SEURAUS 23.18. *Olkoon E normiavaruus ja E^* sen duaali. Tällöin E on vektoriavaruuden $\mathbb{K}^{E^*}$ vektorialiavaruus. Lisäksi heikko topologia $\sigma(E, E^*)$ tekee siitä tulotopologialla varustetun topologisen avaruuden $\mathbb{K}^{E^*}$ topologisen aliavaruuden.*

TODISTUS. Tämän voi havaita seuraukseksi edellisestä lauseesta, koska $E \subset E^{**}$ ja heikko topologia $\sigma(E, E^*)$ on w^*-topologian $\sigma(E^{**}, E^*)$ indusoima aliavaruustopologia. $\square$

Siirrymme todistamaan Alaoglun[119] kuuluisaa lausetta vuodelta 1940:

LAUSE 23.19 (ALAOGLU). *Olkoon E normiavaruus ja E^* sen duaali. Tällöin E^*:n suljettu yksikköpallo*

$$\overline{B}_{E^*} = \{x^* \in E^* \mid \|x^*\| \leq 1\}$$

on w^*-topologiassa $\sigma(E^*, E)$ kompakti joukko.

TODISTUS. Totesimme edellä, että w^*-topologia on $\mathbb{K}^E$:n tulotopologian indusoima. Selvästi

$$\overline{B}_{E^*} \subset \prod_{x \in E} \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|) = \prod_{x \in E} \{z \in \mathbb{K} \mid |z| \leq \|x\|\} \subset \prod_{x \in E} \mathbb{K} = \mathbb{K}^E.$$

Tihonovin lauseen mukaan tuloavaruus

$$\prod_{x \in E} \overline{B}_{\mathbb{K}}(0, \|x\|)$$

on kompakti, joten riittää näyttää, että $\overline{B}_{E^*}$ on $\mathbb{K}^E$:n tulotopologiassa suljettu. Tämä onkin sitten vain verifiointi, joka ei vaadi eikä tarjoa uusia ideoita:

Olkoon $f \in \mathbb{K}^E$ yksikköpallon $\overline{B}_{E^*}$ sulkeumassa. Tällöin f on lineaarinen, eli kaikille x, $y \in E$ ja λ, $\mu \in \mathbb{K}$ on

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

sillä tulotopologian määritelmän mukaan kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $f_\varepsilon \in \overline{B}_{E^*}$, siis lineaarinen f_ε, jolle pisteissä x, y ja $u = \lambda x + \mu y$ pätee $|f(u) - f_\varepsilon(u)| = p_u(f - f_\varepsilon) < \varepsilon$, jolloin kolmioepäyhtälöä tavalliseen tapaan käyttäen saadaan

$$|f(\lambda x + \mu y) - (\lambda f(x) + \mu f(y))| \leq |f_\varepsilon(\lambda x + \mu y) - (\lambda f_\varepsilon(x) + \mu f_\varepsilon(y))| + 3\varepsilon = 3\varepsilon.$$

Samalla tavalla todetaan, että $\forall x \in E : |f(x)| \leq \|x\|$, eli $\|f\|_{E^*} \leq 1$. $\square$

Alaoglun lause 23.19 on perustulos modernissa analyysissä. Harvemmin käytetty on sen hämmästyttävä korollaari:

---

[119] LEONIDAS (LEON) ALAOGLU

Lause 23.20. *Jokainen Banachin avaruus sisältyy johonkin jatkuvien funktioiden avaruuteen $(\mathcal{C}(X,\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$, missä X on topologisen tuloavaruuden $\mathbb{K}^I$ kompakti osajoukko.*

Todistus. Olkoon E Banachin avaruus. Sen upotus biduaaliinsa $E \to E^{**}$ on lineaarinen isometria, samoin kuvaus $J : E^{**} \to \mathcal{C}(B_{E^*},\mathbb{K})$, joka kuvaa lineaarikuvauksen $x : E^* \to \mathbb{K}$ rajoittumakseen $x : B_{E^*} \to \mathbb{K}$. Jatkuvien funktioiden avaruus $\mathcal{C}(B_{E^*},\mathbb{K})$ on tavalliseen tapaan varustettu sup-normilla. Väite on melkein todistettu. Puutteena on vain B_{E^*}:n epäkompaktisuus. Tämä asia tulee Alaoglun lauseen 23.19 mukaan kuntoon vaihtamalla siihen topologiaksi w^*-topologia. Nyt on kyllä lopuksi todettava, että E:n alkiot ovat jatkuvia myös w^*-mielessä. Tämä jää lukijan tehtäväksi. $\square$

Tällä lauseella on muuten vielä jatko–osa:

Lause 23.21. *Ei ole olemassa muita metrisiä avaruuksia kuin Banach-avaruuksien metriset aliavaruudet.*

Todistus. Olkoon (X,d) metrinen avaruus. Varustetaan kaikkien rajoitettujen reaaliarvoisten kuvausten avaruus $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{R})$ sup-normilla, jolloin se on Banachin avaruus. Valitaan jokin kiinteä $a_0 \in X$ ja määritellään kaikilla $a \in X$ kuvaus $f_a \in \mathcal{F}_b(X,\mathbb{R})$ asettamalla

$$f_a(x) = d(x,a) - d(x,a_0).$$

Kuvaus $a \mapsto f_a$ on isometria $X \to \mathcal{F}_b(X,\mathbb{R})$. $\square$

24. Refleksiiviset normiavaruudet

24.1. Refleksiivisyys ja heikot topologiat.

Määritelmä 24.1. Olkoon E normiavaruus. *Upotuskuvaus* eli *evaluaatiokuvaus*

$$i : E \to E^{**} : x \mapsto i(x),$$

missä $(i(x))(f) = f(x)$, on isometrinen lineaarikuvaus. Siksi on tapana samastaa x ja $i(x)$ ja siis tulkita E biduaaliinsa aliavaruudeksi: $E \subset E^{**}$.

Normiavaruus E on *refleksiivinen,* mikäli upotuskuvaus $i : E \to E^{**}$ on surjektio, siis isomorfismi. Refleksiivisyys merkitsee, että $E = E^{**}$. Erityisesti refleksiivinen avaruus on täydellinen.

Huomautus 24.2. Jos E on refleksiivinen, niin

(1) Myös $E^* = (E^{**})^*$ on refleksiivinen.
(2) E^*:n w-topologia ja w^*-topologia yhtyvät. Kumpikin on tällöin $\sigma(E^*,E)$.
(3) Erityisesti E^*:n suljettu yksikköpallo on tällöin Alaoglun lauseen 23.19 nojalla heikosti, eli w-kompakti.

On olemassa sekä refleksiivisiä että epärefleksiivisiä Banachin avaruuksia. Esimerkiksi kaikki Hilbert-avaruudet ja kaikki äärellisulotteiset normiavaruudet ovat refleksiivisiä. Itse asiassa myös melkein kaikki $L^p(A)$-avaruudet ovat refleksiivisiä, koska $L^p(A)^* = L^q(A)$, kun p ja $q \notin \{1,\infty\}$ ovat duaalieksponentit. Sensijaan esimerkiksi avaruus $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ ei ole refleksiivinen.

Seuraava lause vaatii perustelukseen Hahnin ja Banachin lauseen käyttöä.

LAUSE 24.3. *Refleksiivisen avaruuden suljettu aliavaruus on refleksiivinen.*

TODISTUS. Olkoon E refleksiivinen ja $L \subset E$ sen suljettu aliavaruus. Tiedetään, että upotus $i_E : E \to E^{**}$ on surjektio ja on todistettava, että upotus $i_L : L \to L^{**}$ on surjektio. Tarkastelemme lisäksi inkluusiokuvausta $j : L \to E$, sen transpoosia $j^t : E^* \to L^*$ ja vielä tämän transpoosia $j^{tt} : L^{**} \to E^{**}$. Kuvaukset muodostavat kaavion

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{i_L} & L^{**} \\ {\scriptstyle j}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle j^{**}} \\ E & \xrightarrow{i_E} & E^{**} \end{array}$$

ja huomaamme, että kaikilla $x^* \in E^*$ yhdistetty kuvaus $x^* \circ j$ on yksinkertaisesti vain x^*:n rajoittuma aliavaruuteen L. Siksi

$$\langle x^* | j^{tt}(y^{**}) \rangle = \langle x^* | y^{**} \circ j^t \rangle = \langle j^t(x^*) | y^{**} \rangle = \langle x^* \circ j | y^{**} \rangle = \langle x^* \big|_L | y^{**} \rangle,$$

joten j^{tt} on kuvaus

$$L^{**} \to E^{**} : y^{**} \mapsto \left[x^* \mapsto y^{**}(x^*|_L) \right].$$

Olkoon $y^{**} \in L^{**}$. Koska E on refleksiivinen, on samastuksen mielessä $E = E^{**}$, joten $y^{**} \in E^{**} = E$. Tarkemmin sanoen on olemassa $x \in E$ siten, että $i_E(x) = j(y^{**})$. Tämä tarkoittaa, että kaikille $x^* \in E^*$ on

$$\langle x | x^* \rangle = \langle x^* | j^{tt}(y^{**}) \rangle = \langle x^*|_L | y^{**} \rangle.$$

Tästä seuraa Hahnin ja Banachin lauseen nojalla, että

$$x \in L, \tag{$*$}$$

sillä muuten olisi $x \in E \setminus L = E \setminus \overline{L}$, jolloin olisi olemassa ainakin yksi $x^* \in E^*$ siten, että

$$\begin{aligned} \langle x | x^* \rangle &= 1 \quad \text{ja} \\ x^*|_L &= 0, \quad \text{jolloin} \\ 1 = \langle x | x^* \rangle &= \langle x^* | j^{tt}(y^{**}) \rangle = \langle x^*|_L | y^{**} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Näin löydetylle $x \in L$ pätee toivotulla tavalla

$$\begin{gathered} i_L(x) = y^{**}, \text{ eli} \\ \langle y^* | i_L(x) \rangle = \langle y^* | y^{**} \rangle \quad \forall y^* \in L^* \end{gathered}$$

sillä toistamiseen Hahnin ja Banachin lauseen mukaan jokainen $y^* \in L^*$ on jonkin $x^* \in E^*$ rajoittuma $y^* = x^*|_L$. $\square$

Seuraus 24.4. *Banachin avaruus on refleksiivinen aina ja vain, kun sen duaali on refleksiivinen.*

Todistus. Tiedämme jo, että refleksiivisyys periytyy duaaliavaruudelle E^*. Jos taas oletamme, että E^* on refleksiivinen, niin sen duaali E^{**} on refleksiivinen ja silloin on lauseen 24.3 mukaan myös suljettu aliavaruus $E \subset E^{**}$ refleksiivinen. $\square$

Heikko topologia tarjoaa toisinaan mahdollisuuden tehdä biduaalia koskevia johtopäätöksiä, sillä heikossa mielessä avaruus on biduaalinsa tiheä osajoukko, vaikka ei olisikaan refleksiivinen. Tähän asiaan liittyy seuraava syvällinen lause.

Lause 24.5 (w^*-tiheyslause). *Banachin avaruuden suljettu yksikköpallo on topologian $\sigma(E^{**}, E^*)$ eli w^*- mielessä tiheä biduaalin E^{**} suljetussa yksikköpallossa.*

Todistuksesta. Esitämme tässä todistuksen[120], joka on idealtaan suoraviivainen, mutta käyttää kolmea topologisten vektoriavaruuksien teoriaan kuuluvaa apulausetta, jotka todistamme vasta tämän kirjasarjan kolmannessa osassa.[121]

Välttääksemme kaksinkertaisia ylleviivauksia merkitsemme todistuksessa Banachin avaruuden E suljettua yksikköpalloa $\overline{B}_E$ lyhyesti B ja biduaalin suljettua yksikköpalloa $\overline{B}_{E^{**}}$ merkillä B^{**}.

Näin merkiten väitämme, että

$$\overline{B}^{w^*} = B^{**}.$$

Koska B^{**} on Alaoglun lauseen mukaan peräti w^*-kompakti on se myös w^*-suljettu ja $\overline{B}^{w^*} \subset B^{**}$. Päinvastaisen inkluusion todistamiseksi tehdään antiteesi ja valitaan alkio

$$x_0{}^{**} \in B^{**} \setminus \overline{B}^{w^*}.$$

Todistus perustuu siihen, että asetelma on olennaisesti Banachin erottelulauseen tilanne. Tavoitteena on erottaa suljetulla hypertasolla toisistaan suljettu, konveksi joukko $B = \overline{B}^{w^*}$ ja siihen kuulumaton piste $x_0{}^{**}$. Banachin lauseen avulla erotettavista konvekseista joukoista toisen pitää olla avoin, ja tähän päästäänkin tilanteessamme korvaamalla piste $x_0{}^{**}$ joukkoa B leikkaamattomalla konveksilla ympäristöllään A. Ongelmallista on, että tilanteessamme kaikki tapahtuu w^*-topologiassa. Onko itsestään selvää, että yksikköpallon sulkeuma $\overline{B}^{w^*}$ on konveksi? Onko selvää, että w^*-jatkuvat lineaarimuodot ovat jatkuvia normitopologiassa, ja ennen kaikkea: päteekö Banachin erottelulause w^*-topologian mielessä? Vastaukset näihin kysymyksiin ovat myönteisiä, mutta perustelut on mukavinta esittää lokaalikonveksien topologisten vektoriavaruuksien yleisen teorian yhteydessä[122]. Luettelemme vastaukset kolmena apulauseena ja käytämme niitä sitten päätodistuksen viimeistelyyn:

[120] [Be].

[121] On olemassa suora todistus, joka ei ei vaadi esitietoja, mutta on pitempi. [Hi-S].

[122] Möhemmin ilmestyvä Suoraviivaista ajattelua osa III. Ks. toistaiseksi esim. [W] luku VIII.

Apulause 24.5.(A-1). *Topologisen vektoriavaruuden* $(E^*, w(E^*, E))$ *duaali on* E*, toisin sanoen ainoastaan lineaarimuodot* $f \in E \subset E^{**}$ *ovat jatkuvia duaalin* w^**-topologiassa.*

Selitys. Jatkuvuus on heppo tarkastaa (Vrt. 23.7 ja harjoitustehtävät), joten w^*-duaali sisältää joukon E. Että siihen ei muuta kuulukaan on erikoistapaus lauseesta, jonka mukaan yleensäkin *separoituvan duaaliparin* (E, F) avaruuteen E tuottamassa lokaalikonveksissa topologiassa $\sigma(E, F)$ on E:n duaali tasan F. Asiaan palataan huomautusten yhteydessä.

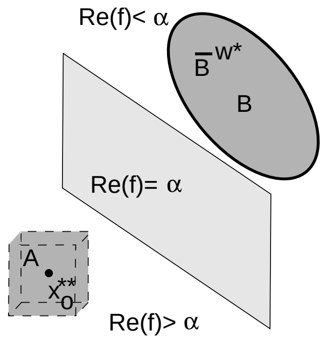
Apulause 24.5.(A-2). *Konveksin joukon* w^**-sulkeuma on konveksi — itse asiassa konveksin joukon sulkeuma on aina konveksi lokaalikonveksissa topologiassa.*

Selitys. Normiavaruusteoriassa esittämämme todistus konveksiuden periytymisestä sulkeumaan käytti jonoja, joten se ei kelpaa, ellei w^*-topologia ole metrisoituva. Yleisemmin toimiva todistusidea on kuitenkin esitetty luvun VI huomautuksissa. Sen sovittaminen tähän tilanteeseen jää lukijalle.

Apulause 24.5.(A-3). *Banachin erottelulause pätee* w^**-topologiassa — itse asiassa se on voimassa missä tahansa lokaalikonveksissa topologiassa.*

Selitys. Luvussa 21 esittämämme todistukset Mazurin ja Banachin lauseille yleistyvät lokaalikonveksiin avaruuteen.

Varsinainen todistus on nyt lyhyt:



Kuva 66. Banachin erottelulauseen käyttö.

Leikkaamalla sopivat w^*-topologian semipallot toisillaan tuotetaan pisteelle ${x_0}^{**}$ joukkoa $B = \overline{B}^{w^*}$ leikkaamaton avoin, konveksi ympäristö A. Koska w^*-suljettu joukko B on apulauseen (A-2) nojalla konveksi, on apulauseen (A-3) mukaan olemassa w^*-jatkuva lineaarimuoto $f : E^{**} \to \mathbb{K}$ ja reaaliluku α siten, että

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(x) &> \alpha \quad \forall x \in A \qquad \text{mutta} \\ \operatorname{Re} f(x) &\le \alpha \quad \forall x \in B. \end{aligned}$$

Apulauseen (A-1) mukaan f kuuluu avaruuteen E^*, toisin sanoen on olemassa $x^* \in E^*$ siten, että

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\langle {x_0}^{**} | x^* \rangle &> \alpha \quad \text{ja} \\ \operatorname{Re}\langle x | x^* \rangle &\le \alpha \quad \forall x \in \overline{B}^{w^*}. \end{aligned}$$

Nytpä
$$\|x^*\|_{E^*} \le \alpha,$$
sillä tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ on
$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle x|x^*\rangle \le \alpha \ \forall x \in \overline{B}^{w^*} &\implies \operatorname{Re}\langle e^{i\varphi}x|x^*\rangle \le \alpha \ \forall x \in B, \forall\ \varphi \in [0, 2\pi] \\
&\implies |\langle x|x^*\rangle| \le \alpha \ \forall x \in B,
\end{aligned}$$
ja tapauksessa $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sama johtopäätös saadaan vielä vähän helpommin.

On saatu ristiriita, sillä E:n normi on E^{**}:n normin rajoittuma, joten jos olisi $\|x^*\|_{E^*} \le \alpha$, niin saisimme
$$\alpha < \operatorname{Re}\langle {x_0}^{**}|x^*\rangle \le |\langle {x_0}^{**}|x^*\rangle| \le \|x^*\|_{E^*}\, \|{x_0}^{**}\|_E \le \alpha \|{x_0}^{**}\|_{E^{**}} = \alpha. \qquad \square$$

Yhdistämällä tiheyslause Alaoglun lauseeseen saadaan seuraava helposti muistettava karakterisointi refleksiivisyydelle.

Lause 24.6. *Banachin avaruus E on refleksiivinen aina ja vain, kun sen suljettu yksikköpallo $B = \overline{B}_E$ on heikosti kompakti.*

Todistus. Jo huomautuksessa 24.2. totesimme, että ehto on Alaoglun lauseen 23.19 nojalla varmasti välttämätön, onhan $\overline{B}_E = \overline{B}_{E^{**}}$ kompakti topologiassa $\sigma(E^{**}, E^*) = \sigma(E, E^*)$.

Oletetaan seuraavaksi, että $\overline{B}_E$ on heikosti kompakti, w-kompakti eli avaruuden $(E, \sigma(E, E^*))$ kompakti joukko. Koska $(E, \sigma(E, E^*))$ on avaruuden $(E^{**}, \sigma(E^{**}, E^*))$ topologinen aliavaruus, on $\overline{B}_E$ siis myös E^{**}:n w^*-kompakti joukko, erityisesti w^*-suljettu. Toisaalta todistimme edellisenä lauseena, että $\overline{B}_E$:n w^*-sulkeuma on E^{**}:n yksikköpallo $\overline{B}_{E^{**}}$. Siis
$$\overline{B}_E = \overline{B}_{E^{**}},$$
joten $E = E^{**}$. $\square$

Lähes sama informaatio on seuraavassa lauseessa.

Lause 24.7. *Banachin avaruus E on refleksiivinen aina ja vain, kun w-topologia ja w^*-topologia yhtyvät sen duaalissa E^*.*

Todistus. Ehto on varmasti välttämätön. Jos topologiat toisaalta yhtyvät, E^*:n yksikköpallo on w-kompakti, koska se Alaoglun lauseen mukaan joka tapauksessa on w^*-kompakti. E^* on siis edellisen lauseen mukaisesti refleksiivinen, mikä takaa E:n refleksiivisyyden lauseen 24.4. nojalla. $\square$

Huomautus 24.8. (Eberleinin lause). Avaruus on *jonokompakti*, mikäli sen jokaisella jonolla on suppeneva osajono. Metrisoitumattomassa topologiassa, jollainen heikko topologia yleensä on, ei kompaktisuus ole aina yhtäpitävää jonokompaktisuuden kanssa. Pätee kuitenkin *Eberleinin lause*[123] , jonka mukaan Banachin avaruus on refleksiivinen aina ja vain, kun sen suljettu yksikköpallo on w-jonokompakti. Emme puutu todistukseen.

[123] William Frederick Eberlein n. 1925– USA?

24.2. Refleksiivisyys ja tasainen konveksius.

MÄÄRITELMÄ 24.9. Avaruuden E normi $\|\cdot\|$ on *aidosti konveksi*, mikäli se toteuttaa seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot:

$$\frac{\|x+y\|}{2} < 1, \quad \text{kun } x \neq y, \quad \|x\| = 1 \text{ ja } \|y\| = 1. \tag{1}$$

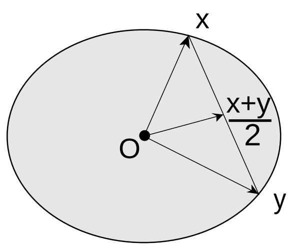
$$\|x\| + \|y\| = \|x+y\| \implies x \text{ ja } y \text{ ovat } \mathbb{R}\text{-lineaarisesti riippuvaiset.} \tag{2}$$

$$\|x\| + \|y\| = \|x+y\| \implies x \text{ ja } y \text{ ovat } \mathbb{K}\text{-lineaarisesti riippuvaiset.} \tag{3}$$

$$\text{Yksikköpallon } \textit{pinta } S_E = \{x \mid \|x\| = 1\} \text{ ei sisällä yhtään janaa.} \tag{4}$$

$$\text{Minkään pallon pinta } \{x \mid \|x - x_0\| = r\} \text{ ei sisällä yhtään janaa.} \tag{5}$$

Sama ilmaistaan joskus sanomalla, että normiavaruus E on aidosti konveksi. Oikeastaan johdonmukaisinta olisi sanoa, että yksikköpallo on aidosti konveksi.



KUVA 67. AIDOSTI KONVEKSI PALLO.

ESIMERKKI 24.10. Normiavaruus on aidosti konveksi aina ja vain, kun sen jokainen kaksiulotteinen aliavaruus on sitä. Koska tietenkin $\mathbb{R}^2$ on aidosti konveksi euklidisella normilla, niin jokainen sisätuloavaruus, erityisesti Hilbert-avaruus on aidosti konveksi.

Itse asiassa $\mathbb{R}^2$ on aidosti konveksi yleensäkin $\|\cdot\|_p$-normilla, kun $1 < p < \infty$ mutta ei normeilla $\|\cdot\|_1$ eikä $\|\cdot\|_\infty$.

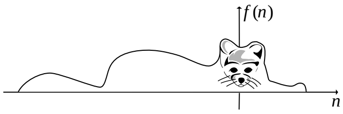
Seuraava ehto on hieman aitoa konveksiutta voimakkaampi:

MÄÄRITELMÄ 24.11. Avaruuden E normi $\|\cdot\|$ on *tasaisesti konveksi*, mikäli se toteuttaa seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot:

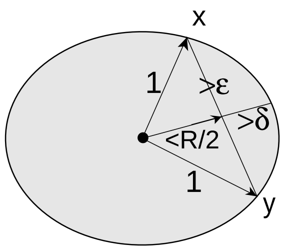
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \frac{\|x+y\|}{2} \leq 1 - \delta, \quad \text{kun} \begin{cases} \|x-y\| \geq \varepsilon, \\ \|x\| = 1 \text{ ja } \|y\| = 1. \end{cases} \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists R < 2 : \|x+y\| \leq R, \quad \text{kun} \begin{cases} \|x-y\| \geq \varepsilon, \\ \|x\| \leq 1 \text{ ja } \|y\| \leq 1. \end{cases} \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0, \qquad \text{kun} \quad \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n+y_n\|}{2} = 1, \\ \|x_n\| = 1 \\ \|y_n\| = 1. \end{cases} \tag{3}$$



(4) $$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0, \qquad \text{kun} \qquad \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{\|x_n+y_n\|}{2} = 1, \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\| = 1 \text{ ja} \\ \overline{\lim}_{n\to\infty} \|y_n\| = 1. \end{cases}$$



Kuva 68. Tasaisesti konveksi yksikköpallo.

Kuten aidon konveksiuden tapauksessa sanotaan nytkin usein, että itse avaruus tai sen yksikköpallo on tasaisesti konveksi.

Perustelu yhtäpitävyydelle. Todistetaan malliksi ketjun

$$(1) \implies (2) \implies (3) \implies (4) \implies (1)$$

hankalin väite, nimittäin "(3) $\implies$ (4)".

Heti aluksi on selvää, että oletuksessa esiintyvä $\overline{\lim}$ on vain näennäinen; itse asiassa $\|x_n\| \to 1$ ja $\|y_n\| \to 1$. Jos nimittäin esimerkiksi jono $(\|x_n\|)_n \in \mathbb{N}$ ei suppenisi, niin olisi olemassa osajono, jolle

$$\|x_{n_k}\| \to \rho < 1.$$

Oletuksista ja kolmioepäyhtälöstä saataisiin ristiriita:

$$2 = \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_{n_k}\| + \overline{\lim_{n\to\infty}} \|y_{n_k}\| \leq \rho + 1 < 2.$$

Voimme näin ollen olettaa, että mikään x_n tai y_n ei ole 0, sillä sitä ei satu ainakaan suurilla n. Normitamme jonot yksikkövektoreiksi ja siirrymme tarkastelemaan jonoja

$$\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ja } \left(\frac{y_n}{\|y_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Näille pätevät kohdan (3) oletukset, etenkin

$$\left\|\frac{x_n}{\|x_n\|} + \frac{y_n}{\|y_n\|}\right\| \to 2,$$

koska

$$\|x_n\| \to 1, \quad \|y_n\| \to 1 \text{ ja} \quad \|x_n + y_n\| \to 2.$$

Siispä myös

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} - \frac{y_n}{\|y_n\|} \to 0,$$

mistä väite seuraakin, koska $\|x_n\| \to 1$ ja $\|y_n\| \to 1$. $\square$

LAUSE 24.12. *Jokainen tasaisesti konveksi normi on aidosti konveksi. Äärellisulotteisessa avaruudessa tasainen konveksius ja aito konveksius ovat yhtäpitäviä.*

TODISTUS. Vain jälkimmäinen väite kaipaa todistuksen. Sekin on helppo, kun huomaa, että kuvaus

$$S_E \times S_E \to \mathbb{R}_+ : (x, y) \mapsto \frac{\|x + y\|}{2}$$

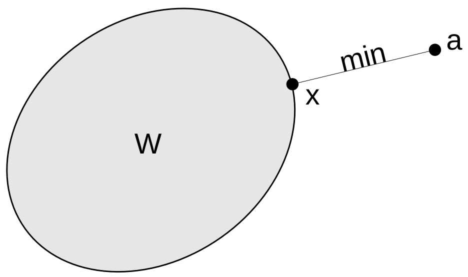
on jatkuva ja saavuttaa siis maksiminsa kompaktin avaruuden $S_E \times S_E$ suljetussa, siis kompaktissa joukossa

$$\{(x, y) \in S_E \times S_E \mid \|x - y\| \geq \varepsilon\},$$

jossa oletuksen mukaan kaikki arvot ovat aidosti ykköstä pienempiä. $\square$

Seuraava lause yleistää Hilbertin avaruuksien projektiolauseen tilanteeseen, jossa avaruudesta oletetaan ainoastaan tasainen konveksius ja suljettu aliavaruus on korvattu millä tahansa suljetulla konveksilla osajoukolla.

LAUSE 24.13 (KONVEKSI PROJEKTIOLAUSE).
(a) Olkoon E aidosti konveksi normiavaruus, $W \subset E$ suljettu ja konveksi ja $a \in E$. Tällöin joukossa W on korkeintaan yksi piste, jonka etäisyys pisteestä a on pienin.
(b) Jos avaruus E on suorastaan tasaisesti konveksi ja lisäksi täydellinen, niin konveksissa joukossa W todella on yksi piste, jonka etäisyys pisteestä a on pienin.



KUVA 69. KONVEKSI PROJEKTIOLAUSE.

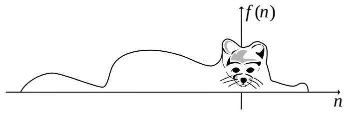
TODISTUS. Ei merkitse rajoitusta olettaa, että $a = 0$. Jos olisi kaksi pistettä, x ja $y \in W$, joissa normi on pienin W:ssä, siis sama, niin niitä yhdistävällä janalla saataisiin aidon konveksiuden nojalla vielä pienempiä normin arvoja, vaikka jana sisältyy joukkoon W.

Olkoon E tasaisesti konveksi ja täydellinen. Merkitään

$$I = \inf_{x \in W} \|x\|.$$

Jos $I = 0$, niin origo kelpaa etsityksi pisteeksi, koska W on suljettu. Jos taas $I > 0$, niin voidaan pienellä kertolaskulla palautua tilanteeseen, jossa $I = 1$. Nyt tarkastellaan sellaista jonoa W:n pisteitä, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, että

$$\|x_n\| \to I = 1.$$



Todistamme, että tällainen jono on oletetun tasaisen konveksiuden takia välttämättä Cauchy-jono. Jos vastoin Cauchyn ehtoa olisi olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että on olemassa mielivaltaisen suuria m ja n, joilla $\|x_n - x_m\| > \varepsilon$, niin valittaisiin jonot $n_k \to \infty$ ja $m_k \to \infty$ siten, että

$$\|x_{n_k} - x_{m_k}\| > \varepsilon,$$

jolloin $(x_{n_k} - x_{m_k}) \nrightarrow 0$ ja siis määritelmän 24.11. ehto (4) takaisi, että

$$\frac{\|x_{n_k} + x_{m_k}\|}{2} \nrightarrow 1.$$

Toisaalta W on konveksi, joten jokainen $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in W$ ja siis kuitenkin

$$\inf_{x \in W} \|x\| = 1 \leq \|\frac{x_n + x_m}{2}\| \leq \frac{\|x_n\| + \|x_m\|}{2} \to 1, \text{ kun } m \text{ ja } n \to \infty.$$

Jono on siis Cauchy ja suppenee näin ollen Banachin avaruudessa E. Sen rajapiste kuuluu suljettuun joukkoon W ja toteuttaa tietysti ehdon $\|x\| = 1$. $\square$

Edellinen todistus antaa käyttökelpoisen sivutuotteen.

Seuraus 24.14. *Tasaisesti konveksissa normiavaruudessa voidaan jono x_n todistaa Cauchy-jonoksi tarkastamalla molempien seuraavien ehtojen voimassaolo:*

(a) $$\overline{\lim_{n \to \infty}} \|x_n\| \leq 1$$

(b) $$\lim_{n,m \to \infty} \|x_n + x_m\| = 2.$$

On aika käydä käsiksi tämän luvun päätulokseen:

Lause 24.15 (Milman)[124]. *Tasaisesti konveksi Banachin avaruus on refleksiivinen.*

Todistus. Tarkastellaan aluksi reaalikertoimista normiavaruutta E. Olkoon $x^{**} \in E^{**}$. Osoitetaan, että $x^{**} \in E$. Voimme olettaa, että

$$\|x^{**}\|_{E^{**}} = 1.$$

Koska

$$\|x^{**}\|_{E^{**}} = \sup_{f \in \overline{B}_{E^*}} |\langle f | x^{**} \rangle|,$$

niin voidaan valita jono

$$(f_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \overline{B}_{E^*} \text{ siten, että}$$

(1) $$0 < 1 - |\langle f_i | x^{**} \rangle| < \tfrac{1}{i}.$$

[124] Luultavasti D. Milman, jonka pojat Vitali D. ja Pierre ovat myös matemaatikoita.

Käytämme seuraavaksi kohdassa 24.5 saamaamme tietoa, että E:n yksikköpallo $\overline{B}_E$ on w^*-tiheässä E^{**}:n yksikköpallossa $\overline{B}_{E^{**}}$. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ voidaan valita $x_n \in \overline{B}_E$ siten, että

$$(2) \qquad |\langle f_i | x_n - x^{**} \rangle| < \frac{1}{2n} \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Yhdistämällä (1) ja (2) saadaan

$$1 - \frac{3}{2i} < \langle f_i | x_n \rangle \leq 1, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tarkastamme edellisen seurauksen ehtojen avulla, että jono (x_n) on Cauchy. Avaruus E on oletettu tasaisesti konveksiksi, joten ehto (a) on voimassa pisteiden x_n valinnan nojalla. Keskiarvojen normeja koskeva arvio (b) on sekin helppo: kun $n < m$, niin

$$1 - \frac{3}{2n} + 1 - \frac{3}{2n} \leq \langle f_n | x_n + x_m \rangle \leq \|x_n + x_m\| \leq 2.$$

Siis jono (x_n) suppenee:

$$x_n \to x_\infty \in \overline{B}_E.$$

Olemme löytäneet $B_{\overline{E}}$:stä ehdokkaan x^{**}:ksi. On osoitettava, että

$$(3) \qquad \langle f | x_\infty \rangle = \langle f | x^{**} \rangle \quad \forall f \in E^*.$$

Ainakin konstruktiostamme seuraa heti, että

$$(4) \qquad \langle f_i | x_\infty \rangle = \langle f_i | x^{**} \rangle \quad \forall i \in \mathbb{N},$$

sillä kun $n \geq i$, niin

$$0 \leq |\langle f_i | x_\infty \rangle - \langle f_i | x^{**} \rangle| = \lim_{n \to \infty} |\langle f_i | x_n \rangle - \langle f_i | x^{**} \rangle| \leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

Todistaaksemme väitteen (3) mielivaltaiselle $f \in E^*$ voimme yksinkertaisesti liittää f:n nollanneksi termiksi tutkimaamme jonoon (f_n), jonka raja-arvo-ominaisuudet eivät siitä muutu. Jonon (x_n) valinta voidaan tehdä siten, että aikaisempien ehtojen lisäksi saadaan voimaan myös

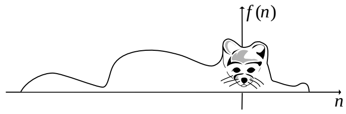
$$|\langle f | x^{**} \rangle - \langle f | x_n \rangle| < \frac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tällöin (3) pätee. On kuitenkin muistettava tarkastaa, että näin saatu rajapiste x_∞ ei riipu f:n valinnasta, vaikka korjattu konstruktio sisältääkin funktionaaliin f liittyviä ehtoja ja antaa mahdollisesti eri jonon (x_n). Olkoon x_f korjatulla konstruktiolla löydetty rajapiste ja x_∞ alkuperäinen. Silloin vuorotteleva jono

$$(x_\infty, x_f, x_\infty, x_f, \ldots)$$

täyttää jonolle (x_n) asettamamme ehdon (2) ja on siis Cauchy, mikä on mahdollista vain, kun $x_\infty = x_f$.

Näin on reaalinen tapaus käsitelty. Kompleksinen palautuu siihen samalla keinolla, jota käytimme todistaessamme Banachin erottelulauseen kompleksista versiota 21.11. Täsmennämme käytetyn periaatteen seuraavaksi apulauseeksi. $\square$



LAUSE 24.16. *Olkoon E kompleksikertoiminen normiavaruus. Merkitkäämme $E_{\mathbb{R}}$:llä samaa avaruutta tulkittuna $\mathbb{R}$-normiavaruudeksi. Silloin kuvaus*

$$x^* \mapsto y^* : \langle x|y^*\rangle = \langle x|x^*\rangle - i\langle ix|x^*\rangle$$

on isometrinen reaalilineaarinen isomorfismi

$$\begin{aligned} L_{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) &\to L_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C}), \ \textit{eli} \\ (E_{\mathbb{R}})^* &\to E^*. \end{aligned}$$

TODISTUS. Harjoitustehtävä. 21.5. □

24.3. $L^p(A)$-avaruuksien duaaleista.

Todistamme seuraavassa ns. *Clarksonin epäyhtälöiden*[125], avulla, että avaruudet $L^p(A)$ ja $L^q(A)$ ovat toistensa duaaleja, kun äärelliset $p, q \in \,]1, \infty[$ ovat toistensa duaalieksponentit. Erityisesti avaruudet $L^p(A)$ ovat refleksiivisiä, kun $1 < p < \infty$.

LAUSE 24.17 (CLARKSON 1936). *Olkoon $1 < p < \infty$ ja (A, μ) mitta-avaruus. Lebesgue'in avaruus*

$$L^p(A) = L^p(A, \mu)$$

on tasaisesti konveksi, siis myös refleksiivinen.

TODISTUS. Tapauksessa $p = 2$ on kyseessä Hilbert-avaruus, joka on helppo todistaa tasaisesti konveksiksi käyttämällä suunnikassääntöä

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2),$$

onhan sen mukaan $\|f + g\|^2 \leq 4 - \varepsilon^2$ ja siis $\|f + g\| \leq R = \sqrt{4 - \varepsilon^2} < 2$, kun $\|f\| = \|g\| = 1$ ja $\|f - g\| < \varepsilon$.

Etsimällä suunnikassäännölle tähän rooliin riittävää vastinetta esimerkiksi kaksiulotteisessa avaruudessa $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p\|)$ voi keksiä seuraavat *Clarksonin epäyhtälöt.*

$$(C_1) \qquad \|f + g\|^p + \|f - g\|^p \leq 2^{p-1}(\|f\|^p + \|g\|^p); \ p \in [2, \infty[$$

$$(C_2) \qquad \|f + g\|^q + \|f - g\|^q \leq 2(\|f\|^p + \|g\|^p)^{q-1}; \ p \in \,]1, 2]\,.$$

Kumpikin näistä epäyhtälöistä on selvästikin riittävä takaamaan tasaisen konveksiuden määrittelevän ehdon 24.11.(3), sillä

$$\|f_n\| = \|g_n\| = 1 \overset{(C_1)}{\Longrightarrow} \|f_n + g_n\|^p + \|f_n - g_n\|^p \leq 2^p$$

$$\|f_n\| = \|g_n\| = 1 \overset{(C_2)}{\Longrightarrow} \|f_n + g_n\|^q + \|f_n - g_n\|^q \leq 2^q,$$

jolloin

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n + g_n\| = 2 \implies \lim_{n\to\infty} (f_n - g_n) = 0.$$

Tyydymme todistamaan Clarksonin ensimmäisen epäyhtälön, sillä se riittää takaamaan avaruuden $L^p(A)$ refleksiivisyyden, kun $2 \leq p < \infty$. Osoittautuu nimittäin, että tästä seuraa, että $L^p(A)$ ja $L^q(A)$ ovat toistensa duaalit, kun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Siis myös $L^q(A) = (L^p(A))^*$ tällöin refleksiivinen. Clarksonin toinen epäyhtälö on näinollen refleksiivisyystodistuksen kannalta turha.

[125] J.A. CLARKSON: Uniformly convex spaces (1936).

LAUSE 24.18.. *Clarksonin ensimmäinen epäyhtälö pätee $L^p(A)$:ssä, kun $2 \le p < \infty$.*

TODISTUS. Riittää näyttää, että epäyhtälö (C_1) pätee yksiulotteisessa avaruudessa, siis luvuille. Väite seuraa nimittäin tästä valitsemalla $L^p(A)$:n alkioille f ja g edustajat, soveltamalla melkein kaikkialla niiden arvoihin yo. epäyhtälöä ja integroimalla puolittain.

Yksiulotteisen avaruuden olennaisesti ainoa normi, erityisesti $\|\cdot\|_p$ on itseisarvo:

$$(C_{1,\mathbb{C}}) \qquad |x+y|^p + |x-y|^p \le 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p) \quad \forall x, y \in \mathbb{C};\ \text{kun}\ \ p \in [2, \infty[.$$

Pitää siis todistaa $(C_{1,\mathbb{C}})$. Todistaminen onnistuu kyllä suoraviivaisella laskulla[126], mutta tulokseen pääsee nopeammin todistamalla väitteen ensin reaaliluvuille. Lauseen 13.9 mukaan inkluusiokuvaus $\ell^s \to \ell^p$ on jatkuva, ja sen normi on 1, kun $1 \le s < p \le \infty$. Soveltamalla tätä arvolla $s = 2$ kaksiluotteiseen erikoistapaukseen saa arvion

$$(|x+y|^p + |x-y|^p)^{\frac{1}{p}} \le (|x+y|^2 + |x-y|^2)^{\frac{1}{2}} \le \sqrt{2(x^2+y^2)}.$$

Seuraavaksi käytetään Hölderin epäyhtälön kaksiulotteista versiota kohdasta 2.2.1. vektoreihin (x^2, y^2) ja $(1,1)$ toisilleen duaalisilla eksponenteilla $\frac{p}{2}$ ja $\frac{p}{p-2}$:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= ((x^2, y^2)|(1,1)) \\ &\le \|(x^2,y^2)\|_{\frac{p}{2}} \|(1,1)\|_{\frac{p}{p-2}} = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{p-2}{p}}. \end{aligned}$$

Yhdistämällä saadut epäyhtälöt saadaan Clarksonin ensimmäinen epäyhtälö reaalisessa tapauksessa:

$$\begin{aligned} (|x+y|^p + |x-y|^p)^{\frac{1}{p}} &\le \sqrt{2(x^2+y^2)} \\ &\le \sqrt{2}(|x|^p + |y|^p)^{\frac{2}{2p}} 2^{\frac{p-2}{2p}} \le 2^{\frac{p-1}{p}} (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Kompleksinen tapaus palautuu reaaliseen kirjoittamalla $\frac{x}{y} = re^{i\varphi}$, soveltamalla reaalista versiota lukuihin 1 ja r ja huomaamalla että funktiolla $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$$g(\varphi) = |1 + re^{i\varphi}|^p + |1 - re^{i\varphi}|^p$$

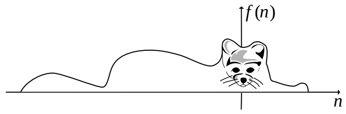
on maksimikohtana $\varphi = 0$. $\square$

LAUSE 24.19.. *Toinen Clarksonin epäyhtälö pätee $L^p(A)$:ssä, kun $1 < p \le 2$.*

TODISTUS. Koska lause ei ole meille tarpeen, on todistus sivuutettu tilan säästämiseksi. $\square$

Olemme saavuttamassa tavoitteen:

[126] [He-S].



Seuraus 24.20. *Olkoon* $1 < p < \infty$ *ja* (A, μ) *mitta-avaruus. Lebesgue'in avaruuden*

$$L^p(A) = L^p(A, \mu)$$

duaali on $L^q(A)$.

Todistus. Osoitamme, että kuvaus

$$j : L^q(A) \to (L^p(A))^* : f \mapsto j(f) = \langle \cdot | f \rangle,$$

$$\text{missä} \quad \langle g | f \rangle = \int g f \, d\mu,$$

on isometrinen lineaarinen bijektio. Kuvauksen olemassaolon ja isometrisyyden todistaminen sujuu samaan tapaan kuin jo jonoavaruuksia tutkittaessa ilman tietojamme refleksiivisyydestä: Hölderin epäyhtälö takaa heti, että kaikilla $f \in L^q(A)$ ja $g \in L^p(A)$

$$|\langle g | f \rangle| = |\int g f \, d\mu| \le \|f\|_q \|g\|_p < \infty.$$

$\langle g | f \rangle$ on siis luku ja lineaarikuvaus $j(f) : L^p(A) \to \mathbb{K} : g \mapsto \langle g | f \rangle$ on myös jatkuva ja sen normi $\|j(f)\|$ on enintään $\|f\|_q$. Näin on selvää, että j on todella kuvaus $L^q(A) \to (L^p(A))^*$ — lisäksi lineaarinen. Jotta j olisi isometria on vielä osoitettava, että

$$\|j(f)\| \ge \|f\|_q,$$

eli kaikille $f \in L^q(A)$ ja $\varepsilon > 0$ on löydettävä $g \in L^p(A) \setminus \{0\}$, jolle

$$|j(f)(g)| = |\int f g \, d\mu| \ge (\|f\|_q - \varepsilon) \|g\|_p.$$

Tämä onnistuu jopa arvolla $\varepsilon = 0$, kun valitsemme f:lle edustajan f ja sitten määrittelemme funktion g siten, että $|g|^p = |f|^q$ ja $fg > 0 \quad \mu$-mk. Valitaan

$$g = \begin{cases} \frac{|f|}{f} |f|^{q-1} & \text{pisteissä, joissa } f \neq 0 \\ 0 & \text{pisteissä, joissa } f = 0. \end{cases}$$

Koska fg on positiivinen, on

$$\begin{aligned} |\int f g \, d\mu| &= \int |fg| \, d\mu = \int |f||g| \, d\mu = \int |f||f|^{q-1} \, d\mu \\ &= \int |f|^q \, d\mu = (\int |f|^q \, d\mu)^{\frac{1}{q}} (\int |f|^q \, d\mu)^{\frac{1}{p}} \\ &= (\int |f|^q \, d\mu)^{\frac{1}{q}} (\int |g|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_q \|g\|_p \end{aligned}$$

Varsinainen asia on kuvauksen j surjektiivisuuden todistaminen. Teemme vastaoletuksen: kuvajoukko

$$j(L^q(A)) \text{ ei ole koko } (L^p(A))^*,$$

vaan sen aito aliavaruus. Banachin avaruuden $L^q(A)$ kanssa isometrisena $j(L^q(A))$ kuitenkin on täydellinen ja siis suljettu $(L^p(A))^*$:ssä. Hahnin ja Banachin lauseen seurauksen 22.3 ja L^p-avaruuden refleksiivisyyden nojalla on siis olemassa $f \in ((L^p(A))^*)^* = (L^p(A))^{**} = L^p(A)$ siten, että

$$\begin{aligned} f &\neq 0, \text{ ja} \\ \langle f|x^*\rangle = 0 &\quad \forall x^* \in j(L^q(A)), \text{ eli} \\ \int fg\,d\mu = 0 &\quad \forall g \in L^q(A). \end{aligned}$$

Valitsemalla g kuten edellä saadaan

$$\|f\|_q^q = \int |f|^q\,d\mu = |\int fg\,d\mu| = 0,$$

joka on mahdotonta, kun $f \neq 0$. $\square$

Erikoistapaus 24.21. (Fréchet'n ja Rieszin esityslause)[127]. *Olkoon (A,μ) mitta-avaruus. Hilbert-avaruuden*

$$L^2 = L^2(A) = L^2(A,\mu)$$

duaali on se itse.

Huomautus 24.22. Avaruudet L^1 ja L^∞ eivät ole tasaisesti konvekseja eivätkä myöskään refleksiivisiä. Itse asiassahan tiedämme, että L^1:n duaali on tosin L^∞, mutta avaruuden L^∞ duaali on aidosti suurempi kuin L^1, ellei mitta-avaruus ole poikkeuksellinen, esimerkiksi vain yksi piste.

Harjoitustehtäviä ja huomautuksia lukuun VII

Harjoitustehtäviä lukuun VII.

23.1. Todista, että topologisten avaruuksien X ja Y tulotopologiassa pätee $\forall\, A \subset X,\, B \subset Y: \quad \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

23.2. Todista lause 23.8, jossa $\mathcal{K}$ on topologian $\mathcal{T}$ kanta avaruudessa X ja väitetään, että

$$\mathcal{K}_Y = \{K \cap Y \bigm| K \in \mathcal{K}\}$$

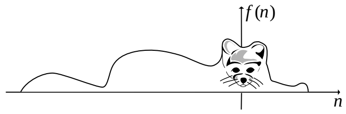
on aliavaruuden $Y \subset X$ aliavaruustopologian $\mathcal{T}_Y$ kanta.

23.3. Kuten edellinen tehtävä, mutta olettaen, että $\mathcal{A}$ on $\mathcal{T}$:n alikanta ja väittäen, että

$$\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y \bigm| A \in \mathcal{A}\}$$

on $\mathcal{T}_Y$:n alikanta.

[127]Olemme jo luvussa 9 todistaneet tämän lauseen mielivaltaisessa Hilbert-avaruuksissa. Nyt saimme mukavasti sivutuloksena vain $L^2(A)$-version, mutta itse asiassahan jokainen Hilbert-avaruus on isomorfinen $L^2(\mu)$:n kanssa, missä μ on lukumäärämitta sen kannassa, joten tämäkin todistus on yleinen.



23.4. Osoita, että topologinen avaruus X on kompakti, jos peitteellä

$$X \times Y = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

on äärellinen osapeite aina, kun joukot A_i ovat tulotopologian kantajoukkoja.

23.5. (jatkoa) Todista, että jos E on seminormijoukkoon $\mathcal{N}$ liittyvä lokaalikonveksi avaruus ja F sen vektorialiavaruus, niin seminormien $p \in \mathcal{N}$ rajoittumat aliavaruuteen F määrittelevät siihen aliavaruustopologian.

23.6. Viimeistele lauseen 23.20 todistus perustelemalla, miksi että Banachin avaruuden E alkiot ovat duaalin E^{**} alkioiksi tulkittuina jatkuvia w^*-mielessä.

24.1. Todista lause 24.16, jonka mukaan kuvaus $x^* \mapsto y^* : \langle x|y^* \rangle = \langle x|x^* \rangle - i\langle ix|x^* \rangle$ on isometrinen reaalilineaarinen isomorfismi $L_{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}) \to L_{\mathbb{C}}(E, \mathbb{C})$ eli $(E_{\mathbb{R}})^* \to E^*$, missä E on kompleksikertoiminen normiavaruus ja $E_{\mathbb{R}}$ sama avaruus tulkittuna $\mathbb{R}$-normiavaruudeksi.

Kertaa lopuksi, miten samojen periaatteita käytettiin Banachin erottelulauseen 21.11 todistuksessa.

24.2. Osoita, että luvussa 22 käsitelty heikko suppeneminen on sama asia kuin suppeneminen heikon topologian $w = \sigma(E, E^*)$ mielessä.

24.3. Olkoot E ja F Banachin avaruuksia. Varustamme tuloavaruuden $E \times F$ kohdan 17.1 sopimuksesta poiketen ekvivalentilla normilla

$$\|(x, y)\| = \|x\|_E + \|y\|_F.$$

Kun $(f^*, g^*) \in E^* \times F^*$, asetamme

$$(f^*, g^*)((x, y)) = f^*(x) + g^*(y).$$

Näytä. että $(E \times F)^* = E^* \times F^*$ yo. samastuksella ja että $(E \times F)^*$:n operaattorinormi on

$$\|(f^*, g^*)\| = \max\{\|f^*\|, \|g^*\|\}.$$

24.4. (jatkoa) Olkoot E ja F Banachin avaruuksia. Osoita, että jos E ja F ovat refleksiivisiä, niin myös $E \times F$ on refleksiivinen.

24.5. Olkoot E ja F normiavaruuksia ja T lineaarikuvaus $E \to F$. Varustetaan E heikolla topologialla $\sigma(E, E^*)$. Osoita oikeaksi tai vääräksi, että T on jatkuva origossa, jos ja vain jos on olemassa $y_1, \ldots, y_n \in E^* = \mathcal{B}(E, \mathbb{K})$ siten, että T on rajoitettu joukossa $\overline{B}_{y_1,\ldots,y_n} = \{x \in E \mid |\langle x|y_j \rangle| \leq 1 \text{ jokaiselle } j = 1, \ldots n\}$.

24.6. Todista apulause 24.5.(A-2), jonka mukaan konveksin joukon w^*-sulkeuma on konveksi. Ohje: Sovita luvun VI huomautuksissa esiintyvä todistus lauseen tilanteeseen. Katso lopuksi tämänkin luvun huomautuksia.

24.7. Todista määritelmässä 24.9 esiintyvät ehdot keskenään yhtäpitäviksi.

24.8. Osoita, että ℓ^∞ on isometrinen $L^\infty[0, 1]$:n jonkin suljetun aliavaruuden kanssa, eli on olemassa upotus $J : \ell^\infty \to L^\infty[0, 1]$. Vihje: valitse esimerkiksi $J(e_k) = \chi_{[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}]}, \quad k = 1, 2, \ldots$

24.9. Näytä, että vektorien $e_k = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ jono $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ei suppene heikosti avaruudessa ℓ^1. Ohje: Testaamalla vektorilla $f^* \in c_0 \subset \ell^\infty = (\ell^1)^*$

huomaat, että jos $e_k \rightharpoonup x$, niin $x = 0$. Vertaa lopuksi myös tapaukseen ℓ^p, kun $1 < p < \infty$.

24.10. Osoita, että ℓ^p on separoituva, kun $1 \leq p < \infty$.

24.11. Osoita, että jos normiavaruuden duaali E^* on separoituva, niin myös itse avaruus E on separoituva.

24.12. Osoita, että ℓ^∞ ei ole separoituva.

24.13. Millä p:n arvoilla Sobolevin avaruus $W^{1,p}(]a, b[)$ on tasaisesti konveksi?

Huomautuksia lukuun VII.

Tulotopologian vaihtoehto Käyttämämme lisäksi on olemassa toinenkin — paljon harvemmin esiintyvä — luonnollinen topologia tuloavaruudelle. Siinä kannaksi otetaan kaikki avoimien joukkojen tulot.

Lokaalikonveksin avaruuden $(E^*, w(E^*, E))$ **duaali** on edellä harjoitustehtävänä todistetun apulauseen 24.5 (A-1) mukaan E. Lähes samalla vaivalla saa todistettua, että yleensäkin ns. *separoituvan duaaliparin* (E, F) avaruuteen E tuottamassa lokaalikonveksissa topologiassa $\sigma(E, F)$ on E:n duaali tasan F. Tässä *duaalipari* tarkoittaa vektoriavaruusparia, jossa on määritelty bilineaarikuvaus $b : E \times F \to \mathbb{K}$ ja *separoituvuus* merkitsee, että jos $b(x, y) = 0$ kaikille y, niin $x = 0$. E:n yleistetty heikko topologia $\sigma(E, F)$ määräytyy seminormeista $p_y(x) = |b(x, y)|$.

w^***-tiheyslauseen 24.5 todistus** Hirzebruchin ja Scharlaun tyyliin on kommentoitu pois, koska olen valinnut toisen todistuksen. Koodi on tallessa.

Sobolev-versio. Lebesguen avaruuksien tasaisesta konveksiudesta seuraa, että myös Sobolevin avaruudet ovat tasaisesti konvekseja ja siis refleksiivisä, kun $1 < p < \infty$. Sobolevin avaruuden duaali ei kuitenkaan ole Sobolevin avaruus. Heikko suppeneminen Sobolevin avaruudessa on onneksi kuitenkin juuri sitä mitä käytettiin heikon derivaatan määritelmässä.

Radon-Nikodymin lauseen rooli. Mittateoriassa ja etenkin todennäköisyysteoriassa tärkeä *Radon-Nikodymin lause*Radon, Johann[128] voidaan todistaa Fréchet'n ja Rieszin esityslauseen avulla. Radon-Nikodymin lauseen avulla voi puolestaan todistaa L^p-avaruuksien refleksiivisyyden ($1 < p < \infty$) vetoamatta tasaiseen konveksisuuteen.[129] Taustalla on syvällinen yhteys.

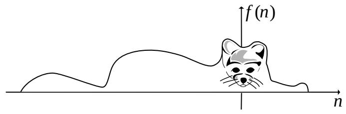
Banachin ja Tarskin paradoksi. Banachin ja Tarskin paradoksina tunnettut ilmiöt liittyvät valinta-aksioomaan, jota käsittelemme liitteessä. Selkeä ja viihdyttävä esitys paradoksista on kirjassa [SW].

Hyvä lukija. Kirjoita tekijälle muitakin parannusehdotuksia lukuun VII.

---

[128] JOHANN RADON 1887–1956, Itävalta. OTTON MARCIN NIKODYM 1887–1974, Ukraina ja USA

[129] Kiinnostunut lukija saattaa kaivella vaikka Yosidan [Y], §III.8 ja §IV.9 tai Wernerin [W] kirjaa kummankin seikan selvittämiseksi.



VIII OPERAATTORITEORIAN PERUSTEET

Koettaessamme yleistää hermiittisen operaattorin diagonalisointimenettelyä äärellisestä äärettömään ulotteisuuteen olemme huomanneet, että ominaisarvoihin perustuva teoria on riittämätön. Esimerkki 10.33 hermiittisestä operaattorista, jolla ei ole ominaisvektoreita, antaa ajattelemisen aihetta. Siksi tässä luvussa otetaan ominaisarvon lisäksi käyttöön sitä yleisempi *spektraaliarvon* käsite, joka yhtyy ominaisarvoon äärellisulotteisessa tapauksessa.

Seuraavassa $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

25. Normialgebrat ja spektri

25.1. Operaattorin ominaisarvot ja spektraaliarvot.

MÄÄRITELMÄ 25.1. Olkoon H Hilbertin avaruus. Luku $\lambda \in \mathbb{K}$ on operaattorin $T \in \mathcal{B}(H)$ *spektraaliarvo*, jos $T - \lambda I$ ei ole renkaan $\mathcal{B}(H)$ kääntyvä alkio, toisin sanoen jos operaattorilla $T - \lambda I$ ei ole jatkuvaa käänteiskuvausta $H \to H$. Operaattorin spektraaliarvojen joukko on sen *spektri* $\mathrm{Sp}(T)$. Spektriin $\mathrm{Sp}(T)$ kuulumattomia lukuja sanotaan operaattorin T *säännöllisiksi arvoiksi*.

HUOMAUTUS 25.2. Avoimen kuvauksen lause takaa, että jos $T - \lambda I$ on bijektio, niin sen käänteiskuvaus on paitsi tietenkin lineaarinen myös jatkuva, siis Banach-algebran $\mathcal{B}(H)$ alkio. Luvun λ kuuluminen operaattorin T spektriin merkitsee siis yksinkertaisesti sitä, että $T - \lambda I$ ei ole bijektio $H \to H$. Luku λ kuuluu siis spektriin $\mathrm{Sp}(T)$, kun operaattorilta $T - \lambda I$ puuttuu injektiivisyys tai surjektiivisuus tai molemmat. Injektiivisyyden puuttuminen merkitsee, että ydin $\mathrm{Ker}(T - \lambda I)$ on epätriviaali, toisin sanoen on olemassa $x \in H \setminus \{0\}$ siten, että $Tx - \lambda x = 0$, eli että λ on operaattorin T *ominaisarvo* ja x sen *ominaisvektori*. Ominaisarvot ovat siis erikoistapauksia spektraaliarvoista. Operaattorin T ominaisarvojen joukkoa sanotaan toisinaan sen *pistespektriksi*.

ESIMERKKI 25.3. Kun Hilbertin avaruus H on n-ulotteinen, niin lineaarialgebran dimensiolauseen mukaan injektiivisyys, surjektiivisuus ja kääntyvyys ovat yhtäpitäviä asioita operaattorille $T \in \mathcal{B}(H)$, joten äärellisulotteisessa avaruudessa kaikki spektraaliarvot ovat ominaisarvoja.

ESIMERKKI 25.4. Äärettönulotteisessa tapauksessa pistespektri ja spektri ovat eri asioita. Esimerkiksi 0 on oikeanpuoleisen siirto-operaattorin $S : \ell^2 \to \ell^2 : (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$ spektraaliarvo mutta ei ominaisarvo. Hieman mutkikkaaman esimerkin antaa operaattori

$$T : L^2[0,1] \to L^2[0,1] : Tf(x) = xf(x),$$

jolla ei ole ominaisarvoja, mutta jolle jokainen $\lambda \in [0,1]$ on spektraaliarvo.

25.2. Spektri Banach-algebrassa.

Operaattorialgebran $\mathcal{B}(E)$ alkiolle voi määritellä spektrin myös silloin, kun E ei ole Hilbertin avaruus, vaan esimerkiksi Banachin avaruus. Vaikka olemme ensisijaisesti kiinnostuneita Hilbertin avaruuden operaattoreista, yhdenmukaistamme käsittelyä määrittelemällä spektrin käsitteen mielivaltaisen $\mathbb{K}$-kertoimisen normialgebran alkiolle.

Määritelmä 25.5.

(1) $\mathbb{K}$-*Algebra* eli $\mathbb{K}$-*Algebra* $(\mathcal{A}, +, \circ, \cdot)$ on rengas $(\mathcal{A}, +, \circ)$, joka samalla on vektoriavaruus $(\mathcal{A}, +, \cdot)$, ja jossa kaikilla alkioilla $T, S \in \mathcal{A}$ ja luvuilla $\lambda \in \mathbb{K}$ pätee
$$\lambda \cdot (T \circ S) = (\lambda \cdot T) \circ S = T \circ (\lambda \cdot S)\,.$$
On syytä huomata, että määritelmässä selvyyden vuoksi esiintyneet kertolaskujen merkit $\circ$ ja $\cdot$ jätetään algebroissakin yleensä merkitsemättä.

(2) *Normialgebra* on algebra, joka samalla on normiavaruus, ja jossa kaikilla $T, S \in \mathcal{A}$ pätee tulon jatkuvuuden ilmaiseva epäyhtälö
$$\|TS\| \leq \|T\|\|S\|\,.$$
Jos normialgebra on varustettu ykkösalkiolla I, niin vaaditaan lisäksi, että $\|I\| = 1$.

(3) *Banach-algebra* on täydellinen normialgebra.

(4) Ykkösellisen algebran alkio on *kääntyvä*, eli *säännöllinen*, jos sillä on olemassa käänteisalkio renkaan mielessä. Kääntyvät alkiot muodostavat kertolaskun suhteen ryhmän, jota merkitään $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$.

(5) Alkiot $T, S \in \mathcal{A}$ *kommutoivat* keskenään, jos $TS = ST$. Algebra, jossa kaikki alkiot kommutoivat keskenään, on *kommutatiivinen algebra*.

Esimerkki 25.6.

a) Jatkuvien funktioiden muodostamassa sup-normilla varustetussa kommutatiivisessa, ykkösellisessä Banach-algebrassa
$$\mathcal{C} = (\mathcal{C}([a,b]), \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$$
kääntyviä alkioita ovat kaikkialla nollasta eroavat funktiot. Algebralla $\mathcal{C}$ on kaikista polynomeista muodostuva epätäydellinen normialialgebra $\mathcal{A}$, joka Weierstrassin approksimatiolauseen mukaan on tiheä. Algebran $\mathcal{A}$ ainoat kääntyvät alkiot ovat nollasta eroavat vakiofunktiot.

b) Banachin avaruuden E jatkuvat lineaarikuvaukset itselleen eli *operaattorit* muodostavat operaattorinormilla varustettuina ykkösellisen Banach-algebran, operaattorialgebran $\mathcal{B}(E)$. Renkaan kertolaskutoimituksena on tässä kuvausten yhdistäminen ja kääntyviä alkioita ovat avoimen kuvauksen lauseen takia kaikki bijektiiviset operaattorit.

c) Äärellisulotteinen versio operaattorialgebrasta on *matriisialgebra* $L(n) = M(n \times n)$, jonka kääntyvien alkioiden ryhmää merkitään $\mathrm{GL}(n)$. (Ks. 10.05.)

Voimme yleistää operaattorin spektraaliarvon käsitteen ykkösellä varustetun algebran alkiolle.

Määritelmä 25.7. Luku $\lambda \in \mathbb{K}$ on ykkösellä varustetun Banach-algebran alkion $T \in \mathcal{A}$ *säännöllinen arvo*, jos on olemassa käänteisalkio $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{A}$. Muuten λ on T:n *spektraaliarvo.* Tällöin siis $T - \lambda I$ ei ole algebran $\mathcal{A}$:ssa kääntyvä. Spektraaliarvojen joukko on T:n *spektri* $\mathrm{Sp}(T)$.

Vaikka merkintä ei sitä kerro, spektri riippuu alkion T lisäksi algebrasta $\mathcal{A}$ ja tietenkin kunnasta $\mathbb{K}$, joka seuraavissa tarkasteluissa tosin koko ajan on $\mathbb{C}$.

25.3. Carl Neumannin sarja.

Kompleksisen Banach-algebran alkion spektri on epätyhjä, kompakti joukko. Tämä asia ei ole aivan välittömästi ilmeinen. Äärellisulotteisessa tapauksessa spektri on tosin helppo huomata äärelliseksi joukoksi, mutta sen epätyhjyys on yhtäpitävä algebran peruslauseen kanssa, sillä matriisin T ominaisarvon löytäminen tapahtuu ratkaisemalla algebrallinen yhtälö $\det(T - \lambda I) = 0$. Joudumme siis ilmeisesti välttämättä käyttämään kompleksilukuja koskevia tietoja. Samaan suuntaan viittaa seuraava yksinkertainen lause, jonka avulla osoitamme, että spektri on suljettu joukko.

Lause 25.8 (Carl Neumannin sarja). *Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra, $T \in \mathcal{A}$ ja $\|T\| < 1$. Silloin $I - T$ on kääntyvä.*

Todistus. Lause on todistettu harjoitustehtävänä 6.18. Ideana on, että tavallisen geometrisen lukusarjan summa on muotoa $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = (1 - \alpha)^{-1}$, kun $|\alpha| < 1$ ja että tämä onnistuu yhtä lailla Banach-algebrassa. Normialgebrassahan sarja $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\|$ suppenee, kun $\|T\| < 1$, ja Banachin avaruudessa sarja suppenee, jos sen termien normeista muodostettu sarja suppenee, toisin sanoen itseinen suppeneminen takaa sarjan suppenemisen. Suora lasku osoittaa lopuksi, että $(I - T) \sum_{n=0}^{\infty} T^n = I = \left(\sum_{n=0}^{\infty} T^n\right)(I - T)$, joten $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = (I - T)^{-1}$. $\square$

Carl Neumannin sarja suppenee avaruuden $\mathcal{B}(H)$ avoimessa pallossa $B(I, 1)$, joten identtinen kuvaus I on kääntyvien alkioiden ryhmän $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$ sisäpiste. Tätä hyväksikäyttäen on vaivatonta todistaa, että muutkin kääntyvät alkiot ovat $\mathrm{GL}(\mathcal{A})$:n sisäpisteitä (vrt. harjoitustehtävä 6.19.).

Tästä saadaan seuraavat seuraukset:

(1) Banach-algebran kääntyvien alkioiden ryhmä $\mathrm{GL}\mathcal{A})$ on avoin joukko ja kääntymättömien alkioiden joukko on siis suljettu.
(2) Jokaisen alkion $T \in \mathcal{A}$ spektri on suljettu joukko.

Carl Neumannin sarjaan perustuvat myös seuraavien kappaleiden lauseet spektrin olemuksesta.

25.4. Liouvillen lause.

Määritelmä 25.9 (Analyyttiset funktiot). Kompleksifunktion analyyttisyyden eli holomorfisuuden käsitteen voi helposti yleistää vektoriarvoiselle funktiolle $f : \mathbb{C} \to E$, missä E on kompleksikertoiminen Banachin avaruus, esimerkiksi $E = \mathcal{B}(H)$: Funktio $f : U \to E$ on *analyyttinen* avoimessa joukossa $U \subset \mathbb{C}$, jos sillä on derivaatta kaikissa U:n pisteissä. *Derivaatta* $f'(z_0)$ määritellään aivan samalla tavalla kuin kompleksiarvoisessa tapauksessa.

Differentiaalilaskenta voi hyvin yleistää ääretönulotteiseen avaruuteen, mutta pysyäksemme spektriasiassa todistamme seuravassa vain tässä välittömästi tarvittavat differentiaalilaskennan kaavat.

LAUSE 25.10. (LINEAARIKUVAUKSEN KETJUSÄÄNTÖ). *Jos $U \subset \mathbb{C}$ on avoin, $f : U \to E$ on analyyttinen ja $T : E \to F$ on jatkuva ja lineaarinen, niin myös $T \circ f : U \to F$ on analyyttinen ja $(T \circ f)' = T \circ f'$.*

PERUSTELU.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{T(f(z)) - T(f(z_0))}{z - z_0} = T \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = Tf'(z_0). \qquad \square$$

LAUSE 25.11 (KÄÄNTEISALKION MUODOSTAMISEN KETJUSÄÄNTÖ). *Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra.*

(1) *Käänteisalkion muodostaminen $k : x \mapsto x^{-1}$ on homeomorfismi kääntyvien alkioiden ryhmältä $GL\mathcal{A}$) itselleen.*
(2) *Jos $U \subset \mathbb{C}$ on avoin ja $f : U \to \mathcal{A}$ on analyyttinen, niin myös*

$$g = k \circ f : \alpha \mapsto f(\alpha)^{-1}$$

on analyyttinen ja sen derivaatta on

$$g'(\alpha) = -g(\alpha)f'(\alpha)g(\alpha) = -f(\alpha)^{-1}f'(\alpha)f(\alpha)^{-1}.$$

PERUSTELU. (1) Carl Neumannin sarjan avulla helppo todistaa. (2) Myös käänteisen derivaatan laskeminen perustuu Carl Neumannin sarjan käyttöön, mutta vie muutaman rivin lisää tilaa.[130] $\square$

LAUSE 25.12 (LIOUVILLEN LAUSE)[131]. *Olkoon E Banachin avaruus. Analyyttinen, rajoitettu funktio $f : \mathbb{C} \to E$ on vakio.*

TODISTUS. Lause palautuu tavallisen kompleksiarvoisen funktion *Liouvillen lauseeseen* tarkastelemalla kompleksiarvoisia funktioita $y \circ f : z \mapsto \langle f(z)|y \rangle$, missä $y \in E^*$. Nämähän ovat ketjusäännön 25.10. mukaan analyyttisiä koko tasossa ja sitäpaitsi tietenkin rajoitettuja, siis tavallisen Liouvillen lauseen mukaan vakioita jokainen. Kaikilla z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$ on siis $\langle f(z_1)|y\rangle = \langle f(z_2)|y\rangle$. Siis $\langle f(z_1) - f(z_2)|y\rangle = 0$ kaikilla $y \in E^*$. Hahn-Banachin lauseen seurauksena tiedämme, että jokaisella nollasta eroavalla vektorilla $x \in E$ on olemassa $y \in E^*$, jolla $\langle x|y\rangle \neq 0$. Siis $f(z_1) = f(z_2)$. $\square$

25.5. Spektrin perusominaisuudet — kompakti ja epätyhjä.

LAUSE 25.13. *Kompleksikertoimisen Banach-algebran $\mathcal{A}$ alkion T spektri* $\mathrm{Sp}(T) \subset \mathbb{C}$ *on epätyhjä, kompakti lukujoukko. Lisäksi*

$$\mathrm{Sp}(T) \subset \overline{B(0, \|T\|)}.$$

PERUSTELU. Totesimme jo, että spektri on suljettu. Lisäksi $(\lambda I - T)$ on kääntyvä silloin ja vain silloin, kun $(I - \frac{1}{\lambda}T)$ on kääntyvä, eli Carl Neumannin sarjan

[130] Kokeile itse tai katso esim. [Di], jossa on enemmänkin derivointia Banachin avaruuksissa tai [M] jossa on s. 143 lyhyt todistus.

[131] JOSEPH LIOUVILLE 1809–1882, Ranska.

perusteella ainakin silloin, kun $|\lambda| > \|T\|$. Spektrin epätyhjyys on hiukan syvällisempi asia ja perustuu Liouvillen lauseeseen: Jos operaattorin T spektri olisi tyhjä, niin kuvaus $\lambda \mapsto (T-\lambda I)^{-1}$ olisi määritelty ja analyyttinen koko tasossa $\mathbb{C}$. Lisäksi se olisi rajoitettu, sillä $\lambda \mapsto \|(T-\lambda I)^{-1}\|$ olisi jatkuva ja ympyrän $B_{\mathbb{C}}(0, 2\|T\|)$ ulkopuolella rajoitettu, siis rajoitettu kaikialla. Liouvillen mukaan se siis olisi vakio, mikä on selvästi epätosi. $\square$

Spektri on siis epätyhjä nimenomaan siksi, että kuntana on $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Jopa reaalisessa matriisialgebrassa $M(2 \times 2)$ on alkioita, joiden spektri on tyhjä — esimerkiksi melkein kaikki tason kierrot.

25.6. Spektraalikuvauslause.

Lause 25.14 (Spektraalikuvauslause polynomille). *Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra ja p tavallinen $\mathbb{C}$−polynomi*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n. \qquad a_n \neq 0, n \geq 1.$$

Olkoon edelleen $T \in \mathcal{A}$. Tällöin alkion

$$p(T) = a_0 + a_1 T + \ldots a_n T^n \in \mathcal{A}$$

spektri on

$$\mathrm{Sp}(p(T)) = \{p(\lambda) \bigm| \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}.$$

Todistus. Olkoon $\mu \in \mathbb{C}$. On osoitettava, että alkio $p(T) - \mu I$ on kääntyvä algebrassa $\mathcal{A}$ tasan silloin, kun $\mu = p(\lambda)$, missä $\lambda \in \mathrm{Sp}(T)$. Hajotetaan algebran peruslauseen avulla polynomi $p(z) - \mu$ tuloksi

$$p(z) - \mu = a_n(z - z_1) \ldots (z - z_n),$$

jolloin $\mu = p(\lambda)$ tasan silloin, kun λ on jokin luvuista $z_1, \ldots, z_n$. Lisäksi

$$p(T) - \mu I = a_n(T - z_1 I) \ldots (T - z_n I),$$

joten riittää todistaa, että tämä tulo on kääntyvä tasan silloin, kun jokainen tekijä $(T - z_n I)$ on kääntyvä. Tämän ehdon riittävyys on selvää, sillä kääntyvien alkioiden tulo on aina kääntyvä. Jos taas oletetaan, että tulo on kääntyvä, niin ainakin ensimmäinen tekijä on kääntyvä, onhan silloin

$$a_n(T - z_1 I) \ldots (T - z_n I)\,(p(T) - \mu)^{-1} = I.$$

Toisaalta tekijät $(T - z_k I)$ kommutoivat keskenään, joten mikä tahansa niistä voidaan siirtää ensimmäiseksi. $\square$

Lause 25.15 (∗) (Spektraalikuvauslause analyyttiselle funktiolle). *Edellisen lauseen väite pätee, vaikka f ei olisikaan polynomi, kunhan on olemassa avoin lukujoukko $\Omega \subset \mathbb{C}$, jossa f on analyyttinen ja joka sisältää T:n spektrin.*

Perustelu. Todistuksessa voi käyttää esimerkiksi Cauchyn integraalikaavan Banach-algebraversiota, *Dunfordin integraalia*[132]

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} f(\lambda)(\lambda I - T)^{-1}\, d\lambda. \qquad \square$$

[132] Nelson Dunford n. 1920–2000? USA. Ks. [S] tai [Y]. Cauchyn kaava on mahdollinen määritelmä analyyttiselle funktiolle!

Lause 25.16 (∗) (Spektraalikuvauslause jatkuvalle funktiolle). *Edellisen lauseen väite pätee erikoistapauksissa, vaikka f ei olisi analyyttinen, vaan ainoastaan jatkuva joukossa* $\mathrm{Sp}(T)$. *Oletukseksi riittää ainakin, että algebrana on* $\mathcal{B}(H)$ *ja T on hermiittinen.*[133]

Perustelu. Sivuutetaan. Katso kuitenkin huomautuksia luvun lopussa.

26. Projektioiden järjestys

26.1. Projektiot ja suorat summat.

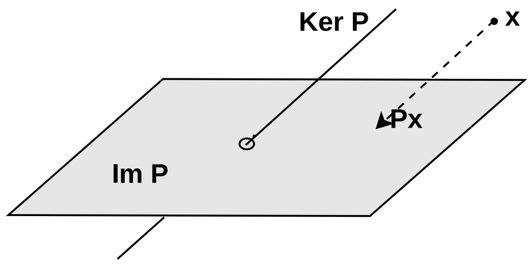
Geometrisesti helpoiten ymmärrettävä operaattorityyppi on projektio aliavaruudelle. Kertaamme perusteellisesti projektioiden perusominaisuudet kiinnittäen erityistä huomiota yleisiin lineaarialgebrallisiin eli vinoihin projektioihin.

Kertaus 26.1. Vektoriavaruuden V aliavaruuksien H ja F sanotaan muodostavan *suoran summan* $E \oplus F = E + F = \langle E \cup F \rangle$, jos ne toteuttavat seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot:

(1) $E \cap F = \{0\}$
(2) Jokaisen vektorin $v \in E + F$ hajotelma muotoon $v = a + b$, missä $a \in E$ ja $b \in F$, on yksikäsitteinen.
(3) Nollavektorin $0 \in E + F$ hajotelma muotoon $0 = a + b$, missä $a \in E$ ja $b \in F$, on yksikäsitteinen, $0 = 0 + 0$.

Vektoriavaruuden operaattori $P : V \to V$ on projektio, jos $P^2 = P$. Seuraava jo luvussa 9 mainittu lause sanoo, että projektio on projektio kuvalleen ytimensä suuntaan:

Lause 26.2. *Jos $P : V \to V$ on projektio, niin $V = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$.*



Kuva 71. Projektio aliavaruudelle.

Todistus. Olkoon $x \in V$. Selvästi $x = a + b$, missä $a = Px \in P(V)$ ja $b = x - a \in \operatorname{Ker} P$. Jos $x \in \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P$, niin $x = Px = 0$. □

Kertaus 26.3. Projektiolla on seuraavanlaiset jatkuvuusominaisuudet.

(1) Normiavaruudessa jatkuvan projektion ydin $\operatorname{Ker} P = P^{-1}\{0\}$ on tietysti suljettu aliavaruus, samoin siis kuvajoukko $\operatorname{Im} P = P(H)$, joka on *komplementaarisen projektion $I - P$* ydin.

[133] [La].

(2) Projektio on avoin kuvaus.
(3) P ja $I - P$ ovat jatkuvia joko molemmat tai ei kumpikaan.
(4) Ääretönulotteisessa avaruudessa projektio voi olla epäjatkuva, eikä edes sen ytimen eikä kuvajoukon tarvitse olla suljettuja aliavaruuksia.
(5) Edes yksiulotteiselle avaruudelle tapahtuvan projektion — oleellisesti lineaarimuodon — ei tarvitse olla jatkuva, mutta lineaarimuoto on sentään jatkuva jos sen ydin on suljettu. Epäjatkuvan lineaarimuodon ydin on tiheä.
(6) Lineaarialgebrallisen suoran summan termien ei siis tarvitse olla suljettuja aliavaruuksia.

Huomautus 26.4. Projektion kuva-avaruuden vektorit ovat sen ominaisvektoreita ominaisarvolla 1 ja ytimen vektorit ominaisvektoreita ominaisarvolla 0. Projektion ainoat ominaisarvot ovat 0 ja 1. Vastaavat ominaisavaruudet ovat kuva-avaruus ja ydin.

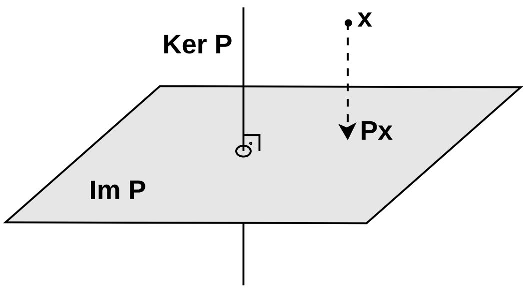
26.2. Ortoprojektioiden järjestys.

Määritelmä 26.5. Sisätuloavaruuden H *ortogonaalinen projektio* eli *ortoprojektio* on projektio $P : H \to H$, jonka kuva-avaruus $\operatorname{Im} P = P(H)$ ja ydin $\operatorname{Ker} P$ ovat toisilleen ortogonaaliset, toisin sanoen

$$\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P,$$

eli

$$P(x) = 0 \implies (x|Py) = 0 \quad \forall y \in H.$$



Kuva 72. Ortoprojektio suljetulle aliavaruudelle.

Huomautus 26.6. Usein ortoprojektiota sanotaan lyhyesti vain projektioksi. Kahden toisiaan vastaan ortogonaalisen aliavaruuden suoraa summaa merkitään täydellisesti $A \overset{\perp}{\oplus} B$, joten ortoprojektiolle P pätee

$$H = \operatorname{Im} P \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker} P.$$

Ortoprojektion ydin ja kuva-avaruus ovat toistensa ortogonaaliset komplementit ja siten varmasti molemmat suljettuja aliavaruuksia.

LAUSE 26.7. *Sisätuloavaruuden H nollasta eroavalle projektiolle P seuraavat ehdot ovat keskenään yhtäpitäviä:*

(1) *P on ortogonaaliprojektio.*
(2) *P on hermiittinen, ts.* $(x|Py) = (Px|y) \quad \forall x, y \in H$.
(3) $P = P^*$.
(4) $\|P\| = 1$.
(5) *P on normaali, ts.* $PP^* = P^*P$
(6) *P on "positiivinen", ts.* $(x|Px) \geq 0 \quad \forall x \in H$.

TODISTUS. (1) $\Rightarrow$ (2): Jos oletamme, että $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P$, niin hajotelmista $x = a + b$ ja $y = c + d \in H = \operatorname{Im} P \oplus \operatorname{Ker} P$ saadaan kaikille x ja $y \in H$

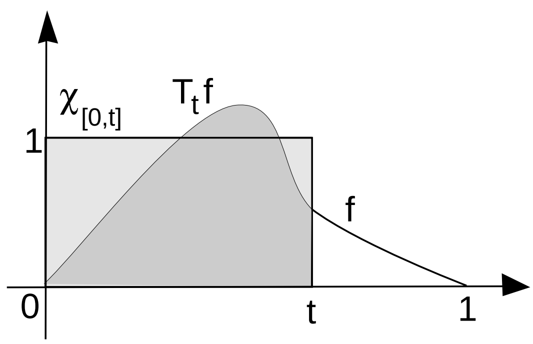
$$(x|Py) = (a + b|P(c + d)) = (a|c) + \underbrace{(b|c)}_{0} = (a|c) = (a|c) + \underbrace{(a|d)}_{0} = (Px|y).$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Jos $P : H \to H$ on hermiittinen ja $Px = 0$, niin kaikilla $y \in H$ on $(x|Py) = (Px|y) = (0|y) = 0$, joten $\operatorname{Im} P \perp \operatorname{Ker} P$.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) seuraa adjungatin määritelmästä.
Muut kohdat jäävät harjoitustehtäväksi. □

ESIMERKKI 26.8. Kerrataan esimerkki 10.33: Olkoon $H = L^2[0, 1]$ ja $0 \leq t \leq 1$. Kuvaus

$$T_t : H \to H : f \mapsto T_t f = f \cdot \chi_{[0,t]}$$

on ortoprojektio.



KUVA 73. PROJEKTIO FUNKTIOAVARUUDESSA.

KERTAUS 26.9.

(1) Hilbertin avaruuden projektiolause sanoo, että jokaiselle suljetulle aliavaruudelle $A \subset H$ on olemassa ortogonaaliprojektio, joka kuvaa pisteen $x \in H$ lähimmäksi pisteekseen aliavaruudella A. Projektion voi kirjoittaa näkyviin valitsemalla aliavaruudelle ortonormaalin kannan K_A ja laajentamalla sen koko avaruuden ortonormaaliksi kannaksi $K_A \cup K_{A^\perp}$, jolloin $H = A \oplus A^\perp$, eli jokainen vektori x on muotoa

$$x = \sum_{e \in K_A} (x|e)e + \sum_{e \in K_{A^\perp}} (x|e)e,$$

ja Px saadaan yksinkertaisesti jättämällä tästä esityksestä jälkimmäinen termi pois.

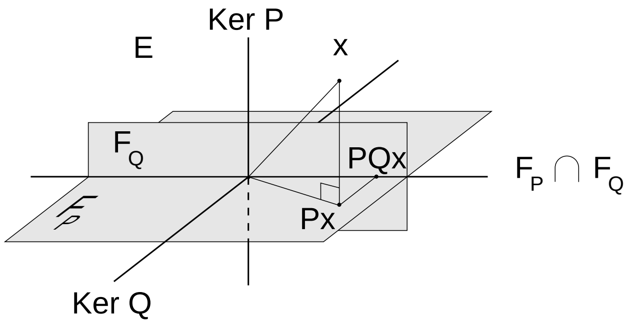
(2) Edellinen esimerkki on Hilbert-avaruudessa ainoa: Jokainen ortoprojektio liittää pisteeseen $x \in H$ kuvajoukon $\operatorname{Im} P$ lähimmän pisteen.

Hilbertin avaruuden ortoprojektio määräytyy täysin kuva-avaruudestaan. Jokainen suljettu aliavaruus on jonkin ortoprojektion kuva-avaruus, joten ortoprojektiot vastaavat suljettuja aliavaruuksia yksi yhteen. Kahden suljetun aliavaruuden leikkaus ja suora summa ovat suljettuja aliavaruuksia. Luettelelemme seuraavassa, mitä kuva-avaruuksien inkluusio merkitsee niitä vastaaville projektioille. Perustelut jäävät lukijan mietittäväksi.

Määritelmä 26.10. Olkoot P ja Q ortoprojektiot aliavaruuksille F_P ja F_Q.

(1) On helppoa todeta, että PQ on ortoprojektio jos ja vain jos P ja Q *kommutoivat*, ts. $PQ = QP$. Tällöin

$$\operatorname{Im}(PQ) = \operatorname{Im}(QP) = F_P \cap F_Q.$$



Kuva 74. Kommutoivat ortoprojektiot.

(2) Sanomme, että P ja Q ovat toisilleen *ortogonaaliset* ortoporojektiot, mikäli ne toteuttavat seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot:

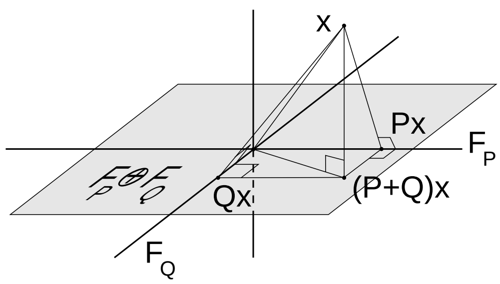
i) $F_P \perp F_Q$, ts. $(Px|Qy) = 0 \,\forall\, x \in H$.

ii) $PQ = 0$.

iii) $QP = 0$.

iv) $P + Q$ on ortoprojektio.

v) $\operatorname{Im}(P+Q) = F_P \overset{\perp}{\oplus} F_Q$.



Kuva 75. Ortogonaalisten projektioiden summa.

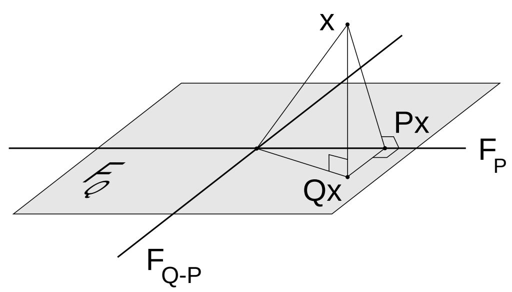
(3) Merkitsemme

$$P \leq Q,$$

mikäli seuraavat yhtäpitävät ehdot toteutuvat:

i) $F_P \subset F_Q$
ii) $PQ = P$.
iii) $QP = P$.
iv) $Q - P$ on ortoprojektio.
v) $\|Px\| \leq \|Qx\| \quad \forall x \in H$

Relaatio $P \leq Q$ on ortoprojektioille järjestys, joka on sama asia kuin niiden kuva-avaruuksien joukko-opillinen inkluusio. Erityisesti jokainen ortoprojektio on suurempi kuin nollaprojektio, siis tässä mielessä positiivinen. Nollakuvaus on siis pienin ortoprojektio ja identtinen kuvaus on suurin ortoprojektio.



Kuva 76. $P \leq Q$.

Huomautus 26.11. Projektioiden järjestysrelaatio voidaan yleistää koskemaan myös muita hermiittisiä operaattoreita kuin projektioita. Palaamme tähän erittäin tärkeään näkökohtaan seuraavassa luvussa.

27. Hermiittisten operaattorien ominaisuuksia

27.1. Yleisiä ominaisuuksia.

Olemme määritelleet hermiittisen operaattorin luvussa 10. Kertaamme määritelmän ja täydennämme tietojamme. Seuraavassa kuntana on $\mathbb{C}$.

Kertaus 27.1.

(1) Operaattori A on hermiittinen, jos $A = A^*$ eli $(Ax|y) = (x|Ay) \quad \forall x, y \in H$. Tämä on kompleksisessa avaruudessa yhtäpitävää sen kanssa, että $(Ax|x) \in \mathbb{R}$ kaikilla $x \in H$.
(2) Hermiittiset operaattorit muodostavat $\mathcal{B}(H)$:n reaalisen vektorialiavaruuden, mutta eivät kompleksista aliavaruutta, eihän edes iI ole hermiittinen operaattori.
(3) Hermiittiset operaattorit eivät muodosta renkaan $(\mathcal{B}(H), +, \circ)$ alirengasta, sillä:
(4) Jos A ja B ovat hermiittisiä, niin AB on hermiittinen aina ja vain, kun $AB = BA$.

(5) Hermiittiset operaattorit muodostavat $\mathcal{B}(H)$:n suljetun joukon, siis täydellisen metrisen aliavaruuden, onhan niiden joukko pisteen 0 alkukuva jatkuvassa kuvauksessa $\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(H) : T \mapsto T - T^*$.

(6) Jokainen $T \in \mathcal{B}(H)$ voidaan yksikäsitteisellä tavalla hajottaa muotoon $T = A + iB$, missä A ja B ovat hermiittisiä, nimittäin reaaliosaansa $A = \frac{1}{2}(T^* + T)$ ja imaginaariosaansa $B = \frac{i}{2}(T^* - T)$. Lisäksi T on normaali, eli $TT^* = T^*T$, jos ja vain jos $AB = BA$. Tietysti jokainen hermiittinen ja myös jokainen unitaarinen operaattori U on normaali, onhan $UU^* = I = U^*U$.

Seuraava lause on periaatteessa lineaarialgebrasta tuttu. Tarkoituksenamme on pian todistaa, että koko spektri on reaalinen.

Lause 27.2. *Olkoon $A \in \mathcal{B}(H)$ hermiittinen. A:n ominaisarvot ovat reaalisia ja eri ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit ortogonaalisia.*

Todistus. Perustelu voidaan kopioida äärellisulotteisesta tapauksesta. Kertaamme sen. Olkoon $Ax = \lambda x$, missä $x \neq 0$. Nyt

$$\mathbb{R} \ni (Ax|x) = (\lambda x|x) = \lambda\|x\|^2,$$

joten ainakin λ on reaaliluku. Olkoon lisäksi $Ax = \mu y$, missä $y \neq 0$ ja $\lambda \neq \mu$. On osoitettava, että $(x|y) = 0$. Koska λ on reaalinen, on

$$(\mu - \lambda)(x|y) = (\mu x|y) - (x|\lambda y) = (Ax|y) - (x|Ay) = (Ax|y) - (Ax|y) = 0. \qquad \square$$

27.2. Hermiittisen operaattorin normin kaava.

Seuraavassa kohdassa esiteltävä lause on edellisiä vaikeampi todistaa, mutta tarvitsemme aivan pian sitä tietoa, että jos A on hermiittinen ja $(Ax|x) = 0$ kaikille $x \in H$, niin $A = 0$.

Lause 27.3. *Olkoon $A \in \mathcal{B}(H)$ hermiittinen. Tällöin*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax|x)|.$$

Erityisesti $A = 0$, jos jokainen $(Ax|x)$ on 0.

Todistus. Merkitään normiehdokasta $N_A = \sup_{\|x\|=1} |(Ax|x)|$, jolloin kaikilla $x \in H$:

$$|(Ax|x)| \leq N_A\|x\|^2$$

ja väite on $N_A = \|A\|$. Millä tahansa operaattorilla on tietenkin yksikköpallon vektoreille $x \in H$ voimassa Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälöstä saatava

$$|(Ax|x)| \leq \|Ax\|\,\|x\| \leq \|A\|\,\|x\|^2 = \|A\|,$$

ja siis

$$N_A \leq \|A\|.$$

Käänteinen puoli on varsinainen väite ja sen todistus vaatii hermiittisyyden käyttöä. Kaikilla $u, z \in H$ pätee

$$(A(u+z)|u+z) = (Au|u) + \big((Au|z) + (Az|u)\big) + (Az|z)$$
$$(A(u-z)|u-z) = (Au|u) - \big((Au|z) + (Az|u)\big) + (Az|z)$$

Erotuksesta ja hermiittisyysehdosta $(z|Au) = (Az|u)$ saadaan

$$(Au|z) + (z|Au) = \tfrac{1}{2}\big((A(u+z)|u+z) - (A(u-z)|u-z)\big).$$

Oikea puoli sopii yhteen N_A:n määritelmän kanssa, ja saamme arvion

$$\begin{aligned}
|(Au|z) + (z|Au)| &= \tfrac{1}{2}|((A(u+z)|u+z) - (A(u-z)|u-z)| \\
&\leq \tfrac{1}{2}|((A(u+z)|u+z)| + \tfrac{1}{2}|(A(u-z)|u-z)| \\
&\leq \tfrac{1}{2}N_A\|u+z\|^2 + \tfrac{1}{2}N_A\|u-z\|^2 \\
&= N_A\,\tfrac{1}{2}(\|u+z\|^2 + \|u-z\|^2) \\
&= N_A\,(\|u\|^2 + \|z\|^2),
\end{aligned}$$

missä on lopuksi käytetty suunnikassääntöä.

Olkoon $x \in H$. Osoitamme, että $\|Ax\| \leq N_A\|x\|$. Voimme olettaa, että $x \neq 0$. Epäyhtälö seuraa edelläolevasta arviosta, kun valitaan

$$u = x\sqrt{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}} \quad \text{ja} \quad z = Ax\sqrt{\frac{\|x\|}{\|Ax\|}},$$

jolloin

$$\begin{aligned}
(Au|z) + (z|Au) &= 2\|Ax\|^2 \quad \text{ja} \\
\|u\|^2 + \|z\|^2 &= 2\|Ax\|\,\|x\|. \qquad \square
\end{aligned}$$

27.3. Hermiittisten operaattoreiden järjestys.

Nyt yleistämme projektioiden järjestysrelaation koskemaan myös muita hermiittisiä operaattoreita kuin projektioita: Operaattori T on *positiivinen*, jos

$$(Tx|x) \geq 0 \quad \forall\, x \in H.$$

Vastaavasti määritellään *negatiivinen operaattori.* Koska positiivi- ja negatiiviluvut ovat reaalisia, niin positiiviset ja negatiiviset operaattorit ovat siis hermiittisiä.

Jos T ja S ovat hermiittisiä operaattoreita ja $S-T$ on positiivinen, niin merkitään $T \leq S$. Näin määritellään *hermiittisten operaattoreiden järjestys.*

Lause 27.5. *Relaatio $T \leq S$ on hermiittisten operaattorien joukossa järjestysrelaatio. Erityisesti nollasta eroava operaattori T ei lauseen 27.3 mukaan voi olla sekä positiivinen että negatiivinen.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 27.6.

(1) *Jos A, B ja C ovat hermiittisiä ja $A \leq B$, niin $A + C \leq B + C$.*
(2) *Jos A, B ovat hermiittisiä, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ja $A \leq B$, niin $\lambda A \leq \lambda B$.*
(3) *Jos A on hermiittinen, niin $A^2 \geq 0$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. $\square$

Lause 27.7. *Jos A on hermiittinen, niin*

$$\|A\| = \max\{|m|, |M|\},$$

missä $m = \inf_{\|x\|=1}(Ax|x)$ *ja* $M = \sup_{\|x\|=1}(Ax|x)$, *jolloin siis kaikilla* $x \in H$ $(mx|x) \leq (Ax|x) \leq (Mx|x)$, *eli*

$$mI \leq A \leq MI.$$

Todistus. Seuraa heti hermiittisen operaattorin normin lausekkeesta. □

27.4. Hermiittisen operaattorin spektrin reaalisuus.

Lause 27.8. *Hermiittisen operaattorin A kaikki spektraaliarvot ovat reaalilukuja.*

Todistus. Tiedämme jo, että hermiittisen operaattorin A ominaisarvot ovat reaalisia. Todistamme väitteen nyt muille spektraaliarvoille. Jaamme todistuksen kolmeen vaiheeseen todistamalla seuraavat väitteet, joilla itselläänkin on merkitystä.

1. *Olkoon $\lambda \in \mathbb{C}$ mikä luku tahansa, niin joka tapauksesa*

$$H = \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)}.$$

Erityisesti, jos $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$, *niin* $\overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)} = H$, *toisin sanoen, jos* $A - \lambda I$ *on injektio, niin se ei tosin välttämättä ole surjektio, kuten äärellisulotteisessa tapauksessa, mutta kuvajoukko on joka tapauksessa ainakin tiheä.*

Perustelu kohdalle 1. Jos λ ei ole reaalinen, niin silloin se ei ainakaan ole ominaisarvo, vaan $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \{0\}$. Olipa siis λ reaalinen tai ei, niin varmasti $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = \mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda} I)$. Todistamme, että[134]

$$H = \mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda} I) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)}.$$

Ainakin

$$\mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda} I) \perp \mathrm{Im}\,(A - \lambda I),$$

sillä jos $x \in \mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda} I)$ ja $y \in \mathrm{Im}\,(A - \lambda I)$, eli $(A - \overline{\lambda} I)x = 0$ ja $y = (Az - \lambda z)$ jollekin $z \in H$, niin

$$(x|y) = (x|(A - \lambda I)z) = ((A - \overline{\lambda} I)x|z) = 0.$$

Sisätulon jatkuvuuden takia siis myös

$$\mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda} I) \perp \overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)}.$$

Pitää vielä näyttää, että suljettu aliavaruus $\mathrm{Ker}\,\big(A - \overline{\lambda} I\big) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)}$ on koko H. Suljettu aliavaruus on koko H, jos sen ortogonaalinen komplementti on $\{0\}$. Siksi riittää näyttää, että $\big(\mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda} I) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)}\big)^{\perp} = \{0\}$. Olkoon

$$x \perp \big(\mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda} I) \overset{\perp}{\oplus} \overline{\mathrm{Im}\,(A - \lambda I)}\big).$$

Silloin $x \perp \mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda} I)$ ja $x \perp \mathrm{Im}\,(A - \lambda I))$. Erityisesti siis kaikille $z \in H$ on $(x|(A - \lambda I)z) = ((A - \overline{\lambda} I)x|z) = 0$, joten $x \in \mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda} I)$. Tästä seuraa, että $x = 0$, sillä $x \perp \mathrm{Ker}(A - \overline{\lambda} I)$.

[134] Varo: ylleviivaus tarkoittaa välillä sulkeumaa, välillä kompleksikonjugointia.

2. *Seuraavat ehdot ovat kukin yhtäpitäviä sen kanssa, että kompleksiluku* λ *ei kuulu spektriin* $\mathrm{Sp}(A)$*:*

(1) $A - \lambda I$ *on kääntyvä renkaassa* $\mathcal{B}(H)$.
(2) *On olemassa positiiviluku* ε*, jolla* $\forall x \in H: \quad \|(A-\lambda I)x\| \geq \varepsilon\|x\|$.
(3) $\inf_{\|x\|=1} \|(A-\lambda I)x\| > 0$.
(4) *Ei ole olemassa sellaista jonoa yksikkövektoreita* $x_n \in H$*, joilla* $\|Ax_n - \lambda x_n\| \to 0$.

Perustelu kohdalle 2. Ehto (1) on spektrin määritelmä. Ehdot (2), (3) ja (4) ovat tietenkin keskenään yhtäpitäviä ja (2) seuraa heti ehdosta (1). Jää todistettavaksi, että (1) seuraa ehdosta (2).

Oletuksen (2) nojalla $(A-\lambda I)$ on luonnollisestikin injektio ja $(A-\lambda I)^{-1}$ jatkuva määrittelyjoukossaan $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I)$. Riittää siis todistaa, että $(A-\lambda I)$ on surjektio, eli että $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I) = H$. Totesimme jo kohdassa 1, että $\mathrm{Im}\,(A-\lambda I)$ on tiheä, joten riittää todistaa, että se on suljettu. Olkoon $y_n \to y$ suppeneva jono sen alkioita. Jokainen y_n on muotoa $y_n = (A-\lambda I)x_n$. Oletuksesta (2) seuraa, että jono x_n on Cauchy, joten sillä on raja-arvo $x \in H$. Selvästi $y = (A-\lambda I)(x) \in \mathrm{Im}\,(A-\lambda I)$.

3. *Olkoon* $\lambda = \mu + i\nu \in \mathbb{C}$ *siten, että* $\nu \neq 0$*. Tällöin* $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$ *eli on olemassa* $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(H)$*. Tämä on varsinainen väitteemme.*

Perustelu kohdalle 3. Vetoamme edellisen kohdan ehtoon (2). Olkoon $x \in H$. Osoitetaan, että

$$|\nu|\,\|x\| \leq \|(A-\lambda I)x\|.$$

Merkitään lyhyesti $y = (A-\lambda I)x$. Nyt on tietenkin

$$\begin{aligned}(y|x) &= (Ax|x) - \lambda(x|x) \quad \text{ja}\\ (x|y) &= \overline{(y|x)} = (Ax|x) - \overline{\lambda}(x|x).\end{aligned}$$

Erotus antaa

$$(x|y) - (y|x) = (\lambda - \overline{\lambda})(x|x) = 2\nu i\|x\|^2, \quad \text{joten}$$
$$|(x|y)| + |(y|x)| \geq |(x|y) - (y|x)| = |\lambda - \overline{\lambda}|\,|(x|x)| = |2\nu i|\|x\|^2 = 2|\nu|\,\|x\|^2 \quad \text{ja siis}$$
$$2\|x\|\,\|y\| \geq 2|(x|y) = |(x|y)| + |(y|x)| \geq 2|\nu|\,\|x\|^2.$$

Niinpä $|\nu|\,\|x\| \leq \|y\| = \|(A-\lambda I)x\|$, ja väite seuraa. □

Seuraus 27.9. *Spektrin maksimi ja minimi ovat hermiittisen operaattorin "ylä- ja alaraja", toisin sanoen* $\max \mathrm{Sp}(A) = M = \sup_{\|x\|=1}(Ax|x)$ *ja* $\min \mathrm{Sp}(A) = m = \inf_{\|x\|=1}(Ax|x)$.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\mathrm{Sp}(A) \subset [m, M]$. Olkoon $\lambda > M$. Silloin

$$-((A-\lambda I)x|x) = -(Ax|x) + \lambda(x|x) \geq (\lambda - M)(x|x)$$

ja siis

$$(\lambda - M)\|x\|^2 \leq |((A-\lambda I)x|x)| \leq |(A-\lambda I)x\|\,\|x\|.$$

Näin ollen $(\lambda - M)\|x\| \leq \|(A - \lambda I)x\|$, eikä λ voi lauseen 27.6 todistuksen vaiheen 2. kriteerin (2) mukaan kuulua spektriin. Samalla tavalla tarkastetaan, että mikään $\lambda < m$ ei ole spektraaliarvo.

Osoitamme seuraavaksi saman todistuksen kohdan (4) välttämättömyyspuoleen vetoamalla, että A:n alaraja m ja yläraja M kuuluvat spektriin $\mathrm{Sp}(A)$. Valitaan jono ykkösen pituisia vektoreita x_n, jolla

$$M - (Ax_n|x_n) = \delta_n \searrow 0.$$

Osoitetaan, että tämä jono kelpaa kohdassa (4) mainituksi. Lauseen 27.5 mukaan $\|A\| = \max\{|m|, |M|\}$. Olkoon $\gamma > \|A\|$. Tällöin operaattorin $A + \gamma I$ alaraja on $m + \gamma > 0$ ja yläraja on $M + \gamma = \|A + \gamma I\|$, erityisesti siis

$$\|(A + \gamma I)x_n\| \leq M + \gamma.$$

Kaiken kaikkiaan:

$$\begin{aligned}
\|Ax_n - Mx_n\|^2 &= \|(A + \gamma I)x_n - (M + \gamma)x_n\|^2 \\
&= \|(A + \gamma I)x_n\|^2 + (M + \gamma)^2\|x_n\|^2 - 2(M + \gamma)((A + \gamma I)x_n|x_n) \\
&\leq (M + \gamma)^2 + (M + \gamma)^2 - 2(M + \gamma)(M - \delta_n + \gamma) \\
&\to 0,
\end{aligned}$$

joten $M \in \mathrm{Sp}(A)$. Vastaavalla tavalla todistetaan, että $m \in \mathrm{Sp}(A)$. □

Lause 27.10 (Juho Niemelä 2001). *Hermiittisen operaattorin A spektri sisältää kaikki joukon $\{(Ax|x) \mid \|x\| = 1\}$ kasautumispisteet.*

Todistus. Kuten lause 27.7. □

Harjoitustehtäviä ja huomautuksia lukuun VIII

Harjoitustehtäviä lukuun VIII.

25.1. Todista esimerkin 25.4 väitteet: a) 0 on siirto-operaattorin $S : \ell^2 \to \ell^2 : (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$ spektraali- mutta ei ominaisarvo.

b) Operaattorilla

$$T : L^2[0,1] \to L^2[0,1] : Tf(x) = xf(x),$$

ei ole ominaisarvoja, mutta jokainen $\lambda \in [0,1]$ on sen spektraaliarvo.

25.2. Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra ja $T \in \mathcal{A}$ kääntyvä. Todista, että

$$\mathrm{Sp}(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(T)\}.$$

25.3. (jatkoa) Olkoon $\mathcal{A}$ Banach-algebra ja $T \in \mathcal{A}$ siten, että $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$. Todista, että kaikilla T:n spektraaliarvoilla on itseisarvo 1.

26.1. Viimeistele lauseen 26.7 todistus osoittamalla kaikki projektion ortogonaalisuuden takaavat ehdot yhtäpitäviksi keskenään. Ohje: Huomautuksen 10.27 mukaan normaalilla operaattorilla pätee $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^* = T(H)^\perp = T^*(H)^\perp$.

26.2. Määrää esimerkissä 26.8 ortoprojektion T_t komplementaarinen projektio, ydin ja kuva sekä tutki onko kuvaus $t \mapsto T_t$ jatkuva $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$.

26.3. Onko esimerkissä 26.8 kuvaus $t \mapsto T_t$ kasvava $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$?

26.4. Perustele määritelmässä 26.10 esiintyvät väitteet.

27.1. Todista lause 27.5, jonka mukaan relaatio $T \leq S$ on hermiittisille operaattoreille järjestysrelaatio

27.2. Todista lause 27.6, jonka mukaan

(1) Jos A, B ja C ovat hermiittisiä ja $A \leq B$, niin $A + C \leq B + C$.
(2) Jos A, B ovat hermiittisiä, $\lambda \in \mathbb{R}_+$ ja $A \leq B$, niin $\lambda A \leq \lambda B$.
(3) Jos A on hermiittinen, niin $A^2 \geq 0$.

27.3. Lauseen 27.8 todistuksen kohdan 2. mukaan λ kuuluu hermiittisen operaattorin spektriin $\mathrm{Sp}(A)$, mikäli $\inf_{\|x\|=1} \|(A - \lambda I)x\| > 0$. Osoita, että tämä ehto on myös välttämätön.

27.4. Todista lause 27.10.

Huomautuksia lukuun VIII.
Vaihtoehtoinen todistus lauseelle 27.3.

Todistus. Olkoon $\alpha > 0$ ja $x \in H$. Merkitään $y = \alpha x + \frac{Tx}{\alpha}$ ja $z = \alpha x - \frac{Tx}{\alpha}$. Laskemalla voi todeta, että

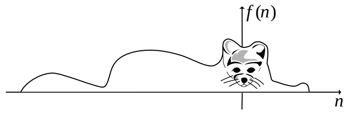
$$\begin{aligned} 4\|Tx\|^2 &= (Ty \mid y) - (Tz \mid z) \\ &\leq M\|y\|^2 + M\|z\|^2 \\ &= 2M(\alpha^2\|x\|^2 + \frac{\|Tx\|^2}{\alpha^2}). \end{aligned}$$

Erityisesti valitsemalla $\alpha = \sqrt{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}}$ saadaan $\|Tx\| \leq M\|x\|$, joten $\|T\| \leq M$. Toisensuuntainen epäyhtälö on triviaali. $\square$

Spektraalikuvauslauseesta. Yksi tapa todistaa spektraalikuvauslause jatkuvalle funktiolle on seuraavanlainen: Määritellään ensin $f(T)$ jatkuvalle kuvaukselle $f \in \mathcal{C}(\mathrm{Sp}(T))$: Kuvaus $\varphi : \{\mathbb{R}\text{-polynomit}\} \to \mathcal{B}(H) : p \mapsto p(T)$ on selvästikin algebrahomomorfismi. Se on itse asiassa myös jatkuva, kun lähtöpuolella käytetään sup-normia yli kompaktin joukon $[-m, M]$, missä $m = \inf \mathrm{Sp}(T)$ ja $M = \sup \mathrm{Sp}(T)$.[135] Siksi φ voidaan jatkaa kuvaukseksi täydentymien välille: $\varphi : \mathcal{C}([m, M]) = \overline{\{\mathbb{R}\text{-polynomit}\}} \to \mathcal{B}(H)$. Näin on määritelty $f(T) = \varphi(f)$.

Kuvaus $\varphi : \mathcal{C}([m, M]) \to \mathcal{B}(H)$ on algebrahomomorfismi, mutta ei injektio eikä surjektio. Se voidaan kuitenkin korjata isomorfismiksi: Kuvajoukko on ilmiselvästi joukko $\overline{\{p(T) \mid p \text{ on } \mathbb{R}\text{-polynomi}\}}$, joka on suljettu ja kommutatiivinen alialgebra $\mathcal{B}(H)$:ssa. Valitaan tämä uudeksi kuvajoukoksi. Injektiivisyyden puute (Esimerkki: T projektio ja $p(x) = x^2 - x$) korjataan pienentämällä väli $[m, M]$ joukoksi $Z(T) =$

[135] Todistamme luvussa 27, että hermiittisen operaattorin spektri on reaalinen ja sisältyy väliin $[m, M]$. Jatkuvuustodistuksessa käytetään reaalisen polynomin lausumista tulona reaalisista 1. tai 2. asteen termeistä ja lisäksi tarvitaan myöhemmin esitettävää Rieszin lausetta 29.21 "positiivisuuden" periytymisestä kommutoivien operaattorien tulolle.



$\{x \in [m, M] \mid f(T) = 0 \implies f(x) = 0\}$. Osoittautuu, että $Z(T) = \mathrm{Sp}(T)$. Näin saadaan lopulta isometrinen algebraisomorfismi

$$\varphi : \mathcal{C}(\mathrm{Sp}(T)) \to \overline{\{p(T) \mid p \text{ on } \mathbb{R}\text{-polynomi}\}}.$$

Spektraalikuvauslauseen väite on nyt ilmeinen, sillä spektri säilyy algebraisomorfismissa ja jatkuva funktio $f(x) - \lambda$ on kääntyvä täsmälleen silloin, kun sillä ei ole nollakohtaa määrittelyjoukossaan, joka tässä on $\mathrm{Sp}(T)$, eli kun $\lambda \notin f(\mathrm{Sp}(T))$.

Jatkuvan funktion spektraalikuvauslauseen voi todistaa myös vetoamalla itseadjungoidun operaattorin spektraali-integraaliesitykseen (Ks. luku X) tai ns. *Gelfandin teoriaan.*[136]

Hyvä lukija. Kirjoita tekijälle parannusehdotuksia lukuun VIII.

[136] Israil Moiseevic Gelfand 1913–? Ukraina. Lisätietoja teoriasta: [N].

IX KOMPAKTIT OPERAATTORIT

28. Kompaktin operaattorin spektri

28.1. Kompaktin operaattorin määritelmä.

Olemme luvussa 18.2. jo määritelleet kompaktin operaattorin ja todistaneet eräiden integraalioperaattoreiden olevan kompakteja. Nyt on tarkoituksenamme todistaa kompaktien hermiittisten operaattorien *spektraalilause*, joka sanoo, että tällaisen operaattorin $T : H \to H$ voi lausua diagonaalimuodossa jonkin ortonormaalin kannan $(f_i)_{i \in I}$ suhteen

$$Tx = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_{f_i}(x|f_i)f_i.$$

Kompaktien operaattoreiden perusominaisuudet ovat riippumattomia sisätulosta. Siksi tarkastelemme tilannetta aluksi yleisessä Banachin avaruudessa. Tätä selväpiirteistä asiakokonaisuutta sanotaan toisinaan *Fredholmin, Rieszin ja Schauderin teoriaksi* tai lyhemmin *Rieszin teoriaksi.*[137]

MÄÄRITELMÄ 28.1. Banachin avaruuksien välinen lineaarikuvaus $T \in \mathcal{B}(E, F)$ on *kompakti operaattori*, jos se toteuttaa jonkin seuraavista keskenään yhtäpitävistä ehdoista:

(1) Yksikköpallon kuva on *relatiivikompakti*, ts. $\overline{T(B_E)} \subset F$ on kompakti.
(2) Yksikköpallon kuva on *prekompakti*, ts. yksikköpallon kuva voidaan kaikilla $\varepsilon > 0$ peittää äärellisen monella $\varepsilon-$säteiseellä pallolla.

$$T(B) \subset B(v_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(v_n, \varepsilon).$$

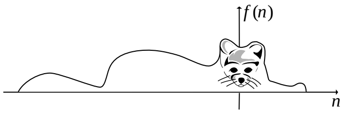
(3) Jos $(x_i)_{i=1}^{\infty}$ on jono yksikköpallossa B_E, niin jonolla $(Tx_i)_{i=1}^{\infty}$ on F:ssä suppeneva osajono.

HUOM 28.2. (EHTOJEN YHTÄPITÄVYYS). Päättely on aika helppo, kunhan muistamme luvusta 19 pari tietoa metristen avaruuksien topologiasta:

a) Metrisen avaruuden joukko on kompakti aina ja vain ollessaan jonokompakti.

b) Täydellisen metrisen avaruuden joukko on relatiivikompakti tasan ollessaan prekompakti. Nämä kompaktiuskäsitteet ovat siis täydellisessä metrisessä avaruudessa — erityisesti Banachin avaruudessa — samat.

[137] JULIUSZ PAWEL SCHAUDER 1899–1943, Ukraina. Teorian peruskirja on [Ri].



Esimerkki 28.3. Operaattori

$$T : \ell^2 \to \ell^2 : \ (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto (0, \frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3} \dots)$$

on kompakti.

Huomautus 28.4. Koska äärellisulotteisessa avaruudessa jokainen rajoitettu joukko on relatiivikompakti, niin jokainen äärellisulotteinen eli äärellisasteinen operaattori on kompakti lineaarikuvaus.

Toisaalta Rieszin lause 6.15 sanoo, että ääretönulotteisen avaruuden yksikköpallo ei voi olla relatiivikompakti. Siksi kompakti lineaarikuvaus ei koskaan ole avoin kuvaus, ellei maaliavaruus ole äärellisulotteinen. Siten esimerkiksi ortoprojektio ääretönulotteiselle aliavaruudelle ei ole kompakti operaattori. Mikään muukaan ääretönulotteisten Banachin avaruuksien välinen surjektiivinen operaattori ei voi olla kompakti. Erityisesti ääretönulotteisessa avaruudessa kompaktilla operaattorilla ei ole käänteiskuvausta.

Esimerkki 28.5. Kompaktit operaattorit muodostavat suljetun *operaattori-ideaalin:*

(1) Kahden kompaktin operaattorin summa on kompakti.
(2) Kompaktin operaattorin T monikerta λT ($\lambda \in \mathbb{C}$) on kompakti.
(3) Jos edes toinen operaattoreista T ja S on kompakti, niin $T \circ S$ on kompakti.
(4) Kompaktien operaattorien joukko $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{B}(E, F)$ on suljettu (operaattorinormin mielessä).

Lisäksi kompakteilla operaattoreilla on ominaisuudet

(4) Äärellisasteiset operaattorit ovat kompakteja.
(5) Kompaktin operaattorin $T : E \to E$ rajoittuma suljettuun (!) aliavaruuteen $F \subset E$ on kompakti operaattori $F \to \overline{T(F)}$.

Perustelu. Harjoitustehtäviksi sopivia. Relatiivikompaktin joukon kuva jatkuvassa lineaarikuvauksessa on relatiivikompakti! □

28.2. Kompaktit diagonaalioperaattorit Hilbertin avaruudessa. Tarkoituksenamme on yrittää diagonalisoida hermiittinen, kompakti operaattori. Siksi kannattaa katsoa tarkkaan tavoitetta, hermiittistä diagonaalioperaattoria kompleksikertoimisessa Hilbertin avaruudessa:

Esimerkki 28.6. Olkoon $\lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ lukujono ja $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ Hilbertin avaruuden ortonormaali kanta.

Yleistetty diagonaalioperaattori (vrt. luku 10)

$$T_\lambda : x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x|e_i) e_i$$

on hyvin määritelty ja kompakti aina ja vain, kun $\lambda \in c_0$ eli $\lambda_n \to 0$.

Kompakti diagonaalioperaattori T_λ on hermiittinen aina ja vain, kun luvut λ_i ovat reaalilukuja.

LAUSE 28.7. *Kompaktin diagonaalioperaattorin T_λ kertoimet λ ovat sen ominaisarvot ja kantavektorit ovat vastaavia ominaisvektoreita.*

PERUSTELU. Ratkaistaan ominaisarvoyhtälö

$$\begin{aligned} \lambda x &= T_\lambda x \\ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(x|e_i)e_i &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i(x|e_i)e_i \\ 0 &= \sum_{i=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_i)(x|e_i)e_i \\ \forall\, i \quad 0 &= (\lambda-\lambda_i)(x|e_i) \end{aligned}$$

Koska ominaisvektoriksi ei kelpaa nollavektori, niin viimeisen rivin väite on mahdollinen ainoastaan, kun λ on jokin luvuista λ_i ja $(x|e_j)=0$ kaikilla niillä j, joilla $\lambda \neq \lambda_j$ □

ESIMERKKI 28.8. Kompaktilla diagonaalioperaatorilla T_λ voi olla spektriin kuuluva luku, joka ei ole ominaisarvo. Diagonaalioperaattorin T_λ spektriin kuuluu nimittäin luku 0, mutta se ei ole ominaisarvo, ellei jokin luvuista λ_i satu olemaan 0.

PERUSTELU. Ominaisarvot määrättiin jo edellä. Ne ovat luvut λ_i. On siis vain todistettava, että $\nexists (T-0)^{-1} = T^{-1}$. Tämä tiedetäänkin kohdasta 28.4. □

Seuraava esimerkki osoittaa, että hermiittisen kompaktin operaattorin diagonalisoituvuus on kaikkea muuta kuin itsestään selvää.

ESIMERKKI 28.9. Esimerkki lineaarikuvauksesta, joka on hermiittinen ja kompakti, vaikka ei siltä heti näytä: Olkoon $K : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{C}$ jatkuva kuvaus, jolla on symmetriaominaisuus $K(x,y) = K(y,x)\, \forall x,y \in [0,1]$. *Integraaliytimeen K liittyvä integraalioperaattori.*

$$\begin{aligned} T_K : L^2[0,1] &\to L^2[0,1] \\ T_K f(x) &= \int_0^1 K(x,t)f(t)\,dt \end{aligned}$$

on kompakti ja hermiittinen.

PERUSTELU. Operaattorin kompaktius on todistettu kohdassa 18.8/9 ja seuraa Ascolin ja Arzelán lauseesta. Hermiittisyyden toteaminen on harjoitustehtävä.

28.3. Yleisen kompaktin operaattorin Riesz-hajotelma.

Kokoamme seuraavaan lauseeseen Rieszin teorian päätuloksen — selostuksen kompaktin operaattorin rakenteesta.

MÄÄRITELMÄ 28.10. Normiavaruuden E aliavaruuksien E_1 ja $E_2 \subset E$ suora summa on *topologinen suora summa*, mikäli se toteuttaa seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot:

(1) Projektio $p_1 : E_1 \oplus E_2 \to E_1$ on jatkuva.
(2) Projektio $p_2 : E_1 \oplus E_2 \to E_2$ on jatkuva.
(3) Kuvaus $E_1 \oplus E_2 \to E_1 \times E_2 : x_1 \oplus x_2 \mapsto (x_1, x_2)$ on homeomorfismi.

Esimerkiksi Hilbert-avaruuden aliavaruuksien ortogonaalinen suora summa on topologinen suora summa. Toisaalta avaruuden jako suoraksi summaksi hypertasosta ja suorasta on topologinen suora summa, jos ja vain jos hypertaso on suljettu.

Lause 28.11 (Kompaktin operaattorin hajotelma). *Olkoon E ääretönulotteinen kompleksikertoiminen normiavaruus ja $T : E \to E$ kompakti operaattori.*

(1) *Jokaista nollasta eroavaa ominaisarvoa λ kohti on olemassa E:n hajotelma topologiseksi suoraksi summaksi*

$$E = E(\lambda) \oplus N(\lambda)$$

siten, että

i) $E(\lambda)$ *on suljettu ja* $N(\lambda)$ *peräti äärellisulotteinen.*

ii) $E(\lambda)$ *ja* $N(\lambda)$ *ovat T:n invariantteja aliavaruuksia, toisin sanoen* $T(E(\lambda)) \subset E(\lambda)$ *ja* $T(N(\lambda)) \subset N(\lambda)$.

iii) $(\lambda I - T)$ *:n rajoittuma* $E(\lambda) \to E(\lambda)$ *on kääntyvä*

iv) $(\lambda I - T)^n$ *:n rajoittuma* $N(\lambda) \to N(\lambda)$ *on nollakuvaus jollakin* $n \in \mathbb{N}$. *Pienin tällainen luku* $n = n(\lambda)$ *on nimeltään λ:n* kertaluku.

(2) *Ominaisarvon $\lambda \neq 0$ ominaisavaruus $E_\lambda = \{x \in E \mid Tx = \lambda x\}$ sisältyy invarianttiin aliavaruuteen $N(\lambda)$ ja on siis äärellisulotteinen.*

(3) *Kohdan (1) hajotelma on yksikäsitteinen.*

(4) *T:n spektri on joko äärellinen joukko, johon kuuluu 0, tai nollaa kohti suppeneva jono.*

(5) *Kaikki spektraaliarvot, paitsi mahdollisesti* 0*, ovat ominaisarvoja.*

(6) *Joko* 0 *on spektraaliarvo tai sitten koko avaruus E on äärellisulotteinen.*

(7) *Jos λ ja μ ovat nollasta eroavia eri ominaisarvoja, niin $N(\mu) \subset E(\lambda)$.*

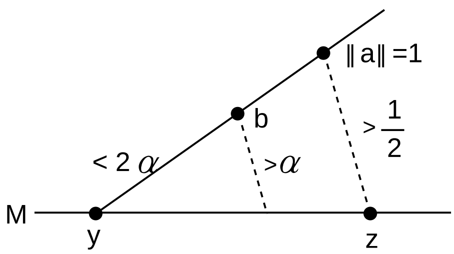
Seuraavat lauseet ovat askelet, joiden kautta edellinen todistetaan.

Lemma 28.12. (F. Rieszin lemma) *Olkoon E normiavaruus ja $T \in \mathcal{B}(E)$. Merkitään $S = I - T$. Olkoot edelleen $M \subsetneq L \subset E$ suljettuja aliavaruuksia ja $S(L) \subset M$. Tällöin on olemassa piste $a \in L \setminus M$, jolla on ominaisuudet*

(1) $\|a\| \leq 1$.

(2) *Kaikilla $m \in M$ on $\|Ta - Tm\| \geq \frac{1}{2}$.*

Todistus. Olkoon $b \in L \setminus M$, jolloin $\delta = d(b, M) > 0$. Valitaan $y \in M$ siten, että $\|b - y\| \leq 2\delta$ ja asetetaan $a = \frac{b-y}{\|b-y\|}$. Tämä kelpaa, sillä tietenkin $\|a\| = 1$, ja jos $z \in M$, niin $\|a - z\| \geq \frac{1}{2}$.



Kuva 77. Rieszin lemman todistus.

Jokaiselle $m \in M$ pätee siis $\|Ta - Tm\| = \|a - \underbrace{(m - Sa - Sx)}_{\in M}\| \geq \frac{1}{2}$. □

LAUSE 28.13. *Olkoon E normiavaruus ja $T : E \to E$ kompakti operaattori. Merkitsemme $S = I - T$. Tällöin*

(1) $\dim(\operatorname{Ker} S) < \infty$.
(2) *$S(E)$ on suljettu aliavaruus.*
(3) $\operatorname{codim} S(E) < \infty$, *ts.* $E = \langle S(E) \cup \{x_1, \dots, x_m\}\rangle$ *joillekin* $x_1, \dots, x_m \in E$.
(4) *Jos* $\operatorname{Ker} S = \{0\}$, *niin S on homeomorfismi $E \to S(E)$.*

TODISTUS. ([Di] mukaan)

(1) Operaattorin S ydin muodostuu tasan niistä vektoreista $x \in E$, joilla pätee $Tx = x$. Identtinen kuvaus $\operatorname{Ker} S \to \operatorname{Ker} S$ on siten kompaktin operaattorin rajoittumana suljettuun aliavaruuteen itsekin kompakti, joten $\operatorname{Ker} S$ on äärellisulotteinen.

(2) Olkoon $y \in \overline{S(E)}$. Valitaan jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ siten, että $Sx_n \to y$. On kaksi mahdollisuutta: jono on joko rajoitettu tai rajoittamaton. Jos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu, niin operaattorin T kompaktiuden nojalla kuvajonolla $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset T(E)$ on suppeneva osajono, ja siirtymällä siihen voimme olettaa, että $Tx_n \to b \in E$, jolloin $x_n = Tx_n + Sx_n \to b+y$, ja siis jatkuvuuden nojalla $S(b+y) = \lim_n Sx_n = y$, jolloin $y \in S(E)$, kuten pitää todistaa.

Jos taas jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ei ole rajoitettu, niin voi kuitenkin käydä niin, että sen pisteet x_n pysyvät ytimen $\operatorname{Ker} S$ tuntumassa siinä mielessä, että jono $d(x_n, \operatorname{Ker} S)$ on rajoitettu. Tällöin valitaan pisteet $y_n \in \operatorname{Ker} s$ siten, että $\|x_n - y_n\|$ pysyy rajoitettuna ja sovelletaan äskeistä päättelyä jonon x_n sijasta rajoitettuun jonoon $x_n - y_n$. Nytkin $y \in S(E)$.

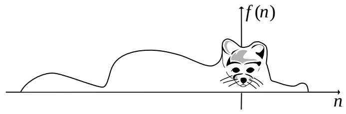
Voimme siis olettaa, ettei jono x_n eikä edes sen mikään osajono pysy ytimen $\operatorname{Ker} S$, tuntumassa, vaan $\lim_n d(x_n, \operatorname{Ker} S) = \infty$. Merkitään $z_n = \frac{x_n}{d(x_n, \operatorname{Ker} S)}$, jolloin $d(z_n, \operatorname{Ker} S) = 1$ ja voidaan valita pisteet $y_n \in \operatorname{Ker} S$ siten, että $\|z_n - y_n\| \leq 2$. Osoitamme, että näin ei voi käydä, vaan jonolla $s_n = z_n - y_n$ on ristiriitaisia ominaisuuksia. Ainakin $d(s_n, \operatorname{Ker} S) = 1$ ja selvästi jono s_n on rajoitettu, joten operaattorin T kompaktiuden nojalla voimme siirtyä osajonoon, jolla $Ts_n \to a \in E$. Toisaalta $Ss_n = S(z_n - y_n) = Sz_n = \frac{Sx_n}{d(x_n, \operatorname{Ker} S)} \to 0$, koska $Sx_n \to y$ ja $d(x_n, \operatorname{Ker} S) \to \infty$. Mutta $T + S = I$, joten $s_n = Ts_n + Ss_n \to a$. Tästä seuraa että $Sa = \lim_n Ss_n = 0$, mikä on mahdotonta, sillä $d(a, \operatorname{Ker} S) = \lim_n d(s_n, \operatorname{Ker} S) = \lim_n 1 = 1$. Viimeksi tutkittu tapaus ei siis esiinny.

(3) Jos olisi $\operatorname{codim} S(E) = \infty$, niin voitaisiin valita vektorit $a_n \in E$ siten, että aina

$$a_{m+1} \notin V_m = \langle S(E) \cup \{a_1, \dots, a_m\}\rangle$$

Kohdan (2) mukaan $S(E)$ ja siis myös V_m olisi suljettu. Lemman 28.12 mukaan olisi olemassa pisteet $b_n \in V_n \setminus V_{n-1}$, joilla $\|b_n\| \leq 1$ ja $\|Tb_n - Tb_j\| \geq \frac{1}{2}$ kaikilla $j \leq n-1$. Näin jono $(Tb_n)_{n\in N}$ olisi kasautumispisteetön, mikä on mahdotonta, kun T on kompakti operaattori.

(4) Homeomorfisuus todistetaan näillä oletuksin näyttämällä, että jokaisen suljetun joukon $A \subset E$ kuva $S(A) \subset E$ on suljettu. Tämä todistetaan kuten kohta (2), mutta korvaten E:n joukolla A ja $\operatorname{Ker} S$:n joukolla $\{0\}$. □



Seuraus 28.14. *Jos T on kompakti operaattori ja $S = I - T$, niin S on injektio aina ja vain ollessaan kääntyvä. T:n nollasta eroavat (!) spektraaliarvot ovat siis ominaisarvoja.*

Esimerkin 28.8. operaattori osoittaa, että nolla voi olla kompaktin operaattorin spektraaliarvo olematta ominaisarvo.

Lause 28.15 (jatkoa 28.13:lle). *Olkoot vieläkin $T : E \to E$ kompakti ja $S = I - T$. Merkitään lisäksi kuvauksen $S = I - T$* iteroituja kuvajoukkoja *:*

$$\begin{aligned} E_0 &:= E, \\ E_1 &:= S(E_0) = \operatorname{Im} S, \\ E_2 &:= S(E_1) = S^2(E), \\ &\dots \end{aligned}$$

ja toiselta puolen S:n iteroituja ytimiä

$$\begin{aligned} N_0 &:= \{0\}, \\ N_1 &:= S^{-1}\{0\} = \operatorname{Ker} S, \\ N_2 &:= S^{-1}(N_1) = \operatorname{Ker} S^2 \\ &\dots \end{aligned}$$

Tällöin

(5) $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *on nouseva jono äärellisulotteisia suljettuja aliavaruuksia.*
(6) $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *on laskeva jono kodimensioltaan äärellisiä suljettuja aliavaruuksia.*
(7) *Jono (N_k) päättyy. On siis olemassa luku $n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid N_{k+1} = N_k\}$, jolloin $N_{k+1} = N_k \quad \forall k \geq n$.*
(8) *Jono (E_k) päättyy. On siis olemassa $m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid E_{k+1} = E_k\}$, jolloin $E_{k+1} = E_k \quad \forall k \geq m$.*
(9) $m \leq n$.
(10) $E = E_n \oplus N_n$ *topologisena suorana summana.*
(11) *Rajoittuma $S\big|_{E_n} : E_n \to E_n$ on homeomorfismi.*
(12) *Erityisesti, jos S on injektio, niin S on kääntyvä ja siis $1 \notin \operatorname{Sp} T$. Luku 1 kuuluu siis spektriin $\operatorname{Sp} T$ ainoastaan, jos 1 on ominaisarvo.*

Todistus. (5) ja (6) Määritelmän mukaan $S = I - T$ ja $S^n = S \circ \cdots \circ S$, joten yleensä ei tietenkään ole $S^n = I - T^n$, mutta kuitenkin $S^n = I - T_n$ joillekin kompakteille operaattorille T_n. Tämä on helppo tarkistaa induktiolla: $S^{n+1} = (I - T_n) \circ (I - T) = I - T_n - T + T_n \circ T$. Väitteet seuraavat siis lauseesta 28.13.

(7) Määritelmän mukaan $N_0 = \{0\}$ ja $N_{k+1} = S^{-1}(N_k)$, jolloin erityisesti kaikilla k pätevät inkluusiot $S(N_{k+1}) \subset N_k$ ja $N_{k+1} \supset N_k$. Antiteesi: kaikilla k on lisäksi $N_{k+1} \neq N_k$. Tällöin voidaan lemman 28.12 mukaan valita ykkösen pituiset vektorit $x_{k+1} \in N_{k+1} \smallsetminus N_k$, joilla lisäksi pätee $\|Sx_n - Sx_j\| \geq \frac{1}{2}$ kaikille $j < k$, mikä on vastoin S:n kompaktiutta.

(8) Käytämme taas lemmaa 28.12: Koska $S(E_k) \subset E_{k+1}$, seuraisi vastaoletuksesta $E_{k+1} \subsetneq E_k \ \forall k$, että olisi jono yksikkövektoreita $x_k \in E_k \smallsetminus E_{k+1}$, joilla $\|Sx_n - Sx_j\| \geq \frac{1}{2}$ kaikille $j < k$ vastoin S:n kompaktiutta.

(9) ja (10) Osoitetaan ensin, että $N_n \cap E_n = \{0\}$. Olkoon $y \in N_n \cap E_n$. Silloin $y = S^n(x)$ jollekin $x \in E$ ja toisaalta $S^n y = 0$, joten $x \in \operatorname{Ker} S^{2n} = S^n = \operatorname{Ker} S^n$, jolloin $y = S^n x = 0$.

Näytetään seuraavaksi, että $m \leq n$. Väite merkitsee samaa kuin $E_n = E_{n+1}$ ja samaa kuin $E_n = E_m$. Antiteesi tarkoittaa siis seuraavia asioita: $n \leq m - 1$, $E_n \supsetneqq E_{n+1}$ ja $E_n \supsetneqq E_m$. Luvun m määritelmän mukaan $E_{m-1} \supsetneqq E_m = E_{m+1}$. Tässä tilanteessa olisi olemassa $z \in E_{m-1} \setminus E_m \subset E_n \setminus E_m$, jolloin $Sz \in S(E_{m-1}) = E_m = E_{m+1} = S(E_m)$, eli $s(z) = s(t)$ jollekin $t \in E_m \subset E_n$. Tällöin $z - t \in \operatorname{Ker} S = N_1 \subset N_n$ ja $z - t \in E_n$, joten $z - t \in N_n \cap E_n = \{0\}$, eli $z = t$. Tämä on mahdotonta, sillä $z \notin E_m$, mutta $t \in E_m$.

Pitää vielä näyttää, että $E = E_n \oplus N_n$ topologisena suorana summana. Olkoon $x \in E$. Ainakin $S^n x \in E_n = E_m = E_{m+1} = S(E_m) = S(E_n)$, joten $S^n x = S^n y$ jollekin $y \in E_n$. Koska nyt $x - y \in N_n$, niin $x \in E_n \oplus N_n$, joka on suora summa, koska $N_n \cap E_n = \{0\}$. Summa on topologinen, eli luonnollinen projektio $p_2 : E_n \oplus N_n \to N_n$ on jatkuva, koska E_n on suljettu ja N_n äärellisulotteinen. (Harjoitustehtävä; ilmiö johtuu siitä, että projektiokuvauksen koordinaatit ovat lineaarimuotoja, joilla on suljettu ydin, siis jatkuvia.)

(11) Rajoittuma $S \big|_{E_n}$ on surjektio ja sen ydin on $E_n \cap N_1 \subset E_n \cap N_n = \{0\}$, joten S on bijektio. Avaruus E_n on suljettu, siis Banachin avaruus, ja S jatkuva, joten avoimen kuvauksen lauseen nojalla $S \big|_{E_n}$ on homeomorfismi $E_n \to E_n$.

(12) Erityisesti, jos S on injektio, niin $N_1 = \operatorname{Ker} S = \{0\}$, ja $n = 0$, joten $E = E_1 \oplus \{0\}$ ja siis $E_1 = E$. Väite seuraa nyt kohdasta (11). □

Lauseen 28.11 todistus.

(5) Olkoon $\lambda \neq 0$. Sovelletaan lausetta 28.15. (12) operaattoriin $\frac{T}{\lambda}$ huomaten, että $T - \lambda I = \lambda \left(\frac{T}{\lambda} - I\right)$. Kohta (5) on todistettu.

(1) ja (2) Jos λ on nollasta eroava ominaisarvo, niin hajotelman $E = E(\lambda) \oplus N(\lambda)$ olemassaolo ja ominaisuudet saadaan jälleen soveltamalla lauseen 28.15 ao. kohtia operaattoriin $\frac{T}{\lambda}$. Samalla huomataan, että ominaisavaruus E_λ on operaattorille $\frac{T}{\lambda}$ avaruus $N_1 \subset N_n = N(\lambda)$.

(3) On osoitettava hajotelman $E = E(\lambda) \oplus N(\lambda)$ yksikäsitteisyys. Olkoon $E = E^* \oplus N^*$ toinen hajotelma, jolla on ominaisuudet i) – iv). Merkitään $S = T - \lambda I$.

Jokainen $x \in E$, erityisesti jokainen $x \in N^*$ on muotoa $x = y + z$, missä $y \in E(\lambda)$, $z \in N(\lambda)$. Koska hajotelmalla $E = E^* \oplus N^*$ on ominaisuus iv), on olemassa luku $h > n$, jolla $S^h x = 0$, jolloin myös $S^h y = 0$, koska $z \in N(\lambda) \implies S^h z = 0$. Koska rajoittuma $S^h \big|_{E(\lambda}$ on homeomorfismi $E(\lambda) \to E(\lambda)$, niin $y = 0$ eli $x \in N(\lambda)$. Siis $N^* \subset N(\lambda)$. Koska väite ja oletus ovat symmetriset, on siis $N^* = N(\lambda)$.

Osoitetaan vielä, että $E^* = E(\lambda)$. Olkoon nyt $x \in E^*$ hajotettuna muotoon $x = y + z$, missä $y \in E(\lambda)$, $z \in N(\lambda)$. Koska $S^n(z) = 0$, on $S^n x = S^n y = S(S^{n-1} y) \in S(E(\lambda))$. Siis $S^n(E^*) \subset S(E(\lambda))$. Oletuksen iii) nojalla S on surjektio $E^* \to E^*$, joten $E^* \subset S(E(\lambda))$. Toisensuuntainen inkluusio osoitetaan samalla tavalla.

(4) Todistetaan, että kompaktin operaattorin spektri on joko äärellinen tai nollaan suppeneva jono. Merkitään rajoittumia $T \big|_{E(\lambda)} = T_1$ ja $T \big|_{N(\lambda)} = T_2$.

Koska $N(\lambda)$ on äärellisulotteinen ja $(T_2 - \lambda I)^n = 0$, eli kuvaus $T_2 - \lambda I$ on *idempotentti lineaarikuvaus*, niin lineaarialgebran mukaan on olemassa $N(\lambda)$:n kanta, jossa matriisi $\operatorname{Mat}(T_2 - \lambda I)^n$ on alakolmiomatriisi, jonka diagonaalilla on pelkkiä nollia. Tässä kannassa jokaista kuvausta $T_2 - \zeta I$, missä $\zeta \in \mathbb{C}$, esittää muuten sama matriisi, mutta diagonalilla on luvut $\lambda - \zeta$, joten determinantista näkee, että $T_2 - \zeta I$ on kääntyvä tasan silloin, kun $\zeta \neq \lambda$.

Todistetaan seuraavaksi, että puolestaan $T_1 - \zeta I$ on kääntyvä, kunhan $|\zeta - \lambda|$ on tarpeeksi pieni, mutta ei nolla. Merkitään $S_1 = T_1 - \lambda I$.

$$T_1 - \zeta I = S_1 + (\lambda - \zeta)I.$$

Tiedämme jo kohdasta (1) iii), että S_1 on kääntyvä, erityisesti sen käänteiskuvaus on jatkuva lineaarikuvaus, joten kaikilla $x \in E(\lambda)$ on

$$\|S_1 x\| \geq c\|x\|,$$

missä $c = \|S_1^{-1}\|^{-1}$. Jos nyt $\zeta \neq 0$ ja $T_1 - \zeta I$ on kääntymätön, niin ζ on kompaktin (!) operaattorin $T_1 : E_1 \to E_1$ nollasta eroava spektraaliarvo, siis jo todistetun kohdan (5) mukaan ominaisarvo. Toisin sanoen on olemassa vastaava ominaisvektori $x \in E_1$, jolla siis $T_1 x = \zeta x$, jolloin edellisen arvion mukaan

$$|\zeta - \lambda| \cdot \|x\| = \|S_1 x\| \geq c\|x\|$$

Tämähän on mahdotonta, jos $|\zeta - \lambda| < c$, sillä ominaisvektorit ovat nollasta eroavia.

Kaiken kaikkiaan koko $T - \zeta I$ on kääntyvä, kunhan $\zeta \neq 0$, $\zeta \neq \lambda$ ja $|\zeta - \lambda| < c$. Ominaisarvon $\lambda \neq 0$ ympäristössä ei siis ole muita spektraaliarvoja. Spektri on siis numeroituva. Tiedämme luvusta 25.5, että spektri on kompakti[138], joten se on joko äärellinen tai sen ainoa kasaantumispiste on 0, jolloin se voidaan järjestää nollaan suppenevaksi jonoksi.

(6) Jos E on ääretönulotteinen, niin kompakti operaattori $T : E \to E$ ei voi olla kääntyvä, joten 0 on sen spektraaliarvo.

(7) Olkoon $\mu \in \operatorname{Sp} T$ luvuista λ ja 0 eroava. Lausutaan tutkittava vektori $x \in N(\mu)$ muodossa $x = y + z$, missä $y \in E(\lambda)$ ja $z \in N(\lambda)$. Totesimme edellä kohdan (4) todistuksessa alakolmiomatriisin determinantin avulla, että kun $\mu \neq \lambda$, niin operaattorin $S = T - \mu I$ rajoittuma $R = (T - \mu I)\,\big|_{N(\lambda)}$ on homeomorfismi $N(\lambda) \to N(\lambda)$, erityisesti siis $S^n z \in N(\lambda)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $(T - \lambda I)(F(\lambda)) \subset F(\lambda)$, niin myös $S = T - \lambda I + (\mu - \lambda)I$ on kuvaus $F(\lambda) \to F(\lambda)$, ja siis $S^n y \in F(\lambda)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Toisaalta $S^h x = 0$ jollakin $h \in \mathbb{N}$, koska $x \in N(\mu)$. Siis $0 = S^h x = S^h y + S^h z$, missä $S^h y \in F(\lambda)$ ja $S^h z \in N(\lambda)$. Koska $E = F(\lambda) \oplus N(\lambda)$, on siis $S^h y = S^h z = 0$. Jälkimmäisestä seuraa väitteemme $z = 0$, koska S:n rajoittuma on homeomorfismi $N(\lambda) \to N(\lambda)$. $\square$

Huomautus 28.16. Jos normiavaruus E on täydellinen, siis Banachin avaruus, niin lauseen 28.11 tilanteessa kuvaus $\zeta \mapsto (T - \zeta I)^{-1}$ on tietenkin analyyttinen eli holomorfinen joukossa $\mathbb{C} \setminus \operatorname{Sp} T$. Sillä on napa jokaisen nollasta eroavan ominaisarvon λ kohdalla ja että navan kertaluku on lauseessa esiintyvä ominaisarvon kertaluku $n = n(\lambda)$. Avaruuden $N(\lambda)$ dimensio on nimeltään operaattorin T *ominaisarvon* λ *geometrinen kertaluku* ja avaruuden $E(\lambda)$ kodimensio on operaattorin T *ominaisarvon* λ *algebrallinen kertaluku.* Nämä ovat samat ainoastaan, kun $n(\lambda) = 1$, Banach-tapauksessa siis, kun napa on yksinkertainen.

[138]Tässä tilantessa suora todistuskin olisi jo helppo. HT.

Normiavaruuden kompaktilla operaattorilla ja sen jatkolla täydentymän kompaktiksi operaattoriksi on sama spektri ja nollasta eroavilla ominaisarvoilla samat kertaluvut ja avaruudet $N(\lambda)$ ja $E(\lambda)$.

Perustelu. Sivuutamme todistuksen, vaikka se ei ole kovin vaikea. Ks. esim. [Di] tai [W].

28.4. Hermiittisen kompaktin operaattorin diagonalisointi. Banachin avaruuden kompakti operaattori on edellä sanotun mukaan ominaisuuksiltaan jossakin määrin äärellisulotteisen kaltainen. Palaamme alkuperäiseen ongelmaamme — diagonalisoimaan Hilbert-avaruuden kompaktia operaattoria.

Kompaktin operaattorin spektraalihajotelma on hermiittisessä tapauksessa odotetun kaltainen:

Lause 28.17. (Hermiittisen, kompaktin operaattorin spektraaliesitys). *Olkoon T kompakti, hermiittinen, ääretönulotteinen. Silloin T:n spektri muodostuu luvusta nolla ja sen lisäksi nollaan suppenevasta jonosta reaalisia ominaisarvoja $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots)$. Niihin liittyy sellainen ortonormaali jono ominaisvektoreita $(x_1, x_2, x_3, \dots)$, että T:llä on kehitelmä*

$$Tx = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (x \,|\, x_k) x_k = \sum_{k=1}^{\infty} (Tx \,|\, x_k) x_k.$$

Täydentämällä tämä ominaisvektorijono koko avaruuden ortonormaaliksi kannaksi saadaan siis T diagonalisoiduksi.

Seuraus 28.18. *Olkoon T kompakti ja hermiittinen, mutta ei identtisesti* 0. *Silloin sillä on sellainen ominaisarvo λ, että $|\lambda| = \|T\|$, ja on olemassa vastaava ominaisvektori $x \in H$, jolle*

$$\|x\| = 1 \text{ ja}$$
$$|(Tx \,|\, x)| = \|T\|.$$

Perustelu. Yhdistele lauseet 27.2. ja 28.17. □

Luvussa X kerrotaan, miltä hermiittinen operaattori näyttää ilman kompaktisuusoletusta.

Harjoitustehtäviä ja huomautuksia lukuun IX

Harjoitustehtäviä lukuun IX.

28.1 Verifioi kohta 28.5:

(1) Kahden kompaktin operaattorin summa on kompakti.
(2) Kompaktin operaattorin monikerta on kompakti.
(3) Jos toinen operaattoreista T ja S on kompakti, niin $T \circ S$ on kompakti.
(4) Kompaktien operaattorien joukko $\mathcal{K}(E, F) \subset \mathcal{B}(E, F)$ on suljettu.
(5) Äärellisasteiset operaattorit ovat kompakteja.
(6) Kompaktin operaattorin rajoittuma suljettuun aliavaruuteen on kompakti operaattori $F \to \overline{T(F)}$.

28.2 Verifioi kohta 28.9 osoittamalla, että jatkuvaan saymmetriseen integraaliytimeen
$K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ liittyvä integraalioperaattori $T_K : L^2[0,1] \to L^2[0,1] : T_K f(x) = \int_0^1 K(x,t) f(t)\, dt$ on hermiittinen.

28.3 Todista lauseen 28.15 kohta (10).

28.4 Perustele huomautus 28.16 etsimällä kirjallisuudesta lisätietoja.

Huomautuksia lukuun IX.

Täysjatkuvat operaattorit. Kompakti operaattori T kuvaa jokaisen heikosti suppenevan jonon $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ normin mielessä suppenevaksi jonoksi. Syy tähän on se, että heikosti suppeneva jono on heikosti rajoitettu eli lauseen 22.15 mukaan normin mielessä rajoitettu. Jos E on Hilbertin avaruus tai muuten vain refleksiivinen, niin Alaoglun lauseen avulla voi todeta, että tämä on myös riittävää kompaktisuudelle. Kompaktien operaattorien teoria yleistyy kuitenkin helposti Banach-, jopa lokaalikonvekseihin avaruuksiin yleensä. Tällöin em. ehto ei ole riittävä, vaan joudutaan tekemään ero kompaktien ja em. ehdon toteuttavien, eli *täysjatkuvien* operaattorien välillä.

Rieszin teorian yleistys. Rieszin teoria pätee lähes sellaisenaan lokaalikonveksin topologisen vektoriavaruuden kompaktille operaattorille T.

Hyvä lukija. Kirjoita tekijälle parannusehdotuksia lukuun IX.

X SPEKTRAALI-INTEGRAALIT

29. Hermiittisen operaattorin spektraaliesitys

29.1. Päätuloksen esittely.

Oletamme, että $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Seuraavassa diagonalisoidaan mielivaltainen hermiittinen operaattori $A \in \mathcal{B}(H)$. Äärellisulotteisesta ja kompaktistakin tapauksesta tunnetun summamuotoisen esityksen tilalle tulee integraalimuotoinen esitys.

Ennen yksityiskohtaisia konstruktioita ja todistuksia esitämme päätulokset ja joitakin erikoistapauksia:

MÄÄRITELMÄ 29.1. *Spektraaliparvi* eli *ykkösoperaattorin hajotelma* $\mathbf{E}$ on kuvaus, joka liittää jokaiseen väliin $]-\infty, \lambda[\subset \mathbb{R}$ tai yhtälailla jokaiseen lukuun $\lambda \in \mathbb{R}$ ortoprojektion $\mathbf{E}(]-\infty, \lambda[) = \mathbf{E}_\lambda$ siten, että

(1) $\mathbf{E}$ on *kasvava*: $\lambda < \mu \implies \mathbf{E}_\lambda \leq \mathbf{E}_\mu$.
(2) $\mathbf{E}$ on *vasemmalta vahvasti*[139] eli pisteittäin jatkuva: kaikilla $x \in H$ pätee $\lambda \to \mu- \implies \mathbf{E}_\lambda x \to \mathbf{E}_\mu x$.
(3) $\mathbf{E}$:n *kasvu tapahtuu kompaktissa joukossa*[140]: On olemassa m, $M \in \mathbb{R}$ siten, että $\mathbf{E}_m = 0$ ja $\mathbf{E}_M = I$.

Spektraaliparven kasvavuus merkitsee, että kun $\lambda < \mu$, niin pätevät seuraavat keskenään yhtäpitävät asiat:

i) $\mathbf{E}_\lambda \leq \mathbf{E}_\mu$,
ii) $\forall x \in H: \ (\mathbf{E}_\lambda x|x) \leq (\mathbf{E}_\mu x|x)$.
iii) $\mathbf{E}_\lambda \mathbf{E}_\mu = \mathbf{E}_\lambda$.
iv) $\mathbf{E}_\mu \mathbf{E}_\lambda = \mathbf{E}_\lambda$.
v) $\operatorname{Im}(\mathbf{E}_\lambda) \subset \operatorname{Im}(\mathbf{E}_\mu)$.
vi) $\operatorname{Ker}(\mathbf{E}_\mu) \subset \operatorname{Ker}(\mathbf{E}_\lambda)$.
vii) $\|\mathbf{E}_\lambda x\| \leq \|\mathbf{E}_\mu x\| \quad \forall x \in H$
viii) $\mathbf{E}_\lambda - \mathbf{E}_\mu$ on ortoprojektio.

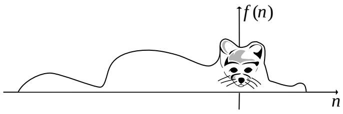
ESIMERKKI 29.2. Kuvaus $\lambda \mapsto \mathbf{E}_\lambda$, missä $\mathbf{E}_\lambda \in \mathcal{B}(L^2[0,1]) : f \mapsto \chi_{[0,\lambda]} f$, on spektraaliparvi.

Määrittelemme seuraavassa jatkuvan funktion integraalin spektraaliparven suhteen. Samalla tulee määritellyksi operaattoriarvoinen mitta.

---

[139]Vahva konvergenssi on vahvempi kuin heikko mutta heikompi kuin normikonvergenssi.

[140]Määritelmä vaihtelee hieman eri yhteyksissä. Toisinaan hyväksytään parvia, joilla kompaktiusehdon tilalla on vain $\pm\infty$:ssä raja-arvot 0 ja I.



Menettelymme on analoginen *Riemann-Stieltjes-integraalin*[141] muodostamiselle eli sille tavalle, jolla todennäköisyyslaskennassa on tapana rakentaa reaaliakselille todennäköisyysmitta, kun tiedossa on siihen liittyvä kertymäfunktio.

MÄÄRITELMÄ 29.3. Olkoon $f : [m, M] \to \mathbb{C}$ funktio ja $\mathbf{E} : \mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$ spektraaliparvi. Integraali

$$S = \int_m^{M_+} f(\lambda)\, d\mathbf{E}_\lambda$$

määritellään seuraavien vaiheiden kautta:

(1) Laajennetaan f joukkoon $[m, \infty[$ asettamalla $f(x) = f(M)$, kun $x > M$.

(2) Määritellään rajoitetulle osavälille $[\alpha, \beta[\subset [m, \infty[$ mitta asettamalla

$$\mathbf{E}([\alpha, \beta[) = \mathbf{E}(]-\infty, \beta[) - \mathbf{E}(]-\infty, \alpha[) = \mathbf{E}_\beta - \mathbf{E}_\alpha.$$

$\mathbf{E}([\alpha, \beta[)$ on ortoprojektio. Erilliset välit antavat ortogonaaliset kuvajoukot.

(3) Määritellään välin $[m, M + \varepsilon[$ jakoon

$$\mathrm{J}: \; m = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = M + \varepsilon$$

ja pisteisiin $\xi_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k[$ liittyvä ”Riemannin ja Stieltjesin summa”

$$S_J = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\mathbf{E}([\lambda_{k-1}, \lambda_k[).$$

(4) Sanotaan, että f on *integroituva* spektraaliparven $\mathbf{E}$ suhteen, ja operaattori $S = \int_m^{M_+} f(\lambda)\, d\mathbf{E}_\lambda$ on sen *integraali*, mikäli jakoa tihennettäessä $S_J \to S$ positiiviluvun ε ja pisteiden ξ_k valinnasta riippumatta, eli kun kaikilla $\eta > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$\left\| S - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\mathbf{E}([\lambda_{k-1}, \lambda_k[) \right\| \le \eta$$

positiiviluvun ε ja pisteiden ξ_k valinnasta riippumatta, kunhan jaon J: $m = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = M + \varepsilon$ jokainen osaväli on pituudeltaan enintään δ.

HUOMAUTUS 29.4.

(1) Jos f on integroituva, niin jakoa tihennettäessä

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big((x|\mathbf{E}_{\lambda_k} y) - (x|\mathbf{E}_{\lambda_{k-1}} y)\big) \to (x|Sy)$$

kaikilla $x \in H$.

(2) Jos f on reaaliarvoinen, niin integraali S on hermiittinen operaattori.

(3) Pian todistetaan, että jokainen jatkuva f on integroituva.

---

[141] [A].

Esimerkki 29.5. a) Äärellisulotteisen avaruuden diagonaalisen operaattorin voi lausua funktion $f(x) = x$ integraalina sopivan spektraaliparven suhteen. Esimerkiksi matriisia

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

vastaava operaattori on

$$A = \int_m^{M_+} \lambda \, d\mathbf{E}_\lambda,$$

missä

$$\mathbf{E}_\lambda x = \begin{cases} 0, \text{ kun } \lambda \leq 2 \\ (x|e_1)e_1 = (x_1, 0, 0), \text{ kun } 2 < \lambda \leq 3 \\ (x|e_1)e_1 + (x|e_2)e_2 = (x_1, x_2, 0), \text{ kun } 3 < \lambda \leq 4 \\ \sum_{j=1}^3 (x|e_j)e_j = x, \text{ kun } 4 < \lambda \end{cases}$$

Se, että integraalin voi myös ilmaista tavalliseen tapaan summana

$$A = \sum_{j=1}^{3} (\cdot|e_j)e_j,$$

liittyy siihen, että tällä operaattorilla ei ole muita spektraaliarvoja kuin kolme ominaisarvoaan.

b) Ääretönulotteisessa tapauksessa spektraaliarvoja voi toisaalta olla vaikka kokonainen väli, eikä niiden tarvitse olla ominaisarvoja. Spektri on kuitenkin kompakti ja hermiittisen operaattorin spektraaliarvot ovat kaikki reaalisia. Esimerkin 29.2 spektraaliparvi käy näytteeksi tästä. Operaattorin

$$T : L^2[0,1] \to L^2[0,1] : Tf(x) = xf(x)$$

voi lausua integraalina

$$T = \int_0^{1_+} \lambda \, d\mathbf{E}_\lambda,$$

missä

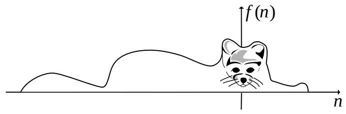
$$E_\lambda(f) = T_\lambda(f) = f\chi_{[0,\lambda]}.$$

Tämän luvun päälause sanoo, että mikä tahansa hermiittinen operaattori ”diagonalisoituu” integraalimielessä.

Lause 29.6. *Olkoon $A \in \mathcal{B}(H)$ hermiittinen operaattori. Silloin on olemassa spektraaliparvi $\mathbf{E}$, jolla on seuraavat ominaisuudet:*

(1) *m ja M ovat operaattorin A ala- ja yläraja, eli joukon $\{(x|Ax) \mid x \in H\}$ infimum ja supremum.*

(2)
$$A = \int_m^{M_+} \lambda \, d\mathbf{E}_\lambda.$$



A:n spektraaliparvelta voidaan lisäksi vaatia ominaisuudet, jotka samalla tekevät siitä yksikäsitteisen.

(3) $\mathbf{E}_\lambda$ *kommutoi jokaisen sellaisen operaattorin kanssa, joka kommutoi A:n kanssa: Jos* $B \in \mathcal{B}(H)$ *ja* $AB = BA$, *niin* $\mathbf{E}_\lambda B = B\mathbf{E}_\lambda$.

(4) *Kaikilla* $\mu \in \mathbb{R}$ *ja* $x \in H$ *on olemassa oikeanpuoleinen raja-arvo*

$$\lim_{\lambda \to \mu+} \mathbf{E}_\lambda x.$$

PERUSTELU. Todistamme tämän väitteen vaiheittain.

LAUSE 29.7. *a) Integraali* $\int_m^{M_+} f(\lambda)\, d\mathbf{E}_\lambda$ *on luonnollisesti lineaarinen integroitavan funktion suhteen:*

$$\int_m^{M_+} \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(\lambda)\, d\mathbf{E}_\lambda = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_m^{M_+} f_k(\lambda)\, d\mathbf{E}_\lambda.$$

b) Jos $A = \int_m^{M_+} \lambda\, d\mathbf{E}_\lambda$, *niin*

$$A^2 = \int_m^{M_+} \lambda^2\, d\mathbf{E}_\lambda.$$

c) Yleisemminkin kaikille polynomeille f *pätee*

$$f(A) = \int_m^{M_+} f(\lambda)\, d\mathbf{E}_\lambda.$$

PERUSTELU. Lineaarisuus on ilmeinen asia. Todistamme väitteen b) ja uskomme, että c) voidaan todistaa samaan tyyliin. Olkoon $1 > \delta > 0$. Valitaan niin tiheä jako, että siitä alkaen

$$\Big\| A - \sum_{k=1}^n \xi_k \mathbf{E}([\lambda_{k-1}, \lambda_k[) \Big\| \le \delta,$$

jolloin tietysti

$$\Big\| \Big(A - \sum_{k=1}^n \xi_k \mathbf{E}([\lambda_{k-1}, \lambda_k[) \Big)^2 \Big\| \le \delta^2,$$

ts.

$$\Big\| -A^2 + \big(2A^2 - 2A \sum_{k=1}^n \xi_k \mathbf{E}([\lambda_{k-1}, \lambda_k[)\big) + \Big(\sum_{k=1}^n \xi_k \mathbf{E}([\lambda_{k-1}, \lambda_k[) \Big)^2 \Big\| \le \delta^2$$

eli

$$\Big\| \underbrace{2A\big(A - \sum_{k=1}^n \xi_k \mathbf{E}([\lambda_{k-1}, \lambda_k[)\big)}_{\|-''-\| \le 2\|A\|\delta} + \Big(\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k \mathbf{E}([\lambda_{k-1}, \lambda_k[) \Big)^2 - A^2 \Big) \Big\| \le \delta^2$$

Koska operattorit $\mathbf{E}([\lambda_{k-1},\lambda_k[)$ ovat ortoprojektioita ortogonaalisille aliavaruuksille, ja siis $\mathbf{E}([\lambda_{k-1},\lambda_k[)\mathbf{E}([\lambda_{l-1},\lambda_l[)=\delta_{kl}\mathbf{E}([\lambda_{k-1},\lambda_k[)$, niin

$$\Big(\sum_{k=1}^n \xi_k\mathbf{E}([\lambda_{k-1},\lambda_k[)\Big)^2=\sum_{k=1}^n \xi_k^2\mathbf{E}([\lambda_{k-1},\lambda_k[).$$

Näistä havainnoista ensimmäinen väite seuraakin, ja korkeammille potensseille tuloksen antaa sama päättely ja induktio.

29.2. Jatkuvan funktion integroituvuus spektraaliparven suhteen.

Lause 29.8. *Olkoon $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jatkuva, $f(x)=f(m)$ kaikilla $x<m$ ja $f(x)=f(M)$ kaikilla $x>M$. Tällöin f on integroituva välillä $[m,M]$ kasvavan spektraaliparven $\mathbf{E}_\lambda$ suhteen.*

Todistus. Palautamme mieleen, että

(1) Spektraaliparvi $\mathbf{E}$ liittää jokaiseen $\lambda\in\mathbb{R}$ ortoprojektion $\mathbf{E}_\lambda$ siten, että $\mathbf{E}$ on kasvava ja vasemmalta pisteittäin jatkuva.
(2) $\mathbf{E}_m=0$ ja $\mathbf{E}_M=I$.
(3) On merkitty $\mathbf{E}([\alpha,\beta[)=\mathbf{E}_\beta-\mathbf{E}_\alpha$, jolloin kukin $\mathbf{E}([\alpha,\beta[)$ on ortoprojektio, ja erilliset välit antavat toisiaan vastaan ortogonaaliset projektiot.
(4) $S_J=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\mathbf{E}([\lambda_{k-1},\lambda_k[)$.

Väitämme, että jokainen jatkuva f on integroituva spektraaliparven $\mathbf{E}$ suhteen, eli että on olemassa $S\in\mathcal{B}(H)$ siten, että jakoa J tihennettäessä $S_J\to S$, jolloin erityisesti kaikilla $x\in H$

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x|\mathbf{E}([\lambda_{k-1},\lambda_k[)y)=(x|S_Jy)\to(x|Sy).$$

Päättely on aivan sama kuin todistettaessa jatkuvan reaalifunktion f Riemann-integroituvuutta yli kompaktin välin $[m,M+\varepsilon]$: Olkoon $\eta>0$. Koska f on jatkuva ja kompaktin välin $[m,M]$ ulkopuolella jatkettu vakioksi, niin $f$on tasaisesti jatkuva. Valitaan $\delta>0$ siten, että

$$|f(x)-f(y)|<\eta,$$

kunhan $|x-y|\le\delta$. Olkoot J_1 ja J_2 kaksi välin $[m,M+\varepsilon]$ jakoa, joilla kummallakin kaikki osavälit ovat lyhempiä kuin δ. Koska $\mathcal{B}(H)$ on täydellinen, niin riittää osoittaa, että vastaaville summille pätee

$$\|S_1-S_2\|\le\eta$$

välipisteiden ξ valinnasta riippumatta. Siirtymällä tarvittaessa tarkastelemaan yhdistelmäjakoa $J_1\cup J_2$ voimme olettaa, että $J_1\subset J_2$ ja numeroida jakopisteet

$$\begin{aligned} m=\lambda_0&<\lambda_{0,0}<\lambda_{0,1}<\cdots<\lambda_{0,n_0}\\ &=\lambda_1<\lambda_{1,0}<\lambda_{1,1}<\cdots<\lambda_{1,n_1}\\ &=\lambda_2<\lambda_{2,0}<\lambda_{2,1}<\cdots<\lambda_{2,n_2}\\ &\;\vdots\\ &=\lambda_n=M+\varepsilon.\end{aligned}$$

Summaan S_1 liittyvät välipisteet

$$\xi_k \in [\lambda_{k-1}, \lambda_k[$$

ja summaan S_2 liittyvät välipisteet

$$\xi_{k,j} \in [\lambda_{k-1,j-1}, \lambda_{k-1,j}[\subset [\lambda_{k-1}, \lambda_k[.$$

Koska jaon J_1 välit $[\lambda_{k-1}, \lambda_k[$ ovat lyhempiä kuin η, on jokainen

$$|\xi_k - \xi_{k,j}| \leq \eta.$$

Summat ovat

$$\begin{aligned} S_1 = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\mathbf{E}([\lambda_{k-1}, \lambda_k[) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \sum_{j=1}^{n_k} \mathbf{E}([\lambda_{k-1,j-1}, \lambda_{k-1,j}[) \\ \text{ja} \quad S_2 &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} f(\xi_{k_j})\mathbf{E}([\lambda_{k-1,j-1}, \lambda_{k-1,j}[), \end{aligned}$$

joten niiden erotus on

$$S_1 - S_2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \left(f(\xi_k) - f(\xi_{k_j})\right) \mathbf{E}([\lambda_{k-1,j-1}, \lambda_{k-1,j}[)$$

Koska projektiot $\mathbf{E}([\lambda_{k-1,j-1}, \lambda_{k-1,j}[)$ ovat ortogonaalisia, on siis kaikilla $x \in H$

$$\begin{aligned} \|(S_1 - S_2)x\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \left(f(\xi_k) - f(\xi_{k_j})\right) \mathbf{E}([\lambda_{k-1,j-1}, \lambda_{k-1,j}[)x \right\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \left|f(\xi_k) - f(\xi_{k_j})\right|^2 \| \mathbf{E}([\lambda_{k-1,j-1}, \lambda_{k-1,j}[)x\|^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \delta^2 \| \mathbf{E}([\lambda_{k-1,j-1}, \lambda_{k-1,j}[)x\|^2 \\ &= \delta^2 \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_k} \| \mathbf{E}([\lambda_{k-1,j-1}, \lambda_{k-1,j}[)x\|^2 \\ &\leq \delta^2 \|x\|^2. \end{aligned}$$

Siis $\|S_1 - S_2\| \leq \delta$ riippumatta luvusta ε ja jakopisteistä ξ_k. Jatkuva funktio on siis integroituva. $\square$