Suoraviivaista ajattelua
II osa

FUNKTIONAALIANALYYSI

Lauri Kahanpää

Sisällys

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Aluksi

Tämä "Suoraviivaista ajattelua" -sarjan toinen osa on funktionaalianalyysin perusteiden opettelukirja ja jatkoa lineaarialgebran monisteelle, joka päättyy konjugaattisymmetrisen matriisin ortogonaaliseen diagonalisointiin euklidisessa avaruudessa. Vektoriavaruus määräytyy täysin kerroinkunnastaan ja Hamel-kantansa[1] mahtavuudesta. Topologisia vektoriavaruuksia sen sijaan on hyvin monenlaisia ja joutuu miettimään, mitä kannattaa käsitellä. Tässä kirjassa päälinjaksi on valittu vaiheittain kohoavan abstraktiotason tie. Kerrattuamme yleistä topologiaa tutkiskelemme sisätuloavaruuksia ja niiden ortogonaalikantoja. Vähennämme aksioomia siirtyen esittelemään muita normiavaruuksia ja funktionaalianalyysin klassisia tuloksia, kuten Hahnin ja Banachin lausetta ja Bairen kategorialauseen seurauksia. Konveksien joukkojen geometria johtaa lokaalikonveksien topologisten vektoriavaruuksien ja heikon topologian käyttöönottoon.

Jotta moniste palvelisi kvanttifysiikasta kiinnostuneita lukijoita, on hermiittisten operaattoreiden diagonalisointia käsitelty perusteellisesti. Monisteen loppupuolella käsitellään spektriä normialgebrassa, kompaktien operaattorien diagonalisointia ja yleisen hermiittisen operaattorin spektraali-integraaliesitystä. Operaattoriteoria on melko riippumatonta luvuista IV-VII.

Banachin avaruudessa.

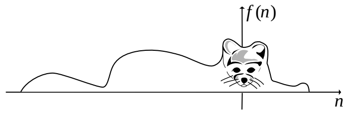
Olen käyttänyt monia lähteitä, joista ylivoimaisesti tärkein ovat opettajani, nyt jo edesmenneen professori Klaus Valan[2] 1970-luvulla pitämät mainiot luennot. Noista luennoista sai alkunsa Valan tallina tunnettu koulukunta, joka otti tavoitteekseen rikastuttaa suomalaista analyysin osaamista laajentamalla sitä funktionaalianalyysin suuntaan, jota Vala oli opiskellut Ranskassa. Muut lähteet on mainittu kirjallisuusluettelossa, paitsi että työtoverini ovat ystävällisesti luovuttaneet käyttööni materiaalia sovitettavaksi tähän kirjaan. Kurssin aikaisemmilta luennoitsijoilta, Pekka Sorjoselta, Olli Martiolta, Kari Astalalta ja Tero Kilpeläiseltä perimieni harjoitustehtävien ja muistiinpanojen lisäksi olen käyttänyt ainakin seuraavia lähteitä:

(1) Stefan Geiss piti esitelmän Hilbertin avaruuksien käytöstä stokastiikassa ja antoi minulle luvan sijoittaa Itôn integraalia koskevan osan lukuun 11.5.
(2) Sobolevin avaruuksia koskevaa lukua 15.4. kirjoittaessani oli käytössäni elektroninen versio Pekka Koskelan luennoista.
(3) Ari Lehtonen on kirjoittanut Fourier-sarjoja ja differentiaaliyhtälöitä käsittelvän liitteen.
(4) Eero Saksman selvitti minulle kysymyksen kahden operaattorin samanaikaisesta diagonalisoituvuudesta kannassa (Lause 10.30).
(5) Lebesgue'in avaruuksien tarkka määritelmä ja täydellisyystodistus (Luvut 15.2 ja 15.3) on kopioitu Veikko T. Purmosen luentomonisteesta.

Olen käyttänyt tämän tekstin osia pitämilläni kursseilla ja minulla on nyt tilaisuus kiittää työtovereideni lisäksi kaikkia niitä monia aktiivisia oppilaita, jotka ovat vaikuttaneet tekstin sisältöön ja muotoon.[3]

---

[1] Liite.
[2] Klaus Eerikinpoika Thesleff Vala 1930-2000, Suomi.
[3] Yksi heistä, on todistanut itselleen peräti nimikkolauseen.



I METRISET AVARUUDET JA TÄYDELLISYYS

1. Sisätulo, normi, metriikka ja topologia

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *tavallinen* eli *euklidinen topologia* eli kaikkien *tavallisessa mielessä avoimien* joukkojen joukko muodostetaan seuraavalla monivaiheisella konstruktiolla:

Määritelmä 1.1.
(1) Varustetaan $\mathbb{R}^n$ *tavallisella*, *euklidisella* eli *standardisisätulolla* $(x|y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$, missä $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ja $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Standardisisätulolla on abstraktin *sisätulon* määrittelevät ominaisuudet, eli kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\begin{cases} \textit{symmetria:} & (x|y) = (y|x) \\ \textit{positiividefiniittisyys:} & (x|x) \geq 0; \qquad (x|x) > 0, \text{ kun } x \neq 0 \\ \textit{bilineaarisuus:} & \text{lineaarisuus kummankin muuttujan suhteen.} \end{cases}$$

(2) Muodostetaan standardisisätulon avulla *euklidinen normi*

$$\|x\| = \|x\|_2 = \sqrt{(x|x)} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}\,,$$

joka on ei-negatiivinen reaaliluku, koska juurrettava on ei-negatiivinen. Määritelmän taustalla on alkeisgeometrinen Pythagoraan lauseeseen perustuva vektorin pituuden laskukaava. Euklidisella normilla on yleisen *normin* määrittelevät ominaisuudet

$$\begin{cases} \textit{positiivisuus:} & \|x\| \geq 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbb{R}^n \\ \textit{definiittisyys:} & \|x\| = 0 \text{ vain, kun } x = 0 \\ \textit{positiivihomogeenisuus:} & \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \text{ kaikille } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ja } x \in \mathbb{R}^n \\ \textit{kolmioepäyhtälö:} & \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ kaikille } x, y \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Lisäksi sisätulon ja siitä muodostetun normin välillä pätee *Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälöksi*[4] nimitetty yhteys:

(CSB) $$|(x|y)| \leq \|x\|\,\|y\|,$$

[4] Augustin Louis Cauchy 1789–1857, Ranska. Hermann Amandus Schwarz, 1843–1921 Saksa ja Cauchyn oppilas Viktor Jakovlevitš Bunjakovski 1804–1889, Ukraina/Venäjä.

jonka avulla kolmioepäyhtälö on tapana johtaa, ja joka myös tekee mahdolliseksi määritellä vektorien välisen *kulman* sisätulon avulla.

(3) Normista saadaan edelleen *tavallinen* eli *euklidinen metriikka* asettamalla kahden vektorin väliseksi *euklidiseksi etäisyydeksi*

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Normin ominaisuuksista seuraa, että pari $(\mathbb{R}^n, d)$ on *metrinen avaruus*, ts. d toteuttaa abstraktin *metriikan* aksioomat: Kaikilla $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$\begin{cases} \textit{positiivisuus:} & d(x,y) \geq 0 \\ \textit{refleksiivisyys:} & d(x,x) = 0 \\ \textit{definiittisyys:} & d(x,y) = 0 \text{ vain, kun } x = y \\ \textit{symmetria:} & d(x,y) = d(y,x) \\ \textit{kolmioepäyhtälö:} & d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \end{cases}$$

(4) Avaruuden $\mathbb{R}^n$ *metrinen, euklidinen* eli *tavallinen topologia* on sen kaikkien *tavallisen metriikan mielessä avointen* joukkojen joukko:

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R}^n \bigm| \forall x \in A \quad \exists r > 0 \text{ s.e. } B_d(x,r) \subset A\}.$$

Tässä on käytetty tavanomaista merkintää avaruuden $\mathbb{R}^n$ *avoimelle pallolle*

$$B(x,r) = B_d(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n \bigm| d(x,y) < r\}.$$

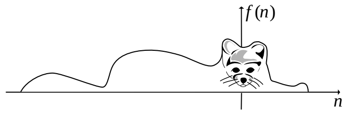
Joukon $X = \mathbb{R}^n$ tavallisella topologialla on seuraavat abstraktin *topologian* määrittelevät ominaisuudet:

$$\begin{cases} \mathcal{T} \subset \{\text{joukon } X \text{ osajoukot}\} \\ X \in \mathcal{T} \\ \emptyset \in \mathcal{T} \\ A \cap B \in \mathcal{T}, \text{ jos } A \in \mathcal{T} \text{ ja } B \in \mathcal{T} \\ \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}, \text{ jos } \mathcal{A} \subset \mathcal{T}. \end{cases}$$

Huomaa alimman rivin lyhyt merkintä yhdisteelle: $\bigcup \mathcal{A}$ tarkoittaa samaa kuin $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.

Joukon X kaikkien osajoukkojen joukkoa on tapana sanoa X:n *potenssijoukoksi* ja merkitä 2^X. Nimen ja merkintätavan taustalla on havainto, että n-alkioisella joukolla on tasan 2^n eri osajoukkoa.

Topologian määritelmä on asetettu niin, että muut *topologiset käsitteet* voidaan palauttaa siihen. Seuraavassa on lueteltu muutamia topologisia käsitteitä. Luettelo on tarkoitettu viitteeksi siitä millaisia topologian alan tietoja tarvitaan tämän kirjan ymmärtämiseksi. Topologian perustietoja voi opiskella esimerkiksi Jussi Väisälän kirjasta [V].



Määritelmä 1.2. Olkoon $\mathcal{T}$ joukon X topologia.

- (⋆) *Suljettu* joukko on avoimen joukon komplementti.
- (⋆) Joukon $A \subset X$ *sulkeuma* on $\overline{A} = \bigcap\{B \subset X \mid A \subset B\,,\ B \text{ on suljettu}\}$.
- (⋆) Joukon $A \subset X$ osajoukko $C \subset A$ on *tiheä joukossa* A, jos $A = \overline{C}$.
- (⋆) Joukko A on pisteen x *ympäristö*, jos on olemassa avoin joukko $U \in \mathcal{T}$ siten, että $x \in U \subset A$. Sama ilmaistaan sanomalla, että x on joukon A *sisäpiste*.
- (⋆) Joukon A *sisus* $\operatorname{int} A$ on sen sisäpisteiden joukko.
- (⋆) Joukon A *reuna* ∂A on joukko $\overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.
- (⋆) Joukko on *kompakti*, jos sen jokaisella *avoimella peitteellä* on äärellinen osapeite.
- (⋆) Jonon *raja-arvo* määritellään asettamalla, että $x_n \to y \in X$, jos jokaista y:n ympäristöä A kohti on olemassa indeksi $n_A \in \mathbb{N}$ siten, että $m \geq n_A \implies x_m \in A$.
- (⋆) *Jonokompaktiksi* sanotaan joukkoa $A \subset X$, jonka jokaisella jonolla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on suppeneva osajono $x_{n_k} \to a \in A$.
- (⋆) Funktion *raja-arvon* määrittelemme topologisesti sanomalla, että $f(x) \overset{x\to y}{\longrightarrow} b$, jos jokaista b:n ympäristöä B kohti on olemassa y:n ympäristö A_B siten, että $f(A_B \setminus \{y\}) \subset B$.
- (⋆) Kuvaus on *jatkuva*, jos jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin.
- (⋆) Kuvaus on *avoin*, jos jokaisen avoimen joukon kuvajoukko on avoin.
- (⋆) Kuvaus on *homeomorfismi*, jos se on sekä bijektio, jatkuva että avoin.

Funktionaalianalyysi tutkii ensisijaisesti erilaisia topologisia vektoriavaruuksia, joissa kaikissa voimme käyttää mm. edellä kertaamiamme *topologisia käsitteitä*. Useimmat tutkimamme avaruudet, etenkin kaikki normiavaruudet, ovat kuitenkin metrisiä avaruuksia, joten niissä voi tarkastella edellisten lisäksi myös muita metristen avaruuksien teoriaan, etenkin tasaiseen suppenemiseen ja täydellisyyteen liittyviä ilmiöitä. Seuraavassa on muutamia esimerkkejä *metrisistä käsitteistä*.

Määritelmä 1.3. Olkoon d metriikka joukossa X.

- (⋆) Joukko $A \subset X$ on *rajoitettu*, jos se sisältyy johonkin palloon.
- (⋆) Funktio $f : X \to Y$ on *rajoitettu*, jos kuvajoukko $f(X)$ on rajoitettu. f on *rajoitettu joukossa* $A \subset X$, jos A:n kuva $f(A)$ on rajoitettu joukko. ("Rajoitettu lineaarikuvaus" on kuitenkin jotakin muuta kuin mitä nimi sanoo; nollasta eroava lineaarikuvaus ei voi olla rajoitettu juuri esittämässämme mielessä.)
- (⋆) Funktiojono (f_n) *suppenee tasaisesti* kohti funktiota f joukossa $A \subset X$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa indeksi eli luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $m \geq n_\varepsilon \implies f_m(x) \in B_d(f(x), \varepsilon)$ kaikilla $x \in A$.
- (⋆) Kahden metrisen avaruuden välinen kuvaus $f : X \to Y$ on *isometria*, jos se säilyttää pisteiden etäisyydet, eli kun $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$. Selvästi jokainen isometria on injektio, mutta ei välttämättä surjektio. Surjektiivista isometriaa sanotaan *isometriseksi isomorfismiksi*, ja sellainen on siis aina bijektio.
- (⋆) Kahden metrisen avaruuden välinen funktio $f : X \to Y$ on *tasaisesti jatkuva*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että $d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

($\star$) Jono pisteitä $x_n \in X$ on *Cauchy-jono*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa indeksi $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että $m, n \geq n_\varepsilon \implies d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$.

($\star$) Metrinen avaruus (X, d) on *täydellinen*, jos sen jokainen Cauchy-jono suppenee.

Seuraava lause ilmaisee kaksi tunnettua tosiasiaa euklidisesta avaruudesta $\mathbb{R}^n$.

Lause 1.4.
Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$ on täydellinen metrinen avaruus ja topologinen vektoriavaruus.

Jälkimmäinen väite merkitsee, että laskutoimitukset

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ ja}$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ovat jatkuvia funktioita. Tuloavaruudet $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ja $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ on luonnollisella tavalla samastettu avaruuksiin $\mathbb{R}^{2n}$ ja $\mathbb{R}^{1+n}$.

Huomautus 1.5. Määritelmä 1.1. antaa mahdollisuuden yleistykseen. Mistä tahansa sisätulosta voi samalla konstruktiolla rakentaa normin, mistä tahansa normista metriikan ja mistä tahansa metriikasta topologian. Näin ajattelemme tehdyksi, kun ei toisin sanota.

2. Weierstrassin approksimaatiolause

2.1. Taustaa.

Weierstrassin klassinen approksimointilause sanoo, että kompaktilla välillä voi mitä tahansa jatkuvaa reaaliarvoista funktiota approksimoida tasaisesti polynomilla. Lause tuntuu vähemmän itsestään selvältä, kun muistaa, että Weierstrass on myös antanut esimerkin funktiosta, joka on koko välillä jatkuva, mutta ei missään derivoituva. Myös se, että Cantorin[5] porrasfunktiota voi approksimoida polynomilla, saattaa olla yllättävää.

Weierstrassin approksimaatiolauseen sisällön voi ilmaista sanomalla, että polynomien joukko $\mathcal{A}$ on tiheä *jatkuvien funktioiden avaruudessa*

$$\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\},$$

joka on varustettu *tasaisen suppenemisen normilla* eli sup- *normilla*

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\} = \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}.$$

2.2. Weierstrassin lause.

Lause 2.1 (Weierstrass 1885). [6] *Olkoon*

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}$$

jatkuva ja $\varepsilon > 0$. Silloin on olemassa polynomi p, jolle

$$|p(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in [a, b].$$

Todistuksesta. Todistamme Weierstrassin lauseen ensin neliöjuurifunktiolle, sitten itseisarvofunktiolle, murtoviivafunktioille ja niiden avulla kohdassa 2.7. lopulta kaikille muillekin jatkuville funktioille.

---

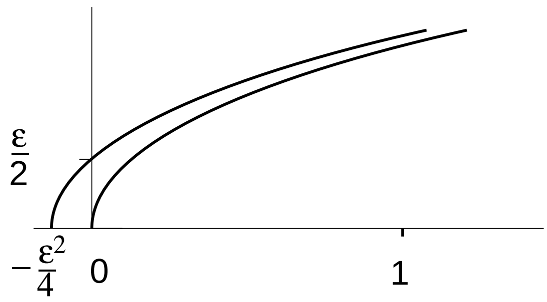
[5] Georg Cantor 1845–1918. Joukko-opin perustaja. Saksa.

[6] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass 1815–1897, Saksa.

Esimerkki 2.2. Olkoon $f(x)=\sqrt{x}$ välillä $[0,1]$ ja olkoon $0<\varepsilon<1$. Polynomi p löydetään esimerkiksi seuraavalla tavalla. Neliöjuurifunktion f Taylor-sarja kehitettynä pisteessä 1 suppenee neliöjuurifunktiota kohti tasaisesti[7] välillä $[a,1+a]$, kun $0<a<1$. On siis olemassa esimerkiksi polynomi q, jolle $|q(x)-\sqrt{x}|<\frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $x\in[\frac{1}{4}\varepsilon^2,1+\frac{1}{4}\varepsilon^2]$, toisin sanoen

$$\left|q(x+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2)-\sqrt{x+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall x\in[0,1]. \tag{1}$$

Polynomiksi p kelpaa nyt $p(x)=q(x+\frac{1}{4}\varepsilon^2)$, sillä tekemämme vaakasuora siirto $\frac{1}{4}\varepsilon^2$:n verran ei muuta neliöjuurifunktiota liikaa:



Kuva 1. Neliöjuurifunktion approksimointi.

$$\left|\sqrt{x+\tfrac{1}{4}\varepsilon^2}-\sqrt{x}\right|\le\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall x\in[0,1]. \tag{2}$$

Arviot (1) ja (2) yhdessä antavat Weierstrassin lauseen väitteen funktiolle $f(x)=\sqrt{x}$.

Esimerkki 2.3. Olkoon seuraavaksi

$$f(x)=|x|=\sqrt{x^2}$$

välillä $[-1,1]$. Edellisen esimerkin ratkaisu p auttaa löytämään polynomiapproksimaation tällekin, nimittäin polynomin $p(x^2)$.

Esimerkki 2.4. Esimerkin 2.3 pohjalta keksii helposti itseisarvofunktiolle tasaisen polynomiapproksimaation millä tahansa kompaktilla välillä $[a,b]$. Erityisesti siis jokaiselle polynomille $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ on olemassa polynomi q , joka antaa itseisarvofunktiolle $\frac{\varepsilon}{2}$−approksimaation polynomin p arvojoukossa $p([a,b])$. Tällöin

$$|q(p(x))-|p(x)||<\frac{\varepsilon}{2}\quad\forall x\in[a,b].$$

[7] Taylor-sarja on potenssisarja. Potenssisarjan tasainen suppeneminen avoimen suppenemisvälin kompaktissa osassa on tunnettu asia, jota Weierstrasskin tutki aikoinaan.

Tästä seuraa, että jos funktiota f voidaan approksimoida $\frac{\varepsilon}{2}$-tasaisesti polynomilla, olkoon se vaikkapa p, niin itseisarvoa $|f|$ voidaan approksimoida ε-tasaisesti polynomilla $q \circ p$:

$$\begin{aligned}|(q \circ p)(x) - |f(x)|| &\leq |q(p(x)) - |p(x)|| + ||p(x)| - |f(x)|| \\ &\leq |q(p(x)) - |p(x)|| + |p(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

ESIMERKKI 2.5. Jos funktioita f ja g voidaan approksimoida tasaisesti polynomeilla p ja q, niin lineaarikombinaatiota $\lambda f + \mu g$ ja tuloa fg voidaan approksimoida tasaisesti polynomeilla $\lambda p + \mu q$ ja pq. Perustelu jääköön harjoitustehtäväksi.

HUOMAUTUS 2.6. Käytimme jo lyhennettä $\mathcal{A} = \{p \mid p \text{ on polynomi } [a,b] \to \mathbb{R}\}$. Weierstrassin lauseen väite on:

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}).$$

Polynomien joukko $\mathcal{A}$ on *reaalikertoiminen funktioalgebra*, ts. suljettu vektoriavaruuslaskutoimitusten ja kertolaskun suhteen:

$$f, g \in \mathcal{A} \text{ ja } \lambda \in \mathbb{R} \implies f + g \in \mathcal{A},\ \lambda f \in \mathcal{A} \text{ ja } fg \in \mathcal{A}.$$

Esimerkin 2.5. tulos merkitsee, että myös polynomien algebran sulkeuma $\overline{\mathcal{A}}$ on funktioalgebra. Esimerkin 2.4. tulos $f \in \overline{\mathcal{A}} \implies |f| \in \overline{\mathcal{A}}$ puolestaan osoittaa, että — toisin kuin $\mathcal{A}$ itse — $\overline{\mathcal{A}}$ on myös *funktiohila*, ts. suljettu maksimin ja minimin muodostamisen suhteen:

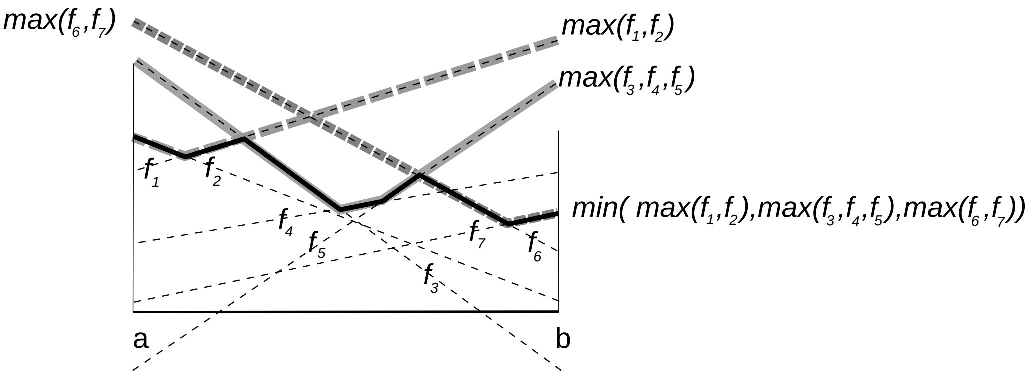
$$f, g \in \overline{\mathcal{A}} \implies \max\{f, g\} \in \overline{\mathcal{A}}, \text{ ja } \min\{f, g\} \in \overline{\mathcal{A}}.$$

Näin on siksi, että reaaliluvuille — ja siis tavallisessa pisteittäisessä mielessä myös reaaliarvoisille funktioille — maksimi ja minimi palautuvat laskutoimituksiin ja itseisarvoon kaavoilla

$$\begin{aligned}\max\{f, g\} &= \tfrac{1}{2}((f + g) + |f - g|) \\ \min\{f, g\} &= \tfrac{1}{2}((f + g) - |f - g|)\end{aligned}$$

Myös äärellisen monen $\overline{\mathcal{A}}$–funktion maksimi ja minimi kuuluvat siis hilaan $\overline{\mathcal{A}}$.

ESIMERKKI 2.7. Jokaista *murtoviivafunktiota* eli *paloittain affiinia* funktiota voi approksimoida polynomilla välillä $[a, b]$. Tämä johtuu siitä, että murtoviivafunktio on lausuttavissa miniminä ensimmäisen asteen polynomien maksimeista.



Kuva 2. Murtoviivafunktion lauseke.

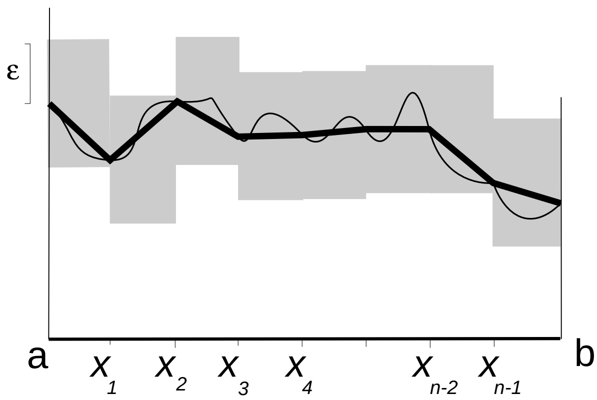
Huomautus 2.8 (Todistus Weierstrassin approksimaatiolauseelle). Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $\varepsilon > 0$. Etsitään sellaista funktiota $g \in \mathcal{A}$, että olisi

$$\|g - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Edellisen esimerkin nojalla riittää todistaa, että jokaista välillä $[a, b]$ jatkuvaa funktiota f voi approksimoida tasaisesti murtoviivafunktiolla. Tämä puolestaan seuraa siitä, että kompaktilla välillä jatkuva funktio f on tasaisesti jatkuva. Olkoon nimittäin $0 < \varepsilon < 1$. Koska f on tasaisesti jatkuva, on mahdollista valita tasaväliset pisteet $a = x_0 < x_1 = a + \delta < \cdots < x_n = a + n\delta = b$ siten, että

$$|f(x) - f(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

kullakin välillä $[x_j - \delta, x_j + \delta]$. Murtoviiva, joka yhdistää kaikki pisteet $(x_j, f(x_j))$, $(0 \leq j \leq n)$, määrittelee funktion g, jolle $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. $\square$



Kuva 3. Murtoviivafunktiolla approksimointi.

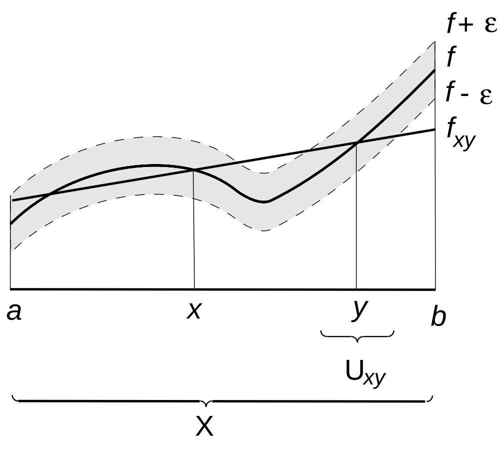
2.3. Yleistys: Stonen ja Weierstrassin lause (∗).

Huomautus 2.9. Weierstrassin lause pätee paljon vähemmin oletuksin kuin edellä tehtiin. Myös lauseen todistus yleistyy pienin korjauksin. Kompakti väli $[a, b]$ voidaan korvata millä tahansa kompaktilla reaalilukujoukolla muuttamatta todistusta lainkaan. Jos kuitenkin halutaan tutkia muita kuin reaalimuuttujan funktioita, on jo lauseen oletuksissa polynomijoukko $\mathcal{A}$ korvattava jollakin muulla sellaisella joukolla jatkuvia funktioita, jolla todistuksen vaiheet voidaan toteuttaa. Todistuksen tärkeänä välivaiheena todistimme, että klassisen Weierstrassin lauseen tilanteessa $\overline{\mathcal{A}}$ on funktiohila. Tämä ajatus on johtanut Weierstrassin lauseen hilaversion ja sen avulla todistettavan Stonen ja Weierstrassin lauseen keksimiseen.

Lause 2.10 (Weierstrassin approksimaatiolauseen hilamuoto). *Olkoon X kompakti topologinen avaruus ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Riittävää sille, että $\mathcal{A}$ on tiheä tasaisen suppenemisen normin $\|\cdot\|_\infty$ mielessä on, että*

(1) *$\mathcal{A}$ tai $\overline{\mathcal{A}}$ on hila.*
(2) $\mathcal{A}$ erottelee vahvasti X:n pisteet, *eli kaikille $x \neq y \in X$ ja kaikille $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on olemassa $f_{xy} \in \mathcal{A}$ siten, että*
$$f_{xy}(x) = \lambda \text{ ja } f_{xy}(y) = \mu.$$

Todistus. Olkoon $f : X \to \mathbb{R}$ jatkuva ja $\varepsilon > 0$. Etsitään sellaista funktiota $g \in \mathcal{A}$, että olisi
$$\|g - f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$
Korvaamme Weierstrassin lauseen todistuksen lopussa tehdyn murtoviivakonstruktion seuraavalla menettelyllä. Olkoon aluksi $x \in X$ kiinteä piste. Valitaan jokaista $y \in X$ kohti sellainen $f_{xy} \in \mathcal{A}$, että
$$f_{xy}(x) = f(x) \text{ ja}$$
$$f_{xy}(y) = f(y).$$
Kuvissa 4.-6. funktioita f_{xy} on havainnollistettu ensimmäisen asteen polynomeilla. Koska f_{xy} on jatkuva, on y:llä avoin ympäristö U_{xy}, jossa $f_{xy} > f - \varepsilon$.



Kuva 4. Erotteleva funktio.

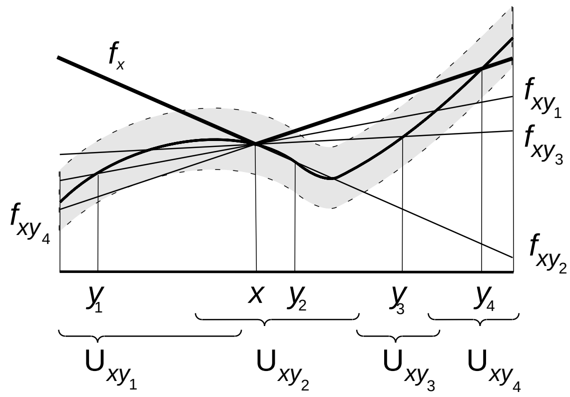
Pisteiden y avoimet ympäristöt U_{xy} peittävät kompaktin joukon X, joten niistä voidaan valita äärellinen osapeite $\{U_{xy_1}, \dots, U_{xy_{n_x}}\}$. Vastaavien funktioiden maksimi on hilaoletuksen mukaan $\overline{\mathcal{A}}$:ssa:

$$f_x = \max\{f_{xy_1}, \dots, f_{xy_{n_x}}\} \in \overline{\mathcal{A}}.$$

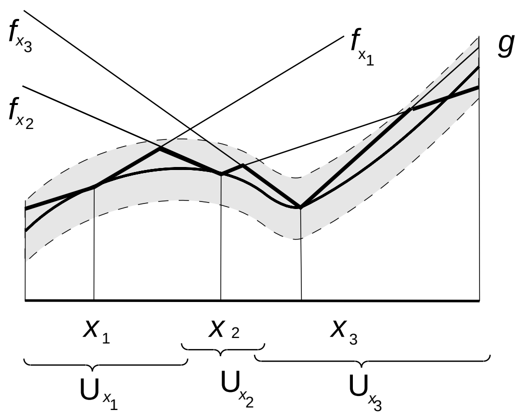
Puolet tavoitteesta on saavutettu, sillä on löytynyt funktio $f_x \in \overline{\mathcal{A}}$, jolle

$$f_x > f - \varepsilon \quad \text{koko joukossa } X.$$

Lisäksi $f_x(x) = f(x)$ ja f_x on jatkuva, joten kiinteäksi valitsemallamme pisteellä x on ympäristö U_x, jossa pätee myös toisinpäin oleva epäyhtälö: $f_x < f + \varepsilon$.



Kuva 5. Approksimointi yhdessä ympäristössä.



Kuva 6. Approksimointi koko joukossa.

Pisteen x käydessä läpi koko joukon X saadaan taas peite ja voidaan toistaa kompaktiuspäättely. Valitaan funktioksi g minimi näin saatavista funktioista $f_{x_1}, \dots, f_{x_m}$. Sillä on halutut ominaisuudet. $\square$

Lause 2.11 (Stonen versio Weierstrassin lauseesta 1948)[8]. *Olkoon X kompakti topologinen avaruus ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Riittävää sille, että $\mathcal{A}$ on tiheä tasaisen suppenemisen normin $\|\cdot\|_\infty$ mielessä on, että*

(1) *vakiofunktio* 1 *kuuluu joukkoon $\mathcal{A}$,*
(2) *$\mathcal{A}$ on funktioalgebra kohdan 2.6. mielessä ja*
(3) *$\mathcal{A}$* erottelee X:n pisteet, *eli kaikille $x \neq y \in X$ on olemassa $f_{xy} \in \mathcal{A}$ siten, että*
$$f_{xy}(x) \neq f_{xy}(y).$$

Todistus. Stonen ja Weierstrassin lauseen oletuksista seuraa samalla päättelyllä kuin Weierstrassin lausetta todistettaessa kohdassa 2.6, että sulkeuma $\overline{\mathcal{A}}$ on funktioalgebra ja hila. Hilaksi todistettaessa ja muutenkin vastaisen varalle on hyvä tiedostaa, että funktioalgebra sisältää kaikki polynomit alkioistaan: jos $f \in \mathcal{A}$ ja p on polynomi, niin $p(f) \in \mathcal{A}$ eli toisin merkiten $p \circ f \in \mathcal{A}$. Toisaalta on helppo huomata, että oletuksistamme seuraa myös, että $\mathcal{A}$ erottelee X:n pisteet vahvasti. Muuta ei lauseen 2.10 mukaan tarvitakaan. □

Huomautus 2.12. Weierstrassin klassinen lause pätee myös reaalisella välillä määritellylle kompleksiarvoiselle jatkuvalle funktiolle. Tämän toteamiseksi ei tarvitse tehdä muuta kuin approksimoida erikseen sen reaali- ja imaginaariosaa.

Sen sijaan yleisempi Stonen ja Weierstrassin lause ei päde, jos reaaliluvut muitta mutkitta korvataan kompleksiluvuilla. Tärkeä vastaesimerkki saadaan yrittämällä approksimoida jatkuvaa kompleksiarvoista funktiota tasaisesti kompleksisilla polynomilla sisäpisteellisessä kompaktissa joukossa $X \subset \mathbb{C}$. Kompleksimuuttujan polynomit ovat nimittäin *kompleksianalyyttisiä* eli *holomorfisia* ja holomorfisuus säilyy tasaisessa konvergenssissa. Ei siis ole mitään mahdollisuuksia approksimoida epäholomorfista jatkuvaa funktioita, esimerkiksi *kompleksikonjugointifunktiota*
$$z = x + iy \mapsto \overline{z} = x - iy$$
kompleksisella polynomilla sisäpisteellisessä kompaktissa joukossa $X \subset \mathbb{C}$.

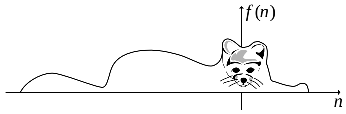
Laajentamalla approksimointiin käytettyjen funktioiden joukkoa hieman voidaan asiaa kuitenkin korjata. Konjugointifunktio antaa itse tarvittavan lisäehdon:

Lause 2.13 (Stonen ja Weierstrassin lauseen kompleksinen muoto). *Olkoon X kompakti topologinen avaruus ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X, \mathbb{C})$. Riittävää sille, että $\mathcal{A}$ on tiheä tasaisen suppenemisen normin $\|\cdot\|_\infty$ mielessä on, että*

(1) *vakiofunktio* 1 *kuuluu joukkoon $\mathcal{A}$,*
(2) *$\mathcal{A}$ on kompleksikertoiminen funktioalgebra,*
(3) *$\mathcal{A}$ erottelee X:n pisteet ja*
(4) $f \in \mathcal{A} \implies \overline{f} \in \mathcal{A}$.

Perustelu. Lause voidaan helposti palauttaa Stonen ja Weierstrassin lauseen reaaliseen muotoon tarkastelemalla reaalikertoimista funktioalgebraa
$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}} = \{f \in A \mid f(X) \subset \mathbb{R}\},$$
joka sisältää $\mathcal{A}$:n alkioiden reaali- ja imaginaariosat.

[8]Marshall Harvey Stone 1903–1989, USA-Intia.



2.4. Weierstrassin approksimaatiolauseen sovelluksia (∗).

Seuraus 2.14 (Separoituvuus). Normiavaruus $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ on *separoituva*, ts. siinä on olemassa tiheä, numeroituva osajoukko. Tällaiseksi kelpaavat Weierstrassin approksimaatiolauseen mukaan vaikkapa rationaalikertoimiset polynomit tai $\mathbb{Q}^2$−kulmaiset murtoviivafunktiot.

Vastaava pätee myös avaruudelle $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$, kun $X\subset\mathbb{R}^n$ on kompakti. Itse asiassa avaruus $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$, on separoituva, kun X on mikä tahansa kompakti metrinen avaruus[9].

Seuraus 2.15 (Trigonometriset polynomit). Olkoon X kompleksitason yksikköympyrän kehä

$$X=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}=\{e^{\varphi i}\mid \varphi\in\mathbb{R}\}$$

ja muodostukoon $\mathcal{A}$ kaikista *kompleksisista trigonometrisistä polynomeista*

$$\mathcal{A}=\Big\{f\in\mathcal{C}(X,\mathbb{C})\;\Big|\; f(z)=\sum_{k=-n}^{n}c_kz^k \text{ joillakin } n\in\mathbb{N}, c_k\in\mathbb{C}\Big\}.$$

On syytä huomata, että trigonometrisen polynomin lausekkeessa esiintyvät myös z:n negatiiviset potenssit ja että z^k ja z^{-k} ovat toistensa kompleksikonjugaatit, kun $|z|=1$. Siksi kompleksinen Stonen ja Weierstrassin lause takaa, että tällöin

$$\overline{\mathcal{A}}=\mathcal{C}(X,\mathbb{C}).$$

Tämä merkitsee, että jokaista 2π-jaksollista jatkuvaa funktiota $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ voidaan approksimoida tasaisesti kompleksisella trigonometrisella polynomilla

$$\sum_{k=-n}^{n}c_ke^{ikx}=\sum_{k=-n}^{n}c_k(\cos(kx)+i\sin(kx)).$$

Tarkastelemalla reaaliosia huomaa, että jokaista 2π-jaksollista reaaliarvoista jatkuvaa funktiota $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ voidaan approksimoida tasaisesti *reaalisella trigonometrisella polynomilla*:

$$x\mapsto\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{n}a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx).$$

Näillä tuloksilla on laajakantoisia seurauksia, joista mainitsemme tässä tunnetuimman heti, vaikka tarvittavat käsitteet määritelläänkin vasta myöhemmin Hilbert-avaruuksia käsittelevässä luvussa: Kompaktilla välillä neliöintegroituvan funktion Fourier-sarja esittää sitä $\|\cdot\|_2$− normin mielessä.

[9]Perustelut: [F]. Käänteinenkin pätee: Jos X on kompakti Hausdorff topologinen avaruus ja $(\mathcal{C}(X,\mathbb{R}),\|\cdot\|_\infty)$ separoituva, niin X on metrisoituva. [J].

3. Banachin kiintopistelause

3.1. Kontraktion kiintopiste.

Banachin kiintopistelause on huomattava yleistys periaatteelle, jonka mukaan geometrinen sarja suppenee. Seuraten yleistä käytäntöä määrittelemme aluksi funktion Lipschitz-jatkuvuuden[10] ja kutistavuuden eli kontraktiivisuuden.

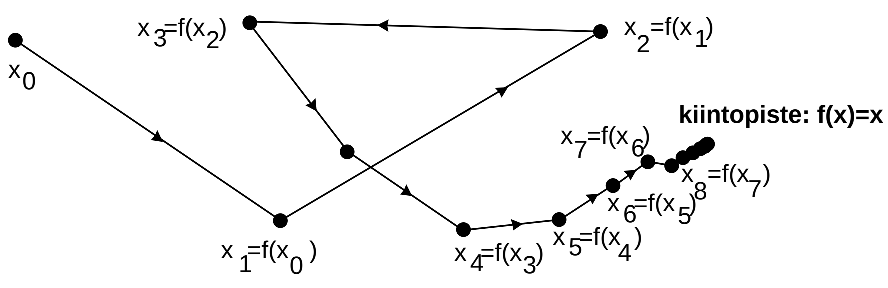
Määritelmä 3.1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Kuvaus $f : X \to X$ on

(1) *Lipschitz-jatkuva*, jos on olemassa luku, *Lipschitz-vakio* $K \geq 0$, jolla
$$d(f(x), f(y)) \leq K\, d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X.$$
(2) *kontraktio* eli *kutistava kuvaus,* jos f on Lipschitz-jatkuva vakiolla $K < 1$. Vakio K on tällöin nimeltään *kontraktiokerroin.*

Jokainen Lipschitz-jatkuva kuvaus, erityisesti kontraktio on tasaisesti jatkuva. Banachin kiintopistelause koskee ainoastaan kontraktioita. Huomaa, että kontraktion määritelmässä on nimenomaan $K < 1$. Arvo 1 ei kelpaa.

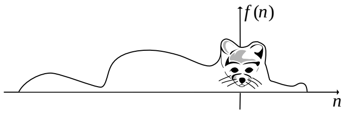
Lause 3.2 (Banachin kiintopistelause)[11]. *Täydellisen metrisen avaruuden* (X, d) *kontraktiolla* $f : X \to X$ *on tasan yksi* kiintopiste *eli piste* $\xi \in X$*, jolla* $f(\xi) = \xi$.

Todistus. Määritellään jono avaruuden X pisteitä valitsemalla ensimmäiseksi mikä tahansa $x_0 \in X$ ja sitten *iteroimalla* siihen kuvausta f, toisin sanoen $x_{n+1} = f(x_n)$, eli $x_n = f(f(f(\ldots f(x_0)\ldots))) = f^n(x_0)$. Tarkoituksena on osoittaa, että jono $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ suppenee ja sen raja-arvo on etsitty kiintopiste. Koska f on kontraktio, on olemassa aidosti ykköstä pienempi vakio $0 < K < 1$, jolla
$$d(f(x), f(y)) \leq K d(x, y) \qquad \forall\, x, y \in X.$$
Tästä huomataan, että jonon *askelet* $d(x_n, x_{n+1})$ lyhenevät vähintään geometrisesti:
$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) \\ &\leq K d(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) \leq \cdots \leq K^n d(x_0, f(x_0)). \end{aligned}$$



Kuva 7. Kiintopisteen löytäminen iteroimalla.

[10] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz 1832–1903, Saksa.
[11] Stefan Banach 1892–1945, Puola-Ukraina.



Koska avaruus X on täydellinen, voidaan raja-arvon $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$ olemassaolo todistaa Cauchyn ehdolla. Olkoot $n, m \in \mathbb{N}$ ja $m > n$. Arvioidaan etäisyyttä $d(x_n, x_m)$ toistuvasti kolmioepäyhtälön avulla ja käytetään ehtoa $0 < K < 1$:

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_m) \\
&\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_m) \\
&\le \dots \\
&\le d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\le K^n d(x_0, f(x_0)) + K^{n+1} d(x_0, f(x_0)) + \cdots + K^{m-1} d(x_0, f(x_0)) \\
&= d(x_0, f(x_0)) \sum_{j=n}^{m-1} K^j \le d(x_0, f(x_0)) \sum_{j=n}^{\infty} K^j = d(x_0, f(x_0)) \frac{K^n}{1-K}.
\end{aligned}$$

Etäisyys on siis toivotulla tavalla mielivaltaisen pieni, kunhan n on tarpeeksi suuri. Tämä riittää takaamaan raja-arvon $\xi = \lim_{n\to\infty} f^n(x_0)$ olemassaolon. Kontraktiona kuvaus f on jatkuva, joten

$$f(\xi) = f\big(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)\big) = \lim_{n\to\infty} f\big(f^n(x_0)\big) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = \xi$$

eli ξ on kuvauksen f kiintopiste.

On lopuksi selvää, että muita kiintopisteitä ei ole, sillä jos sekä ξ että η ovat kuvauksen f kiintopisteitä, niin

$$d(\eta, \xi) = d(f(\eta), f(\xi)) \le K d(\eta, \xi),$$

mikä on oletuksen $K < 1$ nojalla mahdotonta, ellei $d(\eta, \xi)$ ole 0. $\square$

Banachin kiintopistelauseen todistus paljastaa siis, että täydellisessä avaruudessa jokaisella kontraktiolla on yksikäsitteinen kiintopiste ja että tämän kiintopisteen luo pääsee iteroimalla kontraktiokuvausta f. On vieläpä helppoa arvioida, kuinka kaukana kiintopisteestä enintään ollaan n:n iteraatioaskelen jälkeen. Arvio riippuu ainoastaan ensiaskelen pituudesta $d(x_0, f(x_0))$, kontraktiovakiosta K ja askelten lukumäärästä n.

Banachin kiintopistelauseen väite ei tietenkään päde, ellei avaruuden täydellisyyttä oleteta. Vastaesimerkin tarjoavat vaikkapa metrinen avaruus $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja kontraktio $f(x) = \frac{x}{2}$. Myös vaatimus $K < 1$ on tärkeä. Ei riitä, että $K \le 1$ eikä edes, että $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ kaikilla $x, y \in X$.

Esitämme seuraavassa joitakin Banachin kiintopistelauseen sovelluksia differentiaali- ja integraaliyhtälöiden teoriaan.

3.2. Differentiaaliyhtälön ratkaisun olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause $(*)$**.**

Ensimmäisen kertaluvun tavallisten differentiaaliyhtälöiden ratkaisun olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslause on differentiaaliyhtälöiden teorian perustulos, jonka varaan rakentuu suuri määrä mutkikkaampien differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseita ja joitakin ratkaisujen löytämiseen käytettyjä numeerisia menetelmiä. Lauseen muotoilussa on tapana käyttää seuraavaa osittaisen Lipschitz-jatkuvuuden käsitettä:

MÄÄRITELMÄ 3.3. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ja $L > 0$. Funktio $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on *x-tasaisesti Lipschitz-jatkuva y:n suhteen* Lipschitz-vakiolla L, jos

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2| \qquad \forall (x,y_1),(x,y_2) \in \Omega.$$

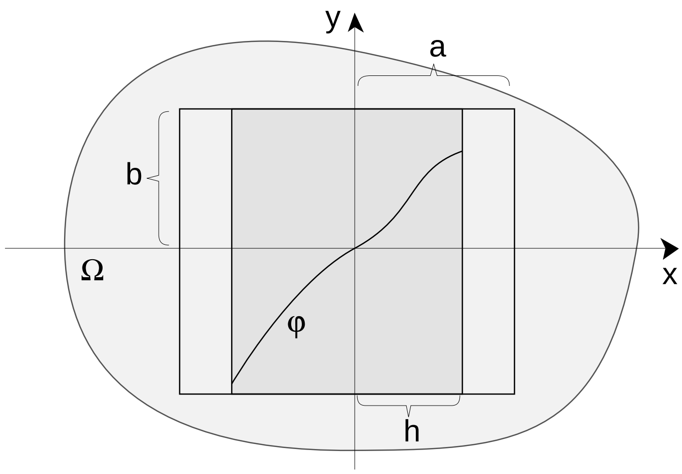
x-tasainen Lipschitz-jatkuvuus y:n suhteen tarkoittaa siis, että kaikki funktion f osittaiskuvaukset $f(x,\cdot)$ ovat Lipschitz-jatkuvia samalla vakiolla L.

LAUSE 3.4 (OY-LAUSE)[12]. *Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ origon ympäristö sekä $f : \Omega \to \mathbb{R}$ rajoitettu ja x-tasaisesti Lipschitz-jatkuva y:n suhteen. Tällöin* differentiaaliyhtälöllä

$$y' = f(x,y)$$

on jollakin välillä $]-h,+h[$ tasan yksi alkuehdon $y(0) = 0$ *toteuttava* ratkaisu, *toisin sanoen derivoituva funktio $\varphi : \,]-h,+h[\, \to \mathbb{R}$, jolle pätee alkuehto $\varphi(0) = 0$ ja lisäksi koko välillä*

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)). \tag{1}$$



KUVA 8. OY-LAUSEEN VÄITE.

TODISTUS. Koska Ω on avoin, on olemassa suorakaide

$$[-a,a] \times [-b,b] \subset \Omega.$$

Seuraavassa osoitetaan, että väitteen luvuksi kelpaa

$$h < \min\left\{a, \tfrac{b}{M}, \tfrac{1}{L}\right\},$$

missä L on funktion f Lipschitz-vakio ja M on rajoitetun funktion $|f|$ yläraja.

[12]OY–lauseen todistaja on CHARLES EMILE PICARD 1856–1941. Älä sekoita toiseen kuuluisaan ranskalaiseen Picardiin (JEAN PICARD 1620–1682).

Todistuksen ideana on käyttää Banachin kiintopistelausetta. Siksi on tarpeen valita sopiva täydellinen metrinen avaruus X ja sen kontraktio $F : X \to X$ siten, että tutkittava differentiaaliyhtälö (1) on yhtäpitävä kiintopisteyhtälön $F(x) = x$ kanssa. Voisi arvata, että avaruudeksi X pitää valita sopiva funktioavaruus, varmaankin jokin joukko funktioita $]-h, +h[\, \to \mathbb{R}$, ja näin menettelemmekin. Ongelmallista on aluksi se, että differentiaaliyhtälön (1) ratkaisulle pätee

$$\varphi' = f(x, \varphi(x)),$$

joka ei ole kiintopistetyyppinen yhtälö, jollainen olisi esimerkiksi yhtälö $\varphi = f(x, \varphi(x))$. Kiintopistelauseen lisäksi todistuksen oivallus onkin se, että ongelma muuttuu kiintopistetyyppiseksi integroimalla puolittain. Etsitään funktiota φ, jolla

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t, \varphi(t))\, dt,$$

siis kiintopistettä kuvaukselle $F : X \to X$, jolle $F(\varphi)(x) = \int_0^x f(t, \varphi(t))\, dt$.

Idea on esitelty. Viimeistellään todistus valitsemalla sopiva täydellinen metrinen avaruus X ja todistamalla, että F on kontraktio.

Jatkuvien funktioiden avaruus $\mathcal{C}([-h, h], \mathbb{R})$ varustettuna *tasaisen suppenemisen metriikalla*

$$d_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty$$

on tunnetusti täydellinen; tämähän merkitsee vain sitä, että *tasaisen Cauchy-ehdon* toteuttava jono jatkuvia funktioita suppenee tasaisesti ja jatkuvuus säilyy tasaisessa konvergenssissa.

Valitsemme avaruudeksi X funktioavaruuteen $\mathcal{C}([-h, h], \mathbb{R})$ sisältyvän suljetun pallon $X = \overline{B}_{\mathcal{C}([-h,h],\mathbb{R})}(0, b)$ ja muistamme topologian perusopinnoista tai tarkastamme pienellä laskulla, että täydellisen metrisen avaruuden suljettu osajoukko, erityisesti valitsemamme X, on täydellinen metrinen avaruus.

Osoitamme, että yhtälö

$$F(\psi)(x) = \int_0^x f(t, \psi(t))\, dt$$

määrittelee kontraktion $F : X \to X$. Olkoon $\psi \in X = \overline{B}_{\mathcal{C}([-h,h],\mathbb{R})}(0, b)$, siis ψ jatkuva ja $|\psi(t)| \leq b$ kaikilla t. Tarkastetaan aluksi onko $F(\psi) \in \overline{B}_{\mathcal{C}([-h,h],\mathbb{R})}(0, b)$. Jotta $F(\psi)(t)$ olisi ainakin määritelty kaikilla $t \in [-h, h]$, on tarpeen, että integroitava $f(t, \psi(t))$ on määritelty kaikilla $t \in [-h, h]$, toisin sanoen, että $\psi(t) \in [-b, b]$. Tämä onkin kunnossa. Koska f ja ψ on lisäksi oletettu jatkuviksi, on myös kuvaus $t \mapsto f(t, \psi(t))$ jatkuva välillä $[-h, h]$, joten sen integraalifunktio $x \mapsto F(\psi)(x) = \int_0^x f(t, \psi(t))\, dt$ on olemassa ja jatkuva. Kuvaus $F : X \to \mathcal{C}([-h, h], \mathbb{R})$ on siis ainakin hyvin määritelty. Osoitetaan, että F:n kuvajoukko sisältyy palloon $\overline{B}_{\mathcal{C}([-h,h],\mathbb{R})}(0, b)$ ja että F on kontraktio. Ensin mainittu on helppoa, koska

$$|F(\psi)(x)| = |\int_0^x f(t, \psi(t))| \leq |\int_0^x M| \leq hM < b.$$

Myös kontraktiivisuuden todistus etenee samaa uraa, mutta käyttää Lipschitz-ehtoa eikä ylärajaa M. Olkoot ϕ ja $\psi \in X$. Arvioidaan etäisyyttä $d(F(\phi), F(\psi)) = \|F(\phi) - F(\psi)\|_\infty$. Olkoon $x \in [-h, h]$.

$$\begin{aligned}
|F(\phi)(x) - F(\psi)(x)| &= |\int_0^x \big(f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))\big)\,dt| \\
&\le \int_0^x |f(t,\phi(t)) - f(t,\psi(t))|\,dt \\
&\le \int_0^x L|\phi(t) - \psi(t)|\,dt \\
&\le L\int_0^h \|\phi - \psi\|_\infty\,dt \\
&= Lhd(\phi,\psi) \\
&= Kd(\phi,\psi), \text{ missä } K = Lh < 1.
\end{aligned}$$

Kuvaus $F : X \to X$ on siis kontraktio täydellisessä metrisessä avaruudessa, joten sillä on Banachin lauseen mukaan tasan yksi kiintopiste $\varphi \in X = \overline{B}_{\mathcal{C}([h,h],\mathbb{R})}(0, b)$. Nyt on helppoa todistaa OY–lauseen väite. Aloitamme tarkastamalla, että löytämämme kiintopiste $\varphi \in X$ toteuttaa OY–lauseen ehdot. Ainakin kiintopiste on jatkuva funktio $\varphi : [-h, h] \to [-b, b]$ ja toteuttaa ehdon

$$\varphi(x) = F(\varphi)(x) = \int_0^x f(t, \varphi(t))\,dt.$$

Oikeasta puolesta näkyy, että φ on derivoituva ja että derivoimalla puolittain saadaan differentiaaliyhtälön ratkaisun ominaisuus $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Tietysti alkuehtokin toteutuu: $\varphi(0) = \int_0^0 f(t, \varphi(t))\,dt = 0$. Jää harjoitustehtäväksi tarkastaa, että jokainen alkuehdon ja välillä $]-h, h[$ alkuperäisen differentiaaliyhtälön toteuttava funktio φ on myös F:n kiintopiste, siis yksikäsitteinen. □

3.3. Fredholmin ja Volterran integraaliyhtälöt (∗).

Esimerkki 3.5. (Fredholmin integraaliyhtälö). [13] Olkoot annettuina luku λ ja jatkuvat funktiot

$$\begin{aligned}
K &: [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R} \quad \text{ja} \\
h &: [a, b] \to \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Fredholmin integraaliyhtälö on

$$f(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)\,dy + h(x), \tag{1}$$

missä ongelmana on löytää funktio f. Ratkaiseminen onnistuu riittävän pienellä λ käyttämällä Banachin kiintopistelausetta kuvaukseen:

$$\begin{aligned}
T &: \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b] \\
Tf(x) &= \lambda \int_a^b K(x, y)f(y)\,dy + h(x).
\end{aligned}$$

[13] Erik Ivar Fredholm 1866–1927, Ruotsi.

Tämän perustelemiseksi tutkitaan aluksi, millä ehdolla T on kontraktio. Koska $[a,b]\times[a,b]$ on kompakti ja K on jatkuva, niin

$$M = \max_{a\le x,y\le b} |K(x,y)| < \infty.$$

Pätee siis arvio:

$$\begin{aligned}\|Tf - Tg\|_\infty &= \max_{a\le x\le b} |Tf(x) - Tg(x)| = \\ &= \max_{a\le x\le b} |\lambda \int_a^b K(x,y)(f(y)-g(y))\,dy| \le \\ &\le |\lambda|\, M\, \|f-g\|_\infty\, (b-a),\end{aligned}$$

joten T on kontraktio, kunhan

$$|\lambda| < \frac{1}{M\,(b-a)}.$$

Banachin lauseen mukaan on tällöin olemassa kuvauksen T kiintopiste f, ja se on selvästikin Fredholmin integraaliyhtälön yksikäsitteinen ratkaisu.

Esimerkki 3.6. (Volterran integraaliyhtälö (1897)). Olkoot annettuina jatkuvat funktiot K ja h kuten Fredholmin integraaliyhtälössä. *Volterran integraaliyhtälö* on

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y) f(y)\,dy + h(x), \tag{2}$$

siis integraalin ylärajan osalta erilainen kuin Fredholmin yhtälö. Parantamalla hieman Banachin kiintopistelausetta on mahdollista osoittaa, että Volterran yhtälöllä on kaikilla $\lambda\in\mathbb{R}$ olemassa yksi ratkaisu. Harjoitustehtävänä todistettava *Banachin kiintopistelauseen parannettu versio* sanoo, että täydellisen metrisen avaruuden X kuvauksella $T: X\to X$ on yksikäsitteinen kiintopiste, kunhan $T^n = T\circ\cdots\circ T$ on kontraktio jollakin $n\in\mathbb{N}$. Pyrimme käyttämään tätä kuvaukseen

$$\begin{aligned}T\colon\ &\mathcal{C}[a,b]\to\mathcal{C}[a,b]\\ Tf(x) &= \lambda\int_a^x K(x,y)f(y)\,dy + h(x).\end{aligned}$$

Alustava arvio tehdään kullekin x erikseen.

$$\begin{aligned}|Tf(x) - Tg(x)| &= |\lambda \int_a^x K(x,y)(f(y)-g(y))\,dy| \\ &\le |\lambda| \int_a^x M\,\|f-g\|_\infty\,dy \\ &= |\lambda|\, M\, \|f-g\|_\infty\,(x-a). \qquad (1)\end{aligned}$$

Lopuksi osoitetaan induktiolla n:n suhteen, että

$$|T^n f(x) - T^n g(x)| \le |\lambda|^n \frac{M^n (x-a)^n}{n!} \|f-g\|_\infty, \tag{2}$$

jolloin T^n on kontraktio riittävän suurella n, ja Volterran yhtälö on ratkaistu.

Induktio-oletus on kaava (2). Käyttäen sitä laskemme:

$$\begin{aligned} |T^{n+1} f(x) - T^{n+1} g(x)| &\le |\lambda| \int_a^x K(x,y)(T^n f(y) - T^n g(y))\, dy \\ &\le |\lambda| \int_a^x \frac{M\,|\lambda|^n M^n}{n!} \|f-g\|_\infty (y-a)^n\, dy \\ &= |\lambda|^{n+1} \frac{M^{n+1}(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \|f-g\|_\infty. \qquad \square \end{aligned}$$

Harjoitustehtäviä ja huomautuksia lukuun I

Harjoitustehtäviä lukuun I.

1.1. Miten sulkeuma karakterisoidaan jonoin metrisessä avaruudessa?

1.2. Olkoon $A \subset X$, missä (X,d) on metrinen avaruus. Olkoon d_A metriikan d rajoittuma joukkoon $A \times A$. Tällöin (A, d_A) on metrinen avaruus — X:n *metrinen aliavaruus*. Osoita, että joukko $U \subset A$ on avoin d_A-mielessä, jos ja vain jos $U = V \cap A$ jollekin avoimelle $V \subset X$. Havainnollista asiaa piirroksella.

1.3. Osoita, että kompaktin avaruuden suljettu osajoukko on kompakti.

1.4. Osoita, että kompaktien joukkojen leikkaus on kompakti. Leikattavia joukkoja saa olla äärettömän monta.

1.5. Olkoot A ja K metrisen avaruuden X *erillisiä* (siis niiden leikkaus tyhjä) kompakteja osajoukkoja. Näytä, että joukkojen *etäisyys* $d(A,K)$ on aidosti positiivinen. (Määritelmä: $d(A,K) = \inf\{d(a,k) \mid a \in A,\, k \in K\}$.) Päteekö väite vähemmin oletuksin?

1.6. Osoita, että metristen avaruuksien välinen kuvaus $F : X \to Y$ on ε, δ -mielessä jatkuva, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon $B \subset Y$ alkukuva $F^{-1}(B)$ on avoin.

1.7. (jatkoa) Osoita, että jos metristen avaruuksien välinen kuvaus $F : X \to Y$ on jatkuva, niin jokaisen kompaktin joukon $K \subset Y$ kuvajoukko $F(K)$ on kompakti.

1.8. (jatkoa) *Homeomorfismi* on jatkuva bijektio, jonka käänteiskuvauskin on jatkuva. Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, joista X kompakti, ja olkoon $f : X \to Y$ jatkuva bijektio. Osoita, että f on homeomorfismi.

1.9. Olkoon $a \in \mathbb{R}^2$. Todista, että euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ *siirto* eli *translaatio*

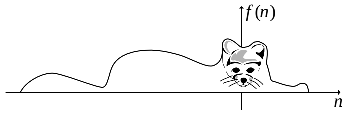
$$T_a : x \mapsto x + a$$

on jatkuva kuvaus. Onko mikään translaatio lineaarikuvaus?

1.10. Todista, että kompakti metrinen avaruus on täydellinen.

1.11. Osoita, että metrisen avaruuden X *suljettu pallo*

$$\overline{B}(x,r) = \{y \in X \mid d(x,y) \le r\}$$



on suljettu joukko. Voiko se olla avoin?

1.12. Näytä, että jos $(x_n)_1^\infty$ ja $(y_n)_1^\infty$ ovat X:n jonoja siten, että $d(x_n, x) \to 0$ ja $d(y_n, y) \to 0$, kun $n \to \infty$, niin $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

2.1. Täydennä Weierstrassin approksimaatiolauseen todistusta osoittamalla, että kun $a < b$, f on itseisarvofunktio $[a, b] \to \mathbb{R}$ ja $0 < \varepsilon$, niin on olemassa polynomi p, jolle $\|f - p\|_\infty \le \varepsilon$.

2.2. Täydennä Weierstrassin approksimaatiolauseen todistusta osoittamalla, että jos funktioita f ja g voidaan approksimoida ε-tasaisesti polynomeilla p ja q, niin lineaarikombinaatiota $\lambda f + \mu g$ ja tuloa fg voidaan approksimoida $\delta-$tasaisesti polynomeilla $\lambda f + \mu g$ ja pq. Määrää sopivat δ.

2.3. Oleta, että $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on k kertaa jatkuvasti derivoituva ja $\varepsilon > 0$. Onko olemassa polynomi p siten, että $\|f^{(n)} - p^{(n)}\|_\infty \le \varepsilon$ kaikilla $n = 1, \dots, k$?

2.4. Todista Stonen ja Weierstrassin lauseen kompleksinen muoto 2.13.

2.5. Olkoon (X, d) separoituva metrinen avaruus ja $A \subset X$. Näytä, että (A, d) on separoituva.

3.1. Keksi arvio Banachin kiintopistelauseen ratkaisujonon suppenemisnopeudelle.

3.2. Todista *Banachin parannettu kiintopistelause*, jonka mukaan täydellisen metrisen avaruuden X kuvauksella $T : X \to X$ on yksikäsitteinen kiintopiste, kunhan $T^n = T \circ \cdots \circ T$ on kontraktio jollakin $n \in \mathbb{N}$.

3.3. Todista, että jatkuvien funktioiden metrinen avaruus $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), d_\infty)$ on täydellinen.

3.4. Todista, että metrisen avaruuden täydellinen metrinen aliavaruus on suljettu osajoukko.

3.5. Todista, että täydellisen metrisen avaruuden suljettu osajoukko on täydellinen metrinen aliavaruus.

3.6. Onko metrisen avaruuden $(\mathcal{C}[0, 1], d_\infty)$ aliavaruus $\{f \in \mathcal{C}[0, 1] \mid f(1) = 0\}$ täydellinen?

3.7. Viimeistele OY–lauseen yksikäsitteisyyspuolen todistus tarkastamalla, että jokainen alkuehdon ja välillä $]-h, h[$ alkuperäisen differentiaaliyhtälön toteuttava funktio φ on myös F:n kiintopiste, siis yksikäsitteinen.

3.8. Todista Banachin kiintopistelauseen avulla, että yhtälöllä $\log(x + 2) = x$ on yksikäsitteinen ratkaisu $x \ge 0$. Laske iteroimalla likiarvo ratkaisulle.

3.9. a) Olkoon $X = \overline{B}(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$ varustettuna tavallisella euklidisella metriikalla ja olkoon $f : X \to X$ Lipschitz-jatkuva kuvaus vakiolla 1, toisin sanoen oletetaan, että

$$d(f(x), f(y)) \le d(x, y) \quad \forall\, x, y \in X.$$

Osoita, että $f(x) = x$ ainakin yhdessä pisteessä $x \in X$. Vihje: Tarkastele funktioita $f_j = (1 - \frac{1}{j})f$.

b) Näytä esimerkillä, että vastaava väite ei päde yleiselle kompaktille joukolle $B \subset \mathbb{R}^n$. Vertaa tehtävää myös Banachin kiintopistelauseeseen.

Huomautuksia lukuun I.

Metrisistä ja topologisista ominaisuuksista. Metrisillä avaruuksilla on huomattavia topologisluonteisia erityispiirteitä. Esimerkiksi metristen avaruuksien välisen kuvauksen jatkuvuus voidaan ilmaista sillä, että jatkuva kuvaus säilyttää jonojen raja-arvot. Tämä *jonojatkuvuus* ei takaa jatkuvuutta yleisessä topologiassa. Metrinen avaruus on kompakti tasan ollessaan *jonokompakti* eli kun sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono. Vastaava ei päde yleisessä topologiassa.

Cauchy-jonojen – yleisemmin Cauchy-filttereiden ja niiden mukana (jono-) täydellisyyden käsite eivät ole topologisia käsitteitä, mutta eivät vaadi aivan metriikkaakaan, vaan liittyvät ns. *uniformisten avaruuksien teoriaan,* jota emme käsittele.

Lagrange'in interpolaatio ja Rungen ilmiö.[14] Funktiota $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ voi yrittää approksimoida polynomilla monin muinkin tavoin kuin tasaisesti. Yksi luonnolliselta tuntuva tapa on *interpolointi*, siis sellaisen polynomin löytäminen, joka yhtyy tutkittavaan funktioon annetuissa pisteissä $a_1, \ldots, a_n \in [a, b]$. *Lagrange'in interpolaatiokaava*

$$p_n(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(a_j)\prod_{k\neq j}(x - a_k)}{\prod_{k\neq j}(a_j - a_k)}$$

antaa alimmanasteisen tällaisen polynomin. Jos pisteet $a_1, \ldots, a_n$ valitaan tasavälisesti ja jakoa tihennetään, niin Lagrange'in kaavan p_n ei kuitenkaan yleisesti lähene f:ää tasaisen suppenemisen mielessä — ei edes, vaikka f olisi reaalianalyyttinen jollain avoimella välillä $]c, d[\supset [a, b]$. Tämä tunnetaan nimellä *Rungen ilmiö.*

Müntzin ja Szászin lause.[15] Weierstrassin lausetta voi yleistellä myös ihan toiseen suuntaan tarkastelemalla tosin tavallisia polynomeja välillä $[a, b]$, mutta ei kaikkia. Kysymme millä luonnollisia lukuja λ_n koskevilla ehdoilla monomien

$$1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, x^{\lambda_3} \ldots$$

virittämä vektorialiavaruus on tiheä $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$:ssä. Weierstrassin lausehan sanoo, että ainakin eksponentit $\lambda_n = n$ kelpaavat. Ratkaisun antaa Müntzin ja Szatzin lause[16], jonka mukaan ehto

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$$

on välttämätön ja riittävä.

silotus. Weierstrassin klassinen approksimaatiolause antaa polynomin, siis erityisesti derivoituvan approksimaation jatkuvalle funktiolle. Tämäntapaisen säännöllistämisen eli silotusten tekemiseen on analyysissä usein tapana käyttää *konvoluutioon* perustuvaa menettelyä. joka ei yleensä anna polynomia. Weierstrassin lauseelle on todellakin olemassa konvoluutiotodistus, ks. esim. [CH] vol.1, Ch. I.4.

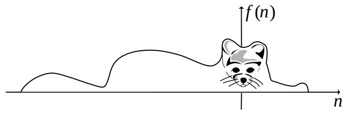
Bernsteinin polynomit.[17] Esittämämme Weierstrassin klassisen approksimaatiolauseen todistus ei anna kovin kätevää tapaa löytää halutunlaisia polynomeja. Käteviä tapoja on kuitenkin olemassa. Itse asiassa Weierstrassin lauseen voi

[14] Joseph Louis Lagrange 1736–1813, Ranska ja Carle David Tolmé Runge 1856–1927, Saksa.

[15] Herman Müntz 1884–1956, mm. Israel ja Otto Szász 1884–1952, Unkari-USA.

[16] [R-2] tai [W]. Todistus perustuu Hahnin ja Banachin lauseeseen 21.4 ja kompleksianalyysiin.

[17] Sergei Natanovitš Bernstein 1880–1968, Venäjä.



todistaa approksimoimalla funktiota $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ tasaisesti *Bernsteinin polynomeillaan*[18]

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Erotteluehdosta. Stonen ja Weierstrassin lauseessa esiintyvä erotteluehto on siinä mielessä välttämätön, että jos X on kompakti ja $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(X,\mathbb{R})$ on ykkösfunktion sisältävä alialgebra, niin välttämätöntä sille, että $\mathcal{A}$ on tiheä, on, että $\mathcal{A}$ erottelee X:n pisteet. Ks. esim. [Y] s. 9.

Metrisoituvuudesta. Normiavaruudet ovat metrisiä avaruuksia. On olemassa myös metrisoitumattomia topologisia vektoriavaruuksia.

Hyvä lukija. Kirjoita tekijälle parannusehdotuksia lukuun I.

[18]Ks. esim. [W]. On myös olemassa lyhyt stokastiikkaa käyttävä todistus.

II NORMIAVARUUDET JA JATKUVAT LINEAARIKUVAUKSET

4. Johdanto

Funktionaalianalyysin keskeinen käsite on jatkuva lineaarikuvaus. Jotta kuvaus $L : E \to F$ voisi olla lineaarinen, on joukkojen E ja F syytä olla vektoriavaruuksia ja jotta sama kuvaus $L : E \to F$ voisi olla jatkuva, on niiden syytä olla myös topologisia avaruuksia. Koska haluamme, että lineaarisuus ja jatkuvuus liittyisivät jotenkin toisiinsa, on avaruuksissa E ja F oltava yhteys lineaaristen laskutoimitusten ja topologian välillä. *Topologiseksi vektoriavaruudeksi* sanotaankin vektoriavaruutta $(E, +, \cdot)$, jossa laskutoimitukset

$$\begin{cases} + & : E \times E \to E \quad \text{ja} \\ \cdot & : \mathbb{R} \times E \to E \end{cases}$$

ovat jatkuvia funktioita.

Tarkoituksenamme on tutkia lineaarikuvauksia monenlaisissa ääretönulotteisissa avaruuksissa, joiden alkiot eli vektorit ovat tyypillisessä sovelluksessa lukujonoja tai funktioita. Teorian kannalta tämä vektoreiden konkreettinen esitystapa ei ole ratkaiseva asia, vaan tärkeämpää on, mitä vektoreille voi tehdä eli millainen on kulloinkin tarkasteltavan avaruuden rakenne. Topologisia vektoriavaruuksia luokitellaankin ensisijaisesti rakenteensa mukaan, ja puhumme mm. eriulotteisista sisätuloavaruuksista, erilaisista normiavaruuksista ja lokaalikonvekseista avaruuksista, niin reaali- kuin kompleksikertoimisistakin. Perusesimerkki topologisesta vektoriavaruudesta on kuitenkin euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$. Perusesimerkki on syytä tuntea hyvin ja aika paljon siitä jo tiedämmenin, sillä lineaarialgebran yhteydessä on joukkoa $\mathbb{R}^n$ tutkittu äärellisulotteisena vektoriavaruutena ja sisätuloavaruutena. Differentiaali- ja integraalilaskennan yhteydessä lukija on epäilemättä käsitellyt euklidista avaruutta myös metrisenä ja topologisena avaruutena.

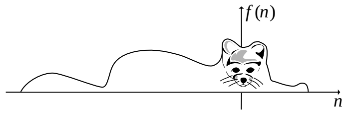
5. Äärellisulotteisen avaruuden normit ja lineaarikuvaukset

Seuraavassa esitämme lineaarikuvaukselle viisi jatkuvuuden kanssa yhtäpitävää ehtoa. Sitten todistamme, että äärellisulotteisten normiavaruuksien välinen lineaarikuvaus on aina jatkuva, vieläpä tasaisesti jatkuva.

5.1. Euklidisen avaruuden lineaarikuvaukset.

LAUSE 5.1. *Lineaarikuvaukselle $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(a) *L on tasaisesti jatkuva koko avaruudessa.*



(b) *L on jatkuva kaikissa pisteissä.*
(c) *L on jatkuva origossa.*
(d) *L on jatkuva jossain pisteessä.*

Todistus. Ehtojen (b), (c) ja (d) yhtäpitävyyden osoittamiseksi riittää näyttää, että jatkuvuus mielivaltaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}^n$ on yhtäpitävää jatkuvuuden kanssa origossa. Olkoon aluksi L jatkuva origossa. Merkitsemme kaikkien vektoriavaruuksien origoa samalla symbolilla 0, joten $L(0) = 0$. Jatkuvuuden klassinen ε-δ -määritelmä

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \|z - 0\| < \delta \implies \|Lz - 0\| \leq \varepsilon$$

tarkoittaa siis, että $\|Lz\| < \varepsilon$, kunhan $\|z\| < \delta$. Jatkuvuus kohdassa $x \in \mathbb{R}^n$ saadaan soveltamalla tätä vektoreihin $x - y$, missä $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|Lx - Ly\| = \|L(x - y)\| < \varepsilon,$$

kunhan $\|x - y\| < \delta$. L on siis jatkuva kohdassa x. Samalla on tullut todistettua, että jatkuvuudesta origossa seuraa suorastaan tasainen jatkuvuus koko avaruudessa, sillä jatkuvuutta pisteessä x todistettaessa kävi ilmi, että luku δ ei riipu pisteestä x vaan ainoastaan luvusta ε ja tietysti lineaarikuvauksesta L.

Päättelyn voi helposti kääntää, joten lineaarikuvauksen L jatkuvuus pisteessä 0 seuraa sen jatkuvuudesta missä tahansa pisteessä x. $\square$

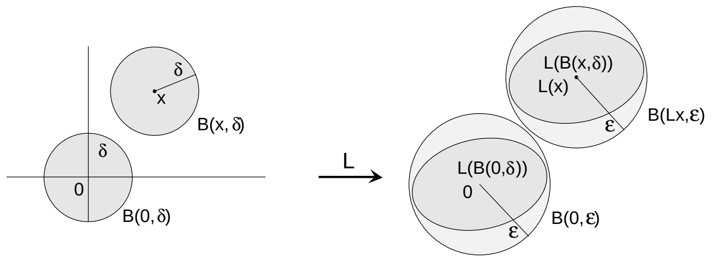
Edellisen, sinänsä yksinkertaisen todistuksen oleellinen piirre on mahdollisuus siirtää tarkastelut pisteen 0 ympäristöstä pisteen x ympäristöön *translaatiolla* eli *siirtokuvauksella*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \quad y \mapsto x + y.$$

Translaatio säilyttää pisteiden väliset etäisyydet ja kuvaa siksi pallot samansäteisiksi palloiksi. Saadaksemme geometrisen mielikuvan tilantesta lausumme kuvauksen L jatkuvuuden pisteessä x pallojen avulla:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad L(B(x, \delta)) \subset B(L(x), \varepsilon)$$

Lauseen 5.1.a) todistus ilmaisee, että jos lineaarikuvaus L kuvaa origokeskisen δ-säteisen pallon origokeskisen ε-säteisen pallon sisään, niin L kuvaa x-keskisen δ-säteisen pallon Lx-keskisen ε-säteisen pallon sisään.



KUVA 9. LINEAARIKUVAUKSEN TASAINEN JATKUVUUS.

Jatkuvia lineaarikuvauksia sanotaan usein — jopa yleensä — *rajoitetuiksi lineaarikuvauksiksi.* Syynä tähän on, että lineaarikuvauksen jatkuvuus on yhtäpitävää sen kanssa, että se kuvaa yksikköpallon rajoitetuksi joukoksi, siis jonkin pallon sisään:

LAUSE 5.2. *Lineaarikuvaus $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ toteuttaa lauseen 5.1 keskenään yhtäpitävät jatkuvuusehdot täsmälleen silloin, kun se kuvaa avaruuden $\mathbb{R}^n$ yksikköpallon rajoitetuksi joukoksi.*

TODISTUS. Jos L on jatkuva origossa, niin se kuvaa ainakin jonkin origokeskisen pallon rajoitetuksi joukoksi, sillä jatkuvuuden määritelmän mukaan on olemassa luku $\delta > 0$ siten, että $L(B(0,\delta)) \subset B(0,1)$. Nyt yksikköpallo kuvautuu origokeskisen $\frac{1}{\delta}$-säteisen pallon sisään, sillä

$$\|x\| < 1 \implies \|Lx\| = \|\tfrac{1}{\delta}L(\delta x)\| = \tfrac{1}{\delta}\|L(\delta x)\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

L on siis rajoitettu funktio yksikköpallossa $B(0,1)$, ja

$$\sup_{x \in B(0,1)} \|Lx\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

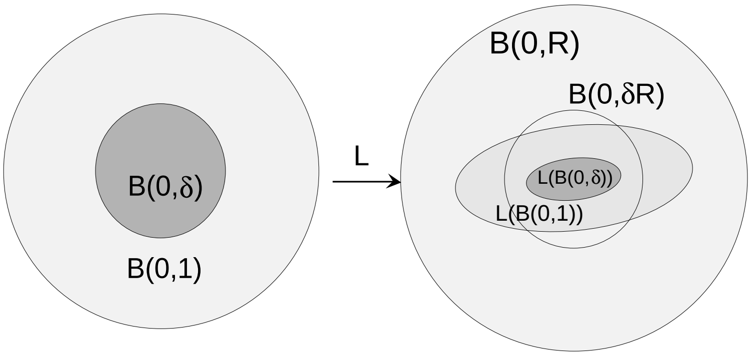
Tämäkin päättely on käännettävissä, joten yksikköpallossa rajoitettu lineaarikuvaus on jatkuva. □

Edellisessä todistuksessa koko tilanteen mittakaavaa muutetaan *origokeskisellä homotetialla* eli *skaalauksella*

$$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \quad y \mapsto \tfrac{1}{\delta}y.$$

Homotetia venyttää kaikkia etäisyyksiä samassa suhteessa ja on siis yhdenmuotoisuuskuvaus, joka erityisesti kuvaa pallot palloiksi säilyttäen niiden kokosuhteet. Skaalaus on lineaarikuvaus.

Laskelmamme osoittaa, että jos lineaarikuvaus L kuvaa yksikköpallon $B(0,1)$ jonkin origokeskisen R-säteisen pallon $B(0,R)$ sisään, niin L kuvaa mielivaltaisen origokeskisen δ-säteisen pallon origokeskisen δR-säteisen pallon $B(0,\delta R)$ sisään.



Kuva 10. Lineaarikuvauksen mittakaava.

Lauseella 5.2 ja sen todistuksella on kantavuutta paljon yli sen miltä ensin näyttää. Palaamme asiaan vielä useasti, mutta julistamme kuitenkin jo nyt seuraavan tuloksen:

Huomautus 5.3. Lauseiden 5.1 ja 5.2 viisi ehtoa ovat yhtäpitäviä jokaiselle kahden normiavaruuden väliselle lineaarikuvaukselle L myös ääretönulotteisessa tapauksessa, sillä esittämämme perustelu kelpaa yleisessä normiavaruudessa. Lause 5.2 antaa aiheen seuraavaan määritelmään.

Määritelmä 5.4. Kahden normiavaruuden välisen jatkuvan eli *rajoitetun lineaarikuvauksen* $L : E \to F$ *normi* eli *operaattorinormi* on luku

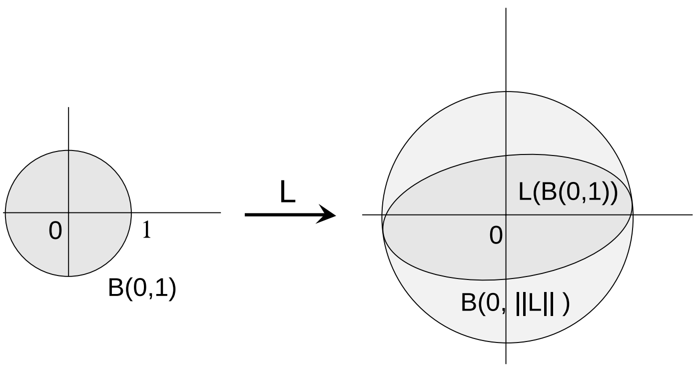
$$\|L\| = \sup_{x \in \overline{B}_E} \|Lx\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Lx\|.$$

Ei ole vaikeaa huomata, että kaikilla $x \in E$ on voimassa tärkeä epäyhtälö

$$\|Lx\| \le \|L\| \, \|x\|,$$

ja että itse asiassa $\|L\|$ on pienin luku M, jolla

$$\|Lx\| \le M\|x\| \quad \forall\, x \in E.$$



Kuva 11. Operaattorinormi.

HUOMAUTUS 5.5. Operaattorinormi ansaitsee normin nimen, sillä lineaarikuvausten joukko

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \{L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \mid L \text{ on lineaarikuvaus}\}$$

on vektoriavaruus ja operaattorinormi toteuttaa normin aksioomat, positiivisuuden, definiittisyyden, positiivihomogeenisuuden ja kolmioepäyhtälön.

Olemme nyt valmiina todistamaan euklidisten avaruuksien välisen lineaarikuvauksen jatkuvuuden.

LAUSE 5.6. *Jokainen lineaarikuvaus*

$$L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

on jatkuva euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ *mielessä.*

TODISTUS. Käytetään standardikantaa ja matriiseja. Kuvauksen L matriisin A i:s rivi on $a_{i*} = (a_{ij})_{j=1}^n$. Lineaarialgebran mukaan kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$ pätee

$$Lx = Ax = \begin{bmatrix} (a_{i*}|x) \\ \vdots \\ (a_{m*}|x) \end{bmatrix},$$

missä $(\cdot|\cdot)$ on standardisisätulo. *Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälön* nojalla $|(x|y)| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$, joten

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_{i*}|x)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \|a_{i*}\|_2^2 \|x\|_2^2} \\ &= \|x\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \|a_{i*}\|_2^2} = \|x\|_2 \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |a_{ij}|^2}. \end{aligned}$$

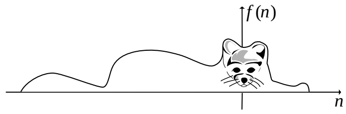
Kuvaus L on siis jatkuva eli rajoitettu, ja sen normi on enintään yhtä suuri kuin sen standardikantamatriisin kaikista matriisialkioista muodostetun vektorin euklidinen pituus. $\square$

Huomasimme juuri, että tavallisen euklidisen teorian mielessä lineaarikuvauksen operaattorinormi $\|L\|$ on pienempi tai sama kuin euklidinen normi $\|A\|_2$, missä matriisi $A = \operatorname{Mat} L$ on tulkittu vektoriksi $A \in \mathbb{R}^{nm}$.

HUOMAUTUS 5.7. Euklidisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritellyn lineaarikuvauksen operaattorinormin lausekkeessa

$$\|L\| = \sup_{x \in \overline{B}(0,1)} \|Lx\|$$

esiintyvä pienin yläraja on itse asiassa maksimi, ts. *pienin yläraja saavutetaan.* Tämä johtuu siitä, että maksimoitava funktio $\|\cdot\| \circ L$ on kahdesta jatkuvasta funktiosta yhdistettynä kuvauksena jatkuva, ja yksikköpallo $\overline{B}(0,1)$ on euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettuna ja rajoitettuna joukkona Heinen ja Borelin kuuluisan lauseen mukaan kompakti.



5.2. Äärellisulotteisen normiavaruuden lineaarikuvaukset.

Huomautus 5.8. Itse asiassa jokainen äärellisulotteisten normiavaruuksien välinen lineaarikuvaus on jatkuva. Voidaksemme perustella, arvostaa ja käyttää tätä tietoa meidän on syytä ensin selvitellä, miten muut äärellisulotteiset normiavaruudet eroavat euklidisesta avaruudesta, jos ollenkaan. Yleinen normin käsite on määritelty kohdassa 1.1. Vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$ voidaan varustaa jollakin muullakin normilla kuin euklidisella. Esimerkki sellaisesta olkoon kaksiulotteisen avaruuden *ykkösnormi* $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$, jonka yksikköpallo on neliö.

Koska jokainen n-ulotteinen reaalinen vektoriavaruus V voidaan kannan käyttöönoton avulla samastaa avaruuteen $\mathbb{R}^n$, saadaan kaikki äärellisulotteiset reaaliset sisätuloavaruudet, normiavaruudet ja topologiset vektoriavaruudet varustamalla avaruus $\mathbb{R}^n$ erilaisin sisätuloin, normein ja vektoriavaruustopologioin.

Osoitamme seuraavaksi, että vaikka avaruuden $\mathbb{R}^n$ normeja on monenlaisia, niin ne kaikki ovat keskenään *ekvivalentteja* — ne tuottavat saman topologian.

Määritelmä 5.9. Saman avaruuden $\mathbb{R}^n$ normit $\|\cdot\|_a$ ja $\|\cdot\|_b$ ovat *ekvivalentit*, mikäli on olemassa vakiot M ja m siten, että kaikille $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{cases} \|x\|_a \le M\,\|x\|_b & \text{ja} \\ \|x\|_b \le m\,\|x\|_a\,. \end{cases}$$

Ylempi epäyhtälö lausuu, että identtinen kuvaus $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_b) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_a)$ on rajoitettu eli jatkuva lineaarikuvaus. Alempi lausuu, että edellisen käänteiskuvaus eli identtinen kuvaus $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_a) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_b)$ on jatkuva. Molempien voimassaolo merkitsee, että identtinen kuvaus on homeomorfismi, eli että normit tuottavat saman topologian.

Normien ekvivalenssia voi havainnollistaa geometrisesti: $\|\cdot\|_a$ ja $\|\cdot\|_b$ ovat *ekvivalentit*, mikäli kummankin yksikköpallo on rajoitettu toisen normin mielessä. Tämä taas on yhtäpitävää sen kanssa, että $\|\cdot\|_a$-yksikköpallo sisältää jonkin origokeskisen $\|\cdot\|_b$-pallon ja kääntäen.

Lause 5.10. *Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikki normit ovat keskenään ekvivalentteja.*

Todistus. Riittää todistaa, että avaruuden $\mathbb{R}^n$ mielivaltainen normi $\|\cdot\|$ on ekvivalentti tavallisen euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ kanssa. Ensimmäinen epäyhtälö saadaankin aivan helposti lausumalla vektori standardikannassa.

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|\sum_{j=i}^{n} x_i e_i\| \le \sum_{j=i}^{n} \|x_i e_i\| \\ &\le \sum_{j=i}^{n} |x_i|\ \|e_i\| \\ &\le \left(\max_{1\le i\le n} |x_i|\right) \left(\max_{1\le i\le n} \|e_i\|\right) \sum_{j=i}^{n} 1 \\ &\le \|x\|_2 \underbrace{\left(\max_{1\le i\le n} \|e_i\|\right) n}_{M}. \end{aligned}$$

Toisensuuntainen epäyhtälö perustuu Heinen ja Borelin lauseeseen, jonka mukaan euklidisessa avaruudessa suljettu ja rajoitettu joukko on kompakti[19]. Tavallisen yksikköpallon kuori

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$$

on siis kompakti tavallisessa topologiassa eli avaruudessa $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$. Koska jo olemme todistaneet ensimmäisen epäyhtälön, tiedämme että identtinen kuvaus $I : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ on jatkuva. Kompaktin joukon kuva jatkuvassa kuvauksessa on aina kompakti. Siksi kuvajoukko $I(S)$ eli S itse on kompakti myös normin $\|\cdot\|$ mielessä. Normi $\|\cdot\|$ on jatkuva kuvaus $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$. Siksi se saavuttaa minimin juuri kompaktiksi toteamallamme pallonkuorella $S \subset \mathbb{R}^n$. Koska 0 ei kuulu kuorelle S, niin tuo minimi – olkoon se m_0 – saavutetaan jossakin muussa pisteessä, ja on siis aidosti positiivinen. Olemme löytäneet luvun $M_0 > 0$, jolla on ominaisuus

$$M_0 \le \|x\| \quad \text{kaikille } x, \text{ joilla } \|x\|_2 = 1.$$

Saman voi kirjoittaa

$$\|x\|_2 \le \tfrac{1}{M_0}\|x\| \quad \text{kaikille } x, \text{ joilla } \|x\|_2 = 1.$$

Etsitty epäyhtälö pätee siis yksikköpallon kuorella vakiolla $m = \frac{1}{M_0}$. Tästä alkuperäinen väite saadaan yksinkertaisella skaalauksella: Mielivaltainen vektori $x \in \mathbb{R}^n$ voidaan kirjoittaa tuloksi normistaan ja yksikkövektorista, jolloin saadaan

$$\|x\|_2 = \left\| \|x\|_2 \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 = \|x\|_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\|_2 \le \|x\|_2 \; m \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| = m\,\|x\|. \qquad \square$$

Olemme nyt samalla saavuttaneet tämän luvun päätulokset:

Seuraus 5.11. *Äärellisulotteisten normiavaruuksien välinen lineaarikuvaus on jatkuva.*

Todistus. Edellisen lauseen mukaan äärellisulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikki normit ovat keskenään ekvivalentteja ja antavat siis saman topologian. Väite seuraa siis lauseesta 5.7, jonka mukaan äärellisulotteisten reaalisten vektoriavaruuksien väliset lineaarikuvaukset ovat jatkuvia euklidisessa topologiassa. □

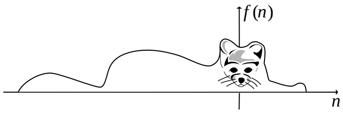
Seuraus 5.12. *Jokainen äärellisulotteinen normiavaruus on täydellinen.*

Todistus. Olkoon $(x_n)_\mathbb{N}$ Cauchy-jono avaruuden $\mathbb{R}^n$ jonkin normin $|||\cdot|||$ mielessä. Edellisen lauseen mukaan $|||\cdot|||$ ja euklidinen normi $\|\cdot\|$ ovat ekvivalentit, joten on ilmeistä, että $(x_n)_\mathbb{N}$ on euklidinenkin Cauchy-jono ja siis suppenee, koska euklidinen avaruus tunnetusti on täydellinen. Lopuksi normien ekvivalenssi takaa, että suppeneminen tapahtuu myös normin $|||\cdot|||$ mielessä. □

Lause 5.13. *Kaikki edellä sanottu pätee myös kompleksikertoimisissa äärellisulotteisissa normiavaruuksissa.*

Todistus. Luvun 5. kaikki lauseet pätevät, vaikka $\mathbb{R}$ korvattaisiin kompleksilukujen kunnalla $\mathbb{C}$. □

[19] Heinen ja Borelin lause ei ole topologinen lause, koska rajoitettu joukko ei ole topologinen käsite. Itse asiassa Heinen ja Borelin lause ei päde myöskään yleisessä metrisessä avaruudessa, ei edes ääretönulotteisessa normiavaruudessa. Suljettu ja rajoitettu joukko ei ole aina kompakti. Toisin päin kyllä.



6. Yleisistä normiavaruuksista

6.1. Ääretönulotteisuudesta.

Ennen varsinaisen tarkastelun aloittamista luettelemme ilman perusteluja joitakin äärellis- ja ääretönulotteisten normiavaruuksien yhtäläisyyksiä ja eroja.

1) Normiavaruuden metriikka $d(x, y) = \|x - y\|$ ja siitä saatava *normitopologia* määritellään aivan samalla tavalla *dimensiosta* eli ulotteisuudesta riippumatta.

2) Äärellisulotteisen normiavaruuden kaikki lineaarikuvaukset ovat jatkuvia, mutta ääretönulotteisissa avaruuksissa on sekä epäjatkuvia että jatkuvia lineaarikuvauksia. Jatkuvuus yhdessä pisteessä on myös ääretönulotteisessa tapauksessa yhtäpitävää tasaisen jatkuvuuden kanssa ja edelleen rajoittuneisuuden kanssa yksikköpallossa. Rajoitetun lineaarikuvauksen operaattorinormi on käyttökelpoinen käsite myös ääretönulotteisessa avaruudessa.

3) Äärellisulotteisen avaruuden kaikki normit tuottavat saman topologian, mutta ääretönulotteisessa näin ei ole.

4) Kaikki äärellisulotteiset normiavaruudet ovat täydellisiä, mutta ääretönulotteiset normiavaruudet voivat olla joko täydellisiä tai epätäydellisiä. Siksi eivät kaikki normiavaruuden lineaariset aliavaruudet ole suljettuja, äärellisulotteiset tietysti kyllä. Täydellisiä normiavaruuksia sanotaan *Banachin avaruuksiksi* ja täydellisiä sisätuloavaruuksia *Hilbertin avaruuksiksi*[20].

5) Äärellisulotteisen avaruuden lineaarikuvauksen jatkuvuus perustuu Heinen ja Borelin lauseeseen, jonka mukaan avaruuden $\mathbb{R}^n$ suljettu yksikköpallo on kompakti. Ääretönulotteisen avaruuden yksikköpallo ei koskaan ole kompakti.

6.2. Normiavaruudet.

Aloitamme ääretönulotteisten normiavaruuksien ja jatkuvien lineaarikuvauksien esittelyn toistamalla lukijan mukavuudeksi normin määritelmän sallien samalla kompleksiluvut kertoimiksi. Otamme myös käyttöön tarvittavia merkintöjä.

Määritelmä 6.1. Olkoon $\mathbb{K}$ joko $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{C}$ ja olkoon E $\mathbb{K}$-kertoiminen vektoriavaruus. Kuvaus $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ on *normi* ja $(E, \|\cdot\|)$ *normiavaruus*, jos niillä on ominaisuudet

$$\begin{cases} \textit{positiivisuus:} & \|x\| \geq 0 \text{ kaikilla } x \in E, \\ \textit{definiittisyys:} & \|x\| = 0 \text{ vain, kun } x = 0, \\ \textit{positiivihomogeenisuus:} & \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \text{ kaikille } \lambda \in \mathbb{K} \text{ ja } x \in E, \\ \textit{kolmioepäyhtälö:} & \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ kaikille } x, y \in E. \end{cases}$$

Määritelmä 6.2. Kuvausta, joka täyttää muut normin ehdot paitsi mahdollisesti definiittisyyden, sanotaan *seminormiksi* eli *puolinormiksi.*

Esimerkiksi kuvaus $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto |y|$ on seminormi. Tarvitsemme seminormeja vasta myöhemmin tarkastellessamme Lebesgue'in avaruuksia sekä tutkiessamme heikkoa topologiaa ja muita lokaalikonvekseja vektoriavaruustopologioita.

---

[20] David Hilbert 1862–1943, Saksa.

MÄÄRITELMÄ 6.3. Normiavaruuden E palloja merkitään

$$\begin{aligned} B(x,r) &= \{y \in E \mid \|x-y\| < r\} \quad \text{(avoin pallo)} \\ \overline{B}(x,r) &= \{y \in E \mid \|x-y\| \le r\} \quad \text{(suljettu pallo).} \end{aligned}$$

Erityisesti $B_E = B(0,1)$ ja $\overline{B}_E = \overline{B}(0,1)$ ovat *avoin* ja *suljettu yksikköpallo.*

HUOMAUTUS 6.4. Normiavaruudessa suljettu pallo on vastaavan avoimen pallon sulkeuma ja avoin pallo on suljetun pallon sisus. Mielivaltaisessa metrisessä avaruudessa ei tarvitse olla näin.

HUOMAUTUS 6.5. Normi voidaan rekonstruoida yksikköpallostaan $\overline{B} = \overline{B}(0,1)$, sillä

$$\|x\| = \min\{a \mid \tfrac{x}{a} \in \overline{B}\}.$$

Siksi yksikköpallon "geometria" kertoo normiavaruudesta "kaiken".

HUOMAUTUS 6.6. a) Normi toteuttaa *toisen kolmioepäyhtälön*

$$\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \le \|x-y\| \quad \forall\, x,y \in E.$$

Eritoten normi on tasaisesti jatkuva kuvaus $E \to \mathbb{R}$, jopa Lipschitz-jatkuva vakiolla 1 — mutta ei tietenkään lineaarinen.

b) Normiavaruuden laskutoimitukset

$$\begin{aligned} + &: E \times E \to E \quad \text{ja} \\ \cdot &: \mathbb{K} \times E \to E \end{aligned}$$

ovat nekin jatkuvia kuvauksia, kun otetaan huomioon, että kahden vektoriavaruuden V ja W *tuloavaruus* $V \times W$ on tapana varustaa *luonnollisilla laskutoimituksilla*

$$\begin{aligned} (x,y) + (u,v) &= (x+u, y+v) \\ \lambda(x,y) &= (\lambda x, \lambda y) \end{aligned}$$

ja normiavaruuksien tulo sen lisäksi yleensä normilla $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2}$ tai sen kanssa ekvivalentilla $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|\}$, joiden topologiaa sanotaan *tulotopologiaksi.*

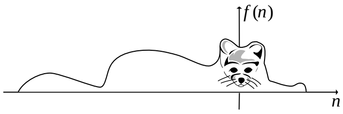
c) Laskutoimitusten jatkuvuudesta seuraa, että jokainen *affiini kuvaus*

$$x \mapsto \lambda x + a, \quad \text{missä } a \in E, \text{ ja } \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\},$$

on homeomorfismi $E \to E$. Erikoistapauksia affiinista kuvauksesta ovat siirto ($\lambda = 1$) ja homotetia ($a = 0$).

6.3. Jatkuvat lineaarikuvaukset.

Siirrymme tarkastelemaan yleisten normiavaruuksien välisiä jatkuvia eli rajoitettuja lineaarikuvauksia. Huomaamme ennen kaikkea, että rajoitetulle lineaarikuvaukselle voidaan nytkin määritellä normi samalla tavalla kuin äärellisulotteisessa tilanteessa.



Lause 6.7. *Kahden normiavaruuden välinen lineaarikuvaus $T : E \to F$ on jatkuva eli rajoitettu, mikäli se toteuttaa seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot:*

(a) *T on tasaisesti jatkuva koko avaruudessa.*
(b) *T on jatkuva kaikissa pisteissä.*
(c) *T on jatkuva origossa.*
(d) *T on jatkuva jossain pisteessä.*
(e) *T on rajoitettu yksikköpallossa.*

Perustelu. Asia käsiteltiin jo luvussa 5. Lause 6.7 todistetaan siis tasan samalla tavalla kuin lauseet 5.1 ja 5.2. Muistamme samalla, että rajoitetun lineaarikuvauksen $T : E \to F$ *operaattorinormi*

$$\|T\| = \sup_{x \in \overline{B}_E} \|Tx\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

on pienin luku M, jolla

$$\|Tx\| \le M\|x\| \quad \forall\, x \in E.$$

Lause 6.8. Jos E ja F ovat normiavaruuksia, niin rajoitettujen lineaarikuvausten joukko

$$\mathcal{B}(E, F) = \{T : E \to F \mid T \text{ on rajoitettu lineaarikuvaus}\}$$

on normiavaruus, tarkemmin sanottuna tavalliset laskutoimitukset tekevät siitä vektoriavaruuden ja operaattorinormi $\|T\|$ toteuttaa normin aksioomat.

b) Jos $S : E \to F$ ja $T : F \to G$ ovat rajoitettuja lineaarikuvauksia, niin

$$\|T \circ S\| \le \|T\|\,\|S\|.$$

Perustelut. Harjoitustehtäviä. □

6.4. Normiavaruuden suljetut aliavaruudet.

Määritelmä 6.9. Kun normiavaruuden $(E, \|\cdot\|)$ lineaarinen aliavaruus $F \subset E$ on varustettu samalla normilla $\|\cdot\|$, niin sitä sanotaan avaruuden E *normialiavaruudeksi* – lyhyesti vain *aliavaruudeksi* ellei käytetystä normista ole epäselvyyttä. Normialiavaruus on alkuperäisen avaruuden lineaarinen ja metrinen aliavaruus.

Muistamme, että täydellisen metrisen avaruuden metrinen aliavaruus on täydellinen aina ja vain ollessaan suljettu osajoukko. Tämä antaa aiheen kiinnitää erityistä huomiota suljettuihin normialiavaruuksiin.

Esimerkki 6.10. Seuraavat ovat esimerkkejä normiavaruuden E suljetuista aliavaruuksista:

a) äärellisulotteinen aliavaruus $F \subset E$,
b) jatkuvan lineaarikuvauksen $T : E \to G$ ydin .

Perustelu. a) Olkoon $(E, \|\cdot\|)$ normiavaruus ja F sen äärellisulotteinen aliavaruus. Normiavaruus $(F, \|\cdot\|)$ on lauseen 5.12 mukaan täydellinen, siis suljettu.

b) Lineaarikuvauksen ydin on aliavaruus. Jatkuvassa kuvauksessa suljetun joukon alkukuva on suljettu. Yksiö $\{0\}$ on suljetu joukko. □

ESIMERKKI 6.11. Normiavaruudessa aliavaruuden $A \subset E$ sulkeuma $\overline{A} \subset E$ on aliavaruus, vieläpä suppein A:n sisältävä suljettu aliavaruus.

PERUSTELU. On harjoitustehtävä tarkastaa, että $\overline{A}$ on lineaarinen aliavaruus, tietysti suljettu. Toisaalta mikä tahansa A:n sisältävä suljettu joukko sisältää myös sulkeuman $\overline{A}$. □

6.5. Banachin avaruudet.

MÄÄRITELMÄ 6.12 (BANACHIN AVARUUS). Täydellistä normiavaruutta sanotaan *Banachin avaruudeksi.*

LAUSE 6.13. *Banachin avaruuden aliavaruus on täydellinen jos ja vain jos se on suljettu.*

TODISTUS. Täydellisen metrisen avaruuden aliavaruus on täydellinen tasan ollessaan suljettu. □

Normiavaruuden täydellisyys voidaan karakterisoida seuraavalla käyttökelpoisella ehdolla:

LAUSE 6.14. *Normiavaruus $(E, \|\cdot\|)$ on täydellinen eli Banachin avaruus aina ja vain, kun sen jokainen itseisesti suppeneva sarja suppenee.*

TODISTUS. Olkoon aluksi E Banachin avaruus ja olkoon $(x_k)_1^\infty$ sellainen jono E:n vektoreita, että niistä muodostettu sarja suppenee itseisesti eli

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty.$$

Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa luku n siten, että kaikilla $m \geq n$ ja $r \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=m}^{m+r} \|x_k\| < \varepsilon.$$

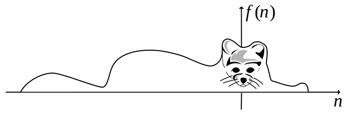
Tästä seuraa, että osasummien jono $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_{n=1}^{\infty}$ on Cauchy-jono, sillä kolmioepäyhtälöstä saadaan

$$\|\sum_{k=1}^{m+r} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k\| = \|\sum_{k=m+1}^{m+r} x_k\| \leq \sum_{k=m+1}^{m+r} \|x_k\| \leq \sum_{k=m}^{m+r} \|x_k\| < \varepsilon,$$

kun $m \geq n$ ja $r \in \mathbb{N}$. Avaruuden E täydellisyys takaa tämän jonon suppenemisen eli sarjan konvergenssin.

Lauseen mielenkiintoisempi puoli on ehdon riittävyys, jonka seuraavassa tarkastamme *kokoonpainuvan kaukoputken tempulla*, joka on seuraava triviaali havainto: Normiavaruudessa E jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee: $x_n \to x \in E$ täsmälleen silloin, kun x on vastaavan kokoonpainuvan sarjan

$$\text{(K)} \qquad x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x_{k+1} - x_k) = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots$$



summa.

Oletetaan, että avaruudessa E jokainen itseisesti suppeneva sarja suppenee ja että $(x_k)_1^\infty \subset E$ on Cauchy-jono.

Cauchy-ehdosta seuraa, että jonolla $(x_k)_1^\infty$ on osajono — jota tradition mukaisesti merkitsemme samalla symbolilla $(x_k)_1^\infty$ — jolla pätee

$$\|x_m - x_k\| < \frac{1}{2^n} \quad \forall \quad k, m \geq n.$$

Tätä osajonoa vastaava sarja (K) suppenee itseisesti, onhan nyt

$$\|x_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{k+1} - x_k\| \leq \|x_1\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

Oletuksen mukaan (K) siis suppenee, joten myös tutkittava osajono suppenee. Mutta asia on niin, että Cauchy-jono suppenee aina, kun sillä on suppeneva osajono. Siis myös alkuperäinen Cauchy-jono suppenee. □

6.6. Rieszin lause ääretönulotteisuudesta.

Todistamme tämän luvun lopuksi lauseen, jonka mukaan ääretönulotteisessa normiavaruudessa suljettu pallo tosin on rajoitettu ja suljettu, mutta — päinvastoin kuin äärellisulotteisessa avaruudessa — ei milloinkaan kompakti.

LAUSE 6.15. (RIESZIN EPÄKOMPAKTISUUSLAUSE)[21] *Jos normiavaruuden E suljettu yksikköpallo $\overline{B} = \overline{B}_E(0,1)$ on kompakti, niin E on äärellisulotteinen.*

TODISTUS. Peitämme tutkittavan pallon $\frac{1}{2}$–säteisillä avoimilla palloilla

$$\overline{B} \subset \bigcup_{x \in \overline{B}} B(x, \tfrac{1}{2}).$$

Kompaktisuusoletuksesta seuraa, että näin saadusta avoimesta peitteestä voi valita äärellisen alipeitteen

$$\overline{B} \subset B(x_1, \tfrac{1}{2}) \cup \cdots \cup B(x_n, \tfrac{1}{2}).$$

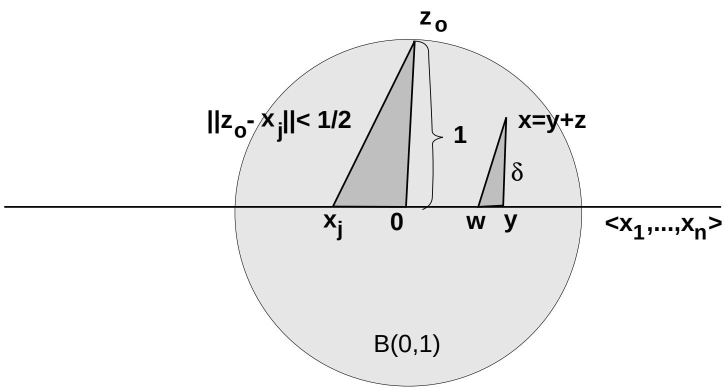
Avaruuden E äärellisulotteisuus saadaan osoittamalla, että sen yksikköpallo $\overline{B}$ sisältyy vektorien $x_1, \ldots, x_n$ virittämään aliavaruuteen $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, joka on äärellisulotteinen. Tehdään tämä epäsuorasti valitsemalla piste $x \in \overline{B} \setminus \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ ja johtamalla ristiriita. Äärellisulotteinen aliavaruus $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ on suljettu, joten pisteen x etäisyys siitä

$$\delta = \inf\{\|x - y\| \mid y \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle\}$$

on aidosti positiivinen. Aliavaruudella $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ on ainakin yksi piste y, jolle $\|x - y\| = \delta$. Syy tähän on, että jatkuva funktio $y \mapsto \|x - y\|$ saavuttaa minimin äärellisulotteisen avaruuden suljetussa ja rajoitetussa, siis kompaktissa joukossa

[21] FRIGYES RIESZ 1880–1956, Unkari.

$\overline{B}_E(x, 2\delta) \cap \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Merkitään $z = x - y$ ja muodostetaan vastaava yksikkövektori $z_0 = \frac{z}{\|z\|}$, mikä on mahdollista, koska z ei ole 0. Nyt $z_0 \in \overline{B}$.



KUVA 12. RIESZIN EPÄKOMPAKTIUSLAUSEEN TODISTUS.

Peite-ehdon mukaan z_0 kuuluu johonkin avoimista palloista $B(x_j, \frac{1}{2})$, joten on olemassa piste $x_j \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, jolle $\|z_0 - x_j\| < \frac{1}{2}$. Kuva 12 antaa aiheen tarkastella pistettä

$$w = x + \frac{\|x - y\|}{\|z_0\|}(x_j - z_0),$$

jonka voi epäillä kuuluvan aliavaruuteen $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ ja olevan liian lähellä pistettä x. Näin onkin, sillä $\|z_0\| = 1$ ja siis

$$w = x + \|x - y\| \left(x_j - \frac{x - y}{\|x - y\|} \right) = \|x - y\| x_j + y \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle,$$

vaikka

$$\|w - x\| = \underbrace{\|x - y\|}_{\delta} \underbrace{\|x_j - z_0\|}_{< \frac{1}{2}} < \frac{1}{2}\delta$$

ja δ on pisteen x etäisyys joukosta $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. $\square$

SEURAUS 6.16. *Ääretönulotteisen normiavaruuden mikään sisäpisteellinen osajoukko ei ole kompakti.*

TODISTUS. Koska kompaktin joukon suljettu osajoukko aina on kompakti, niin ääretönulotteisessa normiavaruudessa ei siis mikään sellainen joukko voi olla kompakti, joka sisältää jonkin suljetun pallon. $\square$

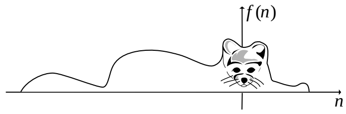
Harjoitustehtäviä ja huomautuksia lukuun II

Harjoitustehtäviä lukuun II.

5.1. Tutki, millä vakion c arvoilla $\mathbb{R}^3$:n vektorit

$$\{(c, 1, 0), (1, c, 1), (0, 1, c)\}$$

ovat lineaarisesti riippumattomat.



5.2. Olkoon $E = \mathcal{C}[0,1]$. Määritä $\dim E$ ja etsi sellainen aliavaruus $F \subset E$, jolle $\dim F = 5$.

5.3. Osoita, että $s = \{x = (x_n)_1^\infty \mid x_k \in \mathbb{K}\}$ on $\mathbb{K}-$vektoriavaruus. (Mitkä ovat luonnolliset laskutoimitukset? Käy aksioomat läpi vain pääpiirteittäin.)

5.4. (jatkoa) Osoita, että $c = \{x = (x_n)_1^\infty \in s \mid \exists \lim x_n\}$ on vektoriavaruuden s lineaarinen aliavaruus.

5.5. (jatkoa) Osoita, että $c_0 = \{x = (x_n)_1^\infty \in s \mid \lim x_n = 0\}$ on vektoriavaruuden c lineaarinen aliavaruus.

5.6. Mitkä seuraavista ovat vektoriavaruuden

$$\mathcal{F}[-1,1] = \{f \mid f : [-1,1] \to \mathbb{R}\}$$

lineaarisia aliavaruuksia?

(1) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on jatkuva}\}$
(2) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on parillinen, eli } f(-x) = f(x) \text{ kaikille } x\}$
(3) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on pariton, eli } f(-x) = -f(x) \text{ kaikille } x\}$
(4) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on Riemann-integroituva}\}$
(5) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on Lebesgue-integroituva}\}$
(6) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x)\, \forall x\}$
(7) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x)\, \forall x\}$
(8) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\, \forall x\}$
(9) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(x) = 0\, \forall x\}$
(10) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(x) = 1\, \forall x\}$
(11) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on rajoitettu}\}$
(12) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$
(13) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(0) = \frac{1}{2}\}$
(14) $\{f : [-1,1] \to \mathbb{R} \mid f(\frac{1}{2}) = 0\}$

Määrää kaikkien edellisten vektoriavaruuksien dimensio.

5.7. Määrää dimensio $\dim W$, kun $V = \mathcal{C}[0,1]$ ja $W = \langle\, 1, \sin t, \sin^2(t), \cos(t), \cos^2(t)\,\rangle \subset V$.

5.8. a) Määrää kaikki $\mathbb{K}-$lineaarikuvaukset $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$.

b) Määrää kaikki $\mathbb{K}-$lineaarikuvaukset $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, kun

a) $n = 1$
b) $m = 1$
c) n ja m ovat mitä tahansa luonnollisia lukuja.

5.9. (jatkoa) Osoita, että $\mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5) = \{T : \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5 \mid T \text{ on lineaarikuvaus}\}$ on $\mathbb{R}-$vektoriavaruus ja että $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5) = 20$.

5.10. Olkoon $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; (x,y) \mapsto (ax, by)$, missä $a \neq 0$ ja $b \neq 0$. Osoita, että jokaisen pallon — itse asiassa kiekon — $B((x,y),r)$ kuva on ellipsi.

5.11. Näytä, että jatkuvan lineaarikuvauksen normin määritelmässä on yhdentekevää, onko B suljettu vai avoin pallo.

5.12. Näytä, että normiavaruudessa translaatio on tasaisesti jatkuva? Entä homotetia eli skaalaus?

5.13. Todista, että normien ekvivalenssi on nimensä mukaisesti *ekvivalenssirelaatio* kaikkien saman vektoriavaruuden normien joukossa, siis *symmetrinen* ($a \sim b \implies b \sim a$), *refleksiivinen* ($a \sim a$) ja *transitiivinen* ($a \sim b \;\&\; b \sim c \implies a \sim c$).

5.14. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on normit

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

a) Piirrä näiden normien yksikköpallot, kun n=2.
b) Määrää suurin vakio b, jolla $b\|x\|_2 \le \|x\|_1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$
c) Määrää suurin vakio c, jolla $c\|x\|_1 \le \|x\|_2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$
d) Määrää suurin vakio d, jolla $d\|x\|_2 \le \|x\|_\infty$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$
e) Määrää suurin vakio e, jolla $e\|x\|_\infty \le \|x\|_2$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^n$

5.15. Joukon X metriikat d_1 ja d_2 ovat *tasaisesti ekvivalentit* (harhaanjohtavasti: *"ekvivalentit"*), jos on olemassa vakiot $c_1, c_2 > 0$, joille

$$c_1 d_1(x,y) \le d_2(x,y) \le c_2 d_1(x,y) \quad \forall\, x, y \in X.$$

Osoita, että tasaisesti ekvivalentit metriikat antavat samat Cauchy-jonot ja että jos metriikat d_1 ja d_2 ovat tasaisesti ekvivalentit, niin (X, d_1) on täydellinen, jos ja vain jos (X, d_2) on täydellinen. (Tietysti tasaisesti ekvivalentit metriikat ovat ekvivalentit myös siinä aidosti heikommassa mielessä, että ne antavat saman topologian. Topologioiden samuus ei kuitenkaan takaa, että Cauchy-jonot olisivat samoja.)

5.16. (jatkoa) Osoita, että ekvivalentit normit antavat tasaisesti ekvivalentit metriikat ja että saman topologian antavat normit ovat ekvivalentit.

5.17. Osoita, että normiavaruus E on separoituva tasan silloin, kun on olemassa numeroituva joukko $J \subset E$, jonka virittämä aliavaruus $\langle J \rangle$ on tiheä.

6.1. a) Todista, että normiavaruudessa $(E, \|\cdot\|)$ joukko $A \subset E$ on rajoitettu ainoastaan, jos se sisältyy johonkin origokeskiseen palloon, eli kun normin $\|\cdot\|$ rajoittuma joukkoon A on (määritelmän 3.1 mielessä) rajoitettu funktio $A \to \mathbb{R}$.

b) Todista, että jos E ja F ovat normiavaruuksia ja $A \subset E$, niin funktio $f : A \to F$ on (määritelmän 3.1 mielessä) rajoitettu, jos ja vain jos $\sup_{x\in A} \|f(x)\| < \infty$.

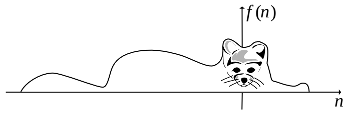
6.2. Todista, että normiavaruuksien väliselle lineaarikuvaukselle $T : E \to F$ seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(a) T on tasaisesti jatkuva koko avaruudessa.
(b) T on jatkuva.
(c) T on jatkuva origossa.
(d) T on jatkuva jossain pisteessä.
(e) T on rajoitettu yksikköpallossa.
(f) T on *jonojatkuva* origossa: $x_n \to 0 \implies Tx_n \to 0$.
(g) Jos $x_n \to 0$, niin $\{\|Tx_n\| \bigm| n \in \mathbb{N}\}$ on rajoitettu joukko.

6.3. Osoita, että normiavaruuksien väliselle lineaarikuvaukselle $T : E \to F$ pätee

$$\text{a) } \|T\| = \sup\{\|Tx\| \bigm| \|x\| = 1\}.$$
$$\text{b) } \|T\| = \inf\{K > 0 \bigm| \|Tx\| \le K\|x\| \quad \forall x \in E\}.$$

6.4. Todista lause 6.8.a) osoittamalla, että kun E ja F ovat normiavaruuksia, niin $\mathcal{B}(E,F)$ on avaruuden $\mathcal{L}(E,F) = \{T : E \to F \bigm| T \text{ on lineaarinen}\}$ vektorialiavaruus ja $\|T\|$ on normi avaruudessa $\mathcal{B}(E,F)$. (Sen täydellisyyttä käsitellään kohdassa 9.38 ja luvussa 10.)



6.5. Näytä, että jos $S : E \to F$ ja $T : F \to G$ ovat rajoitettuja lineaarikuvauksia, niin

$$\|T \circ S\| \leq \|T\| \, \|S\|.$$

Anna esimerkki, jossa $\|T \circ S\| < \|T\| \, \|S\|$.

6.6. Olkoon $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x_1 - x_2, 3x_1, x_1)$, ts.

$$\operatorname{Mat} T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0. \end{pmatrix}$$

Määritä $\|T\|$:lle jokin yläraja ja alaraja, kun $\mathbb{R}^3$:ssa on tavallinen euklidinen normi.

6.7. Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $(T_n)_1^\infty$ jono lineaarikuvauksia $E \to F$ siten, että jokaisella $x \in E$ jono $T_n x$ suppenee. Merkitään $Tx = \lim T_n x$. Osoita, että T on lineaarikuvaus $E \to F$.

6.8. Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $(T_n)_1^\infty$ operaattorinormin mielessä suppeneva jono lineaarikuvauksia $E \to F$. Osoita, että jokaisella $x \in E$ jono $(T_n x)_1^\infty$ suppenee. (Lisäkysymys: Onko tämä *pisteittäinen suppeneminen* myös riittävää suppenemiselle operaattorinormin mielessä?)

6.9. Todista, että metrisen avaruuden Cauchy-jono suppenee, jos sillä on edes yksi suppeneva osajono.

6.10 Onko normiavaruudessa lineaarisen aliavaruuden $A \subset E$ sulkeuma $\overline{A} \subset E$ lineaarinen aliavaruus? Miksi?

6.11. Osoita, että normiavaruus on Banachin avaruus, jos ja vain jos sen suljettu yksikköpallo on täydellinen metrinen avaruus metriikkana $d(x,y) = \|x - y\|$.

6.12. Osoita, että vektoriavaruuden kaksi normia ovat ekvivalentteja keskenään, jos ja vain jos kummankin mielessä samat joukot ovat rajoitettuja.

6.13. Totta vai tarua?

(1) Metristen avaruuksien välinen jatkuva kuvaus kuvaa rajoitetut joukot rajoitetuiksi joukoiksi.
(2) Metriikalla varustettujen vektoriavaruuksien välinen jatkuva lineaarikuvaus kuvaa rajoitetut joukot rajoitetuiksi joukoiksi.
(3) Normiavaruuksien välinen jatkuva lineaarikuvaus kuvaa rajoitetut joukot rajoitetuiksi joukoiksi.
(4) (∗) Normiavaruuksien välinen jatkuva kuvaus kuvaa rajoitetut joukot rajoitetuiksi joukoiksi.[22]

6.14. Olkoon

$$\ell^1 = \{x = (x_n)_1^\infty \mid x_n \in \mathbb{K}, \ \|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\} \quad \text{ja}$$
$$\ell^\infty = \{x = (x_n)_1^\infty \mid x_n \in \mathbb{K}, \ \|x\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

Onko ℓ^1 vektoriavaruus? Entä ℓ^∞?

6.15 (jatkoa) Olkoon $T : \ell^1 \to \ell^1$ kuvaus $(x_n)_1^\infty \mapsto (x_{n+1})_1^\infty$ eli $(x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$. Onko T lineaarinen? Entä injektio? Surjektio?

[22] Vastaus on: Ei aina, mutta äärellisulotteisessa tapauksessa kyllä.

6.16. (jatkoa) Osoita, että $\|T\| = 1$ ja näytä, että on olemassa T:n *oikeanpuoleinen käänteiskuvaus* $S \in \mathcal{B}(\ell^1, \ell^1)$, jolle $T \circ S = I$, vaikka T ei ole bijektio. Muista vertailun vuoksi, että äärellisulotteisten avaruuksien välinen lineaarikuvaus on injektio tasan ollessaan surjektio.

6.17. Olkoon $\alpha > 1$ ja $M < \infty$. Oletetaan, että normiavaruuksien välinen lineaarikuvaus $T : E \to F$ toteuttaa epäyhtälön

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|^\alpha$$

kaikilla $x \in E$. Näytä, että T on nollakuvaus.

6.18. *(Carl Neumannin sarja vuodelta 1877)*[23] Olkoon E Banachin avaruus ja $T \in \mathcal{B}(E, E)$ siten, että $\|T\| < 1$ (aidosti!). Näytä, että

a) sarja $\sum_{n=0}^\infty T^n$ suppenee itseisesti operaattorinormin mielessä. (On merkitty $T^0 = I$.) Kohdassa 14.1 osoitetaan helposti, että normiavaruus $\mathcal{B}(E, E)$ on täydellinen, kun E on täydellinen. Lause 6.14 ja edellinen havainto takaavat siis, että sarja suppenee operaattorinormin topologiassa.
b) $(I - T)\sum_{n=0}^\infty T^n = I = \left(\sum_{n=0}^\infty T^n\right)(I - T)$.
c) $(I - T)$ on bijektio ja $\sum_{n=0}^\infty T^n = (I - T)^{-1}$.

6.19. (jatkoa) Oletetaan, että $T \in \mathcal{B}(E, E)$:llä on jatkuva käänteiskuvaus T^{-1}, eli että T on $\mathcal{B}(E, E)$:ssä *kääntyvä*. Osoita, että jossakin T:n ympäristössä — $\mathcal{B}(E, E)$:n operaattorinormin mielessä — on vain kääntyviä kuvauksia. Vihje: $S = T(I + T^{-1}(S - T))$ ja Carl Neumannin sarja! Seuraus: Kääntyvien jatkuvien lineaarikuvausten joukko on avoin operaattorinormitopologiassa.

6.20. Anna esimerkki vektoriavaruudesta ja sen kahdesta normista, jotka eivät ole ekvivalentteja keskenään. Opaste: $\mathcal{C}[0, 1]$, $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$, $\|f\|_1 = \int_0^1 |f|$.

6.21. (jatkoa) Anna esimerkki normiavaruudesta ja sen Cauchy-jonosta, joka ei suppene.

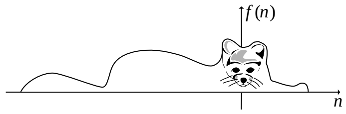
6.22. Äärellisulotteisen normiavaruuden suljettu yksikköpallo $\overline{B} = \overline{B}(0, 1)$ on kompakti. Näytä vetoamatta Rieszin epäkompaktiuslauseeseen, että sup-normilla varustetun normiavaruuden $E = \mathcal{C}[0, 1]$ suljettu yksikköpallo ei ole kompakti. Ohje: Anna esimerkki jonosta $(f_n)_1^\infty \in E$, jolla $\|f_i\| = 1$, mutta jolla ei ole suppenevaa osajonoa.

Huomautuksia lukuun II.

Konjugaattilineaarisuudesta. Kompleksisten vektoriavaruuksien välinen kuvaus $f : E \to F$ on *konjugaattilineaarinen*, jos se toteuttaa ehdon $f(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} f(x) + \overline{\mu} f(y)$ kaikilla $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ja $x, y \in E$. Perusesimerkki konjugaattilineaarikuvauksesta on tietenkin kompleksikonjugointi itse. Myös kuvaus, joka vaihtaa kannassa lausutun vektorin koordinaatit kompleksikonjugaateikseen on tietysti konjugattilineaarikuvaus. Muita esimerkkejä tulee aikanaan. Lineaarikuvauksia koskevat jatkuvuusehdot pätevät myös konjugaattilineaarisille.

Hyvä lukija. Kirjoita tekijälle huomautuksia ja parannusehdotuksia lukuun II.

[23] Carl Gottfried Neumann 1832–1925, Saksa.



III HILBERTIN AVARUUDET JA ORTONORMAALIT KANNAT

7. Äärellisulotteiset reaaliset sisätuloavaruudet

Määritelmän 1.1. mukaan reaalisen sisätulon aksioomat ovat symmetria, positiividefiniittisyys ja lineaarisuus kummankin muuttujan suhteen eli bilineaarisuus. Euklidinen avaruus on standardiesimerkki äärellisulotteisesta reaalisesta sisätuloavaruudesta. Tutkiskelemme tässä luvussa, missä mielessä on totta, että muita äärellisulotteisia reaalisia sisätuloavaruuksia ei ole olemassa — ja missä mielessä niitä kuitenkin on.

Muistamme, että sisätuloavaruuden vektorit ovat toisiaan vastaan *ortogonaaliset* eli *kohtisuorassa*, $x \perp y$, jos niiden sisätulo on nolla. Vektorijono $(v_1, \ldots, v_n)$ on sisätulon $(\cdot|\cdot)$ suhteen *ortonormaali*, jos sen kaikkien vektorien pituus on $\|v_1\| = 1$ ja eri vektorit ovat toisiaan vastaan ortogonaalisia, toisin sanoen kun $(v_i|v_j) = \delta_{ij}$, missä on merkitty

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ kun } i = j \\ 0, \text{ kun } i \neq j. \end{cases}$$

7.1. Kantaan liittyvä sisätulo. Euklidisen sisätulon mallin mukaan on helppoa muodostaa äärellisulotteiseen reaaliseen vektoriavaruuteen $\mathbb{R}^n$ muitakin sisätuloja.

Määritelmä 7.1. Olkoon $S = (v_1, \ldots, v_n)$ vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ jokin kanta. Määritellään *kantaan S liittyvä sisätulo* $(\cdot|\cdot)_S$ asettamalla vektoreiden $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$ ja $y = \sum_{i=1}^n \eta_i v_i$ tuloksi

$$(*) \qquad (x|y)_S = \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \xi_i v_i \mid \sum_{i=1}^n \eta_i v_i\right)_S = \sum_{i=1}^n \xi_i \eta_i.$$

Lause 7.2. *Yhtälö $(*)$ määrittelee avaruuteen $\mathbb{R}^n$ sisätulon. Lähtökohtana käytetty kanta $S = (v_1, \ldots, v_n)$ on tämän sisätulon suhteen ortonormaali.*

Perustelu. Tulos saadaan välittömästi matkimalla euklidisen sisätulon perusominaisuuksien johtoa.

7.2. Vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ kaikki sisätulot. Kohdassa 7.1 tekemämme konstruktio on johtanut siihen mielenkiintoiseen havaintoon, että äärellisulotteisen avaruuden jokainen kanta on ortonormaali jonkin sisätulon suhteen. Samalla on ratkennut myös kysymys siitä, onko vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$ olemassa vielä muita sisätuloja kuin nämä kannan avulla konstruoidut. Vastaus on kielteinen! Jos nimittäin $(\cdot|\cdot)$ on jokin avaruuden $\mathbb{R}^n$ sisätulo, niin on tunnetusti olemassa sen suhteen ortonormaali kanta, tällaisenhan voi muodostaa soveltamalla $\mathbb{R}^n$:n johonkin kantaan *Gramin ja Schmidtin ortonormeerausmenetelmää.* Ortonormeeratusta kannasta edellisellä konstruktiolla muodostettu sisätulo osoittautuu alkuperäiseksi sisätuloksi $(\cdot|\cdot)$. Äärellisulotteisen avaruuden sisätulot on näin saatu luokiteltua: jokaiseen kantaan liittyy sisätulo, joka tekee siitä ortonormaalin, eikä muita sisätuloja kuin nämä ole olemassa reaalisessa vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^n$.

7.3. Reaalinen polaarikaava ja suunnikassääntö. Muistamme, että metristen avaruuksien välinen isometria $f : X \to Y$ on kuvaus, joka säilyttää etäisyydet:

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y).$$

Normiavaruuksien välinen lineaarikuvaus $T : E \to F$ on tietysti isometria täsmälleen säilyttäessään kaikkien vektorien pituudet:

$$\|Tx\| = \|x\|.$$

Erityisesti sellainen sisätuloavaruuksien välinen lineaarikuvaus $T : E \to F$, joka säilyttää kaikki sisätulot,

$$(Tx|Ty) = (x|y)$$

on vastaavan normin suhteen isometria, onhan $\|Tx\|^2 = (Tx|Tx) = (x|x) = \|x\|^2$. Seuraava lause sanoo, että jokainen sisätuloavaruuksien välinen isometria on tätä tyyppiä.

Lause 7.3 (Reaalinen polaarikaava). *Jokainen reaalisten sisätuloavaruuksien välinen lineaarinen isometria säilyttää myös sisätulon.*

Perustelu. Väite perustuu siihen, että reaalinen sisätulo voidaan lausua pelkän norminsa avulla. Sisätulon ominaisuuksista seuraa nimittäin välittömästi, että

$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2,$$

josta saadaan tarvittava *reaalinen polaarikaava*

$$(x|y) = \tfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right). \qquad \square$$

Seuraus 7.4. *Eri sisätuloista saadaan aina eri normit.*

Koska isometria on aina injektio, niin voimme ajatella, että isometrinen lineaarikuvaus $T : E \to F$ *samastaa* normiavaruudet E ja $T(E) \subset F$ ja näin *upottaa* avaruuden E sekä lineaarialgebran että normin mielessä aliavaruudeksi avaruuteen F. Polaarikaava takaa, että tällöin avaruuksien E ja $T(E) \subset F$ samastus koskee myös niiden sisätuloja — sisätuloavaruus E ja sisätuloavaruuden F aliavaruus $T(E)$ ovat *isomorfiset* eli sisätuloavaruuksina täysin samanlaiset, kun T on lineaarinen isometria $E \to F$.

Pohdimme lopuksi vielä kysymystä, miten jostakin normista $\|\cdot\|$ voi tietää, onko se mahdollisesti konstruoitavissa jostakin sisätulosta $(\cdot|\cdot)$. Mistä tahansa normista voi todella helposti tutkia, onko se peräisin jostakin sisätulosta. Sisätulosta saatu normi toteuttaa nimittäin ns. *suunnikassäännön*, joka on peräisin klassisesta tasogeometriasta ja sanoo, että suunnikkaan molempien lävistäjien päälle piirrettyjen neliöiden alojen summa on sama kuin sivujen päälle piirrettyjen neljän neliön alojen summa:

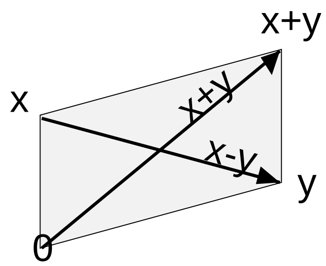
LAUSE 7.5 (SUUNNIKASSÄÄNTÖ). *Sisätuloavaruuden E kaikille vektoreille x ja y on voimassa*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

TODISTUS. Tarkastamme väitteen laskulla:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y\,|x+y) + (x-y\,|x-y)$$
$$= (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) + (x|x) - (x|y) - (y|x) + (y|y) = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

□



KUVA 13. SUUNNIKASSÄÄNTÖ.

Sellainen normi, joka ei toteuta suunnikassääntöä, ei siis ainakaan voi olla peräisin mistään sisätulosta. Toisaalta suunnikassääntö riittää takaamaan, että tutkittava normi todella voidaan muodostaa lähtemällä jostakin sisätulosta:

LAUSE 7.6 (FRÉCHET, JORDAN JA V. NEUMANN. [24] *Vektoriavaruudessa E määritelty normi $\|\cdot\|$ toteuttaa suunnikassäännön aina ja vain, kun avaruudessa E on mahdollista määritellä sisätulo $(\cdot|\cdot)$ siten, että*

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)} \qquad \forall x \in E.$$

PERUSTELU. Ehdokas täksi sisätuloksi saadaan reaalisesta polaarikaavasta. Lopuksi testataan onko näin määritellyllä tulolla kaikki sisätulon ominaisuudet ja huomataan laskun aikana, että onhan sillä, mikäli normi toteuttaa suunnikassäännön. Lasku ei ole aivan helppo ja jää harjoitustehtäväksi. □

Suunnikassääntökriteerin avulla voi tarkastaa, että vähintään kaksiulotteisessa avaruudessa $\mathbb{R}^n$ on muitakin normeja kuin sisätuloihin liittyvät, esimerkiksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ *ykkösnormi* $\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$ ei toteuta suunnikassääntöä.

Olemme kaikenkaikkiaan huomanneet, että kaksi n-ulotteista reaalista sisätuloavaruutta ovat aina isomorfisia keskenään siinä mielessä, että niiden välillä on olemassa lineaarinen bijektio, joka säilyttää sisätulot eli *sisätuloavaruusisomorfismi.*

[24] MAURICE RENÉ FRÉCHET 1878–1973 Ranska. P. JORDAN 1900-luku, USA?, ei Camille J. JANOS (JOHN) VON NEUMANN 1903–1957, Unkari-USA.

Isomorfismiksihan kelpaa sellainen lineaarikuvaus, joka vie ortonormaalit kannat toisikseen. Erityisesti jokainen äärellisulotteinen sisätuloavaruus on isomorfinen tavallisen euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ kanssa, joten n-ulotteisen sisätuloavaruuden E yksikköpallo $\overline{B} = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ on tavallisen n-ulotteisen pallon lineaari-isomorfinen kuva eli *n-ulotteinen ellipsoidi.*

Käytännön kannalta on toisaalta hyvä muistaa, että vektoriavaruuden $\mathbb{R}^n$ kaksi kantaa määrittelevät avaruuteen $\mathbb{R}^n$ saman sisätulon täsmälleen silloin, kun toinen on ortonormaali toisen määräämässä sisätulossa, eli kun uusi kanta $T = (u_1, \ldots, u_n)$ on myös vanhan kannan $S = (v_1, \ldots, v_n)$ sisätulossa ortonormaali. Näin käy tasan silloin, kun se bijektiivinen lineaarikuvaus, joka vie vanhat kantavektorit uusiksi kantavektoreiksi, on sisätuloavaruusisomorfismi. Ilmaistaessa tämä kuvaus vanhoissa koordinaateissa saadaan sille matriisi C, jonka sarakkeina ovat uusien kantavektorien koordinaatit vanhassa kannassa, ja C on tällöin *ortogonaalimatriisi*, mikä tarkoittaa sitä, että sen sarakevektorit ovat tavallisessa mielessä keskenään ortonormaaleja. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että C on kääntyvä ja $C^{-1} = C^t$, siis C:n käänteismatriisi on sen transpoosi.

8. $\mathbb{K}$-kertoimiset sisätuloavaruudet

Määrittelemme nyt yleisen $\mathbb{K}$-kertoimisen sisätulon. Sitten alamme tarkastaa mitkä kahdessa edellisessä luvussa esitellyistä euklidisen sisätulon ominaisuuksista pätevät sellaisenaan tai pienin muutoksin kompleksikertoimisessa ja ääretönulotteisessa tilanteessa.

MÄÄRITELMÄ 8.1. Merkitsemme symbolilla $\mathbb{K}$ tarpeen mukaan joko reaalilukujen kuntaa $\mathbb{R}$ tai kompleksilukujen kuntaa $\mathbb{C}$. Luvun $z = x + iy$ *kompleksikonjugaattia* merkitsemme $\overline{z} = x - iy$.

Sanomme, että E on $\mathbb{K}$-*kertoiminen sisätuloavaruus*, mikäli $E = (E, +, \cdot)$ on $\mathbb{K}-$kertoiminen vektoriavaruus, jossa on määritelty tilanteen mukaan *reaalinen* tai *kompleksinen sisätulo*, siis kuvaus $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{K}$, jolla on ominaisuudet:[25]

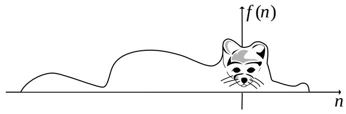
$$\begin{cases} \textit{hermiittinen symmetria:} & (x|y) = \overline{(y|x)} \\ \textit{positiividefiniittisyys:} & (x|x) \geq 0; \quad \text{yhtäsuuruus vain, kun } x = 0 \\ \textit{seskilineaarisuus:} & \text{lineaarisuus ensimmäisen muuttujan suhteen.} \end{cases}$$

Huomaa, että kompleksinen sisätulo on konjugaattilineaarinen toisen muuttujan suhteen.

8.1. Äärellisulotteiset $\mathbb{K}$-kertoimiset sisätuloavaruudet.

Perusesimerkki äärellisulotteisesta sisätuloavaruudesta on $\mathbb{K}^n$, kompleksikertoimisessa tapauksessa siis $\mathbb{C}^n$. Kompleksilukujen salliminen aiheuttaa lineaarialgebrasta tunnetulla tavalla joitakin muutoksia sisätulon käsittelyyn.

[25] Etenkin fysiikkaa käsittelevissä kirjoissa on tapana olettaa sisätulo lineaariseksi jälkimmäisen tekijänsä suhteen ja merkitä sitä väkäsulkein $\langle\cdot|\cdot\rangle$. Luvun $z \in \mathbb{C}$ kompleksikonjugaattia merkitään samassa yhteydessä usein z^*. Me varaamme merkinnän $\langle\cdot|\cdot\rangle$ duaalitulolle. Ks. 9.32, 13.6 ja luvun III huomautukset.



Avaruuden $\mathbb{C}^n$ lineaarialgebra on olennaisesti samanlaista kuin reaalisenkin avaruuden, erityisesti lineaarisen riippumattomuuden ja kannan käsitteet ovat samanlaiset kerroinkunnasta riippumatta. Sisätulojen ja avaruuden kantojen välinen yhteys on myös ennallaan, eikä $\mathbb{K}$-vektoriavaruudessa $\mathbb{K}^n$ ole olemassa muita sisätuloja kuin kannan avulla konstruoidut. Ainoa ero konstruktiossa on siinä, että avaruuden $\mathbb{K}^n$ kannan $S = (v_1, \ldots, v_n)$ ortogonaaliseksi tekevä sisätulo määritellään kaavalla

$$(*) \qquad (x|y)_S = \left(\textstyle\sum_{i=1}^n \xi_i v_i \mid \sum_{i=1}^n \eta_i v_i\right)_S = \sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\eta}_i,$$

joka sisältää kompleksikonjugoinnin ja tietenkin yhtyy aikaisempaan tapauksesa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Vektorin normin lausekkeessa

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)_S} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \xi_i \overline{\xi}_i} = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2}$$

on vastaavasti syytä huomata ja muistaa itseisarvon.

Kaikki n-ulotteiset $\mathbb{K}$-kertoimiset sisätuloavaruudet ovat siis isomorfisia keskenään ja saman avaruuden kaksi kantaa määrittelevät saman sisätulon täsmälleen silloin, kun toinen on ortonormaali toisen määräämässä sisätulossa.

Ortogonaalisten matriisien rooliin, eli ortonormaalissa kannassa sisätuloavaruusisomorfismeja edustamaan, tulevat kompleksikertoimisessa tapauksessa *unitaariset* matriisit U, joiden sarakevektorit ovat kompleksisessa mielessä ortonormaaleja. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että U on kääntyvä ja U:n käänteismatriisi U^{-1} on sen transpoosin kompleksikonjugaatti $\overline{U^t}$ jota merkitään toisinaan U^* tai $U^\dagger$.

8.2. Yleiset $\mathbb{K}$-kertoimiset sisätuloavaruudet.

Yleisessä sisätuloavaruudessa määritellään normi, metriikka ja topologia vaiheittain samalla tavalla kuin euklidisessa avaruudessa. Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälö, Pythagoraan lause, suunnikassääntö sekä vähäisin muutoksin myös polaarikaava toimivat seurauksineen kaikissa sisätuloavaruuksissa dimension äärellisyydestä ja kerroinkunnasta riippumatta.

LAUSE 8.2 (CSB). *Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälö $|(x|y)| \leq \|x\|\,\|y\|$ pätee myös yleisessä sisätuloavaruudessa. Tässä on yhtäsuuruus aina ja vain, kun x ja y ovat lineaarisesti riippuvia.*

TODISTUS. Harjoitustehtävä. □

SEURAUS 8.3 (SISÄTULON JATKUVUUS). *Sisätulo on omassa topologiassaan jatkuva kuvaus kummankin muuttujansa suhteen, tarkemmin sanoen kullakin kiinteällä y on lineaarikuvauksen*

$$H \to \mathbb{K} : x \mapsto (x|y)$$

normi tasan $\|y\|$.

TODISTUS. Seuraa Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälöstä. Yksityiskohdat jätämme harjoitustehtäväksi. □