudet ovat tasan ne, joiden normi toteuttaa suunnikassännön.

PERUSTELU. Periaatteessa kuten vastaavat reaaliset lauseet 7.3 ja 7.6. □

Havaitsemme ohimennen mielenkiintoisen seikan: Koska suunnikassääntö koskee vain kahta vektoria kerrallaan, se lausuu jotakin ainoastaan tutkittavan avaruuden kaksiulotteisista aliavaruuksista. Normiavaruuden normi saadaan siis jostakin sisätulosta, mikäli sen rajoittumalla jokaiseen kaksiulotteiseen aliavaruuteen on tämä ominaisuus.

9. Ortogonaaliprojektiot ja kannat Hilbertin avaruudessa

Tarkoituksenamme on yleistää ortonormaalien kantojen teoria ääretönulotteiseen sisätuloavaruuteen. Keskeinen käsite tässä yhteydessä on *ortogonaalinen projektio suljetulle aliavaruudelle*, ja osoittautuu, että projektioiden käsittelyyn tarvitaan avaruuden täydellisyyttä. Täydellinen sisätuloavaruus on nimeltään *Hilbertin avaruus*. Erityisesti jokainen euklidinen avaruus on siis esimerkki Hilbertin avaruudesta.

[26]SAMOKSEN PYTHAGORAS, n.569–475 e.Kr. Kreikka.

9.1. Projektiolause ja ortonormaalit jonot. Äärellisulotteisten sisätuloavaruuksien käsittelyssä on tunnetusti paljon hyötyä siitä, että on olemassa ortonormaaleja kantoja. Euklidisen avaruuden vinokulmainen kanta voidaan ortonormittaa esimerkiksi Gramin ja Schmidtin menetelmällä. Osoitamme nyt, että menetelmää voi käyttää myös äärettönulotteisessa avaruudessa. Tässä luvussa kerroinkunta $\mathbb{K}$ saa olla kumpi tahansa, vaikka kuvat onkin piirretty reaalikertoimista tilannetta vastaaviksi.

Aloitamme lineaarialgebrallisella tarkastelulla:

Huomautus 9.1. Olkoon V vektoriavaruus.

(1) Osajoukon $S \subset V$ *virittämä aliavaruus* $\langle S \rangle$ on V:n suppein aliavaruus, joka sisältää joukon S. Se muodostuu kaikista joukon S alkioiden äärellisisitä lineaarikombinaatioista.
(2) Ääretön joukko vektoreita on *lineaarisesti riippumaton* eli *vapaa*, mikäli sen jokainen äärellinen osajoukko on lineaarisesti riippumaton, eli mikäli nollavektoria ei voi lausua epätriviaalina äärellisenä summana joukon vektoreista.

Lause 9.2 (Gram-Schmidt). *Sisätuloavaruuden E lineaarisesti riippumaton jono $(x_n)_1^\infty$ voidaan ortonormittaa seuraavassa mielessä. On olemassa ortonormaali jono $(y_n)_1^\infty$ siten, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$:*

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle y_1, \ldots, y_n \rangle.$$

Perustelu. Koko jonon ortonormitus tehdään vaiheittain samalla tunnetulla tavalla kuin äärellisulotteisessa tapauksessa, nimittäin projisoimalla ortogonaalisesti kukin x_n vektoriksi $P_n x_n$ aliavaruudelle $\langle y_1, \ldots, y_{n-1} \rangle = \langle x_1, \ldots, xx_{n-1} \rangle$ ja valitsemalla xy_n:ksi vektorin $x_n - P_n x_n$ suuntainen yksikkövektori. Riippumattomuusehtoa tarvitaan takaamaan, että erotus $x_n - P_n x_n$ ei ole nolla. Projektion lauseke ja muut yksityiskohdat käyvät ilmi seuraavasta lauseesta, sillä Gramin ja Schmidtin konstruktion pääkohta on äärellisulotteiselle aliavaruudelle tapahtuvan ortogonaaliprojektion olemassaolo ja sen lauseke.

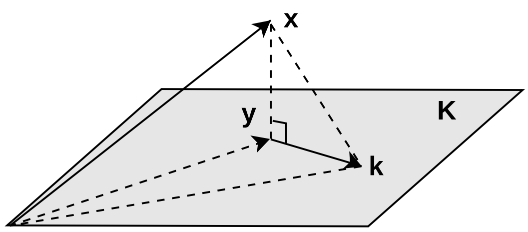
Lause 9.3 (Äärellisulotteinen projektiolause). *Olkoon K mielivaltaisen sisätuloavaruuden E n-ulotteinen aliavaruus ja $(e_1, \ldots, e_n)$ aliavaruuden K ortonormaali kanta. Olkoon $x \in E$. Tällöin on olemassa tasan yksi aliavaruuteen K kuuluva vektori y, nimeltään x:n* ortogonaalinen projektio aliavaruudelle K, *jolla on seuraavat keskenään yhtäpitävät ominaisuudet:*

$$\begin{aligned} &(1) \qquad y = \textstyle\sum_{i=1}^n (x|e_i) e_i \\ &(2) \qquad x - y \perp K, \text{eli } (x-y) \perp k \text{ kaikille } k \in K \\ &(3) \qquad \|x - y\| = \min_{a \in K} \|x - a\|. \end{aligned}$$

Todistus. Olkoon y kuten ehdossa (1), siis $y = \sum_{i=1}^n (x|e_i) e_i$. Nyt $x - y \perp K$, eli kaikilla $k = \sum_{j=1}^{n} k_j e_j \in K$ on $(x - y|k) = 0$, sillä

$$(y|k) = \Big(\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i \mid \sum_{j=1}^{n} k_j e_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x|e_i)\overline{k}_j \underbrace{(e_i|e_j)}_{\delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)\overline{k}_i = \Big(x \mid \sum_{i=1}^{n} k_i e_i\Big) = (x|k).$$



KUVA 14. LÄHIN PISTE.

Ehdosta (2) seuraa edelleen ehto (3), eli että y on pisteen x lähin naapuri aliavaruudessa K, sillä jos $k \in K$, niin $k - y \in K$, joten ehdon (2) nojalla kolmio x, y, k on suorakulmainen ja siis Pythagoraan lauseen seurauksena sen kateetti $x - y$ on lyhempi kuin hypotenuusa $x - k$.

Ehdosta (3) saadaan samalla tavalla ehto (1): Toteuttakoon piste $k \in K$ ehdon (3), eli $\|x-k\| = \min_{a\in K}\|x-a\|$. Erityisesti lausekkeen (1) pisteelle y on silloin $\|x-k\| \leq \|x - y\|$. Toisaalta y toteuttaa ortogonaalisuusehdon (2) ja pätee $y - k \in K$, joten $x-y \perp y-k$. Pythagoraan lauseesta seuraa, että $\|x-k\|^2 = \|x-y\|^2+\|y-k\|^2$, joten äskeinen epäyhtälö ei voi toteutua, ellei $\|y - k\|^2$ ole 0 eli $k = y$. Siksi ainoa ehdon (3) toteuttava piste k on juuri lausekkeen (1) antama. □

Äärellisulotteinen projektiolause riittää todistamaan Hilbert-avaruuksissa tuontuostakin tarvittavan periaatteen, *Besselin epäyhtälön.*

SEURAUS 9.4. (BESSELIN EPÄYHTÄLÖ). [27]
Olkoon jono $(e_n)_1^\infty$ ortonormaali sisätuloavaruudessa H. Tällöin kaikilla $x \in H$ on

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(x|e_i)|^2 \leq \|x\|^2.$$

TODISTUS. Lauseen 9.3 mukaisesti on m-ulotteisen aliavaruuden $\langle e_1, \dots, e_m\rangle$ x:ää lähimmällä pisteellä

$$y = \sum_{i=1}^{m}(x|e_i)e_i$$

ominaisuus $x - y \perp y$, joten Pythagoraan lauseen mukaan

$$\|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2 = \|x - y\|^2 + \sum_{i=1}^{m}|(x|e_i)|^2 \underbrace{\|e_i\|^2}_{1}.$$

[27] FRIEDRICH WILHELM BESSEL 1784–1846, Saksa.

Tästä väite seuraa. □

Määritelmä 9.5. Luvuilla $(x|e_i)$ on monta nimeä. Ne ovat ovat vektorin x *koordinaatit* eli *abstraktit Fourier-kertoimet*[28] ortonormaalin jonon $(e_i)_1^\infty$ suhteen. Ne ovat myös x:n *skalaariset projektiot* suuntiin e_i. Kuvausta, joka vektoriin x liittää sen i:nnen koordinaatin $(x|e_i)$, sanotaan i:nneksi *koordinaattifunktionaaliksi.*

Huomautus 9.6. Olemme nyt määritelleet vektorin koordinaatit ortonormaalin jonon suhteen, mutta emme ole sanoneet mitään siitä, millä ehdoin vektorin voi muodostaa koordinaateistaan. Tämän asian ratkaisemiseksi ei riitä käyttää projektiolausetta 9.3, jossa oli oletuksena aliavaruuden K äärellinen dimensio. Onneksi projektion olemassaolo — johon Hilbertin avaruuden kannan käyttö koordinaattilaskuihin perustuu — pätee myös sisätuloavaruuden ääretönulotteiselle aliavaruudelle K, kunhan se on täydellinen. Projektiolause muotoillaan tavallisesti niin, että tarkastellaan Hilbertin avaruuden H suljettua aliavaruutta K.

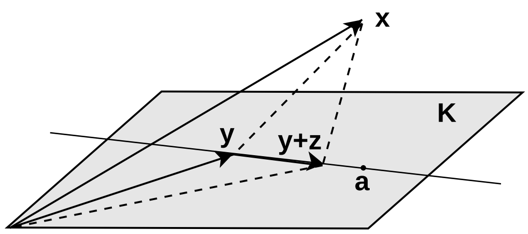
Lause 9.7 (Projektiolause). *Olkoon $K \subset H$ Hilbert-avaruuden suljettu aliavaruus ja olkoon $x \in H$. Tällöin on olemassa tasan yksi vektori $y \in K$, jolla on seuraavat keskenään yhtäpitävät ominaisuudet:*

$$(1) \qquad x - y \perp K$$

$$(2) \qquad \|x - y\| = \min_{a \in K} \|x - a\|.$$

y on nimeltään x:n ortogonaalinen projektio aliavaruudelle K.

Todistus. Todistamme ensin asian helpon puolen: ehdot ovat yhtäpitävät. Samalla tavalla kuin edellä äärellisulotteisessa tapauksessa voi nimittäin nytkin havaita, että ensimmäisestä ehdosta seuraa toinen ja että lähin piste on yksikäsitteinen. Lähin piste y toteuttaa myös ensimmäisen ehdon. Jos näet ei olisi $x - y \perp K$, niin olisi olemassa vektori $z \in K$ siten, että $(x - y|z) \neq 0$.



Kuva 15. Lähimmän pisteen yksikäsitteisyys.

Kolmio, jonka kärjet ovat x, y ja $y + z$ ei siis olisi suorakulmainen kulmassa y. Rajoittumalla kolmiulotteiseen aliavaruuteen $\langle x, y, z\rangle$ huomaa, että y:n kautta kulkevalla z:n suuntaisella suoralla on x:ää lähin piste, olkoon se a, eikä se vinon kulman takia voisi olla ainakaan y. Koska tämä suora sisältyy aliavaruuteen K, olisi saatu ristiriita sen kanssa, että y oli aliavaruuden lähin piste. Siis $x - y \perp K$.

Todistettavaksi jää siten, että lähin piste on olemassa. Ideana on konstruoida aliavaruuteen K Cauchy-jono, jonka raja-arvoksi osoittautuu lähin piste y. Voimme

[28] Jean Baptiste Joseph Fourier 1768–1830, Ranska.

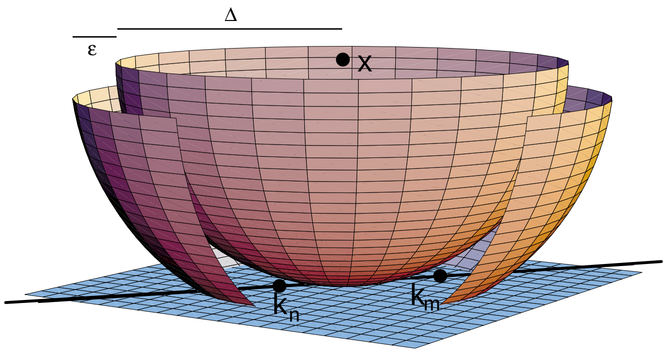
olettaa, että $x \notin A$. Aliavaruus K on suljettu joukko, joten pisteen x *etäisyys* siitä, siis luku

$$\Delta = d(x, K) = \inf_{k \in K} \|x - k\|$$

on positiivinen. Valitaan aliavaruudesta K jono pisteitä k_n siten, että

$$\Delta < \|x - k_n\| < \Delta + \tfrac{1}{n} \ .$$

Todistetaan, että on saatu Cauchy-jono, ja että sen raja-arvo on etsitty piste. Cauchy-ehto seuraa periaatteessa siitä, että Hilbert-avaruuden pallo on tasaisesti konveksi — asiantila, jota kuvaavat täsmällisemmin sekä suunnikassääntö että Pythagoraan lause.

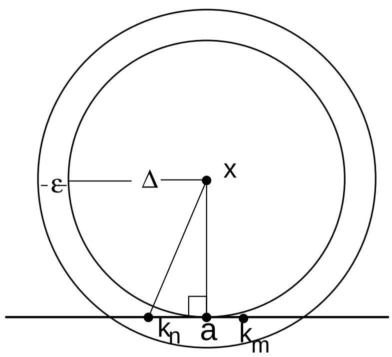


Kuva 16. Projektiolauseen todistus.

Käytännössä laskemme Pythagoraan lauseella: Olkoon $0 < \varepsilon < 1$. Valitaan m ja n suuremmiksi kuin $\frac{1}{\varepsilon}$. Koska Δ on x:n etäisyys aliavaruudesta K, johon k_n ja k_m kuuluvat, on

$$\Delta \leq \|x - a\|$$

kaikille a suoralla s, joka yhdistää pisteet k_n ja k_m, sillä suora s kulkee aliavaruudessa K. Olkoon a erityisesti suoran s lähin piste x:stä katsoen.



Kuva 17. Kuvan 16 halkileikkaus.

Nyt kolmiot x, a, k_n ja x, a, k_m ovat kohdassa a suorakulmaisia, joten kummassakin pätee Pythagoraan lause, siis esim.

$$\|a - k_n\|^2 = \|x - k_n\|^2 - \|x - a\|^2 \leq (\Delta + \tfrac{1}{n})^2 - \Delta^2 \leq \Delta\varepsilon(2 + \varepsilon) \leq 3\Delta\varepsilon,$$

ja siis $\|a - k_n\| \le \sqrt{3\Delta\varepsilon}$. Vastaava pätee etäisyydelle $\|a - k_m\|$, joten

$$\|k_n - k_m\| \le 2\sqrt{3\Delta\varepsilon} = \sqrt{12\Delta}\,\sqrt{\varepsilon}.$$

Tästä näkyy, että (k_n) on Cauchy-jono ja siis suppenee täydellisessä aliavaruudessa K. Raja-arvolla $y = \lim_{n\to\infty} k_n \in K$ on projektiolta vaadittu etäisyysominaisuus:

$$\|x - y\| = \|x - \lim_{n\to\infty} k_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x - k_n\| = \Delta. \qquad \square$$

Määritelmä 9.8.

(1) Olkoon V vektoriavaruus. Lineaarikuvaus $P : V \to V$ on *projektio*, jos $P \circ P = P$ eli $P^2 = P$.
(2) Olkoon E sisätuloavaruus. Projektio $P : E \to E$ on *ortogonaaliprojektio*, jos sen *ydin* $\operatorname{Ker} P$ ja *kuva-avaruus* $\operatorname{Im} P = P(H)$ ovat *toisilleen ortogonaaliset*, $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Im} P$. Ortogonaalisuus tarkoittaa, että $(x|y) = 0$, kun $x \in \operatorname{Ker} P$ ja $y \in \operatorname{Im} P$.
(3) Vektoriavaruus V on aliavaruuksiensa U ja W *lineaarialgebrallinen suora summa* eli epätäsmällisemmin sanottuna *suora summa*, mikäli $U \cap W = \{0\}$ ja $U + W = V$. Jälkimmäinen ehto sanoo, että jokainen vektori $x \in V$ on muotoa $x = u + w$, missä $u \in U$ ja $w \in W$, ja ensimmäisestä ehdosta seuraa pienellä laskulla, että tämä esitys on yksikäsitteinen.

On helppoa tarkastaa lineaarialgebrallinen tosiasia, että minkä tahansa — vinonkin — projektion kuva-avaruus ja ydin leikkaavat toisensa ainoastaan origossa ja että ne yhdessä virittävät koko avaruuden, joka siis on projektion ytimen ja kuvan suora summa.

Seuraava lause sanoo, että projektiolauseen määrittelemä ortogonaalinen projektio jollekin aliavaruudelle K ja ortogonaaliprojektio määritelmän 9.8 mielessä ovat oikeastaan sama asia ja jokaiselle suljetulle aliavaruudelle on olemassa ortogonaaliprojektio.

Lause 9.9. *Olkoon K Hilbertin avaruuden H suljettu aliavaruus. Projektiolauseen mukaan on olemassa kuvaus $P_K \colon H \to H : x \mapsto P_K x$, jolla $P_K x \in K$ ja $x - P_K x \perp K$. Kuvauksella P_K on seuraavat ominaisuudet*

(1) *P_K on lineaarikuvaus.*
(2) *$K = P_K(H)$ ja*
(3) *$P_K \circ P_K = P_K$, eli lineaarikuvaus P_K on projektio.*
(4) *$\operatorname{Ker} P_K \perp K$, eli projektio P_K on ortogonaalinen.*

Todistus. (1) Lineaarisuuskaavan $P_K(\lambda x + \mu y) = \lambda P_K x + \mu P_K y$ voi todistaa näyttämällä pienellä laskulla, että $(\lambda P_K x + \mu P_K y) - (\lambda x + \mu y)$ on ortogonaalinen jokaista vektoria $k \in K$ vastaan, ja siis nolla.

(2) Olkoon $x \in H$. Konstruktion mukaan piste $y = P_k x$ kuuluu aliavaruuteen K, joten $K \supset P_K(H)$. Kaikilla $y \in K$ on $P_K y = y$, siis varmasti $y \in P_K(H)$, joten $K \subset P_K(H)$.

(3) Kaikilla $y \in K$ on $P_K y = y$. Koska $P_K x \in K$, niin siis $P_K(P_K x) = P_K x$ kaikilla $x \in H$.

(4) Kaikilla $x \in H$ on $x - y \perp K$, eli

$$(x - P_K x|k) = 0 \qquad \forall k \in K.$$

Jos $x \in \operatorname{Ker} P_K$, niin $P_K x = 0$, ja siis edellisen mukaan

$$(x|k) = (x - P_K x|k) = 0 \qquad \forall k \in K. \qquad \square$$

MÄÄRITELMÄ 9.10. Olkoon H sisätuloavaruus. Epätyhjän osajoukon $\emptyset \neq A \subset H$ *ortogonaalinen komplementti* on niiden vektorien joukko, jotka ovat kohtisuorassa kaikkia A:n alkioita vastaan:

$$A^\perp = \{x \in H \mid (x|a) = 0 \ \forall a \in A\}.$$

Projektiolauseen avulla voi todistaa, että Hilbert-avaruudessa minkä tahansa epätyhjän osajoukon $S \subset H$ virittämä suljettu aliavaruus $\overline{\langle S \rangle}$ on sama kuin sen ortogonaalikomplementin ortogonaalikomplementti $S^{\perp\perp}$. Taustaksi tälle tärkeälle tiedolle luettelemme ensin ortogonaalikomplementin ilmeisiä ominaisuuksia.

LAUSE 9.11. *Jokaisessa sisätuloavaruudessa H pätevät seuraavat epätyhjän joukon ortogonaalikomplementtia koskevat väitteet:*

a) $A^\perp$ *on H:n suljettu aliavaruus.*
b) $\{0\}^\perp = H$
c) $A^\perp = H \implies A = \{0\}$
d) $A^\perp \cap A \subset \{0\}$
e) $A \subset B \implies B^\perp \subset A^\perp$
f) $A^\perp = \overline{A}^\perp$
g) $A^\perp = \langle A \rangle^\perp = \overline{\langle A \rangle}^\perp$
h) $(A^\perp)^\perp \supset \overline{\langle A \rangle}$.

TODISTUS. Nämä väitteet ovat helppoja todistaa.
a) $x \in A^\perp \iff (x|a) = 0$ kaikilla $a \in A$. Siksi kaikilla $x, y \in A^\perp$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$: $(\lambda x + \mu y|a) = \lambda(x|a) + \mu(y|a) = 0$, joten $A^\perp$ on aliavaruus. Jos taas $x_n \to x \in H$ ja jokainen $x_n \in A^\perp$, niin $(x|a) = (\lim_{n\to\infty} x_n|a) = \lim_{n\to\infty}(x_n|a) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$, koska sisätulo on ensimmäisen muuttujansa suhteen lineaarinen ja jatkuva.

b) $(x|0) = 0$ kaikille $x \in H$.

c) Jos $(x|y) = 0$ kaikille $x \in H$, niin erityisesti $\|y\|^2 = (y|y) = 0$ ja siis $y = 0$.

d) Jos $x \in A^\perp$ ja $x \in A$, niin $(x|x) = 0$. Tästä väite seuraa.

e) Jos $A \subset B$ ja $x \in B^\perp$, niin varmasti $(x|a) = 0$ kaikille $x \in A$.

f) Jos $(x|a) = 0$ kaikilla $a \in A$, niin $(x|a) = 0$ kaikilla $a \in \overline{A}$, koska $a \mapsto (x|a)$ on jatkuva.

g) Jos $(x|a) = 0$ kaikilla $a \in A$, niin

$$\Big(x \mid \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \underbrace{(x \mid a_j)}_{0} = 0$$

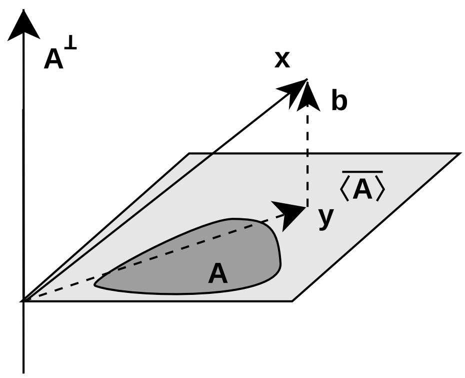
kaikilla $a_j \in A$ ja $\lambda_j \in \mathbb{K}$. Loput saadaan kohdasta f.

h) $(A^\perp)^\perp$ on suljettu aliavaruus ja $(A^\perp)^\perp \supset A$, siis a) -kohdan mukaan myös $(A^\perp)^\perp \supset \overline{\langle A \rangle}$. $\square$

Hilbertin avaruudessa on edellisen lauseen viimeinen väite voimassa olennaisesti vahvemmassa muodossa:

Lause 9.12. *Jos H on Hilbert-avaruus, niin joukon $A \subset H$* biortogonaalille *$(A^\perp)^\perp$ on voimassa*
$$(A^\perp)^\perp = \overline{\langle A \rangle}.$$

Todistus. Tiedämme jo edellisestä lauseesta, että $(A^\perp)^\perp \supset \overline{\langle A \rangle}$. Väite sanoo siis, että $(A^\perp)^\perp \subset \overline{\langle A \rangle}$. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että piste x, joka ei kuulu suljettuun aliavaruuteen $\overline{\langle A \rangle}$, ei myöskään kuulu ortogonaaliseen komplementtiin $(A^\perp)^\perp$, vaan on olemassa vektori $b \in A^\perp$, jota vastaan x ei ole kohtisuorassa. Osoitamme, että tämä ehto toteutuu: Olkoon siis $x \in H \setminus \overline{\langle A \rangle}$. Etsitään vektoria b, joka olisi kohtisuorassa jokaista A:n alkiota, mutta ei vektoria x vastaan. Valitaan b:ksi x:n aliavaruutta $\overline{\langle A \rangle}$ vastaan kohtisuora komponentti, siis vektori, joka yhdistää x:n lähimpään pisteeseen y aliavaruudessa $\overline{\langle A \rangle}$. Tämä kelpaa selvästikin ja väitteemme seuraa siis projektiolauseesta, jota takaa pisteen y olemassaolon. $\square$



Kuva 18. Biortogonaali.

Seuraus 9.13. *Olkoon $K \subset H$ Hilbert-avaruuden H aito suljettu aliavaruus. Tällöin $K^\perp$ ei ole $\{0\}$, vaan on olemassa ainakin yksi nollasta eroava K:n normaalivektori $n \in H$.*

Todistus. Huomasimme edellisen todistuksen yhteydessä, että tämä seuraa projektiolauseesta: valitaan jokin $x \in H \setminus K$, otetaan sitä lähin piste $a \in K$ ja valitaan $n = x - a$. $\square$

Määritelmä 9.14. Kahden toisiaan vastaan ortogonaalisen aliavaruuden K, ja $L \subset H$ virittämää aliavaruutta $\langle K \cup L \rangle = \{k + l \mid k \in K,\, l \in L\}$ sanotaan niiden *(ortogonaaliseksi) suoraksi summaksi* ja merkitään $K \overset{\perp}{\oplus} L$ tai usein vain $K \oplus L$. Emme oleta määritelmässä mitään siitä, ovatko K, L tai $K \oplus L$ suljettuja.

HUOMAUTUS 9.15. Hilbertin avaruus H on aliavaruuksiensa K ja L ortogonaalinen suora summa $H = K \overset{\perp}{\oplus} L$ jos ja vain jos $K = L^\perp$ eli yhtälailla $L = K^\perp$. Erityisesti K ja L ovat tällöin suljettuja ja jokainen $x \in H$ on tasan yhdellä tavalla lausuttavsissa muodossa $x = k + l$, missä $k \in K$ ja $l \in L$, jolloin $k \perp l$. Vektorit k ja l ovat x:n ortogonaaliset projektiot aliavaruuksille K ja L.

Erityisesti ortogonaalisen projektion kuva ja ydin ovat toistensa ortogonaaliset komplementit. Projektioiden käsittelyn kannalta kannattaa lisäksi muistaa, että kaikissa normiavaruuksissa lineaarisen aliavaruuden sulkeuma on aliavaruus. Erityisesti minkä tahansa osajoukon $S \subset E$ virittämän aliavaruuden sulkeuma $\overline{\langle S \rangle}$ on suppein suljettu aliavaruus, joka sisältää joukon S. Sanomme, että $\overline{\langle S \rangle}$ on joukon S *virittämä suljettu aliavaruus*. Tässä on paikallaan pieni varoitus. Annamme myöhemmin esimerkin, joka osoittaa, että edes sisätuloavaruuden suljetun joukon virittämä aliavaruus ei aina ole suljettu joukko, ja voi siis olla $\langle \overline{S} \rangle \neq \overline{\langle S \rangle}$. Jääköön harjoitustehtäväksi todeta, että kuitenkin aina $\langle \overline{S} \rangle \subset \overline{\langle S \rangle}$.

Projektiolauseen suuri merkitys paljastuu viimeistään seuraavassa, kun huomataan, että sen avulla voidaan yleistää ortonormaalien kantojen teoriaa ääretönulotteiseen avaruuteen.

9.2. Hilbertin kanta.

MÄÄRITELMÄ 9.16. Sisätuloavaruuden H osajoukko $E \subset H$ on *ortogonaalinen joukko*, jos sen alkiot ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, eli jos $e \perp f$ kaikille $e, f \in E$, joilla $e \neq f$. Osajoukko E on *ortonormaali joukko*, jos lisäksi $\|e\| = 1$ kaikille $e \in E$. Joukon E ortonormaalius merkitsee siis, että

$$(e|f) = \delta_{ef} = \begin{cases} 0, & \text{jos } e \neq f \\ 1, & \text{jos } e = f \end{cases}$$

LAUSE 9.17. *Ortogonaalinen joukko $E \subset H$ on lineaarisesti riippumaton eli vapaa, toisin sanoen, jos $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j = 0$, missä $\lambda_j \in \mathbb{K}$, $e_j \in E$ ja $e_j \neq e_k$, kun $j \neq k$, niin jokainen λ_j on 0.*

PERUSTELU. Väite on helppo tarkastaa todeksi, mutta seuraa myös siitä, että ortonormaalilla joukolla on seuraavassa esitettävä vahvempi riippumattomuusominaisuus, se on *sarjamielessä vapaa*. $\square$

LAUSE 9.18. *Olkoon $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ortonormaali jono ja $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ lukujono siten, että sarja $\sum_{j=1}^\infty \lambda_j e_j$ suppenee avaruudessa H kohti nollavektoria. Tällöin jokainen kerroin λ_j on nolla.*

TODISTUS. Jos $0 = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i$, niin sisätulon bilineaarisuuden ja jatkuvuuden takia

$$0 = \left(\sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i \mid e_j \right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid e_j \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \mid e_j \right)$$
$$= \sum_{i=1}^\infty \lambda_i \underbrace{(e_i|e_j)}_{\delta_{ij}} = \lambda_j \|e_j\|^2 = \lambda_j. \qquad \square$$

Joukon $E \subset H$ vapaus sarjamielessä ilmaisee itse asiassa, että jos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i e_i \quad ,$$

missä $e_i \in E$ ja $e_i \neq e_j$, kun $i \neq j$, niin $\lambda_i = \mu_i$ kaikille $i \in \mathbb{N}$.

MÄÄRITELMÄ 9.19. Hilbertin avaruuden *ortonormaali kanta*, *Hilbertin kanta* — lyhyesti *kanta* — on ortonormaali joukko $E \subset H$, jolla on seuraavat keskenään yhtäpitävät ominaisuudet:

(1) $\overline{\langle E \rangle} = H$, ts. *$E$ virittää Hilbert-avaruuden H* (tässä mielessä!).
(2) $E^{\perp} = \{0\}$.[29]
(3) Jos $E \subset F$ ja F on ortonormaali, niin $E = F$, ts. E on *maksimaalinen ortonormaali* joukko.

EHTOJEN 9.19. YHTÄPITÄVYYS.
Jos $\overline{\langle E \rangle} = H$, niin $E^{\perp} = \overline{\langle E \rangle}^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$ ja toisinpäin: jos $E^{\perp} = \{0\}$, niin $E^{\perp\perp} = \{0\}^{\perp} = H$. Ensimmäiset kaksi ehtoa ovat siis yhtäpitävät. Jos $E^{\perp} = \{0\}$, niin ei ole olemassa yhtään nollasta eroavaa vektoria, joka olisi ortogonaalinen kaikkia E:n vektoreita vastaan, ja silloin E on varmasti maksimaalinen ortonormaali joukko. Jos taas $E^{\perp} \neq \{0\}$, niin on olemassa nollasta eroava vektori $y \in E^{\perp}$. Nyt $E \cup \{\frac{y}{\|y\|}\}$ on ortonormaali, joten E ei ole maksimaalinen ortonormaali joukko. $\square$

Hilbertin kannan merkitys perustuu siihen, että kaikki Hilbert-avaruuden vektorit voi lausua *äärettöminä lineaarikombinaatioina* kantavektoreista, ts. jokainen vektori $x \in H$ on muotoa

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i,$$

missä $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ja $e_i \in E$. Tämä asia ei ole itsestään selvä, vaan todistamme sen vasta lauseena 9.23 selviteltyämme ortogonaalisten sarjojen suppenemisehtoja Hilbertin avaruudessa. Voimme kuitenkin jo nyt huomata, että jos jokin ortonormaali joukko $E \subset H$ on niin laaja, että kaikki vektorit voi lausua äärettöminä lineaarikombinaatioina sen alkioista, niin silloin $\overline{\langle E \rangle} = H$, joten E on Hilbertin kanta. Ratkaiseva apuväline esityksen $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ olemassaolon todistuksessa on seuraava lause.

LAUSE 9.20 (ℓ^2-LAUSE JA PARSEVALIN YHTÄLÖ)[30]. *Olkoon $(e_i)_1^{\infty}$ ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa H ja $(\lambda_i)_1^{\infty}$ lukujono.*

a) *Sarja*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$$

suppenee aina ja vain, kun $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$.

b) *Kun sarja $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ suppenee, jokainen λ_i on Fourier-kerroin $(x|e_i)$.*

---

[29] Tällöin sanotaan, että E on *totaali*, vanhemmassa kirjallisuudessa *"täydellinen"*.

[30] MARC-ANTOINE PARSEVAL DES CHÊNES 1755–1836, Ranska.

c) *Kun sarja* $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ *suppenee, pätee äärettönulotteinen Pythagoraan lause eli Parsevalin yhtälö*

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2}.$$

TODISTUS. Jos sarja suppenee, niin sisätulon jatkuvuuden ja jonon ortonormaalisuuden nojalla

$$(x|e_j) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \mid e_j \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \underbrace{(e_i|e_j)}_{\delta_{ij}} = \lambda_j$$

ja siis Besselin epäyhtälön nojalla

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |(x|e_j)|^2 \leq \|x\|^2 < \infty.$$

Kerroinjonon *neliösummautuvuus* $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty$ seuraa siis sarjan suppenemisesta.

Jos taas oletetaan kerroinjonon neliösummautuvuus, niin selvästikin $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ on Cauchy-sarja, sillä kaikilla $n < m$ pätee äärellisulotteisen Pythagoraan lauseen mukaan

$$\left\| \sum_{i=n}^{m} \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=n}^{m} |\lambda_i|^2.$$

Suppeneminen seuraa siis Hilbertin avaruuden täydellisyydestä. Samalla saadaan myös Parsevalin yhtälö valitsemalla $n = 1$ ja antamalla $m \to \infty$. $\square$

ℓ^2-lause kertoo sarjan $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i$ suppenevan tasan silloin, kun kertoimien jono $(\lambda_i)_1^{\infty}$ on *neliösummautuva* eli kuuluu *Hilbertin jonoavaruuteen* $\ell^2 = \{(\lambda_n)_1^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty\}$.

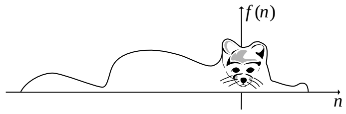
Saman voi ilmaista sanomalla, että ortogonaalinen sarja $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ suppenee tasan silloin, kun $(\|x_i\|)_1^{\infty}$ on neliösummautuva. Tätä kannattaa verrata siihen, mitä lauseen 6.14 nojalla jo tiedetään vastaavasta tilanteesta ilman ortogonaalisuusoletusta: Jos $(x_i)_1^{\infty}$ on jono vektoreita Hilbertin (tai Banachin) avaruudessa E, niin sarja

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$$

suppenee ainakin aina *supetessaan itseisesti*, eli kun $(\|x_i\|)_1^{\infty}$ kuuluu jonoavaruuteen $\ell^1 = \{(\lambda_n)_1^{\infty} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n| < \infty\}$, joka on ℓ^2:n aito aliavaruus. Uusi lauseemme on siis tavallaan parannus aikaisempaan tietämykseemme, mutta oletuksiakin on lisätty.

Itseisestä suppenemisesta muistuu mieleen sarjateorian lause, jonka mukaan reaali- tai kompleksilukusarja[31] suppenee itseisesti *täsmälleen* silloin, kun sen suppeneminen säilyy, vaikka termit järjestettäisiin uudelleen, ja että tällöin sarjan

[31] Tai sarja avaruudessa $\mathbb{K}^n$; laske koordinaateittain!



summakaan ei riipu termien järjestyksestä. Myös Banachin avaruudessa saa itseisesti suppenevan sarjan termit järjestää uudelleen suppenemisen tai summan siitä muuttumatta, mutta itseinen suppeneminen ei ole välttämätön ehto sille, että järjestystä saisi vaihtaa. Yhden vastaesimerkin olemme juuri esitelleet: ortogonaalisen sarjan saa Hilbert-avaruudessa järjestää uudelleen, vaikka se ei suppenisi itseisesti:

SEURAUS 9.21. *Kun jono $(e_i)_1^\infty$ on ortonormaali Hilbertin avaruudessa H, niin sarjan $x = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i$ suppeneminen ja summa eivät riipu termien järjestyksestä.*

TODISTUS. Olkoon

$$\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : i \mapsto \alpha(i)$$

bijektio eli luonnollisten lukujen *permutaatio* ja $(e_i)_1^\infty$ ortonormaali jono Hilbertin avaruudessa H ja $(\lambda_i)_1^\infty$ sellainen lukujono, että sarja $\sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i$ suppenee, toisin sanoen $(\lambda_i)_1^\infty \in \ell^2$. On todistettava, että

$$\sum_{i=1}^\infty \lambda_{\alpha(i)} e_{\alpha(i)} = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i.$$

Koska ℓ^2- jono pysyy ℓ^2-jonona järjestettäessä termit uudelleen, on ℓ^2-lauseen nojalla selvää, että molemmat sarjat ainakin suppenevat. Merkitään niiden summia

$$x = \sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i \quad \text{ja} \quad z = \sum_{i=1}^\infty \lambda_{\alpha(i)} e_{\alpha(i)}.$$

On osoitettava, että $z = x$, eli $\|x - z\|_2^2 = 0$. Koska

$$\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^\infty |\lambda_i|^2 = \|z\|_2^2$$

ja

$$\|x - z\|^2 = (x - z|x - z) = \|x\|^2 - (x|z) - \overline{(x|z)} + \|z\|^2,$$

riittää osoittaa, että

$$(x|z) = \|z\|^2.$$

Tämä saadaan laskemalla huolellisesti:

$$\begin{aligned}
(x|z) &= \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \;\Big|\; \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^m \lambda_{\alpha(j)} e_{\alpha(j)} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{i\le n} \sum_{j\le m} \lambda_i \overline{\lambda_{\alpha(j)}} \underbrace{\left(e_i \;\big|\; e_{\alpha(j)}\right)}_{\delta_{i\alpha(j)}} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{i\le n} \sum_{i=\alpha(j),\, j\le m} \lambda_i \overline{\lambda_{\alpha(j)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{i\le n} \sum_{i=\alpha(j),\, j\le m} |\lambda_{\alpha(j)}|^2 = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{\alpha(j)\le n,\, j\le m} |\lambda_{\alpha(j)}|^2 = \|x\|^2.
\end{aligned}$$

□

Kun sarjan summa ei riipu summausjärjestyksestä, on luontevaa kirjoittaa se näkyviin järjestystä korostamatta:

$$\sum_{i=1}^\infty \lambda_i e_i = \sum_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i e_i.$$

SEURAUS 9.22. *Olkoon E ortonormaali joukko Hilbertin avaruudessa H ja olkoon $x \in H$. Tällöin*

(1) *Vain numeroituvan moni Fourier-kertoimista $(x|e)$, missä $e \in E$, on nollasta eroava.*
(2) *Summalauseke $\sum_{e\in E}(x|e)e$ sisältää siis vain numeroituvan monta nollasta eroavaa termiä ja voidaan näin ollen tulkita sarjaksi avaruudessa H jättämällä nollatermit pois ja järjestämällä muut termit jotenkin. Saatu sarja suppenee kohti samaa vektoria — summaansa $P_E(x)$ — riippumatta siitä, miten termit on järjestetty.*
(3) $\sum_{e\in E} |(x|e)|^2 = \|P_E(x)\|^2$
(4) *Sarjan summa $P_E(x) = \sum_{e\in E}(x|e)e$ on se suljetun aliavaruuden $\overline{\langle E\rangle}$ piste, joka on lähimpänä pistettä x, siis x:n ortogonaalinen projektio suljetulle aliavaruudelle $\overline{\langle E\rangle}$. Äärellisulotteinen projektiolause 9.6. yleistyy siis sittenkin myös lausekkeen osalta.*

TODISTUS. Besselin epäyhtälöstä seuraa, että millään $\varepsilon > 0$ ei voi olla äärettömän useaa $e \in E$, jolla $(x|e) \geq \varepsilon$. Väite (1) saadaan soveltamalla tätä lukuihin $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$. Ehto (2) seuraa edellisestä lauseesta ja Besselin epäyhtälöstä. Ehto (3) on Parsevalin yhtälö. Ehdon (4) tarkastamiseksi riittää vedota projektiolauseeseen. □

SEURAUS 9.23. *Hilbertin avaruuden H ortonormaalin joukon E virittämä suljettu aliavaruus on (huomaa summien ylärajat!)*

$$\overline{\langle E\rangle} = \big\{x \in H \bigm| x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \,,\, e_i \in E \,, \lambda_i \in \mathbb{K} \,,\, \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 < \infty\big\},$$

joten kannan määritelmässä ehto (4) on yhtäpitävä muiden ehtojen kanssa.

TODISTUS. Riittää todistaa, että jos E on ortonormaali joukko, niin jokainen $x \in \overline{\langle E\rangle}$ on muotoa $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n$. Seurauksen 9.22 mukaan $\sum_{e\in E}(x|e)e$ on se suljetun aliavaruuden $\overline{\langle E\rangle}$ piste, joka on lähimpänä pistettä x, siis tässä tapauksessa x itse, mikäli $x \in \overline{\langle E\rangle}$. Summa $\sum_{e\in E}(x|e)e$ on lausuttavissa sarjana $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n$ järjestämällä sen termit jotenkin.[32] □

Olemme todistaneet monta toistensa näköistä lausetta ortonormaaleista jonoista ja kannoista. Niiden kaikkien väitteet ovat kuitenkin aika lailla itsestään selviä, kun käytettävissä on kunnon kantateoria, jonka rakentamisen välivaiheeksi ne tarvittiin. Ei kannatakaan eritellä niitä enää, vaan painaa mieleensä ainoastaan kannan määrittelevien ominaisuuksien laajennettu luettelo:

SEURAUS 9.24. *Ortonormaali joukko $E \subset H$ on Hilbertin kanta, jos sillä on seuraavat keskenään yhtäpitävät ominaisuudet:*

(1) $\overline{\langle E\rangle} = H$.
(2) $E^\perp = \{0\}$.
(3) *E on maksimaalinen ortonormaali joukko.*

[32] Tässä numeroituvassa summassa mukana olevat kantavektorit riippuvat vektorista x.

(4) *Jokainen $x \in H$ on lausuttavissa summana*

$$x = \sum_{e \in E} \lambda_e e, \quad \textit{missä } \lambda_e \in \mathbb{K}\ .$$

Tällöin summassa on enintään numeroituva määrä nollasta eroavia termejä eikä summa riipu summausjärjestyksestä. Luvut λ_e ovat vektorin x Fourier-kertoimet $(x|e)$.

(5) *Jokaisella $x \in H$ pätee Besselin epäyhtälössä yhtäsuuruus eli Parsevalin yhtälö*

$$\|x\|^2 = \sum_{e \in E} |(x|e)|^2.$$

Nähtyämme paljon vaivaa kannan perusominaisuuksien johtamiseksi todistamme lopuksi, että jokaisella Hilbertin avaruudella on kanta ja että kannan mahtavuus määrää avaruuden isomorfian tarkkuudella. Ennen todistusta ilmoitamme kuitenkin väärinkäsitysten torjumiseksi jo ennakkoon, että

($\star$) Hilbertin kannan ei tarvitse olla numeroituva joukko.
($\star$) Saman avaruuden H jokainen Hilbertin kanta on yhtä mahtava joukko.
($\star$) Lineaarialgebrallinen kanta eli *Hamelin kanta* on jotakin muuta kuin Hilbertin kanta. Jokainen vektori on suorastaan äärellinen lineaarikombinaatio Hamelin kantavektoreista. Numeroituvaulotteisen Hilbert-avaruuden Hamel-kanta on itse asiassa ylinumeroituva. *Hilbert-dimensio* ja *lineaarialgebrallinen dimensio* ovat siis eri asioita.

Yleisen Hilbert-avaruuden kannan olemassaolo perustuu samaan kuuluisaan järjestysteoreettiseen aksioomaan, Zornin lemmaan, jonka avulla vektoriavaruudessa todistetaan sekä Hamelin kannan olemassaolo että sen yleistys, jonka mukaan mikä tahansa lineaarisesti riippumaton joukko voidaan laajentaa Hamelin kannaksi.[33]

LAUSE 9.25. *Jokaisella Hilbertin avaruudella on ortonormaali kanta.*

TODISTUS. *Zornin lemma* sanoo, että osittain järjestetyssä joukossa $(\mathcal{J}, \leq)$ on maksimaalinen alkio, mikäli sen jokaisella täysin järjestetyllä osajoukolla eli *ketjulla* on yläraja joukossa $\mathcal{J}$. Sovellamme Zornin lemmaa valiten

$\mathcal{J} = \{$avaruuden H ortonormaalit joukot$\}$.
$\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \iff \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$.

Maksimaalisen alkion löytämiseksi riittää siis tarkastaa, että jokaisella ortonormaaleista joukoista muodostetulla, *inkluusion* "$\subset$" suhteen täysin järjestetyllä joukolla $\mathcal{A}$ on yläraja. Tässä yläraja on sama asia kuin sellainen ortonormaali joukko $E \subset H$, johon sisältyy osajoukkona jokainen $\mathcal{A}$:n alkio. Tällaiseksi ylärajaksi tarjoutuu $\mathcal{A}$:n alkioiden yhdiste

$$E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Varmistetaan asia: Tietysti E sisältää kaikki joukot A. On vain osoitettava, että $E \in \mathcal{J}$, eli että E on ortonormaali joukko. Olkoot x ja y alkioita joukossa $E =$

[33]Ks. liite. GEORG HAMEL 1877–1954, Saksa ja MAX AUGUST ZORN 1906–1993 Saksa ja USA.

$\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$. Valitaan A_x ja $A_y \in \mathcal{A}$ siten, että $x \in A_x$ ja $y \in A_y$. Koska A_x ja A_y ovat täysin järjestetyn joukon $\mathcal{A}$ alkioita, niitä voidaan verrata. Olkoon esimerkiksi $A_x \subset A_y$. Nyt sekä x että y kuuluvat samaan ortonormaaliin joukkoon A_y ja ovat siis ortogonaalisia tai samoja. □

Huomaamme samalla, että Hilbertin avaruuden H minkä tahansa suljetun aliavaruuden K ortonormaali kanta voidaan laajentaa koko avaruuden ortonormaaliksi kannaksi lisäämällä siihen sopiva joukko vektoreita. Lukija miettiköön, miten edellistä todistusta tulee muuttaa, jotta tämäkin tulisi todistetuksi.

9.3. Separoituva Hilbertin avaruus.

Hilbertin kantaa käyttämällä voi todistaa, että *klassiset Hilbertin avaruudet* ℓ^2 ja $L^2[0, 2\pi]$ ovat separoituvia ja keskenään isomorfisia sisätuloavaruuksia. Koska funktioavaruuden $L^2[0, 2\pi]$ tutkiminen edellyttää mittateoriaan kuuluvia tietoja, aloitamme esittelemällä jonoavaruuden ℓ^2 ominaisuuksia.

Esimerkki 9.26. Euklidisen avaruuden luonnollinen yleistys, jonoavaruus $\ell^2 = \{(\lambda_n)_1^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N} \mid \sum_{n=1}^\infty |\lambda_n|^2 < \infty\}$, on Hilbertin avaruus, kun se on varustettu tavanomaisin pisteittäisin laskutoimituksin ja sisätulolla

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i},$$

missä $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ja $y = (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Vastaava normi on

$$\|x\|_2 = (x|x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2}\ .$$

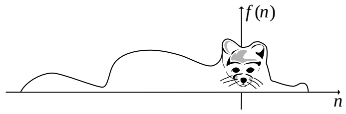
Perustelu. Olisi hankalaa aloittaa tarkastelu todistamalla, että ℓ^2 on vektoriavaruus, sillä ei ole itsestään selvää, että se sisältää alkioidensa summat. Kun muistamme lineaarialgebran opinnoista, että euklidisen avaruuden kolmioepäyhtälö todistettiin CSB-epäyhtälön avulla, arvaamme, että nytkin kannattaa aloittaa tarkastelemalla sisätulon lauseketta. Lukusarja $\sum_{i=1}^\infty x_i \overline{y}_i$ suppenee äärellisulotteisen CSB-epäyhtälön nojalla itseisesti, onhan kaikilla $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i \overline{y}_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} \leq \|x\|_2\, \|y\|_2.$$

Saamme samalla CSB-epäyhtälön ℓ^2-jonoille:

$$|(x|y)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y}_i\right| \leq \|x\|_2\, \|y\|_2.$$

CSB-epäyhtälön avulla todistetaan, että ℓ^2 on vektoriavaruus. Tässä ainoa ongelmakohta on osoittaa, että ℓ^2 sisältää alkioidensa summat. Olkoot x ja $y \in \ell^2$.



Nyt

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^2 &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \big(|x_n|^2 + x_n\overline{y}_n + y_n\overline{x}_n + |y_n|^2\big) \\
&= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |x_n|^2 + \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{m} x_n\overline{y}_n + \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \overline{x}_n y_n + \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} |y_n|^2 \\
&= \|x\|_2^2 + (x|y) + (y|x) + \|y\|_2^2 \\
&\le \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2 < \infty.
\end{aligned}
$$

Näiden valmistelujen jälkeen on helppo harjoitustehtävä todistaa, että ℓ^2 on sisätuloavaruus. Avaruuden ℓ^2 täydellisyys todistetaan puolestaan samaan tapaan kuin avaruuden $\mathbb{R}^n$ täydellisyys, nimittäin koordinaateittain. Todistus on siis melko suoraviivainen lasku, mutta koska se edellyttää huolellista kirjanpitoa ja kelvollisia merkintöjä käsiteltäessä jonoja, joiden alkiotkin ovat jonoja, käymme läpi yksityiskohdat. Todistus käy myös mallista muille jonoavaruuksien täydellisyystodistuksille.

Olkoon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avaruuden ℓ^2 Cauchy-jono. Tehtävänämme on todistaa, että se suppenee avaruudessa ℓ^2.

Jokainen tutkittavan jonon jäsen x_n on itsekin jono, nimittäin lukujono

$$x_n = (\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \dots).$$

Kirjoittamalla lukujonot x_n toistensa alle saamme havainnollistettua tilannetta äärettömällä matriisilla

$$
\begin{array}{lcccc}
x_1 = & \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} & \dots \\
x_2 = & \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \dots \\
x_3 = & \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & \dots \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Koska $|\alpha_1^{(n)} - \alpha_1^{(m)}| \le \|x_n - x_m\|_2$, niin jonojen x_n ensimmäisten termien muodostama jono, matriisin ensimmäinen sarake $(\alpha_1^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \alpha_1^{(3)}, \dots)$, on Cauchy-jono avaruudessa $\mathbb{K}$ ja suppenee siis kohti jotakin lukua: $\alpha_1^{(n)} \to \alpha_1,$ kun $n \to \infty$. Sama pätee muillekin sarakkeille: $\alpha_k^{(n)} \to \alpha_k,$ kun $n \to \infty$. Näin tulee määritellyksi jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainoa mahdollinen raja-arvoehdokas $x = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

$$
\begin{array}{lccccc}
x_1 = & \alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} & \dots & \in \ell^2 \\
x_2 = & \alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \dots & \in \ell^2 \\
x_3 = & \alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & \dots & \in \ell^2 \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
x = & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots &
\end{array}
$$

Tehtävänä on näyttää, että x kuuluu avaruuteen ℓ^2 ja että

$$\|x_n - x\|_2 \to 0, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Molemmat arviot saadaan samalla päättelyllä: Olkoon $\varepsilon > 0$. On löydettävä luku n_ε siten, että $\|x_n - x\|_2 \leq \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$. Cauchy-oletuksen nojalla on ainakin olemassa sellainen $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, että kun $n, m > n_\varepsilon$, niin $\|x_n - x_m\|_2 \leq \varepsilon$, eli

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Erityisesti jokaisella äärellisellä $N \in \mathbb{N}$ on siis

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{N} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k^{(m)}|^2 \leq \varepsilon^2,$$

kun $n, m > n_\varepsilon$. Kiinnittäkäämme hetkeksi $n > n_\varepsilon$. Koska epäyhtälön $(*)$ vasen puoli on muuttujien $\alpha_1^{(m)}, \dots, \alpha_N^{(m)}$ jatkuva funktio ja kukin $\alpha_k^{(m)} \to \alpha_k$, kun $m \to \infty$, niin myös

$$\sum_{k=1}^{N} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \text{kun } n > n_\varepsilon.$$

Positiiviterminen sarja $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k^{(n)} - \alpha_k|^2$ suppenee siis, ja sen summa on enintään ε^2, kunhan $n > n_\varepsilon$. Toisin sanoen $\|x_n - x\|_2 \leq \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$. Nyt kumpikin tavoitteemme on saavutettu.

(1) Erotus $(x_n - x)$ kuuluu vektoriavaruuteen ℓ^2, joten myös

$$x = x_n - (x_n - x) \in \ell^2 \quad \text{ja}$$

(2)

$$\|x_n - x\|_2 \to 0, \text{ kun } n \to \infty. \quad \square$$

Tiedämme nyt, että ääretönulotteisia Hilbert-avaruuksia on olemassa, sillä ℓ^2 on sellainen, muodostavathan vektorit $e_n = (0, \dots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \dots)$ sille selvästikin numeroituvan ortonormaalin kannan, *standardikannan*. Avaruudella ℓ^2 on siis numeroituva Hilbertin kanta, tässä mielessä se on numeroituvaulotteinen. Kun on puhe dimensiosta, niin muistamme luvusta 7, että äärellisulotteisen sisätuloavaruuden kanta-alkioiden lukumäärä eli avaruuden dimensio määrää avaruuden isomorfismin tarkkuudella ja arvaamme, että numeroituvaulotteiset Hilbertin avaruudet ovat isomorfisia keskenään, siis erityisesti Hilbertin jonoavaruuden ℓ^2 kanssa:

LAUSE 9.27. *Seuraavat Hilbert-avaruuden H ominaisuudet ovat keskenään yhtäpitäviä*

1. *H ja jonoavaruus ℓ^2 ovat normiavaruuksina isomorfiset, ts. on olemassa isometrinen lineaaribijektio $H \to \ell^2$.*
2. *H ja jonoavaruus ℓ^2 ovat sisätuloavavaruuksina isomorfiset.*
3. *H:lla on numeroituvasti ääretön kanta.*
4. *H:n jokainen kanta on numeroituvasti ääretön*

Perustelu. Isometrinen lineaaribijektio $H \to \ell^2$ säilyttää normin lisäksi myös sisätulon, koska sisätulo voidaan polaarikaavalla lausua normin avulla. Numeroituva kanta on tietysti kahdesta isomorfisesta sisätuloavaruudesta joko molemmilla tai ei kummallakaan. Jos H:lla on numeroituva kanta $(e_1, e_2, \dots)$, niin kuvaus

$$H \to \ell^2 : x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_i \mapsto (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$$

on sisätuloavaruusisomorfismi. Ensimmäiset kolme ehtoa ovat siis yhtäpitäviä ja seuraavat ehdosta (4). Pitää vielä todistaa, että Hilbert-avaruuden ℓ^2 jokainen ortonormaali kanta on numeroituvasti ääretön. Äärellinen kanta tekisi avaruudesta äärellisulotteisen, joten riittää osoittaa, että avaruuden ℓ^2 mikään ortonormaali kanta E ei voi olla ylinumeroituva. Rationaalikoordinaattiset vektorit muodostavat avaruudessa ℓ^2 numeroituvan, tiheän joukon $T \subset \ell^2$. Tutkittavan kannan E kantavektorien kärkiin sijoitetut pallot $B(f, \frac{1}{3})$ ovat erillisiä, joten jos niitä olisi ylinumeroituvan monta, niin numeroituvan joukon T pisteitä ei riitäisi kaikkiin. Tämä olisi ristiriidassa joukon T tiheyden kanssa. $\square$

Kantaa käyttämällä pysytytään itse asiassa luokittelemaan kaikki Hilbertin avaruudet isomorfian tarkkuudella.

Lause 9.28.

(1) *Kaksi Hilbert-avaruutta ovat isomorfiset silloin ja vain silloin, kun niillä on yhtä mahtava kanta. Erityisesti saman Hilbert-avaruuden ortonormaalit kannat ovat keskenään yhtä mahtavia.*
(2) *Jokaista joukkoa K kohti on olemassa Hilbert-avaruus, jonka kannalta on olemassa bijektio joukolle K; jokaista mahtavuutta eli kardinaalilukua κ kohti on siis olemassa $\kappa-$ulotteinen Hilbert-avaruus.*

Hilbert-avaruudet ja kardinaaliluvut vastaavat siis toisiaan yksi yhteen.

Perustelu. (1) Osoitetaan ensin, että saman avartuuden H kannat, olkoot ne K ja L, ovat yhtä mahtavia. Voimme tietenkin olettaa, että kannat ovat äärettömiä. Kuten edellisen lauseen perustelussa asetamme nytkin K-kantavektorien päihin toisiaan leikkaamattomat pallot. Kustakin pallosta löytyy L-kantavektoreiden äärellinen rationaalikertoiminen lineaarikombinaatio, joten palloja on enintään yhtä paljon kuin näitä kombinaatioita, joita puolestaan on mahtavuuden mielessä yhtä monta kuin kannan L vektoreita, sillä joukko $A \times B$ on yhtä mahtava kuin mahtavampi joukoista A ja B, elleivät molemmat ole äärellisiä. Näin ollen $\#K \leq \#L$. Samoin $\#L \leq \#K$, joten $\#K = \#L$. (Viimeiseen johtopäätökseen tarvitaan itse asiassa *Cantorin, Schröderin ja Bernsteinin lause*[34], jonka mukaan joukkojen mahtavuuksien ”$<$” on järjestysrelaatio!)

Isomorfisilla avaruuksilla on tietenkin yhtä mahtava kanta. Jos taas kahdella avaruudella on yhtä mahtava kanta, niin niiden välille saadaan isomorfismi kuvaamalla kannat bijektiivisesti toisikseen ja laajentamalla kuvaus lineaariseksi ja jatkuvaksi.

[34] Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder 1841–1902, Saksa.Felix Bernstein 1878–1956, Saksa–Sveitsi.

(2) Toinen väite todistetaan konstruoimalla vaadittu avaruus. Sellaiseksi käy

$$H_K = \Big\{x : K \to \mathbb{K} \mid \sum_{k \in K} |x(k)|^2 < \infty\Big\}$$

pisteittäisin vektorilaskutoimituksin, kun sisätulo on

$$(x|y) = \sum_{k \in K} x(k)\overline{y(k)}\,.$$

Näissä summissa vain numeroituvan monta alkiota eroaa nollasta. Kanta $(e_k)_{k\in K}$ muodostuu tietysti vektoreista $e_k(m) = \delta_{km}$. □

Huomautus 9.29. Metrinen avaruus on separoituva, jos se on jonkin numeroituvan osajoukkonsa sulkeuma, eli jos siinä on tiheä numeroituva osajoukko. Huomasimme edellä lauseen 9.27 todistuksen yhteydessä, että erityisesti ℓ^2 ja siis myös jokainen numeroituvaulotteinen Hilbertin avaruus on separoituva metrinen avaruus. Numeroituvaulotteinen Hilbertin avaruus tunnetaankin yleisemmin nimellä *separoituva Hilbertin avaruus*. Nimitys on oikeutettu: Hilbert-avaruus on metrisenä avaruutena separoituva ainoastaan ollessaan enintään numeroituvaulotteinen.

Seuraus 9.30. *Seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä Hilbertin avaruudelle H:*

(1) *Avaruuden H Hilbertin kanta on enintään numeroituva.*
(2) *Avaruus H on separoituva.*

Perustelu. Tiedämme jo, että numeroituvaulotteinen ja äärellisulotteinen Hilbert-avaruus ovat separoituvia. Ylinumeroituvaulotteisen avaruuden separoitumattomuus todistettiin samalla kuin lause 9.27. □

Esimerkki 9.31. Klassinen *Lebesgue'in sisätuloavaruus*[35] $L^2[0, 2\pi]$ ja avaruus ℓ^2 ovat isomorfiset, samoin avaruudet $L^2(\mathbb{R}^n)$.[36]

Perustelu. Väitteet perustuvat siihen, että kaikissa näissä avaruuksissa on numeroituva kanta. Esittelemme joitakin kantoja luvussa 11.

Emme käsittele vielä tässä luvussa Banachin avaruuksia ℓ^p, $L^p([0, 1])$ ja $L^p(\mathbb{R}^n)$, mutta mainitsemme kuitenkin jo ennakkoon seuraavan tosiasian: arvoilla $1 \le p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, ne ovat separoituvia, mutta arvolla $p = \infty$ eivät.[37]

---

[35] Henri Léon Lebesgue 1875–1941, Ranska. Kuuluisa integraalin määritelmä on väitöskirjassa v. 1902.

[36] Kaikki mitat μ eivät tuota separoituvaa avaruutta $L^2(\mu)$. Vastaesimerkin antaa lukumäärämitta ylinumeroituvassa joukossa.

[37] Edes ℓ^∞ ei todellakaan ole separoituva. Ks. luvun 24 harjoitustehtävät.

9.4. Jatkuvat lineaarimuodot ja Fréchet'n ja Rieszin esityslause.

Määritelmä 9.32.

(1) *Lineaarimuoto* on lineaarikuvaus vektoriavaruudelta kerroinkunnalle eli yksiulotteiselle avaruudelle, siis $f : V \to \mathbb{K}$. Vektoriavaruuden V kaikkien lineaarimuotojen joukko on sen *algebrallinen duaaliavaruus* eli *vektoriavaruuden duaali*

$$V' = \mathcal{L}(V, \mathbb{K}) = \{f : V \to \mathbb{K} \mid f \text{ on lineaarinen}\}.$$

(2) Normiavaruuden E kaikkien jatkuvien lineaarimuotojen eli *lineaaristen funktionaalien* joukko on sen *topologinen duaaliavaruus* eli *normiavaruuden duaali*

$$E^* = \mathcal{B}(E, \mathbb{K}) = \{f \in E' \mid f \text{ on jatkuva}\}.$$

(3) Lineaarimuodon $f \in V'$ arvoa kohdassa $x \in V$ merkitään useinkin $f(x) = \langle x|f\rangle$ — huomaa järjestys ja bilineaarisuus — ja sanotaan tällöin x:n ja f:n *duaalituloksi.*

Esimerkki 9.33. Perusesimerkkejä lineaarisista funktionaaleista ovat euklidisen avaruuden standardikantavektoreihin liittyvät *koordinaattikuvaukset*

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto x_i.$$

Myös ääretönulotteisen vektoriavaruuden Hamel-kantaan liittyy koordinaattikuvaus kutakin kantavektoria kohti, samoin Hilbert-avaruuden ortonormaalin jonoon. Jälkimmäiset ovat jonoon liittyvät koordinaattifunktionaalit

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \mapsto x_i = (x|e_i),$$

jotka ovat jatkuvia.

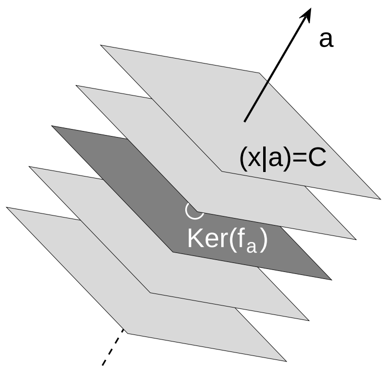
Tämän luvun päätulos Fréchet'n ja Rieszin esityslause kertoo, että Hilbertin avaruuden topologinen duaali on isomorfismin tarkkuudella avaruus itse. Myöhemmin selvittelemme eräiden muiden normiavaruuksien duaalin rakennetta.

Huomautus 9.34. Muistamme kohdasta 6.8, että kun E ja F ovat normiavaruuksia, niin $\mathcal{L}(E, F)$ on vektoriavaruus ja $\mathcal{B}(E, F)$ sen vektorialiavaruus, jossa operaattorinormi on normi. Erityisesti vektoriavaruuden duaali on vektoriavaruus ja normiavaruuden topologinen duaali on sen algebrallisen duaalin lineaarinen aliavaruus.

Esimerkki 9.35. (Euklidisen avaruuden lineaarimuodon geometria). Muistelemme vertailun vuoksi lineaarialgebrasta, että euklidisessa avaruudessa eli $n-$ulotteisessa reaalisessa Hilbertin avaruudessa $\mathbb{R}^n$ nollasta eroavan lineaarimuodon f ydin on $n-1$-ulotteinen aliavaruus $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$. Itse asiassa lineaarimuodolla on yksinkertainen geometrinen tulkinta. Ainakin muotoa

$$f_a = (\cdot|a) : x \mapsto (x|a),$$

olevan lineaarimuodon määräävä vektori a on nimittäin ytimen $\operatorname{Ker} f_a$ normaali, onhan $x \perp a$, kun $(x|a) = 0$ eli $x \in \operatorname{Ker} f_a$. Koska lineaarikuvauksen f_a muut tasa-arvopinnat saadaan ytimestä siirrolla, on a myös niiden normaali. CSB-epäyhtälön nojalla $\|f_a\| = \|a\|$.



Kuva 19. Lineaarimuoto avaruudessa $\mathbb{R}^3$.

Jos samastamme lukusuoran $\mathbb{R}$ suoraan $\langle a \rangle = \{\mu a \mid \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n$ kuvauksella $\lambda \mapsto \lambda \frac{a}{\|a\|^2}$, niin lineaarimuoto f_a eli $(\cdot|a)$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ ortogonaaliprojektio suoralle $\langle a \rangle$. Ehkä luonnollisempaa on kuitenkin samastaa suora lukuihin isometrisesti, siis kuvaamalla $\lambda \mapsto \lambda \frac{a}{\|a\|}$. Näin menetellen f_a on ortogonaaliprojektio suoralle yhdistettynä kertolaskuun luvulla $\|a\|$.

Edellinen tulkinta näytti koskevan erityisentyyppistä lineaarimuotoa f_a, mutta koskeekin kaikkia, sillä euklidisessa avaruudessa ei tosiasiassa ole olemassa muita kuin juuri tällaisia lineaarimuotoja. Voimme todeta tämän käyttämällä matriiseja. Euklidisen avaruuden vektorithan on standardikantaa käytettäessä mukava samastaa *sarakematriiseihin*, jolloin lineaarikuvauksen vaikutus vektoriin saadaan kertomalla vektori vasemmalta päin lineaarikuvauksen matriisilla. Erityisesti mielivaltaista lineaarimuotoa $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ vastaa *rivimatriisi* eli *kovektori* $\operatorname{Mat} f = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$, jonka vaikutus vektoriin x on

$$[a_1, a_2, \ldots, a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad = \quad [a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n],$$

$$\text{eli} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \stackrel{f}{\longmapsto} \quad a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n.$$

Mielivaltainen lineaarimuoto $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ on siis muotoa

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = (x|a) = f_a(x),$$

missä

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = (\operatorname{Mat} f)^t \quad \in \mathbb{R}^n.$$

Toteamme yhteenvetona, että euklidisen avaruuden lineaarimuodot ja vektorit vastaavat toisiaan bijektiivisesti vastaavuudessa

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n*} &\longleftrightarrow \mathbb{R}^n \\ f_a = (\cdot|a) &\longleftrightarrow a. \end{aligned}$$

Tämä vastaavuus on lineaarinen isometrinen isomorfismi $\mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$, sillä kuvaus $a \mapsto f_a$ on tietysti lineaarinen ja f_a:n operaattorinormi on $\|a\|$.

Edellä kuvaillun asiantilan todentaminen sopisi harjoitustehtäväksi, mutta seuraa myös seuraavasta lauseesta, josta oikeastaan olemme kiinnostuneita. *Fréchet'n ja Rieszin esityslause*[38] sanoo nimittäin, että myös ääretönulotteinen Hilbertin avaruus H on normiavaruutena isomorfinen[39] duaalinsa — nimenomaan topologisen duaalinsa — kanssa.

Lause 9.36 (Fréchet'n ja Rieszin esityslause).

(1) *Jokainen Hilbert-avaruuden vektori $a \in H$ määrää jatkuvan lineaarimuodon*

$$f_a : H \to \mathbb{K} : x \mapsto (x|a).$$

(2) *Kuvaus $H \to H^* : a \mapsto f_a$ on isometria, siis erityisesti injektio.*
(3) *Kuvaus $H \to H^* : a \mapsto f_a$ on myös surjektio, siis bijektio.*
(4) *Jos $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, niin kuvaus $H \to H^* : a \mapsto f_a$ on lineaarinen, siis vektoriavaruusisomorfismi. Jos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, niin kuvaus $H \to H^* : a \mapsto f_a$ on konjugaattilineaarinen eli toteuttaa $f_{\lambda a + \mu b} = \overline{\lambda} f_a + \overline{\mu} f_b$. Se on siis konjugaattilineaari-isomorfismi.*

Todistus. (1) ja (2) Sisätulo on määritelmän mukaan ensimmäisen muuttujansa suhteen lineaarinen ja CSB-epäyhtälön nojalla pätee $\|f_a\|_{H^*} = \|a\|_H$.

(3) Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen pääkohta on, että jokainen jatkuva lineaarimuoto $f : H \to H$ on muotoa f_a. Sen todistamiseksi kopioidaan euklidisesta tilanteesta arvaus, että tarvittava vektori a on annetun lineaarimuodon $f : H \to \mathbb{K}$ ytimen normaali. Ainakin sellainen on olemassa, sillä olemme edellä todistaneet projektiolauseen avulla, että Hilbertin avaruuden suljetulla aidolla aliavaruudella on ainakin yksi normaalivektori, ja ydin $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(\{0\})$ on selvästikin suljettu. Oletamme tietenkin, että ydin ei ole koko H, sillä muuten Fréchet'n ja Rieszin

[38] F. Riesz.

[39] Kompleksisessa tapauksessa konjugaattilineaarisesti isomorfinen

lauseen vektoriksi a kelpaisi nollavektori. On siis mahdollista valita jokin normaalivektori $v \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$, jolle $\|v\| = 1$.

Tarkastamme seuraavaksi, että normaalin valinnassa on hyvin vähän valinnanvaraa, sillä $\operatorname{Ker} f$:n normaalien muodostama aliavaruus on yksiulotteinen. Olkoot sitä varten u ja $w \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$. Voimme olettaa, että kumpikaan ei ole nolla. Koska $(\operatorname{Ker} f)^\perp$ on aliavaruus, kuuluu vektori $u + \lambda w$ siihen kaikilla $\lambda \in \mathbb{K}$. Valitsemalla $\lambda = -\frac{f(u)}{f(w)}$ saadaan $f(u + \lambda w) = 0$, joten tällöin

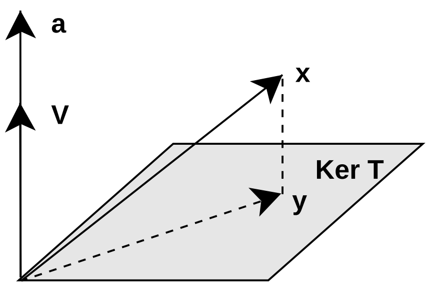
$$u + \lambda w \in \operatorname{Ker} f \cap (\operatorname{Ker} f)^\perp = \{0\}$$

ja siis u ja w ovat lineaarisesti riippuvat, kuten väitettin.

Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen pääkohta on todistettu, kunhan näytämme, että voidaan valita kerroin μ siten, että vektorille $a = \mu v$ pätee kaikilla $x \in H$:

$$f(x) = f_a(x) = (x|a).$$

Erityisesti on oltava $f(a) = (a|a)$, eli $\mu f(v) = (\mu v|\mu v) = |\mu|^2(v|v) = |\mu|^2$, siis $\mu = \overline{f(v)}$. Ehdokas Fréchet'n ja Rieszin lauseen vektoriksi a on siis $a = \overline{f(v)}\, v$.



KUVA 20. RIESZIN VEKTORI.

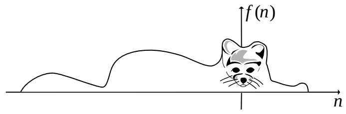
Kokeillaan toimiiko se. Olkoon $x \in H$ mikä tahansa vektori. Projektiolauseen mukaan sillä on lähin piste $y = P_{\operatorname{Ker} f}(x) \in \operatorname{Ker} f$ ja pätee $(x - y) \perp \operatorname{Ker} f$, joten $x - y$ on normaalivektorin a monikerta, $x - y = \beta a$. Olemme valmiina:

$$\begin{aligned} f_a(x) &= (x|a) = (y + (x - y)|a) = (y + \beta a|a) = (y|a) + \beta(a|a) = 0 + \beta f(a) \\ &= f(y) + f(\beta a) = f(y + \beta a) = f(x). \end{aligned}$$

Todistus oli lyhyt, koska se käytti voimakasta tulosta, projektiolausetta.

(4) $f_{\lambda a + \mu b}(x) = (x|\lambda a + \mu b) = \overline{\lambda}(x|a) + \overline{\mu}(x|b) = (\overline{\lambda} f(a) + \overline{\mu} f(b))(x)$. $\square$

Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen mukaan Hilbert-avaruuden jatkuvan lineaarimuodon ydin on suljettu aliavaruus, jonka ortogonaalinen komplementti eli normaalivektorien joukko on yksiulotteinen, ja itse lineaarimuoto on vakiokerrointa vaille sama asia kuin ortogonaaliprojektio tälle normaalille.



9.5. Suljetut ja tiheät hypertasot.

Määritelmä 9.37. Vektoriavaruuden V *lineaarinen hypertaso* eli 1-*kodimensionaalinen vektorialiavaruus* on sellainen aliavaruus $W \subset V$, joka toteuttaa seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot:

1. (1) W on jonkin nollasta eroavan lineaarimuodon ydin.
2. (2) W on *maksimaalinen aito aliavaruus*; se ei sisälly mihinkään muuhun aitoon aliavaruuteen kuin itseensä.
3. (3) Aliavaruuden W jokainen Hamel-kanta voidaan laajentaa koko avaruuden V Hamel-kannaksi lisäämällä siihen yksi vektori.
4. (4) Aliavaruuden W jokin Hamel-kanta voidaan laajentaa koko avaruuden V Hamel-kannaksi lisäämällä siihen yksi vektori.

Selitys. Ehdot ovat todella yhtäpitäviä: Nollasta eroavan lineaarimuodon $f : V \to \mathbb{K}$ ydin on maksimaalinen aito aliavaruus, sillä $\mathrm{Ker}(f)$ ja vektori x, jolle $f(x) \neq 0$, virittävät yhdessä koko avaruuden V, onhan jokainen vektori $y \in V$ muotoa

$$y = \frac{f(y)}{f(x)}x + (y - \frac{f(y)}{f(x)}x) \in \langle \{x\} \cup \mathrm{Ker}(f) \rangle.$$

Lisäämällä maksimaalisen aliavaruuden $W \subset V$ Hamel-kantaan mikä tahansa $x \in V \setminus W$ saadaan aliavaruus $\langle W \cup \{x\} \rangle$, joka on aidosti laajempi kuin W, siis koko avaruus V.

Jos K on aliavaruuden W Hamel-kanta, $x \notin W$ ja $\langle K \cup \{x\} \rangle = V$, niin kantavektoria x vastaava koordinaatti on lineaarimuoto, jonka ydin on W. $\square$

Huomautus 9.38. Äärellisulotteisen avaruuden $\mathbb{K}^n$ hypertaso on sama asia kuin sen $n-1$-ulotteinen aliavaruus.

Palaamme Hilbert-avaruuteen:

Lause 9.39. *Olkoon H ääretönulotteinen Hilbertin avaruus. Epäjatkuvan lineaarimuodon ydin on tiheä hypertaso, jatkuvan ydin on suljettu hypertaso.*

Todistus. Ytimen sulkeuma on aliavaruus, siis ytimen maksimaalisuuden nojalla joko H tai $\mathrm{Ker}\, f$, joten jatkuvan lineaarimuodon tapauksessa ainakin toteutuu jälkimmäinen vaihtoehto. Lauseen todistamiseksi riittää siis näyttää, että lineaarimuoto myös on jatkuva, jos sen ydin on suljettu. Tämä on itse asiassa jo todistettu, sillä Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen todistuksessa lineaarimuodon jatkuvuudesta käytettiin vain sitä tietoa, että sen ydin on suljettu ja saatiin, että lineaarimuoto on muotoa $f(x) = (x|a)$, siis varmasti jatkuva. $\square$

Lause 9.40. *On olemassa myös epäjatkuvia lineaarimuotoja*

$$f : H \to \mathbb{K}.$$

Todistus. Esimerkin[40] konstruoimiseksi turvaudumme sekä Hilbertin että Hamelin kannan käyttöön:

[40] Ystäväni Lassi Kuritun keksimä. Kiitos!

Hilbertin avaruudella H on Hilbertin kanta E. Muodostetaan vektoriavaruudessa H Hamelin kanta K valitsemalla ensin kantavektoreiksi numeroituva määrä ortonormaaliin kantaan E kuuluvien suuntaisia, mutta lyhennettyjä vektoreita $e_1, \frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_3, \ldots$ ja laajentamalla tämä jono Hamelin kannaksi. Määritellään nyt lineaarimuoto

$$f(x) = x\text{:n } K\text{-koordinaattien summa.}$$

Tämä summa on todella reaaliluku, koska vektori esitetään Hamel-kannassa äärellisen monen kantavektorin lineaarikombinaationa. Selvästi näin määritelty kuvaus f on lineaarinen $H \to \mathbb{K}$. Toisaalta f ei ole rajoitettu lineaarikuvaus, sillä $|f(e_n)| = n \to \infty$, vaikka $\|e_n\| = 1$. □

Huomautus 9.41. Myös yleisessä normiavaruudessa pätee lineaarimuodolle, että kunhan ydin on suljettu, niin lineaarimuoto on jatkuva. Koska edellä käyttämämme Fréchet'n ja Rieszin esityslause on Hilbert-avaruuden erityisominaisuus, todistamme yleisen lauseen luvussa 21 eri tavalla: suoraan määritelmistä.

10. Operaattorit ja kanta

10.1. Operaattorialgebra $\mathcal{B}(H)$.

Määritelmä 10.1. Kutsumme jatkuvia eli rajoitettuja lineaarikuvauksia Hilbertin avaruudelta H itselleen seuraavassa lyhyesti *operaattoreiksi.* Avaruuden H kaikkien operaattoreiden joukko on sen *operaattorialgebra*

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(H) = \mathcal{B}(H, H) = \{T : H \to H \mid T \text{ on lineaarinen ja jatkuva}\}.$$

Huomautus 10.2. Operaattorialgebra $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ on lauseen 6.8 mukaan normiavaruus, mutta sillä on enemmänkin rakennetta. Lineaarisuus ja jatkuvuushan säilyvät kuvausten yhteenlaskun ja luvulla kertomisen lisäksi myös kuvausten yhdistämisessä, ja laskutoimitukset $\circ$ ja $+$ tekevät joukosta $\mathcal{B}$ renkaan, jossa identtinen kuvaus I_H eli I toimii *ykkösalkiona.* Koska lineaarikuvausten yhdistäminen on matriisien kertolaskulle analoginen laskutoimitus, on merkki "$\circ$" tässä yhteydessä tapana jättää pois ja sanoa yhdistettyä kuvausta operaattoreiden *tuloksi.* Kuten matriisitulo on tämäkin kertolasku epäkommutatiivinen.

Rengas- ja vektoriavaruusaksioomien lisäksi pätee joukossa $\mathcal{B}$ näitä rakenteita yhdistävä yhtälöpari

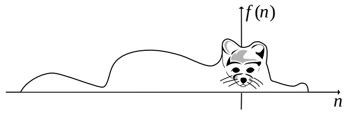
$$\lambda(TS) = (\lambda T)S = T(\lambda S),$$

ja operaattorialgebra on siis ns. *algebra.*[41] Lauseen 6.8 mukaan on vielä voimassa epäyhtälö

$$\|ST\| \leq \|S\|\|T\|.$$

joten operaattoreiden tulon muodostaminen on *jatkuva bilineaarikuvaus* $\mathcal{B}\times\mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Kaikenkaikkiaan $\mathcal{B}(H)$ kolmella laskutoimituksellaan ja operaattorinormilla varustettuna on *normialgebra.* Ei ole vaikeaa todistaa, että $\mathcal{B}(H)$ on myös täydellinen — todistus on kohdassa 14.1. Kaiken kaikkiaan $\mathcal{B}(H)$ on ns. *Banach-algebra.*

[41] Weierstrassin approksimaatiolauseen yhteydessä olemme tutkiskelleet kommutatiivista algebraa, jonka alkiot olivat funktioita.



10.2. Yleistetty neliömatriisi.

Huomautus 10.3. (Tavalliset matriisit). Hilbertin avaruudessa voi jatkuvia lineaarikuvauksia käsitellä kannan avulla pitkälti samalla tavalla kuin euklidisessa avaruudessa, jossa tunnetusti menetellään seuraavalla tavalla.

Kannalla $E = (e_1, \dots, e_n) = (e_i)_{i\in I}$ varustetussa äärellisulotteisessa vektoriavaruudessa $V = \mathbb{K}^n$ operaattoria $T : V \to V$ vastaa neliömatriisi

$$\mathrm{Mat}(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

joka muodostuu *matriisielementeistä* $a_{ij} = (Te_j|e_i)$. Matriisin j:s *sarake* eli *pystyvektori* $(a_{ij})_{i\in I}$ muodostuu kantavektorin e_j kuvan koordinaateista. Kun kanta on kiinnitetty, niin operaattori siis määräytyy täysin matriisistaan ja jokainen neliömatriisi määrittelee operaattorin $T : V \to V$.

Määritelmä 10.4. Olkoon $E = (e_i)_{i\in I}$ ortonormaali kanta Hilbertin avaruudessa H. Operattorin $T : H \to H$ *yleistetty neliömatriisi* on kuvaus

$$I \times I \to \mathbb{K} : (i, j) \mapsto a_{ij} = (Te_j|e_i)\,.$$

Huomautus 10.5. Lineaarisuutensa ja jatkuvuutensa vuoksi operaattori määräytyy kantavektorien kuvista, siis yleistetystä matriisistaan, onhan vektorin $x = \sum_{j\in I}(x|e_j)e_j = \sum_{j\in I} x_j e_j$ kuva

$$Tx = T\big(\sum_{j\in I} x_j e_j\big) = \sum_{j\in I} x_j Te_j = \sum_{j\in I} x_j\big(\sum_{i\in I} a_{ij}e_i\big) = \sum_{(i,j)\in I^2} a_{ij}x_j e_i.$$

Lyhennämme tuloksen muotoon

$$T = \sum_{(i,j)\in I^2} a_{ij}(\cdot|e_j)e_i.$$

Huomautus 10.6. Mikä tahansa kuvaus $I \times I \to \mathbb{K}$ ei kelpaa operaattorin matriisiksi, sillä *matriisielementit* $a_{ij} = (Te_j|e_i)$ ovat kantavektorien kuvien koordinaatit

$$Te_j = \sum_{i\in I}(Te_j|e_i)e_i = \sum_{i\in I} a_{ij}e_i\,,$$

joten kullakin j enintään numeroituvan moni *yleistetyn sarakkeen*

$$(a_{ij})_{i\in I} = \big((Te_j|e_i)\big)_{i\in I}$$

termi on nollasta eroava, ja ne muodostavat ℓ^2-jonon, jonka normi on enintään $\|T\|$. Myös *yleistetyt rivit*

$$(a_{ij})_{j\in I} = \big((Te_j|e_i)\big)_{j\in I}$$

ovat ℓ^2-jonoja, normiltaan nekin enintään $\|T\|$, sillä kullakin $i \in I$ kuvaus

$$x \mapsto (Tx|e_i)$$

on jatkuva lineaarimuoto avaruudessa H, joten Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen nojalla on olemassa vektori $T^*e_i \in H$, jolla $(Tx|e_i) = (x|T^*e_i)$ kaikilla $x \in H$, ja erityisesti

$$a_{ij} = (Te_j|e_i) = (e_j|T^*e_i) = \overline{(T^*e_i|e_j)},$$

mistä näkyy, että yleistetty rivi $(a_{ij})_{j\in I}$ muodostuu vektorin T^*e_i koordinaattien kompleksikonjugaateista.[42] Huomaamme pian, että nämäkään ehdot eivät riitä karakterisoimaan operaattoreiden yleistettyjä matriiseja.

10.3. Diagonalisoituvuus Hilbertin kannassa.

Johdanto 10.7. Tässä luvussa määritellään diagonalisoituvuus ortonormaalin kannan mielessä, kerrataan tietoja äärellisulotteisesta tapauksesta ja annetaan alustavia esimerkkejä ortonormaalissa kannassa diagonalisoituvista ja diagonalisoitumattomista operaattoreista.

Määritelmä 10.8. Hilbertin avaruuden H operaattori $T \in \mathcal{B}(H)$ on *diagonaalinen Hilbertin kannassa* $E = \{e_i\}_{i\in I}$, mikäli tässä kannassa sen matriisin *lävistäjän* ulkopuoliset matriisielementit

$$a_{ij} = (Te_j|e_i), \quad i \neq j,$$

ovat nollia, eli merkiten *lävistäjäalkioita* $a_{ii} = \lambda_i$:

$$T = \sum_{i\in I} \lambda_i(\cdot|e_i)e_i\,.$$

Operaattori $T \in \mathcal{B}(H)$ on *kannassa diagonalisoituva* mikäli on olemassa avaruuden H ortonormaali kanta, jossa T on diagonaalinen.

Lukija miettiköön, millä ehdolla lukujono kelpaa diagonaalisen jatkuvan operaattorin lävistäjäksi. Ainakaan 1234... ei kelpaa, mutta 1111... käy.

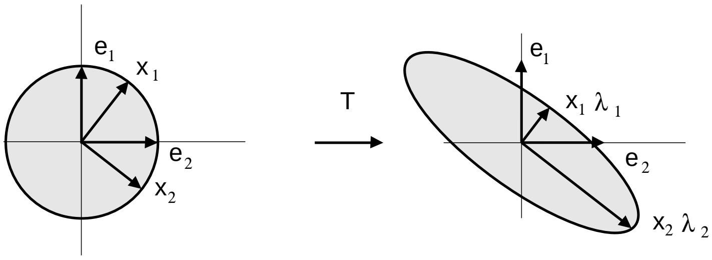
Ennenkuin alamme tutkia kannassa diagonalisoituvia operaattoreita yleisessä Hilbertin avaruudessa kertaamme äärellisulotteisen diagonalisointiteorian pääkohdat. ([KH] luvut 5,6 ja 7. — Asian muistava siirtyköön suoraan kohtaan 10.10.)

Kertaus 10.9. Klassisen määritelmän mukaan operaattorin $T : V \to V$ *ominaisarvo* on luku $\lambda \in \mathbb{K}$, jolle on olemassa *ominaisvektori* $v \in V \setminus \{0\}$ siten, että $Tv = \lambda v$. Äärellisulotteisen avaruuden $H = \mathbb{K}^n$ operaattori T *diagonalisoituu lineaarialgebrallisesti*, jos vektoriavaruudella $\mathbb{K}^n$ on operaattorin T ominaisvektoreista muodostuva lineaarialgebrallinen kanta, *ominaiskanta*, jossa siis T:n matriisi on ominaisarvoista muodostuva diagonaalimatriisi D. Diagonalisoituvan operaattorin matriisi mielivaltaisessa kannassa, esimerkiksi standardikannassa, on $U^{-1}DU$,

[42] Tässä määritelty T^* on sama kuin T:n *adjungaatti*.

missä kannanvaihtomatriisin U sarakkeet ovat vanhat kantavektorit, siis operaattorin T ominaisvektorit, lausuttuna uudessa kannassa, ja sen käänteismatriisin U^{-1} sarakkeet ovat uudet kantavektorit lausuttuna ominaiskannassa.

Mikäli uusi ja vanha kanta ovat ortonormaaleja samassa sisätulossa, niin kannanvaihtomatriisin U sarakkeet ovat ortonormaaleja, eli U on *unitaarinen* (reaalisessa tapauksessa sanotaan *ortogonaalinen*). Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että matriisia U vastaava operaattori on isometrinen isomorfismi. Neliömatriisi M ja vastaava operaattori ovat *ortogonaalisesti diagonalisoituvia*, kun $M = U^{-1}DU$, missä D on diagonaalimatriisi ja U on unitaarinen. Probleemana on tunnistaa ortogonaalisesti diagonalisoituvat operaattorit ja löytää D ja U, kun M on annettu. Osoittautuu, että avaruudessa $\mathbb{R}^n$ ortogonaalisesti diagonalisoituvia ovat tasan ne matriisit, joiden matriisi on *symmetrinen*: $a_{ij} = a_{ji}$.



KUVA 21: SYMMETRISEN REAALISEN OPERAATTORIN OMINAISKANTA.

Avaruudessa $\mathbb{C}^n$ ortogonaalisesti diagonalisoituvia ovat puolestaan ainakin kaikki *hermiittiset*[43] operaattorit, siis sellaiset, joiden matriisi on *konjugaattisymmetrinen*, eli kaikilla indeksipareilla on $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Hermiittisen operaattorin diagonalisoituvuustodistus on reaalisenkin tapauksen taustateoria ja sen ideana on, että konstruoidaan vaaditut ominaisvektorit ratkaisemalla $n+1$ muuttujan algebrallinen yhtälö

$$Tx = \lambda x.$$

Tämä *karakteristinen yhtälö* on muuttujan λ suhteen epälineaarinen, mutta tuntemattomille $x_1, \ldots, x_n$ lineaarinen homogeeninen yhtälöryhmä, jolle etsitään nollasta eroavaa ratkaisua. Koska matriisi on kääntyvä tasan silloin, kun sen determinantti eroaa nollasta, ominaisarvot λ_i ovat *karakteristisen polynomin*

$$P_T(\lambda) = \det((a_{ij}) - \lambda)$$

nollakohdat. Niitä on algebran peruslauseen nojalla aina olemassa kunnassa $\mathbb{C}$.

Palaamme ääretönulotteiseen tilanteeseen.

HUOMAUTUS 10.10. Kohdan 10.9 alussa annettu ominaisvektorin määritelmä toimii sinänsä missä tahansa vektoriavaruudessa, mutta siihen liittyy seuraava huomionarvoinen seikka. Luku $\lambda \in \mathbb{K}$ on operaattorin T ominaisarvo tasan silloin, kun $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$ eli kun $\lambda I - T$ ei ole injektio, vaan vastaava matriisi on kääntymätön eli sen determinantti on 0. Determinattitekniikan käyttö ääretönulotteisessa

[43] CHARLES HERMITE 1822–1901, Ranska

avaruudessa on melko hankalaa ja asiaa pahentaa vielä se, että operaattorin injektiivisyys ja kääntyvyys ovat ääretönulotteisessa tapauksessa eri asioita. Esimerkiksi avaruudessa ℓ^2

oikea siirto: $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (0, x_1, x_2 \dots)$ on jopa isometria, mutta ei surjektio,
vasen siirto: $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$ on surjektio, mutta ei injektio.

LAUSE 10.11 (KANNASSA DIAGONALISOITUVAN OPERAATTORIN OMINAISKANTA). *Olkoon H yleinen Hilbertin avaruus. Operaattori T on kannassa diagonalisoituva tasan silloin, kun on olemassa sen ominaisvektoreista muodostuva ortonormaali kanta $E = \{e_i\}_{i\in i}$. Tällaisessa kannassa, jollaista sanotaan operaattorin T* ominaiskannaksi, *on voimassa*

$$T = \sum_{i\in I} \lambda_i (\cdot|e_i)e_i\,,$$

missä luvut $\lambda_i \in \mathbb{K}$ ovat ominaisvektoreihin e_i liittyvät ominaisarvot.

PERUSTELU. Väite on ilmeinen.

ESIMERKKI 10.12 (HILBERTIN KANNASSA DIAGONALISOITUVIA JA DIAGONALISOITUMATTOMIA OPERAATTOREITA).

(1) Identtinen kuvaus on tietenkin valmiiksi diagonaalinen jokaisessa kannassa. Tässä on kiintoisaa korkeintaan se, että Hilbertin mielessä ylinumeroituvaulotteisessa Hilbertin avaruudessa summa $I = \sum_{i\in I} (\cdot|e_i)e_i$ sisältää ylinumeroituvan monta nollasta eroavaa termiä.

(2) Ortogonaalinen projektio suljetulle aliavaruudelle K diagonalisoidaan valitsemalla aliavaruudelle K ortonormaali kanta I ja laajentamalla se koko avaruuden ortonormaaliksi kannaksi $E = I \cup J$. Tietysti $Pe = e$ kaikille $e \in I$, mutta toisaalta $Pe = 0$ kaikille $e \in J$, sillä $I \subset K^\perp = (\operatorname{Im} P^) \perp = \operatorname{Ker} P$. Projektio P diagonalisoituu kannassa $E = I \cup J$:

$$Px = P\Big(\sum_{e\in I} x_e e + \sum_{e\in J} x_e e\Big) = \sum_{e\in I} x_e e = \sum_{e\in E = I\cup J} \lambda_e x_e e,$$

missä

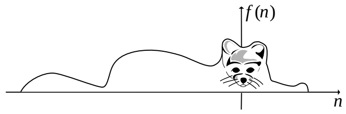
$$\lambda_e = \begin{cases} 1\,, & \text{kun } e \in I \\ 0\,, & \text{kun } e \in J. \end{cases}$$

Projektion ominaisarvot ovat siis 0 ja 1 ja vastaavat *ominaisavaruudet* eli samaan ominaisarvoon kuuluvien ominaisvektorien joukot (lisättynä nollalla) ovat $\operatorname{Ker} P$ ja $\operatorname{Im} P$.

(3) Valmiiksi diagonaalimuodossa annetut operaattorit on tietysti kovin helppo diagonalisoida.

(4) Perusesimerkki Hilbertin kannassa diagonalisoituvasta operaattorista on "kompakti", (erityisesti äärellisasteinen) "normaali" operaattori. Kompaktien operaattorien diagonalisointiin palaamme omassa luvussaan.

10.4. Unitaariset ja hermiittiset operaattorit sekä adjungaatti.
Koska operaattorin diagonalisointi äärellisulotteisessa avaruudessa on helpompaa kompleksisessa kuin reaalisessa tilanteessa ja liittyy unitaarisiin ja hermiittisiin operaattoreihin, on syytä koettaa käyttää vastaavia käsitteitä myös ääretönulotteisessa avaruudessa. Seuraavat määritelmät on asetettu yleisesti, mutta muuten tarkastelemme seuraavassa enimmäkseen kompleksisia Hilbert-avaruuksia.



Määritelmä 10.13. *Unitaarinen operaattori* $U : H \to H$ on bijektio $H \to H$, jolle pätee

$$(Ux|Ux) = (x|x) \text{ kaikille } x \in H,$$

toisin sanoen unitaarinen operaattori on sama asia kuin Hilbertin avaruuden isomorfismi itselleen.

Huomautus 10.14. Unitarisuuden määritelmään kuuluu isometrisuusehdon lisäksi nimenomaan, että U on surjektio, siis bijektio.

Palautamme mieleen, että mikä tahansa sisätulon säilyttävä kuvaus U säilyttää vektorien pituuden $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ ja että — polaarikaavan takia — isometrisuus on myös riittävää sisätulon säilymiselle. Isometrinen lineaarikuvaus on edelleen automaattisesti injektio ja myös rajoitettu; sen normi on 1. (Paitsi nollaulotteisessa avaruudessa 0.)

Huomautus 10.15. Banach-algebran $\mathcal{B}(H)$ kääntyvien alkioiden ryhmää merkitään yleensä $\mathrm{GL}(H)$. Unitaariset operaattorit muodostavat sen aliryhmän $\mathrm{U}(H)$, ts. kahden unitaarisen operaattorin yhdistetty kuvaus on unitaarinen ja unitaarisen operaattorin käänteiskuvaus on unitaarinen.

Lause 10.16 (Unitaarisuuden klassiset määritelmät). *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä sisätuloavaruuden lineaariselle surjektiolle $U : H \to H$:*

(1) *U on unitaarinen.*
(2) $(Ux|Uy) = (x|y) \quad \forall x, y \in H.$
(3) *U on bijektio ja* $(x|Uy) = (U^{-1}x|y) \quad \forall x, y \in H.$

Hilbertin avaruudessa, ortonormaalissa kannassa $E = (e_i)_{i \in I}$ yhtäpitäviä ovat myös:

(4) $(Ue_i|Ue_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in I.$
(5) $\sum_{k \in I} a_{ik}\overline{a_{kj}} = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in I.$ *Tässä* $a_{ij} = (Ue_j|e_i)$.

Erityisesti yksiulotteisen avaruuden operaattori $U : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ on unitaarinen, kun

$$Ux = \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{C} \text{ ja tässä } |\lambda| = 1.$$

Todistus. Totesimme jo yllä, että isometriaehdosta (2) seuraa U:n injektiivisyys, siis tässä bijektiivisyys, ja että isometrisen bijektion käänteiskuvaus U^{-1} on isometria, joten $(x|Uy) = (U^{-1}x|U^{-1}Uy) = (U^{-1}x|y)$, eli (3) pätee. Ehdosta (3) saadaan ehto (2) samaan tapaan: $(Ux|Uy) = (U^{-1}Ux|y) = (x|y)$.

Kantaan liittyvien väitteiden todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi. □

Määritelmä 10.17. Hilbertin avaruuden H operaattori A on *hermiittinen* eli *itseadjungoitu*[44], jos kaikille $x, y \in H$ pätee

$$(Ax|y) = (x|Ay).$$

Esimerkki 10.18. Yksinkertaisin esimerkki hermiittisestä operaattorista on yksiulotteisen avaruuden operaattori

$$A : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : Ax = \lambda x, \qquad \text{missä } \lambda \text{ on reaalinen.}$$

[44]Hermiittistä operaattoria sanotaan myös *konjugaattisymmetriseksi.*

LAUSE 10.19 (HERMIITTISYYDEN KLASSISET MÄÄRITELMÄT). *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä sisätuloavaruuden jatkuvalle operaattorille* $A \in \mathcal{B}(H)$

(1) A *on hermiittinen.*
(2) $(Ax|y) = (x|Ay)$ *kaikille* $x, y \in H$.

Hilbertin avaruuden ortonormaalissa kannassa $E = (e_i)_{i \in I}$ *yhtäpitävää on myös:*

(3) *Kaikilla* $i, j \in I$ *on*

$$a_{ij} = (Ae_i|e_j) = (e_i|Ae_j) = \overline{(Ae_j|e_i)} = \overline{a}_{ji},$$

ts. A:n yleistetty matriisi on konjugaattisymmetrinen, *reaalisessa tapauksessa* symmetrinen.

Erityisesti hermiittisen operaattorin yleistetyn matriisin diagonaalialkiot eli lävistäjäalkiot $a_{ii} = (Ae_i|e_i)$ *ovat reaalisia.*

Kompleksisessa Hilbert-avaruudessa on hermiittisyyden kanssa yhtäpitävää myös

(4) $(Ax|x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$.

TODISTUS. Ehtojen (1) ja (2) yhtäpitävyys on määritelmä, ehto (3) on sopiva harjoitustehtävä. Ehto (4) on tietysti välttämätön, sillä jos A on hermiittinen, niin $(Ax|x) = (x|Ax) = \overline{(Ax|x)}$. Ehdon (4) riittävyys on hiukan mutkikkaampi asia, joten todistamme sen. Jos ehto on voimassa, niin sovelletaan sitä vektoriin $x + \alpha y$, missä $\alpha \in \mathbb{C}$. Saadaan

$$\mathbb{R} \ni \underbrace{(Ax|x)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{(A(\alpha y)|\alpha y)}_{\in \mathbb{R}} + (A(\alpha y)|x) + (Ax|\alpha y).$$

Tästä seuraa, että $(A(\alpha y)|x) + (Ax|\alpha y)$ eli $\alpha(Ay|x) + \overline{\alpha}\overline{(y|Ax)}$ on reaalinen kaikilla $\alpha \in \mathbb{C}$. On lopuksi helppoa todeta, että jos kahdella kompleksiluvulla z ja w on ominaisuus $\alpha z + \overline{\alpha} w \in \mathbb{R}\, \forall \alpha \in \mathbb{C}$, niin $z = \overline{w}$. (Valitse ensin $\alpha = 1$ ja sitten $\alpha = i$.) $\square$

HUOMAUTUS 10.20. Hermiittisen operaattorin ominaisarvot ovat reaalilukuja.

Hermiittisyys, unitaarisuus ja seuraavana määriteltävät normaalius sekä operaattorin reaali- ja imaginaariosa voidaan lausua elegantisti käyttämällä operaattorin adjungaatin käsitettä.

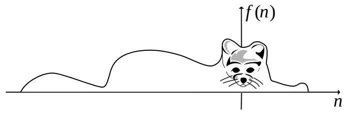
MÄÄRITELMÄ 10.21. Olkoon H Hilbertin avaruus. Operaattorin $T \in \mathcal{B}(H)$ *adjungaatti* on operaattori $T^* \in \mathcal{B}(H)$, jolla on ominaisuus

$$(x|Ty) = (T^*x|y) \quad \forall x, y \in H.$$

Esimerkiksi avaruuden ℓ^2 oikea ja vasen siirto ovat toistensa adjungaatteja.

LAUSE 10.22. *Olkoon* H *Hilbertin avaruus, ja* $A = (a_{ij})$ *operaattorin* $T \in \mathcal{B}(H)$ *yleistetty matriisi ortonormaalissa kannassa* $E = (e_i)_{i \in I}$. *Operaattorin* T *adjungaatti on olemassa ja yksikäsitteinen ja sillä on lisäksi seuraavat ominaisuudet:*

(1) $(Tx|y) = (x|T^*y) \quad$ *kaikilla* $x, y \in H$.



(2) $T^{**} = T$
(3) $\|T^*\| = \|T\|$
(4) *Kuvaus* $T \mapsto T^*$ *on* konjugaattilineaarinen, *ts.*
$(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ *ja* $(T+S)^* = T^* + S^*$.
(5) $(TS)^* = S^* T^*$
(6) *Jos* T *on kääntyvä, niin myös* T^* *on kääntyvä ja* $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.
(7) *Adjungaatin* T^* *yleistetty matriisi kannassa* E *on* $\overline{A}^t = (\overline{a_{ji}})$.
(8) $\operatorname{Ker} T = T^*(H)^\perp$ *ja siis myös* $\operatorname{Ker} T^* = T(H)^\perp$.

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Seuraus 10.23. *a) Operaattori* $T \in \mathcal{B}$ *on unitaarinen aina ja vain, kun*

$$T^* = T^{-1}.$$

b) Operaattori $T \in \mathcal{B}$ *on hermiittinen aina ja vain, kun*

$$T^* = T.$$

10.5. Normaalien operaattoreiden diagonalisoituvuudesta.
Äärellisulotteisessa kompleksisessa avaruudessa $H = \mathbb{C}^n$ operaattori $T \in \mathcal{B}(H)$ diagonalisoituu ortogonaalisesti täsmälleen ollessaan normaali. Normaalius liittyy diagonalisointiin myös äärettönulotteisessa tapauksessa:

Määritelmä 10.24. Kompleksisessa Hilbert-avaruudessa jokainen operaattori $T : H \to H$ on muotoa

$$T = A + iB,$$

missä A ja B ovat kumpikin hermiittisiä operaattoreita, nimittäin T:n *reaaliosa* $A = \frac{1}{2}(T + T^*)$ ja *imaginaariosa* $B = -\frac{i}{2}(T - T^*)$.

Huomautus 10.25. Jos $T = A + iB$, missä A ja B ovat hermiittisiä, niin $T^* = A - iB$, joten A ja B ovat tällöin T:n reaali- ja imaginaariosa.
Operaattorien reaali- ja imaginaariosia voi käsitellä pitkälti kuten kompleksilukujen reaali- ja imaginaariosia. Merkittävä ero aiheutuu kuitenkin operaattorialgebran epäkommutatiivisuudesta. Tämä antaa aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 10.26. Kompleksisen Hilbert-avaruuden operaattori T on *normaali*, jos ja vain jos se toteuttaa seuraavat kolme keskenään yhtäpitävää ehtoa:

(1) T kommutoi adjungaattinsa kanssa eli

$$TT^* = T^*T.$$

(2) T:n reaaliosa A ja imaginaariosa B *kommutoivat* keskenään:

$$AB = BA.$$

(3)

$$(Tx|Ty) = (T^*x|T^*y) \quad \text{kaikille } x, y \in H.$$

Ehtojen yhtäpitävyyden voi lukija itse todeta helposti. Erityisesti jokainen hermiittinen tai unitaarinen operaattori on tietysti normaali.

HUOMAUTUS 10.27. Normaaleille operaattoreille lause 10.22.(8) terästyy muotoon

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = T(H)^\perp = T^*(H)^\perp.$$

Erityisesti normaalille operaattorille T pätee $H = \overline{T(H)} \oplus \operatorname{Ker} T$.

PERUSTELU. Harjoitustehtävä. □

Hilbertin kannassa diagonaalisen operaattorin $D = \sum_{i\in I} \lambda_i(\cdot|e_i)e_i$ reaali- ja imaginaariosa $D_1 = \sum_{i\in I} \operatorname{Re}\lambda_i(\cdot|e_i)e_i$ ja $D_2 = \sum_{i\in I} \operatorname{Ima}\lambda_i(\cdot|e_i)e_i$ ovat reaalisia diagonaalimatriiseja ja kommutoivat keskenään, joten jokainen diagonaalinen operaattori — ja siis jokainen jossain kannassa diagonalisoituva operaattori — on normaali. Äärellisulotteisessa avaruudessa normaalius myös takaa diagonalisoituvuuden:

LAUSE 10.28. *Äärellisulotteisen avaruuden $\mathbb{C}^n$ operaattori on normaali aina ja vain ollessaan ortogonaalisesti diagonalisoituva. Erityisesti hermiittiset ja unitaariset operaattorit ovat ortogonaalisesti diagonalisoituvia.*

PERUSTELU. Kompleksisen avaruuden $\mathbb{C}^n$ normaali operaattori on muotoa $T = A + iB$, missä $A = A^*$, $B = B^*$ ja $AB = BA$. Hermiittinen operaattori A on lineaarialgebran kertauksen 10.9 mukaan diagonalisoituva jossakin ortonormaalissa kannassa. Valitaan $\mathbb{C}^n$:lle operaattorin A diagonalisoiva ortonormaali kanta E ja numeroidaan se niputtaen yhteen kuhunkin ominaisavaruuteen H^A_λ kuuluvat kantavektorit. Toisin sanoen

$$E = \bigcup_{\lambda\in\Lambda(A)} \{e^\lambda_1, \dots, e^\lambda_{n_\lambda}\},$$

missä $\Lambda(A)$:lla on merkitty A:n kaikkien ominaisarvojen joukkoa. Tällöin

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda(A)} \langle e^\lambda_1, \dots, e^\lambda_{n_\lambda}\rangle = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda(A)} H^A_\lambda$$

ortogonaalisena suorana summana ominaisavaruuksista.

Nyt $B(H^A_\lambda) \subset H^A_\lambda$, sillä

$$x \in H^A_\lambda \implies ABx = BAx = B\lambda x = \lambda Bx \implies Bx \in H^A_\lambda.$$

Koska siis B:n rajoittuma aliavaruuteen H^A_λ on lineaarikuvaus $H^A_\lambda \to H^A_\lambda$, vieläpä tietenkin hermiittinen, niin se diagonalisoituu jossakin H^A_λ:n ortonormaalissa kannassa, olkoon se $\{f^\lambda_1, \dots, f^\lambda_{n_\lambda}\}$. A ja B diagonalisoituvat molemmat koko avaruuden ortonormaalissa kannassa

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda(A)} \{f^\lambda_1, \dots, f^\lambda_{n_\lambda}\}. \quad \square$$

Seuraava lause sanoo, että äärettönulotteisessakin avaruudessa normaali, sopivassa mielessä äärellisulotteinen operaattori diagonalisoituu kannassa.

Lause 10.29. (Äärellisasteinen normaali operaattori). *Olkoon* $T \in \mathcal{B}(H)$ äärellisulotteinen *eli* äärellisasteinen operaattori, *ts. olkoon kuva-avaruus* $T(H)$ *äärellisulotteinen. Tällöin* T *diagonalisoituu kannassa tasan ollessaan normaali.*

Perustelu. Ehto on välttämätön, koska jokainen kannassa diagonalisoituva operaattori on normaali. Riittävyyden todistamiseksi valitaan kuva-avaruudelle $T(H)$ ortonormaali kanta $e_1, \ldots, e_n$, jolloin T voidaan lausua muodossa

$$x \mapsto Tx = \sum_{j=1}^{n} (Tx|e_j)e_j.$$

Tässä jokainen kerroinfunktionaali $(T \cdot |e_j)$ on yhdistetty kuvaus jatkuvista lineaarikuvauksista T ja $(\cdot|e_j)$, siis lineaarinen jatkuva funktio $H \to \mathbb{K}$ eli H:n duaalin alkio. Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen mukaan on siis olemassa vektorit $a_j \in H$ $(1 \leq j \leq n)$ siten, että $(Tx|e_j) = (x|a_j)$ kaikille $x \in H$. Jokainen äärellisasteinen operaattori $T : H \to H$ on siis muotoa

$$x \mapsto Tx = \sum_{j=1}^{n} (x|a_j)e_j. \tag{1}$$

Ideana on nyt huomata, että operaattori T toimii olennaisesti ainoastaan äärellisulotteisessa aliavaruudessa $H_1 = \langle e_1, e_2, \ldots e_n, a_1, a_2 \ldots a_n \rangle \subset H$. Tämän voi päätellä hajottamalla koko avaruuden suoraksi summaksi $H = H_1 \oplus H_1^{\perp}$. Kaavasta (1) näkyy, että $T(H_1) \subset T(H) \subset H_1$ ja että jälkimmäisessä osassa T on pelkkä nollakuvaus, ts. $T(H_1^{\perp}) = \{0\}$.

Vasta nyt käytetään normaaliusoletusta. Todistetaan ensin, että myös rajoittuma $T\,\big|_{H_1} : H_1 \to H_1$ on normaali operaattori. Lauseen 10.27 mukaan on nimittäin $T^*(H_1) \subset T^*(H) \subset T^*(H)^{\perp\perp} = T(H)^{\perp\perp} = T(H) \subset H_1$, joten T^* on operaattori $H_1 \to H_1$ ja siksi rajoittuman $T\,\big|_{H_1}$ adjungaatti $\left(T\,\big|_{H_1}\right)^*$ on rajoittuma $T^*\,\big|_{H_1}$, onhan kaikille $x, y \in H_1$

$$(T\,\big|_{H_1}(x)|y) = (Tx|y) = (x|T^*y) = (x|T^*\,\big|_{H_1} y).$$

Rajoittuman normaalius saadaan siis siitä, että kaikille $x, y \in H_1$ pätee

$$\left(T\,\big|_{H_1}(x) \,\big|\, T\,\big|_{H_1}(y)\right) = (Tx|Ty) = (T^*x|T^*y) = \left(T^*\,\big|_{H_1}(x) \,\big|\, T^*\,\big|_{H_1}(y)\right).$$

H_1:n äärellisulotteisuuden takia rajoittuma on diagonalisoituva. On olemassa H_1:n ortonormaali kanta $(f_1, \ldots, f_m)$ ja luvut $\lambda_{f_1}, \ldots, \lambda_{f_m}$ siten, että kaikilla $x \in H_1$

$$x = \sum_{i=1}^{m} (x|f_i)f_i \overset{T}{\longmapsto} \sum_{i=1}^{m} \lambda_{f_i}(x|f_i)f_i.$$

Laajentamalla kanta $(f_1, \ldots, f_m)$ koko Hilbert-avaruuden H ortonormaaliksi kannaksi F saadaan alkuperäiselle operaattorille T diagonaaliesitys

$$T = \sum_{i=1}^{m} \lambda_{f_i}(\cdot|f_i)f_i = \sum_{f \in F} \lambda_f(\cdot|f)f, \tag{2}$$

missä on merkitty $\lambda_f = 0$ kaikilla $f \in F \setminus \{f_1, \dots, f_m\}$.

Ääretönulotteisesa avaruudessa ei päde, että kaikki normaalit tai edes hermiittiset operaattorit olisivat diagonalisoituvia. Seuraava lause kertoo kuitenkin jotakin aiheeseen liittyvää.

Lause 10.30 ($*$). *Hilbertin avaruudessa kaksi kannan mielessä diagonalisoituvaa operaattoria T ja S, diagonalisoituvat yhtäaikaa eli samassa kannassa tasan kommutoidessaan, eli kun $TS = ST$.*

Erityisesti operaattori diagonalisoituu ortonormaalissa kannassa aina ja vain, kun sen reaali- ja imaginaariosa diagonalisoituvat kannassa — ei tarvitse erikseen olettaa, että samassa kannassa — ja kommutoivat. Ortogonaalisessa kannassa diagonalisoituvuuden voi siis testata tutkimalla pelkkiä hermiittisiä operaattoreita.

Perustelu. Käytämme ja yleistämme lauseen 10.28 todistuksen ideaa.

Diagonalisoidaan ensin T ja huomataan, että T:n ominaisavaruudet H_λ^T ovat suljettuja ja invariantteja S:n suhteen, ts. $S(H_\lambda^T) \subset H_\lambda^T$, ja taaskin S:n rajoittuma kuhunkin aliavaruuteen H_λ^T on lineaarikuvaus $H_\lambda^T \to H_\lambda^T$. Voidaksemme viedä päättelyn loppuun kuten edellä, meidän tulee näyttää, että rajoittuma $S\,\big|_{H_\lambda^T}$ diagonalisoituu tämän lauseen oletuksin jossakin H_λ^T:n ortonormaalissa kannassa. Tämä seuraa lemmasta 10.31, joka itsessäänkin on kiintoisa. $\square$

Lemma 10.31 ($*$). *Väitämme, että kannassa diagonalisoituvan operaattorin T suljetut invariantit aliavaruudet ovat seuraavat:*

(1) *ominaisavaruudet H_λ^T,*
(2) *ominaisavaruuksien suljetut aliavaruudet $\overline{W_\lambda} \subset H_\lambda^T$,*
(3) *edellä mainittujen äärelliset ortogonaaliset suorat summat,*
(4) *ominaisavaruuksien aliavaruuksien $W_\lambda \subset H_\lambda^T$ (mahdollisesti äärettömän monen) suljetut ortogonaaliset suorat summat*

$$W = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda_W} W_\lambda} = \overline{\left\langle \bigcup_{\lambda \in \Lambda_W} W_\lambda \right\rangle}, \quad \textit{missä } \Lambda_W \subset \{T\textit{:n ominaisarvot}\}.$$

Muita ei ole! Erityisesti on siis niin, että kannassa diagonalisoituvan operaattorin T rajoittuma invarianttiin aliavaruuteensa on kantadiagonalisoituva.

Todistus. Operaattorin T invariantti aliavaruus on määritelmän mukaan aliavaruus $W \subset H$, jolla $T(W) \subset W$. Kohdat (1)–(4) ovat ilmeisiä ja tietenkin kohta (4) sisältää muut kolme. Varsinainen väite on, että ei ole olemassa muita suljettuja invariantteja aliavaruuksia kuin kohdassa (4) mainitut.

Olkoon $W \subset H$ suljettu invariantti aliavaruus. Merkitään $\Lambda(T) = \{T\text{:n ominaisarvot}\}$. Oletuksen mukaan T diagonalisoituu kannassa, joten koko avaruus H on suljettu ortogonaalinen suora summa operaattorin T ominaisavaruuksista:

$$H = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda(T)} H_\lambda^T}\,. \tag{1}$$

Merkitään P_λ:lla ortogonaaliprojektiota aliavaruudelle H_λ^T ja osoitetaan, että

$$\text{(2)} \qquad W = \overline{\bigoplus_{\lambda \in \Lambda(T)} P_\lambda W}.$$

Kaavasta (1) näkyy, että $W \subset \overline{\bigoplus_{\lambda\in\Lambda(T)} P_\lambda W}$, joten riittää näyttää, että jokainen $P_\mu W$ sisältyy avaruuteen W. Olkoon siis $y \in P_\mu W$ eli $y = P_\mu x$, missä $x \in W$. On osoitettava, että $y \in W$. Kaavan (1) mukaan

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda(T)} P_\lambda x.$$

Oletetaan aluksi, että vain äärellisen moni komponenteista $P_\lambda x$ eroaa nollasta. Voidaan tietysti olettaa $y = P_\mu x$ on yksi niistä. Olkoon φ polynomi, jolla $\varphi(\mu) = 1$ ja $\varphi(\lambda) = 0$ muilla em. luvuilla λ. Tarkastellaan operaattoria $\varphi(T)$.

Ainakin $\varphi(T)\,x = y$, sillä $\varphi(T)$:n rajoittuma T:n ominaisavaruuteen H_λ^T on tietenkin kuvaus $v \mapsto \varphi(\lambda)\,v$. Toisaalta W on myös operaattorin $\varphi(T)$ invariantti aliavaruus, eli $\varphi(T)\,(W) \subset W$. Siis $y \in W$.

Todistus ei ole vielä aivan valmis, sillä teimme matkan varrella rajoittavan oletuksen. Tiedämme oikeastaan vasta, että jos $x \in W$ ja $P_\lambda x \neq 0$ vain äärellisen monella λ, niin $P_\lambda x \in W$. Äärellisulotteisessa Hilbert-avaruudessa H kaikki olisi siis kunnossa. Asia tulee kuntoon käyttämällä T:n ominaiskantaa $\{e_i \bigm| i \in I\}$.

Olkoon $U = \bigoplus_{\lambda\in A} U_\lambda$, missä $A \subset \Lambda(T)$ on äärellinen ja kukin $U_\lambda \subset H_\lambda^T$ on äärellisen ominaiskantavektorijoukon F_λ virittämä. Olkoon $V_A = P_A(W)$, missä P_A on ortogonaaliprojektio avaruudelle U_A, jolloin

$$V_A = \Big\{ \sum_{e \in F_\lambda} (e|x)e \bigm| x \in W \Big\}.$$

Nyt V_A on invariantti, onhan $Tx \in W$ ja

$$T\Big(\sum_{e\in F_\lambda} (e|x)e \Big) = \sum_{e\in F_\lambda} (e|x)Te = \sum_{e\in F_\lambda} (e|x)\lambda e = \sum_{e\in F_\lambda} \big(\lambda(e|x)\big)e = \sum_{e\in F_\lambda} (e|Tx)e.$$

Soveltamalla todistuksen alkuosan päättelyä äärellisulotteiseen invarianttiin aliavaruuteen V_A huomaamme, että $V_A = \bigoplus_{\lambda\in A} V_\lambda$, missä $V_\lambda \subset U_\lambda \subset H_\lambda$.

Tästä väite seuraa. $\square$

10.6. Yleistyksiä (∗).

ENNAKKOTIETO 10.32. *Niin sanottu kompakti normaali operaattori diagonalisoituu myös ollessaan ääretönasteinen, ja tällöin sen nollasta eroavat ominaisarvot muodostavat nollaan suppenevan jonon tai niitä on vain äärllinen määrä.*

SELITYS. Lukija voi halutessaan katsoa kompaktin operaattorin määritelmän 18.8. ja tarkastaa, että valmiiksi diagonaalinen operaattori on kompakti tasan silloin, kun sen diagonaalialkiot muodostavat nollaa kohti suppenevan jonon.

Seuraava Lebesguen avaruuteen $L^2([0,1],\mathbb{C})$ (ks. luku 15.) perustuva esimerkki kumoaa mahdollisen harhaluulon, että Hilbertin avaruuden jokainen normaali — tai edes hermiittinen — operaattori olisi kannassa diagonalisoituva.

ESIMERKKI 10.33. HERMIITTINEN OPERAATTORI, JOLLA EI OLE YHTÄÄN OMINAISARVOA. Olkoon $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ paloittain jatkuva funktio. Kuvaus

$$T_g : L^2([0,1],\mathbb{C}) \to L^2([0,1],\mathbb{C}) \colon f \mapsto gf$$

on hermiittinen operaattori.[45] Määrätään sen ominaisvektorit eli *ominaisfunktiot* $f \in L^2([0,1],\mathbb{C})$ ja ominaisarvot $\lambda \in \mathbb{C}$, siis ratkaistaan ominaisarvoyhtälö

$$\begin{aligned} T_g f &= \lambda f, \text{ eli} \\ g(x)f(x) &= \lambda f(x) \quad \forall x \in [0,1] \quad ; \qquad (f \neq 0 \in L^2). \end{aligned}$$

Ratkaisu on ilmeinen: melkein jokaisessa pisteessä on oltava $f(x)(\lambda - g(x)) = 0 \in L^2([0,1],\mathbb{C})$, eli ominaisfunktion f täytyy hävitä melkein kaikilla x, joille $g(x)$ ei ole λ. Jos $g(x) \neq \lambda$ mk., niin $f = 0 \in L^2([0,1],\mathbb{C})$. Operaattorin T_g ominaisarvoja ovat siis ne ja vain ne luvut $\lambda \in \mathbb{R}$, joilla $\{x \mid g(x) \neq \lambda\}$ on positiivimittainen. Jos esimerkiksi

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ kun } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ x, \text{ kun } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases},$$

niin ainoa ominaisarvo on 1 ja vastaavia ominaisfunktioita ovat kaikki välillä $\frac{1}{2} < x \le 1$ melkein kaikkialla häviävät funktiot, paitsi tietysti $0 \in L^2([0,1],\mathbb{C})$.

Erikoistapauksessa, jossa g saa vain arvot 0 ja 1, operaattori T_g on ortogonaalinen projektio aliavaruudelle

$$\{f \in L^2[0,1] \;\big|\; \text{mk. } x \in [0,1] : g(x) = 0 \implies f(x) = 0\}.$$

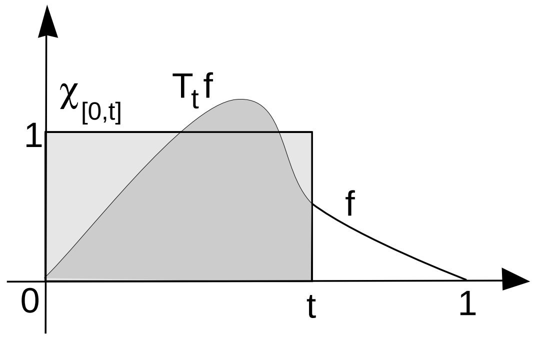
Esimerkkinä tästä tilanteesta olkoon $g = \chi_{[0,t]}$, missä $0 \le t \le 1$. Kuvaus

$$T_t = T_{\chi_{[0,t]}} : L^2 \to L^2 : f \mapsto f \cdot \chi_{[0,t]}$$

on ortogonaalinen projektio. Huomaa, että

$$f \cdot \chi_{[0,t]}(t) = \begin{cases} f(t), \text{ jos } x \le t \\ 0, \text{ jos } x > t. \end{cases}$$

[45]Selvästi $gf \in L^2([0,1],\mathbb{C})$. Myös hermiittisyys on lähes ilmeinen. Ks. esim. [Di] tai [W].



Kuva 22. Projektio $T_t : L^2 \to L^2$.

Jos taas esimerkiksi $g(x) = x^2$, ei ominaisarvoja ole lainkaan. Tällöin kuvausta T_g ei siis ainakaan voi esittää diagonaalimuodossa kannassa.

Huomautus 10.34. (Diagonalisointi spektraali-integraalina). Ääretönulotteisessa tapauksessa diagonalisointiprobleema on sekä mielenkiintoinen että sovellusten kannalta merkittävä, mutta uudella tavalla mutkikas, koska edellisen esimerkin mukaan on olemassa hermiittisiä operaattoreita, joilla ei ole ollenkaan ominaisarvoja, saati ominaiskantaa. Yleisen hermiittisen operaattorin "diagonalisointi" Hilbertin avaruudessa saadaan tästä huolimatta joten kuten onnistumaan hyväksymällä yleistettyjä "diagonaaliesityksiä", joissa summa on korvattu operaattoriarvoisen funktion integraalilla. Tämä asia liittyy "diskreettiin ja jatkuvaan spektriin".

11. Hilbertin avaruuksien sovelluksia

11.1. Fourier'n sarjoista.

Perusesimerkki Hilbertin avaruuden ortonormaalista kannasta on tietysti avaruuden ℓ^2 standardikanta. Kiinnostavampaa on metsästää kantoja funktioavaruuksista. Reaaliset Fourier-sarjat ovat alkuperäinen syy Hilbertin avaruuksien tutkimiselle ja siten koko funktionaalianalyysille.

Esimerkki 11.1 (Reaaliset Fourier-sarjat). Välillä $[0, 2\pi]$ määritellyt trigonometriset funktiot $\sin(nt)$, $\cos(nt)$ ja vakiofunktio 1 ovat tunnetusti sisätulon

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$$

mielessä ortogonaaliset. Laskemalla normit saa niistä muodostettua ortonormaalin joukon, jonka alkioina ovat vakiofunktio

$$c_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ja funktiot

$$s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt)$$

ja

$$c_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt).$$

Mutta mikä on niiden virittämä Hilbert-avaruus? FOURIER'n ihmeellinen oivallus oli, että "kaikki funktiot" $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ kuuluvat siihen. Ainakaan ei tarvitse rajoittua pelkkiin jatkuviin funktioihin, vaan esimerkiksi mitä tahansa Riemann-integroituvaa funktiota voi approksimoida trigonometrisella polynomilla yllämainittua sisätuloa vastaavan normin $\|\cdot\|_2$ mielessä. Nykyisin tiedämme, että täsmälleen oikea avaruus on — kuten saattaa arvata — yleistetty funktioavaruus $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$, jonka määritelmän ja täydellisyystodistuksen esitämme luvussa 15. Tämä tarkoittaa siis, että Lebesgue'in avaruus $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ varustettuna em. sisätulolla on reaalinen Hilbert-avaruus ja että seuraavat kantateoriamme mukaan keskenään yhtäpitävät lauseet ovat tosia.

(1) Funktiot c_n ja s_n muodostavat avaruuteen $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ ortonormaalin kannan.

(2) *Reaalisten trigonometristen polynomien* aliavaruus

$$\mathcal{T}[0, 2\pi] = \big\langle \{s_n \bigm| n \in \mathbb{N}\} \cup \{c_n \bigm| n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \big\rangle$$

on tiheä avaruudessa $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

(3) $\mathcal{T}[0, 2\pi]^\perp = \{0\}$.

(4) Jos $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ ja $(f|c_0) = (f|s_n) = (f|c_n) = 0$ kaikilla n, niin $f = 0$.

(5) Avaruuden $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ alkiot ovat muotoa

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} (f|s_n) s_n + \sum_{n=0}^{\infty} (f|c_n) c_n\,.$$

(6) Avaruuden $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ alkiot ovat muotoa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} b_0 + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)\,,$$

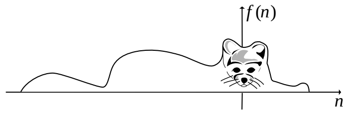
missä *Fourier-kertoimet* saadaan kaavoista

$$\begin{aligned} a_n &= (f|s_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt \\ b_0 &= (f|c_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(t)\, dt \\ b_n &= (f|c_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt. \end{aligned}$$

Ehdot (5) ja (6) ovat sama asia ja merkitsevät, että jokainen $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ on *Fourier-sarjansa* summa avaruuden $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ metriikassa eli normin $\|\cdot\|_2$-mielessä:[46]

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \left(\sum_{n=1}^{m} a_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} b_0 + \sum_{n=1}^{m} b_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx) \right) \right|^2 dx = 0.$$

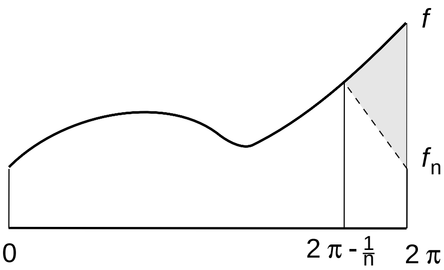
[46] Mittateorian mielessä myös pisteittäin melkein kaikkialla, mutta ei yleensä tasaisesti — ei tietenkään ainakaan koskaan silloin, kun rajafunktio on epäjatkuva.



Perustelu. Väitteet voidaan todistaa lopullisesti vasta luvussa 15, kun Lebesgue'in avaruus $L^2([0,2\pi],\mathbb{R})$ on määritelty. Erityisesti oikeus merkitä $\|\cdot\|_2-$normia integraalina on perusteltava. Hahmottelemme esimerkissä mainittujen väitteiden todistuksen kuitenkin jo nyt.

Stonen ja Weierstrassin approksimointilauseen seurauksen mukaan reaaliset trigonometriset polynomit ovat tiheässä $2\pi-$jaksollisten jatkuvien funktioiden avaruudessa $\{f \in \mathcal{C}[0,2\pi] \mid f(0) = f(2\pi)\}$ sup-normin mielessä ja siis myös $\|\cdot\|_2-$normin mielessä. Toisaalta jokaista jatkuvaa funktiota $f \in \mathcal{C}([0,2\pi],\mathbb{R})$ voi approksimoida jaksollisella jatkuvalla funktiolla normin $\|\cdot\|_2$ mielessä, onhan kuvan 23 tilanteessa

$$\|f_n - f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f_n - f|^2 = \int_{2\pi-\frac{1}{n}}^{2\pi} |f_n - f|^2 \leq \tfrac{1}{n} 4 \|f\|_\infty^2.$$



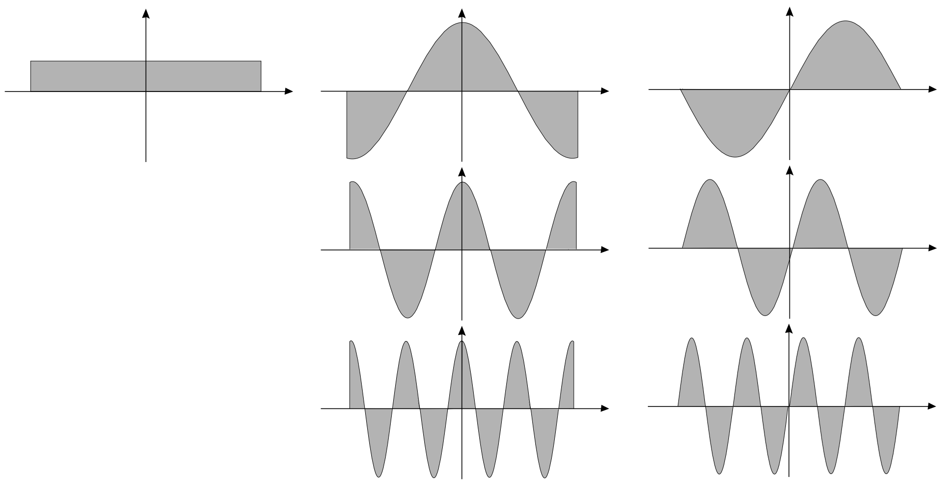
Kuva 23. $\|\cdot\|_2$-approksimointi jaksollisella jatkuvalla funktiolla.

Mittateoriasta saadaan tieto, että jaksolliset jatkuvat funktiot puolestaan ovat $\|\cdot\|_2-$tiheässä avaruudessa $L^2([0,2\pi])$. L^2-avaruuden täydellisyys on *Rieszin ja Fischerin lause* vuodelta 1907.[47] (Väite kohdassa 11.5. ja todistus 15.14.)

Huomautus 11.2. Funktiot $\sin(nt)$ ja $\cos(nt)$ ovat oikeastaan määritellyt koko reaaliakselilla ja $2\pi-$jaksollisia. Siksi kaikki edellisen kohdan tarkastelut voi siirtää vaikka välille $[-\pi,\pi]$ tai jollekin muulle 2π:n mittaiselle välille. Voimme myös luonnollisella tavalla tulkita kaikki esiintyneet funktiot $2\pi-$jaksollisiksi koko reaaliakselilla määritellyiksi, kuten Weierstrassin approksimointilauseen yhteydessä jo teimmekin. Yhtälailla voi funktioiden määrittelyjoukkoa lisäksi vielä skaalata ja siirtää tarkastelut mille tahansa välille. Esimerkiksi avaruuteen $L^2[-1,1]$, saadaan Fourier'n klassinen kanta vakiofunktiosta $\frac{1}{2}$ ja funktioista $s_n(t) = \sin(n\pi t), c_n = \cos(n\pi t)$. Toisinaan Fourier-sarjoilla laskiessa on tapana painottaa sisätulon määrittelevää integraalia vakiolla ja asettaa esimerkiksi

$$(f|g) = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\, dt$$

[47]F. Riesz, Ernst Sigismund Fischer 1875–1954, Itävalta-Saksa.



KUVA 24. FOURIER'N KANTA.

Määrittelyjoukko $[0, 2\pi]$ voidaan myös tulkita alkuperäisellä tavalla ympyrän kehäksi esimerkiksi samastamalla "kulma" $t \in [0, 2\pi]$ kompleksilukuun $e^{it} \in \mathbb{C}$. Tämä on luontevaa etenkin tarkasteltaessa kompleksiarvoisia funktioita, kuten seuraavassa teemmekin.

ESIMERKKI 11.3 (KOMPLEKSISET FOURIER-SARJAT). Funktiot

$$u_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

muodostavat ortonormaalin jonon sisätulon

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

mielessä. Koska $e^{-ikz} = \overline{e^{ikz}}$, niin Stonen ja Weierstrassin lauseen ehdot toteutuvat ja tiedämme, että funktioiden u_k kompleksikertoimiset lineaarikombinaatiot, kompleksiset trigonometriset polynomit, ovat *tasaisesti tiheässä* avaruudessa $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$, missä X on kompleksitason yksikköympyrän kehä. Tämähän merkitsee, että jokaista $2\pi-$jaksollista jatkuvaa funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ja lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa kompleksinen trigonometrinen polynomi $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$, jolla $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$.

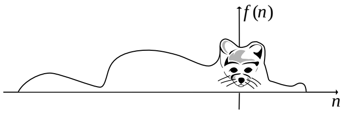
Samaan tapaan kuin reaalisessa tapauksessa voidaan tästä päätellä, että jono $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ on kanta kompleksisessa Lebesgue'in avaruudessa $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$.

MÄÄRITELMÄ 11.4. Esimerkki 11.3 merkitsee, että avaruuden $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ alkiot ovat muotoa

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k,$$

missä kaikilla kokonaisluvuilla $k \in \mathbb{Z}$ on $u_k(t) = e^{ikt}$ ja

$$c_k = (f|u_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{ikt}\, dt\,.$$



Sarjaa $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k$ sanotaan yleensä *funktion f Fourier-sarjaksi* ja sen suppeneminen normin $\|\cdot\|_2$ mielessä on sitä, että

$$\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k u_k(t) \right|^2 dt \to 0, \text{ kun } n \to \infty.$$

Muotoilemme lopuksi tämän kappaleen päätulokset klassisella tavalla: Että $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ on täydellinen ja että $\{u_k | k \in \mathbb{Z}\}$ on sen Hilbert-kanta sisältyy seuraavaan lauseeseen:

Lause 11.5 (Riesz ja Fischer 1907). *Jos*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty,$$

niin on olemassa funktio $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ siten, että

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k u_k, ,$$

missä kaikilla kokonaisluvuilla $k \in \mathbb{Z}$ on $u_k(t) = e^{ikt}$ ja $(f \mid u_k) = c_k$.

Tunnettu Parsevalin lause saa näiden tietojen varassa $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$:ssä muodon

Lause 11.6 (A. Parseval, jo 1799).

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_k|^2.$$

11.7. Huomautus. Reaaliset Fourier-sarjat ovat tietysti erikoistapaus kompleksisista. Fourier-kertoimien lausekkeesta näkee, että reaaliarvoisen L^2-funktion $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ Fourier-sarjan kertoimet ovat pareittain toistensa konjugaatteja:

$$c_k = \overline{c_{-k}},$$

ja sarjasta näkee, että tästä ehdosta myös seuraa f:n reaalisuus. Eulerin kaavan

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

mukaan on tällöin siis

$$c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt} = a_k \cos kt + b_k \sin kt$$

ja jo edellä johtamamme funktiot

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 3t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 3t, \ldots$$

muodostavat siis Hilbert-kannan avaruudessa $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Fourier'n sarjoilla on valtavasti merkitystä niin matematiikassa kuin sen sovellusaloillakin, emmekä mitenkään voi esitellä niiden kaikkia käytötarkoituksia.[48] Mainitkaamme tässä vain malliksi, että niillä on mahdollista saada nopeasti konvergoivia sarjoja π: laskemiseksi vaikkapa seuraavalla tavalla:

11.8. Sovellus (π:n laskeminen nopeasti). Tarkastelemme $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$-funktiota $f(t) = t$. Laskemme sen L^2-normin Parsevalin kaavan kummallakin tavalla.

$$
\begin{aligned}
\|f\|_2^2 &= \int_0^{2\pi} t^2\,dt = \frac{8}{3}\pi^3 \\
c_k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} te^{-ikt}\,dt = -\frac{\sqrt{2\pi}}{ik}, \text{ kun } k > 0, \\
c_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} t\,dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\pi^2 \\
\text{siis } \|f\|_2^2 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{8\pi^3}{3},
\end{aligned}
$$

joten

$$
\pi^2 = 6\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.
$$

Vastaavasti saadaan

$$
\begin{aligned}
\pi^4 &= 90\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \\
\pi^6 &= 945\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}, \text{ jne.}
\end{aligned}
$$

Nämä kaavat löytyvät mm. Ernst Lindelöfin klassisen oppikirjasarjan osasta III sivulta 197.[49]

11.2. Muita kantoja (∗).

Esimerkki 11.9 (Legendre'in polynomit)[50]. Stonen ja Weierstrassin approksimointilauseesta ja jatkuvien funktioiden L^2-tiheydestä seuraa, että rationaalikertoimisten polynomien aliavaruus $\mathcal{P}[-1, 1]$ on tiheä $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$:ssa. Polynomiavaruuden $\mathcal{P}[-1, 1]$ lineaarialgebrallinen kanta $\{1, x, x^2, \dots\}$ virittää siis tiheän aliavaruuden, mutta jono $\{1, x, x^2, \dots\}$ ei ole ortonormaali, eipä edes ortogonaalinen avaruudessa $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$. Asian voi korjata Gramin ja Schmidtin prosessilla.

---

[48] Liittessä kerrotaan Fourier-sarjojen käytöstä eräiden differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen.

[49] Noin on Ari Lehtonen sanonut. Minun kirjani on ikävä kyllä Helsingin yliopiston raatelema erikoispainos, josta tuo sivu on poistettu. Kaava löytyi kyllä päälläni olevasta matematiikan laitoksen T-paidasta. (Tekijän huomautus.)

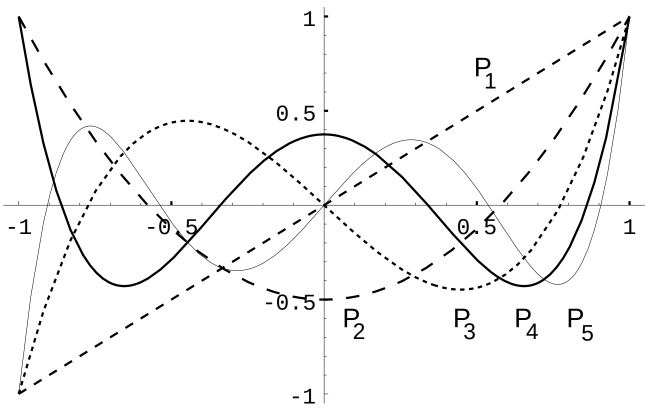
[50] Adrien-Marie Legendre 1752–1833, Ranska.

Osoittautuu, että näin saadun ortonormaalin jonon polynomit ovat *normitetut Legendre'in polynomit.*

$$\Pi_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(t),$$

missä polynomit $P_n(t)$ ovat normittamattomat, kuitenkin ortogonaaliset *Legendre'in polynomit*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$



KUVA 25. NORMITTAMATTOMAT LEGENDRE'IN POLYNOMIT P_1–P_5.

On muitakin tunnettuja polynomeista muodostettuja kantoja kuin Legendre'in polynomit. Koska jokainen polynomijono, joka sisältää kaikenasteisia polynomeja, virittää kaikkien polynomien aliavaruuden, on jokainen kaikenasteisia polynomeja sisältävä ortonormaali jono avaruuden $L^2[-1,1]$ kanta. Eri käyttötarkoituksiin onkin vakiintunut monenlaisia kantoja.

ESIMERKKI 11.10. (TŠEBYŠEVIN POLYNOMIT). *Tšebyševin polynomit*[51] ovat funktiot $T_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$:

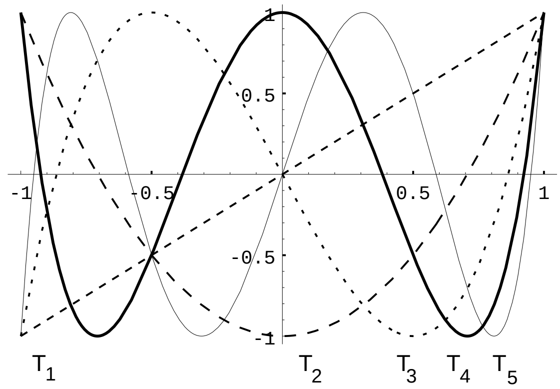
$$T_n(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2^{2^n-1}}} \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t).$$

Lausekkeesta näkyy, että vakiotekijää vaille on $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$, joten kyseessä on todella jono polynomeja. Tšebyševin polynomit ovat ortonormaaleja painotetun sisätulon

$$(f|g) = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt$$

suhteen. Kertoimet $\sqrt{\frac{\pi}{2^{2^n-1}}} \frac{1}{2^{n-1}}$ on valittu siten, että saadaan ortonormaali kanta, joten samat polynomit voi siis laskea Gram-Schmidt-ortonormittamalla jonon $\{1, x, x^2, \dots\}$ tämän sisätulon suhteen.

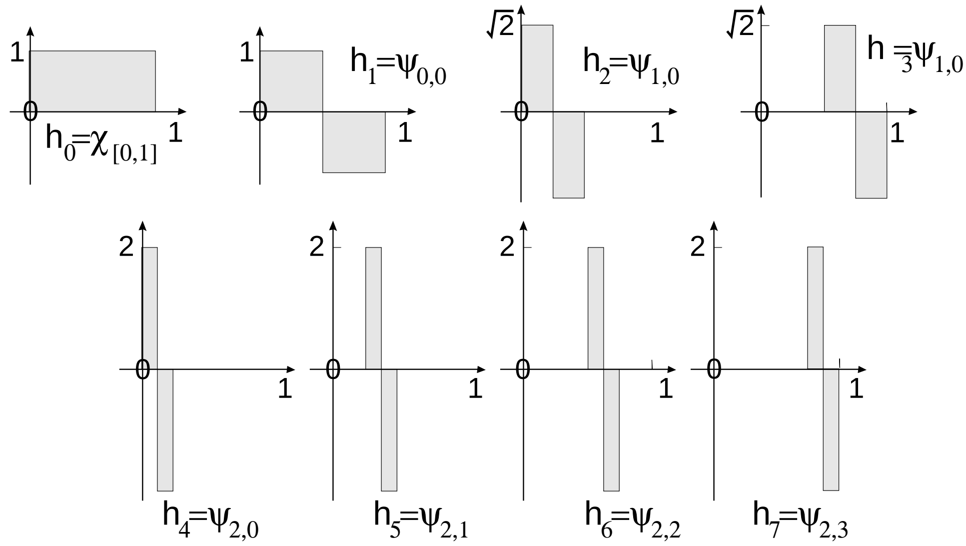
[51] PAFNUTI LVOVITŠ TŠEBYŠEV 1821–1894, Venäjä.



KUVA 26. TŠEBYŠEVIN POLYNOMIT T_1–T_5.

11.3. Väresarjat ja Rieszin kannat (∗).

HUOMAUTUS 11.11. *Klassiset Haarin funktiot* ovat funktiot $h_n : [0,1] \to \mathbb{R} : h_n(t) = \psi_{j,k}$, missä $n = 2^j + k$, $j = 0, 1, \ldots$ ja $k = 0, \ldots, 2^j - 1$. Yhdessä vakion 1 kanssa ne muodostavat ortonormaalin kannan avaruudessa $L^2[0,1]$.



KUVA 27. KLASSISET HAARIN FUNKTIOT.

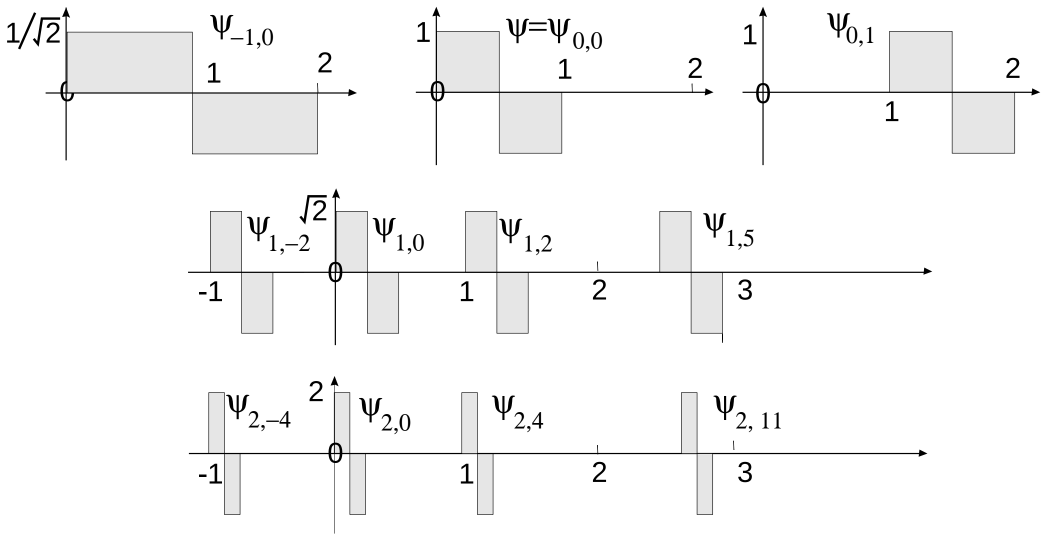
Samalla idealla voi saada kannan avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$ ottamalla mukaan myös "pienet taajuudet". Huomaa, että vakiota ei tarvita.

ESIMERKKI 11.12 (HAARIN VÄREKANTA)[52]. Olkoon $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritelty paloittain

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, \text{ kun } t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, \text{ kun } t \in (\frac{1}{2}, 1] \\ 0, \text{ muuten.} \end{cases}$$

[52] ALFRÉD HAAR 1885–1933, Unkari.

Merkitään $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, kun $j, k \in \mathbb{Z}$. Funktiot $\psi_{j,k}$, missä $j, k \in \mathbb{Z}$, muodostavat avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ ortonormaalin kannan, ns. *Haarin värekannan.* Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ esitystä tässä kannassa sanotaan sen *Haar-väresarjaksi.*



Kuva 28. Haarin värekantafunktioita.

Haarin värekantaa voi yleistää seuraavalla tavalla.

Määritelmä 11.13. Funktio $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *ortonormaali perusväre* mikäli *ψ-väreet* eli funktiot $\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, kun $j, k \in \mathbb{Z}$, muodostavat avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ ortonormaalin kannan, *värekannan.*

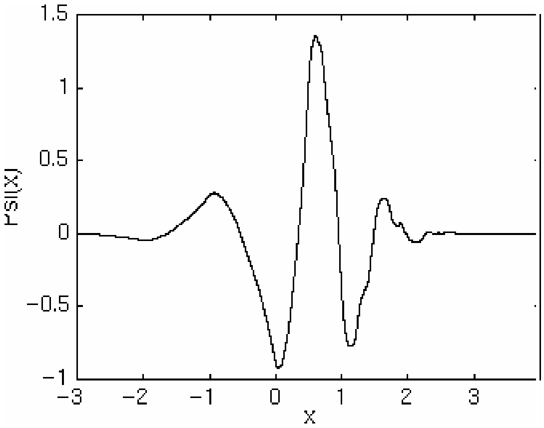
Sovellusten kannalta olisi toivottavaa, että perusväre olisi mahdollisimman sileä funktio ja että se eroaisi nollasta vain välillä $[0, 1]$. Haarin ortonormaali perusväre häviää kyllä välin $[0, 1]$ ulkopuolella, mutta on epäjatkuva. Jatkuvien välin $[0, 1]$ ulkopuolella häviävien ortonormaalien perusväreiden olemassaolo onkin hankala todistaa ja sileyden osalta asia on vielä hiukan mutkikkaampi — $\mathcal{C}^\infty$-tyyppistä eli mielivaltaisen monesti derivoituvaa, välin $[0, 1]$ ulkopuolella häviävää perusvärettä ei tosiaankaan ole olemassa. Tunnetaan kyllä $\mathcal{C}^\infty$-perusväre, mutta se on ainoastaan *nopeasti vähenevä* siinä mielessä, että $\lim_{t\to\pm\infty} \psi(t)f(t) = 0$ kaikille polymomeille f.

Esimerkki 11.14 (Daubechies'n värekanta, 1988)[53]. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $\mathcal{C}_c^n$-tyyppinen eli n kertaa derivoituva, rajoitetun joukon komplementissa häviävä eli *kompaktikantajainen* perusväre.[54]

---

[53] Ingrid Daubechies 1954—, Belgia, USA

[54] Kuva 29 on peräisin sivulta http://cnx.rice.edu/content/m11172/latest.



KUVA 29. DAUBECHIES'N $\mathcal{C}_c^4$-PERUSVÄRE.

Sovellustarkoituksiin on kehitetty monenlaisia "väreitä" sen mukaan mitä ominaisuuksia kulloinkin tarvitaan. Koska ortonormaaleilta väreiltä ei voi vaatia kaikkia haluttuja ominaisuuksia, on kehitetty myös hieman yleistettyjä versioita värekannoista. Esimerkiksi ortogonaalisuudesta voi tinkiä hiukan seuraavalla tavalla, jolla on yleisempääkin merkitystä.

MÄÄRITELMÄ 11.15. Hilbertin avaruuden H *Rieszin kanta* on jono H:n vektoreita $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, jolla on ominaisuudet:

(1) $\langle \psi_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle$ on tiheä.
(2) On olemassa positiiviluvut A ja B siten, että kaikilla $c = (c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ pätee

$$A\|c\|_2 \le \|\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k\|_H \le B\|c\|_2.$$

Rieszin[55] kanta on kanta siinä mielessä, että jokainen vektori $x \in H$ voidaan esittää tasan yhdellä tavalla muodossa $x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k$. Lisäksi tällöin koordinaattijono kuuluu avaruuteen ℓ^2. Tämä asiantila johtuu siitä, että kuvaus $I : \ell^2 \to H : c \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k$ on tekemiemme oletusten mukaan lineaarinen homeomorfismi. Koska ℓ^2 on täydellinen, on myös sen kuvajoukko $\{\sum_{k=1}^{\infty} c_k\psi_k \mid c \in \ell^2\}$ täydellinen ja siis suljettu. Oletus (1) takaa, että kuvajoukko on koko H.

Kaiken kaikkiaan Rieszin kanta on siis avaruuden ℓ^2 Hilbertin kannan lineaarinen homeomorfinen kuva. Erityisesti ovat siihen liittyvät koordinaattifunktionaalit jatkuvia lineaarikuvauksia ja siis samastettavissa joihinkin vektoreihin $\phi_k \in H$, joten vektorin $x \in H$ esitys Rieszin kannassa on

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x|\phi_k)\psi_k$$

[55] MARCEL RIESZ 1886–1969, Unkari-Ruotsi.

ja erityisesti yksikäsitteisestä esityksestä

$$\psi_j = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_j|\phi_k)\psi_k$$

näkyy, että

$$(\psi_j|\phi_k) = \delta_{jk},$$

eli jonot $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ ja $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ ovat *toisilleen duaaliset* eli muodostavat *biortogonaalijärjestelmän.* Myös $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on Rieszin kanta. Jos alkuperäinen kanta $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on ortonormaali, niin molemmat kannat tietenkin yhtyvät.

Värekannan käsitettä voidaan menestyksellisesti yleistää määrittelemällä, että funktio $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on *Riesz-perusväre* mikäli se toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) *ψ-väreet* eli funktiot $\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t - k)$, kun $j, k \in \mathbb{Z}$, muodostavat avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ Rieszin kannan.

(2) Myös duaalikannalla $(\phi_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}} \subset L^2(\mathbb{R})$ on ominaisuus

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{j/2}\phi_{0,0}(2^j t - k).$$

Tällöin tietysti myös $\phi = \phi_{0,0}$ on Riesz-perusväre ja sitä sanotaan ψ:n *duaaliväreeksi.*

Edellä tehdyn konstruktion tarkoitus on se, että jokainen funktio $f \in L^2(\mathbb{R})$ on helppo esittää Riesz-perusväreen ψ määrittelemässä Riesz-kannassa eli *väresarjana* kunhan tunnetaan perusväreen ψ lisäksi duaaliväre ϕ.

11.4. Fourier'n muunnos (∗).

Määritelmä 11.16. Integroituvan funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Fourier-muunnos* on funktio

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x)\, dx.$$

Fourier-muunnosta ei voi määritellä Hilbert-avaruuden $L^2(\mathbb{R})$ funktiolle tällä kaavalla, koska integraali ei suppene kaikilla neliöintegroituvilla f. Määrittely onnistuu kuitenkin — vieläpä erittäin hyvin – pienellä kiertotiellä.

a) Aliavaruudessa $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f \text{ on integroituva}\}$ Fourier-muunnos määritellään em. kaavalla.

b) Huomataan, että $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ pätee kaikilla $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

c) Huomataan, että $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ on tiheä avaruudessa $L^2(\mathbb{R})$.

d) Yleiselle $f \in L^2(\mathbb{R})$ määritellään $\hat{f} = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n$, missä $f_n \to f$ ja $f_n \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Näin saatua isometrista operaattoria $F : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) : f \mapsto \hat{f}$ sanotaan *Fourierin ja Plancherelin operaattoriksi* – arkikielessä *Fourier-muunnokseksi.*

Huomautus 11.17. Fourier-muunnoksella on hyvin suuri merkitys niin matematiikassa kuin fysiikassakin. Matematiikan kannalta on tärkeää muun muassa se, että Fourier-muunnosta voi käyttää differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen samaan tapaan kuin reaalista versiotaan, *Laplace-muunnosta.*[56]

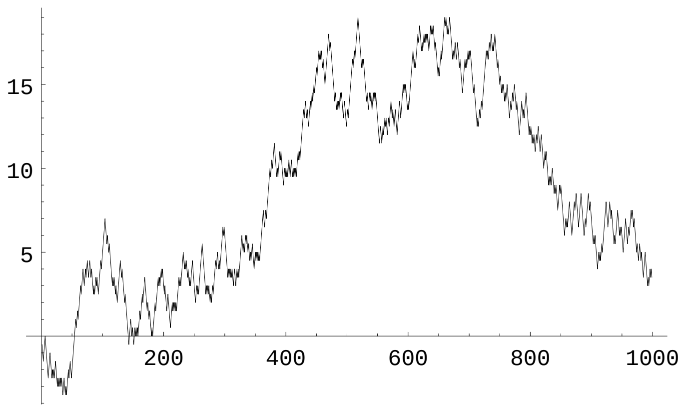
---

[56]Pierre-Simon Laplace 1749–1827, Ranska. Lisätietoja muunnoksesta: [KY]

11.5. Itôn stokastinen integraali (∗).

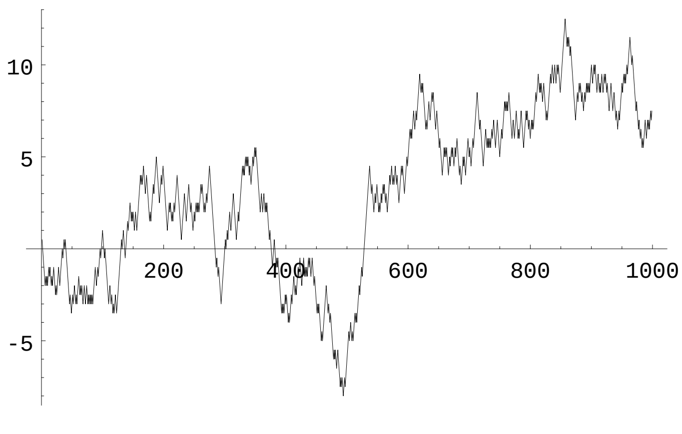
TAUSTA 11.18. *Stokastiikka* käsittelee todennäköisyysteoriaa, siis mittateoriaa ja erityisesti ns. diskreettejä ja jatkuvia stokastisia prosesseja. Jälkimmäisiin kuuluu Brownin liike, johon Itôn integraali liittyy. Määrittelemme seuraavassa yksiluotteisen Brownin liikkeen ja sitten Itôn integraalin. Lopuksi esittelemme Itôn integraalin ja tavallisen derivaatan välisen yhteyden, *Itôn kaavan.*

Motivaationa Brownin liikkeen määritelmälle tarkastelemme aluksi yksiulotteisia satunnaiskulkuja aikavälillä $[0, \infty[$, tai oikeastaan välillä $[0, 1000]$.



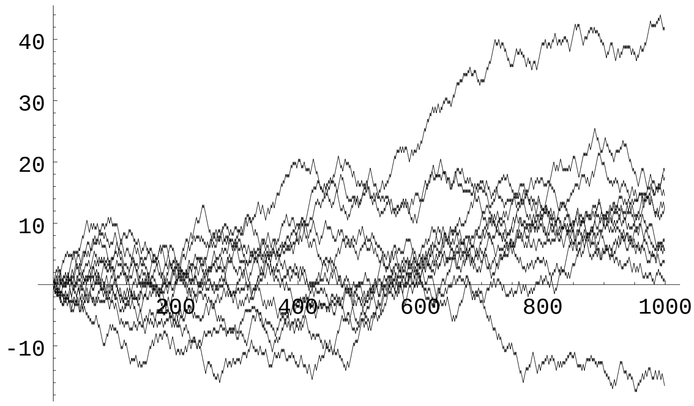
KUVA 30. TOTEUTUNUT SATUNNAISKULKU.

Kulku toteutetaan alkamalla piirtäminen origosta ja heittämällä sitten lanttia 1000 kertaa jatkaen käyrää joka heiton jälkeen vinosti ylös tai alas sen mukaan tuliko kruuna vai klaava.



KUVA 31. TOINEN TOTEUTUNUT SATUNNAISKULKU.

On ilmeisesti olemassa 2^{1000} tällaista polkua ja ne ovat kaikki yhtä todennäköisiä. Voimme ajatella niin, että valitsemme umpimähkään yhden funktion kaikkien satunnaiskulun mahdollisten toteutumistapojen joukosta ja piirrämme sitten sen kuvaajan.



Kuva 32. Joukko toteutuneita satunnaiskulkuja.

Brownin liike on tällaisen diskreetin satunnaiskulun jatkuva vastine ja sopivassa mielessä sen raja-arvo, kun askeltiheyttä lisätään ja askelta samalla lyhennetään vastaavasti. Periaatteessa Brownin liike siis muodostuu joukosta jatkuvia funktioita $\Omega \subset \mathcal{C}([0,\infty[,\mathbb{R})$ ja tuossa joukossa sopivalla tavalla määritellystä todennäköisyysmitasta. Osoittautuu, että Brownin liike kannattaa määritellä aksiomaattisesti ja erikseen todistaa, että on olemassa olennaisesti tasan yksi Brownin liikkeen aksioomat toteuttava ”stokastinen prosessi”[57].

Yksi aksioomista sanoo, että kuten diskreetti satunnaiskulku myös Brownin liike on sellainen, että erillisillä aikaväleillä tapahtuneet kulkemiset ovat toisistaan riippumattomia. Palautamme mieleen, mitä tarkoitetaan riippumattomuudella.

Määritelmä 11.19. (Riippumattomuus). Olkoon $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *todennäköisyysavaruus* eli mitta-avaruus, jossa $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

(1) Joukot $A, B \in \mathcal{F}$ ovat *riippumattomat*, mikäli $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$.
(2) Perheen $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$ joukot ovat *riippumattomat*, mikäli

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{i=1}^{n} H_i\Big) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(H_i)\,, \qquad \text{kun } H_i \in \mathcal{H} \text{ ovat eri joukkoja.}$$

(3) Joukkoperheet $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{F}$, $(i \in I)$ ovat *riippumattomat*, mikäli

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{k=1}^{n} H_{i_k}\Big) = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{P}(H_{i_k})\,, \qquad \text{kun } H_{i_k} \in \mathcal{H}_{i_k}$$

(4) Satunnaismuuttujan eli mitallisen funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *virittämä σ -algebra* on

$$\mathcal{H}_f = f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\},$$

missä $\mathcal{B}$ on tavanmukainen Borel- joukkojen[58] σ -algebra.

[57] [Ø].
[58] Félix Edouard Justin Emile Borel 1871–1956, Ranska.