Kompaktissa joukossa jatkuva funktio K on rajoitettu, joten $M = \sup\{|K(s,t)| \mid (s,t) \in [0,1]^2\} < \infty$. Siksi jokaisella $Af \in \mathcal{H}$ ja $t \in [0,1]$ pätee

$$|Af(t)| \leq \int_0^1 |K(s,t)||f(s)|\,ds \leq M\|f\|_\infty \leq M.$$

Perhe $\mathcal{H}$ on siis pisteittäin rajoitettu.

Perheen $\mathcal{H}$ yhtäjatkuvuuden todistamiseksi valitaan luku $\varepsilon > 0$ ja käytetään tietoa, että kompaktissa joukossa jatkuva funktio K on tasaisesti jatkuva, ts. on olemassa $\delta > 0$, jolla $|K(s,t) - K(s_0,t_0)| < \varepsilon$, kunhan $|s - s_0| + |t - t_0| < \delta$. Siis

$$|Af(t) - Af(t_0)| \leq \int_0^1 |K(s,t) - K(s,t_0)||f(s)|\,ds \leq \varepsilon\|f\|_\infty \leq \varepsilon,$$

kun $|t - t_0| \leq \delta$ ja $f \in \overline{B}_{\mathcal{C}[0,1]}(0,1)$. $\square$

Edellä tarkastelemamme integraalioperaattori A on kompakti myös funktioiden standardisisätuloon liittyvässä metrikassa:

Seuraus 18.9. *Jos integraaliydin $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin integraalioperaattori*

$$A : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$$
$$Af(t) = \int_0^1 K(s,t)f(s)\,ds$$

on kompakti operaattori myös Hilbert-avaruuksien teorian mielessä, nimittäin silloin, kun kumpikin $\mathcal{C}[0,1]$ on varustettu L^2-normilla $\|\cdot\|_2$. Väite tarkoittaa, että normilla $\|\cdot\|_2$ varustetun avaruuden $\mathcal{C}[0,1]$ yksikköpallon $\overline{B}_{\mathcal{C},2}$ kuva

$$\mathcal{H} = A(\overline{B}_{\mathcal{C},2}) = \{Af \mid \|f\|_2 \leq 1\}.$$

on $\|\cdot\|_2$ -prekompakti joukko.

Perustelu. Merkitään lyhyesti $\mathcal{C}_\infty = (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ ja $\mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_2)$. Identtinen kuvaus $\mathcal{C}_\infty \to \mathcal{C}_2$ on tietysti jatkuva, onhan $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_\infty$. Riittää siis todistaa, että $A : \mathcal{C}_2 \to \mathcal{C}_\infty$ on kompakti operaattori, sillä lukija voi helposti todeta, että kompaktin ja jatkuvan operaattorin yhdistetty kuvaus on kompakti operaattori.

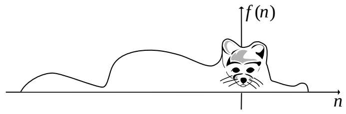
Koska $\mathcal{C}_\infty$ on täydellinen, voimme toisaalta käyttää tähän Ascolin lausetta samaan tapaan kuin edellä. Soveltamalla Cauchyn Schwarzin ja Bunjakowskin epäyhtälöä funktioon $f \in B_{\mathcal{C}_2}$ ja vakiofunktioon M saadaan nimittäin

$$|Af(t)| \leq \int_0^1 |K(s,t)||f(s)|\,ds \leq \int_0^1 M|f(s)|\,ds \leq \|M\|_2\|f\|_2 \leq M,$$

kun $f \in \overline{B}_{\mathcal{C}[0,1]}(0,1)$, eli $Af \in \mathcal{H}$. Samaan tapaan saadaan yhtäjatkuvuus:

$$|Af(t) - Af(t_0)| \leq \int_0^1 |K(s,t) - K(s,t_0)||f(s)|\,ds \leq \varepsilon\|f\|_2\sqrt{(1-0)} \leq \varepsilon,$$

kun $|t - t_0| \leq \delta$ ja $\|f\|_2 \leq 1$. $\square$



19. Bairen kategorialause

19.1. Bairen lause.

Määritelmä 19.1. Olkoon X topologinen, seuraavassa yleensä metrinen avaruus.

(1) Osajoukko $M \subset X$ on *tiheä* avaruudessa X, jos $\overline{M} = X$.
(2) Joukko $M \subset X$ on *harva*, eli *ei missään tiheä* avaruudessa X, jos sen sulkeuma on sisäpisteetön, eli jos sen sulkeuman komplementti $X \smallsetminus \overline{M}$ on tiheä: $\overline{X \smallsetminus \overline{M}} = X$. Erityisesti suljettu joukko on harva avaruudessa X tasan ollessaan sisäpisteetön.
(3) Joukko $M \subset X$ kuuluu avaruudessa X *Bairen ensimmäiseen kategoriaan,*[98] eli on *laiha*, jos se on yhdiste numeroituvan monesta avaruudessa X harvasta joukosta.
(4) Joukko $M \subset X$ kuuluu avaruudessa X *Bairen toiseen kategoriaan*, jos se ei kuulu ensimmäiseen.

Huomautus 19.2. Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on avaruuden $\mathbb{R}$ laiha eli ensimmäisen kategorian joukko, sillä $\mathbb{Q}$ on yhdiste numeroituvan monesta yksipisteisestä joukosta, jollainen varmasti on avaruudessa $\mathbb{R}$ harva.

Bairen kategorialauseesta, jonka seuraavassa todistamme, seuraa mm., että $\mathbb{R}$ itse on avaruudessa $\mathbb{R}$ toisen kategorian joukko. Itse asiassa mikään täydellinen metrinen avaruus, erityisesti mikään Banachin avaruus ei ole itsensä laiha osajoukko. Tällä helposti todistettavalla periaatteella on yllättävän suuri merkitys. Valmistelemme todistusta kirjoittamalla Georg Cantorin mukavan määritelmän täydellisyydelle.

Lemma 19.3 (Cantor). *Metrinen avaruus (X,d) on täydellinen aina ja vain, kun sillä on ns.* sisäkkäisten suljettujen joukkojen ominaisuus*: Jos sisäkkäiset epätyhjät joukot $X \supset S_1 \supset S_2 \supset \dots$ ovat suljettuja ja* $\operatorname{diam}(S_n) \to 0$*, niin silloin*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \neq \emptyset.$$

Tässä $\operatorname{diam}(S)$ *on joukon S halkaisija, so.*

$$\operatorname{diam}(S) = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in S\}.$$

Todistus. Olkoon aluksi X täydellinen ja suljetut joukot oletuksen mukaisia. Valitsemalla kullekin $n \in \mathbb{N}$ alkio $x_n \in S_n$ saadaan Cauchy-jono, jonka raja-arvo on joukkojen S_n leikkauksessa.

Olkoon sitten lauseen ehto voimassa. Todistetaan, että avaruuden X mielivaltainen Cauchy-jono (x_n) suppenee. Valitsemalla $S_n = \overline{\{x_m \mid m \geq n\}}$ saa Cantorin lemman ehdot voimaan ja huomaa, että leikkauksen alkio on jonon raja-arvo. $\square$

[98] Sanalla kategoria on muitakin merkityksiä, joskaan ei tässä yhteydessä. René-Louis Baire 1874–1932, Ranska.

Esimerkki 19.4. Halkaisijoita koskeva ehto on tarpeellinen, minkä huomaa täydellisessä avaruudessa $\mathbb{R}$ valitsemalla $S_n = [n, \infty)$.

Bairen kategorialause on helpointa todistaa komplementarisessa muodossa eli seuraavan lemman hahmossa.

Lemma 19.5. *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja A_n jono sen avoimia ja tiheitä osajoukkoja. Tällöin leikkaus*

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

on tiheä, erityisesti epätyhjä.

Todistus. Olkoon $B(x, r)$ X:n jokin avoin pallo. On osoitettava, että

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

Koska A_1 on tiheä ja $B(x, r)$ avoin, niin leikkaus $A_1 \cap B(x, r)$ on epätyhjä — sitä paitsi kahden avoimen joukon leikkauksena avoinkin. On siis olemassa pallo $B(x_1, r_1)$, jonka sulkeuma S_1 sisältyy joukkoon $A_1 \cap B(x, r)$. Koska myös A_2 on tiheä ja $B(x_1, r_1)$ avoin, niin leikkaus $A_1 \cap B(x_1, r_1)$ on epätyhjä — sitä paitsi kahden avoimen joukon leikkauksena avoinkin. On siis olemassa pallo $B(x_2, r_2)$, jonka sulkeuma S_2 sisältyy joukkoon $A_2 \cap B(x_1, r_1)$. Näin jatketaan. Saadaan jono sisäkkäisiä suljettuja palloja S_n. Mikään ei estä valitsemasta säteitä r_n siten, että $r_n \to 0$. Cantorin täydellisyyslemma 19.3. takaa nyt, että

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} S_n \neq \emptyset.$$

Tästä väite seuraa. □

Lause 19.6 (Bairen kategorialause). *Täydellinen metrinen avaruus X ei voi olla laiha, vaan on toista kategoriaa.*

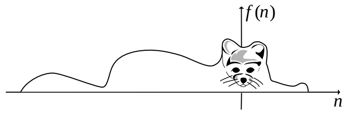
Todistus. Lause on toinen muoto lemmalle 19.5. Tehdään antiteesi: Olkoon X sittenkin laiha, eli numeroituva yhdiste harvoista joukoista

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{M_n}, \text{ ts.}$$
$$\emptyset = X \setminus X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus \overline{M_n}).$$

Joukot $X \setminus \overline{M_n}$ ovat avoimia ja tiheitä. Lemma sanoo, että niiden leikkaus on epätyhjä. Antiteesi on väärä. □

19.2. Tasaisen rajoituksen periaate.

Bairen kategorialauseeseen perustuva *tasaisen rajoituksen periaate* on eri muodoissaan väitteensä puolesta sukua Ascolin lauseelle, päätelläänhän tässäkin funktioperheen rajoittuneisuusominaisuuksia sen pisteittäisestä rajoittuneisuudesta ja sen jatkuvuusominaisuuksista. Esitämme periaatteesta sekä epälineaarisen että



lineaarikuvauksiin liittyvän version. Jälkimmäisestä johdetaan sittemmin mm. Banachin kuuluisa tulos, jonka mukaan Banachin avaruuksien välinen jatkuva lineaarinen bijektio on aina homeomorfismi. Sovelluksina saadaan tietoa jonoavaruuksien duaaleista. Myös myöhemmnin käsiteltävä lause, jonka mukaan normin mielessä rajoitetut ja heikosti rajoitetut joukot ovat samoja, perustuu osittain tasaisen rajoituksen periaatteeseen.

Lause 19.7 (Tasaisen rajoituksen periaate). *Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $\mathcal{H}$ joukko, usein jono, jatkuvia funktioita $X \to \mathbb{K}$. Oletamme, että $\mathcal{H}$ on pisteittäin rajoitettu, siis että kaikilla $x \in X$ on*

$$\sup_{f \in \mathcal{H}} |f(x)| = M_x < \infty.$$

Tällöin on olemassa pallo $B = B(x_0, r) \subset X$, jossa $\mathcal{H}$ on sup-metriikan mielessä rajoitettu joukko eli tasaisesti rajoitettu funktioperhe:

$$\sup_{f \in \mathcal{H}, x \in B} |f(x)| = \sup_{f \in \mathcal{H}} \|f\,\big|_B\|_\infty = M_B < \infty.$$

Todistus. Joukko

$$S_{f,n} = |f|^{-1}([0, n]) = \{x \in X \bigm| |f(x)| \le n\}$$

on kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $f \in \mathcal{H}$ funktion $|f|$ jatkuvuuden perusteella suljettu. Tällaisten joukkojen leikkaus

$$S_n = \bigcap_{f \in \mathcal{H}} S_{f,n} = \{x \in X \bigm| M_x \le n\}$$

on siis sekin suljettu kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $\mathcal{H}$ on pisteittäin rajoitettu, on

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n.$$

Bairen kategorialause takaa, että täydellinen metrinen avaruus X kuuluu Bairen toiseen kategoriaan, joten suljetut joukot S_n eivät voi kaikki olla harvoja, vaan jollakin joukolla S_n on sisäpiste:

$$\exists B = B(x_0, r) \subset S_n.$$

Nyt $M_B \le n < \infty$. $\square$

Tasaisen rajoituksen periaatteen lineaariversio tunnetaan myös *Banachin ja Steinhausin* yleisenä periaatteena ja sanoo, että Banachin avaruudessa määritelty pisteittäin rajoitettu perhe jatkuvia lineaarikuvauksia on yhtäjatkuva. Ennen lauseen muotoilua kokoamme yhteen muutamia ilmeisiä lineaarikuvausperheen yhtäjatkuvuuden kanssa yhtäpitäviä ehtoja.

HUOMAUTUS 19.8. *Olkoon $\mathcal{H}$ perhe normiavaruuksien E ja F välisiä lineaarikuvauksia. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:*

(1) *$\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva.*
(2) *$\mathcal{H}$ on rajoitettu operaattorinormin mielessä*

$$\sup_{T\in\mathcal{H}} \|T\| = M_{B(0,1)} < \infty.$$

(3) *$\mathcal{H}$ on tasaisesti rajoitettu avaruuden E yksikköpallossa $B(0,1)$*

$$\sup_{T\in\mathcal{H}, x\in B(0,1)} \|Tx\| = M_{B(0,1)} < \infty.$$

(4) *$\mathcal{H}$ on tasaisesti rajoitettu avaruuden E jossakin pallossa $B(x,r)$.*
(5) *$\mathcal{H}$ on tasaisesti rajoitettu avaruuden E jokaisessa pallossa $B(x,r)$.*

PERUSTELU. Ehdot (2) ja (3) ovat sama asia. Muilta osin lause todistetaan samalla tavalla kuin vastaava jatkuvia lineaarikuvauksia koskeva lause 5.1. □

LAUSE 19.9 (TASAISEN RAJOITUKSEN PERIAATTEEN LINEAARIVERSIO). *Olkoon E Banachin avaruus, G normiavaruus ja $\mathcal{H}$ pisteittäin rajoitettu joukko jatkuvia lineaarikuvauksia $E \to G$. Tällöin $\mathcal{H}$on yhtäjatkuva.*

TODISTUS. Perhe $\mathcal{H}$ on pisteittäin tai tasaisesti rajoitettu täsmälleen silloin, kun jatkuvien reaaliarvoisten funktioiden perhe $\{f : x \mapsto \|Tx\| \mid T \in \mathcal{H}\}$ on sitä. Voimme siis soveltaa tasaisen rajoituksen periaatetta 19.8. ja sen mukaan on olemassa jokin pallo $B = B(x,r) \subset E$, jossa $\mathcal{H}$ on tasaisesti rajoitettu. □

Klassinen Banachin ja Steinhausin lause sanoo, että jatkuvien lineaarikuvausten avaruus on suljettu jonojen pisteittäisen konvergenssin suhteen. Se on seuraus tasaisen rajoituksen periaatteesta:

LAUSE 19.10 (BANACH JA STEINHAUS N. 1927). *Olkoon E Banachin avaruus ja F normiavaruus sekä $\mathcal{H} = (T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pisteittäin suppeneva jono jatkuvia lineaarikuvauksia $E \to F$. Tällöin rajakuvaus $T : E \to F$,*

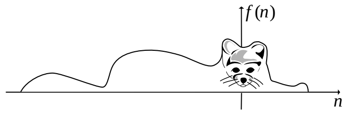
$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

on jatkuva lineaarikuvaus, erityisesti sen normi on äärellinen:

$$\|T\| = \sup_{x\in B(0,1)} \|Tx\| < \infty.$$

TODISTUS. $\mathcal{H}$ on pisteittäin rajoitettu, ts. kaikilla $x \in E$ on $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| < \infty$, sillä jono $\|T_n x\|$ suppenee. Lause 19.7. takaa nyt, että perhe $\mathcal{H}$ on rajoitettu operaattorinormin mielessä:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = M < \infty.$$



Olkoon nyt $x \in B(0,1)$. Saamme halutun normiarvion:

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \|\lim_{n\to\infty} T_n x\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n x\| \\ &\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = M. \qquad \square \end{aligned}$$

Huomautus 19.11. Huomaa, että edellä ei saatu eikä väitetty, että olisi $T_n \to T$ operaattorinormin mielessä.

19.3. Avoimen kuvauksen lause.

Äärellisulotteisen avaruuden kaikki normit ovat keskenään ekvivalentteja. Avoimen kuvauksen lause on yleistys tai pikemminkin korvike tälle periaatteelle äärettönulotteisten Banachin avaruuksien tapauksessa. Se ei sentään julista kaikkia saman avaruuden täydelliseksi tekeviä normeja ekvivalenteiksi, mutta sanoo kuitenkin, että jos tällaisten normien välillä vallitsee edes toinen normien ekvivalenssin määritelmän epäyhtälöistä, niin vallitsee toinenkin. Saman voi sanoa näinkin: Jos avaruudessa on kaksi Banach-normia, joita voi verrata keskenään, niin ne ovat ekvivalentit. Itse asiassa lause sanoo enemmänkin: Banachin avaruuksien välinen jatkuva lineaarinen surjektio on aina avoin kuvaus.

Huomautus 19.12. Avoin kuvaus on määritelmän 1.2 mukaan funktio, joka kuvaa jokaisen avoimen joukon avoimeksi joukoksi. Luvussa 13 on harjoitustehtävänä osoitettu, että normiavaruuksien välinen lineaarikuvaus $T : E \to F$ on avoin, kunhan se kuvaa yksikköpallon joukoksi, joka sisältää origokeskisen pallon. Tälle riittää selvästikin, että T kuvaa jonkin pallon sisäpisteelliseksi joukoksi. Riittää siis, että se kuvaa jonkin sisäpisteellisen joukon sisäpisteelliseksi joukoksi.

Esimerkki 19.13.

(1) Äärellisulotteisten avaruuksien välinen lineaarinen surjektio on avoin kuvaus.
(2) Normiavaruuden E projektio $P : E \to E$ on avoin kuvaus kuvajoukolleen eli normialiavaruudelle $P(E) \subset E$. Projektio ei sen sijaan aina ole jatkuva edes siinä tapauksessa, että kuvajoukko on yksiulotteinen. Erityisesti projektioita ja siis avoimia kuvauksia ovat
  ($\star$) normiavaruuksien tuloon $E \times F$ liittyvä projektiokuvaus $\pi : E \times F \to E : (x,y) \mapsto x$.
  ($\star$) Suoraan summaan liittyvä projektio $E \oplus F \mapsto E$.
(3) Tekijänormiavaruuteen liittyvä kanoninen surjektio on jatkuva ja avoin lineaarikuvaus. (Ks. 17.10.)
(4) On olemassa ei-avoimiakin lineaarikuvauksia. Sellaisia ovat tietysti kaikki ei-surjektiiviset lineaarikuvaukset, koska niiden kuvajoukko ei sisällä yhtään maaliavaruuden palloa. Mutta on muitakin, jopa bijektioita. Sellainen on esimerkiksi identtinen kuvaus

$$(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_1),$$

joka toisaalta kyllä on jatkuva. Sen käänteiskuvaus on siis esimerkki lineaarikuvauksesta, joka on avoin olematta jatkuva.

Perusteluja. (1) Valitaan lähtöpuolelta E vektorit $x_1, \ldots, x_n$ siten, että $Tx_1, \ldots, Tx_n$ on maalipuolen F kanta. Nyt T on lineaarinen bijektio avaruudelta $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ avaruudelle F. Sen käänteiskuvaus on lineaarinen äärellisulotteisten avaruuksien välillä, siis jatkuva, joten avaruuden $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ yksikköpallon kuvalla on sisäpiste. Mutta tuo yksikköpallo sisältyy tietenkin E:n yksikköpalloon.

(2) Projektio $P : E \to P(E)$ kuvaa tietysti $P(E)$:n yksikköpallon, joka on E:n yksikköpallon ja aliavaruuden $P(E)$ leikkaus, itselleen. Avaruuden E koko yksikköpallon se siis kuvaa aliavaruuden $P(E)$ yksikköpalloa suuremmaksi joukoksi.

Seuraavana todistettava avoimen kuvauksen lause perustuu Bairen kategorialauseeseen ja koskee siis nimenomaan täydellisiä avaruuksia.

Lause 19.14 (Avoimen kuvauksen lause). *Olkoon $T : E \to F$ jatkuva lineaarinen surjektio Banachin avaruudelta toiselle. Tällöin T on avoin kuvaus. Erityisesti jatkuva bijektio Banachin avaruudelta toiselle on homeomorfismi.*

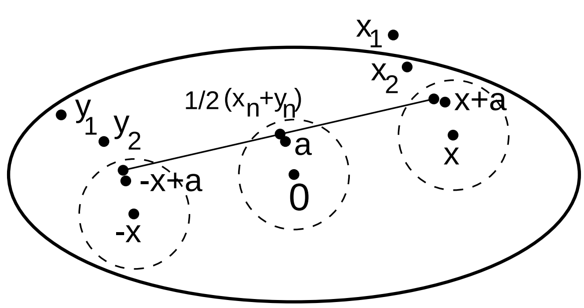
Todistus. Riittää näyttää, että F:n origo 0 on E:n yksikköpallon kuvan $T(B_E)$ sisäpiste. Käytämme tähän Bairen kategorialausetta: Koska

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nB_E,$$

niin surjektiivisuuden nojalla

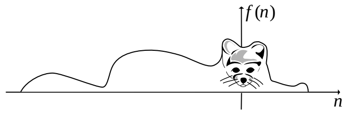
$$F = T(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nT(B_E).$$

Bairen kategorialauseen nojalla Banachin avaruus F ei ole laiha, joten jollakin sulkeumista $\overline{nT(B_E)}$ on sisäpiste. Koska n:llä jakaminen on F:ssä homeomorfismi, on siis myös yksikköpallon kuvan sulkeumalla $\overline{T(B_E)}$ sisäpiste; olkoon $B_F(x, r) \subset \overline{T(B_E)}$. Toteamme, että sisäpisteeksi kelpaa origo näyttämällä, että $B_F(0, r) \subset \overline{T(B_E)}$. Olkoon $a \in B_F(0, r)$.



Kuva 39. Origo on yksikköpallon kuvan sisäpiste.

Koska $B_F(x, r) \subset \overline{T(B_E)}$, niin symmetriasyistä myös $B_F(-x, r) \subset \overline{T(B_E)}$. Koska $\|a\| < r$, niin $x + a$ ja $-x + a$ kuuluvat siis sulkeumaan $\overline{T(B_E)}$. Valitaan jonot (x_n) ja $(y_n) \subset B_E$ siten, että $Tx_n \to x + a$ ja $Ty_n \to -x + a$. Tällöin $T(\frac{x_n + y_n}{2}) \to a$ ja tietenkin $\left\| \frac{x_n + y_n}{2} \right\| \le \frac{\|x_n\| + \|y_n\|}{2} < 1$. Siis $a \in \overline{T(B(0, r))}$.



Olemme todistaneet, että origo on joukon $\overline{T(B_E)}$ sisäpiste. On vielä päästävä eroon sulkeumasta. Valitaan $\rho > 0$ siten, että

$$\rho B_F = B_F(0,\rho) \subset \overline{T(B_E)}.$$

Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on nyt

$$(*) \qquad \frac{\rho}{2^n} B_F \subset \frac{1}{2^n}\overline{T(B_E)} = \overline{\frac{1}{2^n} T(B_E)}.$$

Osoitetaan, että $\frac{\rho}{2} B_F \subset T(B_E)$. Olkoon $y \in \frac{\rho}{2} B_F$. Ehdosta $(*)$ seuraa, että $y \in \overline{\frac{1}{2} T(B_E)}$, jolloin on olemassa $y_1 \in \frac{1}{2} T(B_E)$ siten, että $\|y - y_1\| < \frac{\rho}{4}$. Koska

$$(y - y_1) \in \frac{\rho}{4} B_F \subset \overline{\frac{1}{4} T(B_E)},$$

niin on olemassa

$$y_2 \in \tfrac{1}{4} T(B_E) \text{ siten, että } \|(y - y_1) - y_2\| < \tfrac{\rho}{8}.$$

Näin jatkaen konstruoidaan jono $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $\quad y_k \in \frac{1}{2^k} T(B_E)$, jolle

$$\|y - y_1 - \cdots - y_n\| < \frac{\rho}{2^{n+1}},$$

ja siis

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k.$$

Toisaalta jokainen y_k on asianomaisessa kuvajoukossa $T(\frac{1}{2^k} B_E)$, eli muotoa $y_k = Tx_k$, missä $x_k \in E$ ja $\|x_k\| < \frac{1}{2^k}$, jolloin sarja

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \in B_E$$

suppenee itseisesti ja siis suppenee Banachin avaruudessa E. Nyt

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} y_k = T\Big(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\Big) = Tx \in T(B_E). \qquad \square$$

19.4. Suljetun kuvaajan lause.

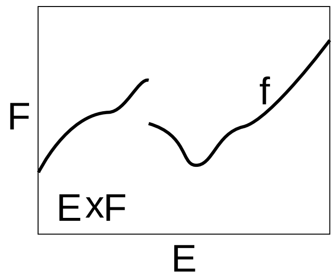
Kuten tasaisen rajoituksen periaate ja eräissä tapauksissa avoimen kuvauksen lause on myös suljetun kuvaajan lause usein käyttökelpoinen todistettaessa Banachin avaruuksien välisen lineaarikuvauksen jatkuvuutta. Kertaamme aluksi, mikä on funktion kuvaaja.

Määritelmä 19.15. Olkoot X ja Y joukkoja. Joukkojen X ja Y välinen *relaatio* on tulojoukon $X \times Y$ osajoukko ja *funktio* eli *kuvaus* $X \to Y$ on sellainen X:n ja Y:n välinen relaatio $f \subset X \times Y$, että

(a) $\forall\, x \in X\ \exists\, y \in Y$ siten, että $(x, y) \in f$
(b) jos $(x, y) \in f$ ja $(x, z) \in f$ niin $y = z$.

Funktion $f : X \to Y$ *kuvaaja* eli *graafi* on em. mielessä funktio f itse. Tämän aika tautologisen määritelmän voi ilmaista myös kirjoittamalla

$$\mathrm{Gr}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}.$$



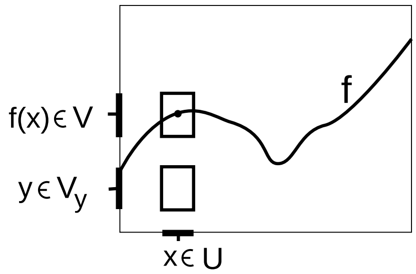
Kuva 40. Funktion $f : E \to F$ kuvaaja.

Pienenä lineaarialgebran harjoitustehtävänä voi todeta, että vektoriavaruuksien välinen kuvaus on lineaarinen aina ja vain, kun sen kuvaaja on tuloavaruuden lineaarinen aliavaruus. Seuraava pieni lause 19.16 sanoo, että metristen avaruuksien välisen jatkuvan kuvauksen kuvaaja on tuloavaruuden suljettu joukko. Voisi luulla, että tämä ehto myös riittää takaamaan jatkuvuuden. Näin ei kuitenkaan yleisesti ole edes normiavaruuksien lineaarikuvaukselle. Esimerkkinä epäjatkuvasta funktiosta, jolla kuitenkin on suljettu kuvaaja, on minkä tahansa jatkuvan bijektion, paitsi homeomorfismin, käänteiskuvaus. Suljetun kuvaajan lause 19.17 antaa riittävät ehdot sille, että johtopäätös kuitenkin olisi oikea.

Lause 19.16. *Jos X ja Y ovat metrisiä avaruuksia*[99]*, niin jatkuvan funktion $f : X \to Y$ kuvaaja on tuloavaruuden $X \times Y$ suljettu osajoukko.*

Todistus. Lause on mukava todistaa jonoja käyttämällä, mutta suoraan avoimiin joukkoihin perustuva todistaminenkin on mahdollista, vaikkapa seuraavasti: Olkoon f jatkuva. Osoitetaan, että kuvaajan komplementti on avoin. Olkoon $(x, y) \in X \times Y \setminus \mathrm{Gr}(f)$. Tällöin $y \neq f(x)$, joten pisteillä y ja $f(x)$ on erilliset, avoimet ympäristöt $V_y \ni y$ ja $V \ni f(x)$.

[99]Riittää: topologisia Hausdorff-avaruuksia



Kuva 41. Jatkuvan funktion kuvaaja on suljettu.

Koska f on jatkuva, on olemassa sellainen x:n avoin ympäristö $U \subset X$, että

$$f(U) \subset V \subset Y \setminus V_y,$$

jolloin

$$\mathrm{Gr}(f) \cap (U \times V_y) = \emptyset.$$

Lisäksi $(x, y) \in U \times V_y$ ja $U \times V_y$ on avoin, joten (x, y) on kuvaajan komplementin sisäpiste. $\square$

Lause 19.17 (Suljetun kuvaajan lause). *Lineaarikuvaus T Banachin avaruudelta E Banachin avaruudelle F on jatkuva aina ja vain, kun sen kuvaaja on suljettu.*

Todistus. Jatkuvan kuvauksen kuvaaja todettiin yllä suljetuksi, olipa kuvaus lineaarinen tai ei. Lauseen varsinainen väite on siten toinen puoli. Olkoon $\mathrm{Gr}(T) \subset E \times F$ suljettu. Koska $E \times F$ on kahden Banachin avaruuden tulo, on se lauseen 17.4 mukaan itsekin täydellinen, samoin siis sen suljettu aliavaruus $\mathrm{Gr}(T)$. Kuvaus

$$p_1 : \mathrm{Gr}(T) \to E : (x, y) = (x, Tx) \mapsto x$$

on tuloavaruuden projektion rajoittumana tietenkin jatkuva ja lineaarinen, sen lisäksi selvästi bijektio. Avoimen kuvauksen lauseen nojalla sen käänteiskuvaus

$$E \to \mathrm{Gr}(T) : \quad x \mapsto (x, Tx)$$

on myös jatkuva. Mutta T on yhdistetty kuvaus tästä ja projektiosta

$$p_2 : E \times F \to F : (x, y) \mapsto y,$$

siis jatkuva. $\square$

Todistus oli lyhyt ja helppo, koska käytettävissä oli syvällinen tulos, avoimen kuvauksen lause.

LAUSE 19.18 (HELLINGERIN JA TOEPLITZIN LAUSE). [100] *Hermiittisyyden määrittelevän kaavan $(Ax|y) = (x|Ay)$ toteuttava lineaarikuvaus $A : H \to H$ on jatkuva ja siis todella hermiittinen, kun H on Hilbert-avaruus.*

TODISTUS. Suljetun kuvaajan lauseen perusteella riittää selvästikin (!) näyttää, että jos $x_n \to 0$ ja $Ax_n \to x$, niin $x = 0$. Tämäpä onkin helppoa:

$$\|x\|^2 = \big(\lim_{n\to\infty} Ax_n \mid x\big) = \lim_{n\to\infty}(Ax_n \mid x) = \lim_{n\to\infty}(x_n \mid Ax) = (\lim_{n\to\infty} x_n \mid Ax) = 0.$$

□

19.5. ℓ^1:n duaali.

Todistamme nyt tasaisen rajoituksen periatteen avulla, että ℓ^1:n duaali on ℓ^∞. Jono $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ on tässä samastettava lineaarimuotoon $\ell^1 \to \mathbb{K} : (x_n)_{n=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$, eli $y(x) = \langle x|y\rangle = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$.

LEMMA 19.19. *Olkoon $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sellainen lukujono, että sarja*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} y_n x_n$$

suppenee kaikilla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$. Tällöin $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$.

PERUSTELU. Olkoon $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaaditunlainen jono. Kukin äärellisen summan avulla määritelty kuvaus $\ell^1 \to \mathbb{K}$:

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sum_{n=1}^m y_n x_n$$

on varmasti lineaarinen ja sen lisäksi jatkuva, onhan

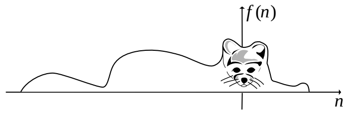
$$|\sum_{n=1}^m y_n x_n| \le \sum_{n=1}^m (\sup_{1\le n\le m} |y_n|)|x_n| = (\sup_{1\le n\le m} |y_n|)\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1.$$

Koska sarja konvergoi, on Banachin ja Steinhausin lauseen raja-arvoehto voimassa ja siis rajafunktiokin on jatkuva eli rajoitettu lineaarikuvaus: on olemassa $M > 0$ siten, että kaikille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$

$$|\sum_{n=1}^m y_n x_n| \le M\,\|x\|_1.$$

Erityisesti valitsemalla $x = e_k = (0, 0, \dots, 1, \dots)$, missä ykkönen on k:nnella paikalla, havaitsee, että $|y_k| \le M$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Nyt tiedämme, että $\|(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty \le M$. □

[100] ERNST DAVID HELLINGER 1883–1950 Saksa-USA, OTTO TOEPLITZ 1881–1940 Saksa-Israel(?). Lause on vuodelta 1922. Todistus ei enää ole vaikea, kun käytössä on syvällinen tulos, suljetun kuvaajan lause.



Lause 19.20. *ℓ^1:n duaali on ℓ^∞*

Perustelu. Hölderin epäyhtälön helpon erikoistapauksen mukaan ainakin jokainen $y \in \ell^\infty$ tuottaa jatkuvan lineaarikuvauksen $f_y : x \mapsto \sum_{n=1}^\infty y_n x_n$, ja vieläpä

$$|f_y(x)| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty.$$

Osoitetaan, että operaattorinormi $\|f_y\|$ todella on $\|y\|_\infty$: Valitaan $\varepsilon > 0$ ja $i \in \mathbb{N}$ siten, että $|y_i| > \|y\|_\infty - \varepsilon$. Olkoon $e_i = (0, \dots, 1, 0, \dots)$. Nyt $\|e_i\|_1 = 1$ ja $|\langle e_i | y \rangle| = |y_i| > \|y\|_\infty - \varepsilon$.

Tässä mielessä siis $\ell^\infty \subset \ell^{1*}$.

Olkoon seuraavaksi $f \in \ell^{1*}$. Muodostetaan jono $x_n = f(e_n)$, missä $e_n = (0, \dots, 1, \dots) \in \ell^1$. Selvästi tämä on ainoa mahdollinen ehdokas etsityksi jonoksi. Ja se kelpaakin: Koska f on jatkuva ja lineaarinen, on kaikilla $y \in l^1$ voimassa

$$f(y) = f\Big(\sum_{i=1}^\infty y_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty y_i f(e_i) = \sum_{i=1}^\infty y_i x_i \in \mathbb{K},$$

joten lemman 19.19 ehto toteutuu ja todella $x \in \ell^\infty$. $\square$

Harjoitustehtäviä ja huomautuksia lukuun V

Harjoitustehtäviä lukuun V.

18.1. Osoita, että äärellisulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukolle rajoittuneisuus, prekompaktius ja relatiivikompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

18.2. Osoita, että metrisen avaruuden osajoukko on prekompakti tasan silloin, kun sen sulkeuma on prekompakti.

18.3. (jatkoa) Metrisen avaruuden osajoukolle kompaktius ja jonokompaktius ovat tunnetusti yhtäpitäviä ehtoja. Huomautuksessa 18.3 väitetään, että täydellisen metrisen avaruuden osajoukolle prekompaktius ja relatiivikompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja. Onko näin? Selvitä ensin, että em. ominaisuudet periytyvät osajoukoille.

18.4. Kuvaako jatkuva lineaarikuvaus relatiivikompaktin joukon relatiivikompaktiksi joukoksi?

18.5. Todista Ascolin ja Arzelán lemma 18.6.

18.6. Täydentele 18.9 perusteluja tutkimalla, miksi jatkuvasta ja kompaktista operaattorista yhdistämällä saadaan kompakti operaattori.

19.1. Olkoon X metrinen avaruus ja $A \subset X$. Onko A avoin / suljettu / täydellinen / tiheä / separoituva / harva eli ei missään tiheä, kun

(1) $X = \mathbb{K}^5$ ja $A = \{(x_k)_1^5 \mid x_1 = x_2 = x_3\}$
(2) $X = \ell^2$ ja $A = \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$
(3) $X = \ell^2$ ja $A = \{(x_k)_1^\infty : \sum_1^\infty |x_k|^2 > 0\}$

19.2. Anna esimerkki täydellisestä metrisestä avaruudesta (X, d) ja jonosta $(F_n)_1^\infty$ sen suljettuja joukkoja, joilla F_1:n halkaisija diam $F_1 < \infty$ ja $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$ ja $\bigcap_n^\infty F_n = \emptyset$.

19.3. Näytä, että rationaalilukujen joukkoa $\mathbb{Q}$ ei voi esittää muodossa $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, missä U_i:t ovat $\mathbb{R}$:n avoimia joukkoja. Opastus: Numeroi $\mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \dots\}$, tarkastele joukkoja $\mathbb{R} \setminus U_i \cup \{x_i\}$ ja käytä Bairen kategorialausetta.

19.4. Olkoon A_n:t ($n \in \mathbb{N}$) jono avoimia reaalilukujoukkoja siten, että niiden yhdiste on koko $\mathbb{R}$. Sisältääkö joku A_n välttämättä avoimen välin? Miten käy, jos oletetaan, että joukot A_n ovat suljettuja?

19.5. a) Näytä, että ei ole olemassa funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, joka olisi jatkuva jokaisessa rationaalipisteessä $x \in \mathbb{Q}$ ja epäjatkuva muissa, siis irrationaalipisteissä. Vihje: Tutki joukon halkaisijaa $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x,y) \mid x, y \in A\}$. Tee antiteesi. Määrittele $\mathcal{U}_n = \{U \subset \mathbb{R} \mid U \text{ on avoin ja } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n}\}$ sekä

$$U_n = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} U.$$

Näytä, että U_n on avoin ja tiheä $\mathbb{R}$:ssä ja että $\mathbb{Q} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. Numeroi rationaliluvut jonoksi $(q_1, q_2, q_3, \dots)$. Määrittele $V_n = U_n \setminus \{q_n\}$. Ristiriita löytyy tarkastelemalla joukkoa $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$.

Vertailun vuoksi: Pelkissä irrationaalipisteissä jatkuva funktio on olemassa!

19.6. Voiko Banachin avaruuden Hamel-kanta olla numeroituvasti ääretön?

19.7. Todista huomautus 19.12, jonka mukaan normiavaruuksien väliselle lineaarikuvaukselle $T : E \to F$ seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) T on avoin kuvaus.
(2) T kuvaa yksikköpallon joukoksi, joka sisältää origokeskisen pallon.
(3) T kuvaa jonkin pallon sisäpisteelliseksi joukoksi.

Vihje: Samantapainen kuin vastaavien jatkuvuutta koskevien lauseiden 5.1. ja 6.7. todistus.

19.8. Olkoon $T : E \to F$ jatkuva lineaarikuvaus ja lisäksi injektio, missä E ja F ovat Banachin avaruuksia. Jos avoimen pallon $B = \{x \in E \mid \|x\| \le 1\}$ kuva $T(B)$ on avoin F:ssä, niin onko T välttämättä bijektio?

19.9. Onko jatkuvan bijektion käänteiskuvaus aina avoin kuvaus?

19.10. ($*$) Keksi esimerkki kahdesta epäekvivalentista Banach-normista samassa avaruudessa. Vihje: Avoimen kuvauksen lauseen vuoksi normien täytyy olla vertailukelvottomat.

19.11. Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $(T_n)_1^{\infty}$ jono jatkuvia lineaarikuvauksia $E \to F$. Jos kaikissa pisteissä x pätee $T_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} T(x)$, missä T on jatkuva lineaarikuvaus, niin päteekö $T_n \underset{i \to \infty}{\longrightarrow} T$ avaruudessa $\mathcal{B}(E, F)$? Ohje: koeta keksiä vastaesimerkki, jossa vaikkapa $E = \mathcal{C}[0,1]$ sup-normilla varustettuna, $F = \mathbb{R}$. $T_n(f) = ??$

19.12. Anna esimerkki jonosta operaattoreita $T_n \in \mathcal{B}(\ell^2)$, jolle $\|T_n\|$ ei lähesty nollaa, mutta $T_n x \to 0$ jokaisessa pisteessä $x \in \ell^2$. Vihje: Iteroi kuvausta $T : \ell^2 \to \ell^2 : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots)$.

19.13. Olkoon $(f_n)_1^{\infty}$ jono jatkuvia funktioita $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ siten, että $f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x)$ jokaisella $x \in \mathbb{R}$. Näytä, että on olemassa avoin väli $]a, b[\subset \mathbb{R}$ ja luku $M > 0$ siten, että $|f_n(x)| \le M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in]a, b[$. Vihje: Tutki suljettuja (!) joukkoja $F_j = \{x \in \mathbb{R} \mid |f_n(x)| \le j \; \forall n \in \mathbb{N}\}$.

19.14. Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $(T_n)_1^\infty$ jono jatkuvia lineaarikuvauksia $E \to F$. Oleta, että $\|T_n\| \leq 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Olkoon $A \subset E$ tiheä osajoukko siten, että kaikilla $x \in A$ jono $(T_n x)_1^\infty$ suppenee avaruudessa F. Näytä, että jono $(T_n x)_1^\infty$ suppenee kaikilla $x \in E$. Opastus: Helppo.

19.15. a) Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T : E \to F$ lineaarinen kuvaus, joka ei ole surjektio. Näytä, että kuva-avaruus $T(E)$ ei ole avoin F:ssä.

b) Anna esimerkki normiavaruuksista E ja F sekä jatkuvasta lineaarikuvauksesta $T : E \to F$, joka on bijektio, mutta jonka käänteiskuvaus ei ole jatkuva. Vihje: Helpompi kuin luuletkaan. Voit vaikka yrittää valita $E = F$, mutta eri normit ja T:ksi identtinen kuvaus.

19.16. Totea, että vektoriavaruuksien välinen kuvaus on lineaarinen aina ja vain, kun sen kuvaaja on tuloavaruuden lineaarinen aliavaruus.

19.17. Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $T \in \mathcal{B}(E, F)$ siten, että $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ ja on olemassa vektorijono $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$, joilla $\|x_n\| = 1$ ja $\|T x_n\| = \frac{1}{n}\|x_n\|$. Voiko T olla surjektio?

19.18. Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $T \in \mathcal{B}(E, F)$. Osoita, että seuraavat ovat yhtäpitäviä keskenään:

(1) On olemassa vakio $C \geq 0$ siten, että $\|Tx\|\| \geq C\|x\| \quad \forall x \in E$.
(2) $\operatorname{Ker} T = \{0\}$ ja $\operatorname{Im} T$ on suljettu.

19.19. Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Osoita, että seuraavat ovat yhtäpitäviä keskenään:

(1) Jos $T x_n \to y$ ja $x_n \to 0$, niin $y = 0$.
(2) T:n kuvaaja $\operatorname{Gr} T$ on suljettu.

19.20. Olkoon $(a_n)_1^\infty \in \ell^\infty$ ja $T \in \mathcal{B}(l^p) : (x_n)_1^\infty \mapsto (a_n x_n)_1^\infty$ jollakin $1 \leq p < \infty$. Millä jonoa $(a_n)_\mathbb{N}$ koskevalla ehdolla kuvaus T on injektio? Entä, jos T todella on injektio, niin millä ehdolla kuva $T(l^p)$ on suljettu? Anna tämän avulla esimerkki injektiivisestä operaattorista $S \in \mathcal{B}(E)$, jonka kuva-avaruus $S(E)$ ei ole suljettu.

19.21. Olkoon $(a_n)_1^\infty \in \ell^\infty$ ja $T \in \mathcal{B}(l^p) : (x_n)_1^\infty \mapsto (a_n x_n)_1^\infty$ jollakin $1 \leq p < \infty$, kuten aikaisemmassa tehtävässä. Milloin T on kääntyvä? Mikä on T^{-1}?

19.22. Todista avoimen kuvauksen lause seurauksena suljetun kuvaajan lauseesta. Vihje: Aloita todistamalla erikoistapaus, jonka mukaan Banachin avaruuksien välisen jatkuvan bijektion käänteiskuavus on jatkuva. Hajota sen jälkeen tutkittava kuvaus muotoon $T = P \circ S$, missä P on projektio ja $S(x) = (x, T(x))$.

19.23. Päteekö avoimen kuvauksen lauseen väite, ellei oleteta, että maaliavaruus F on täydellinen?

19.24. Osoita, että $(\ell^p)^*$ ja ℓ^q ovat isomorfiset, kun p ja q ovat äärelliset duaalieksponentit.

19.25. Osoita, että c_0^* ja ℓ^1 ovat isomorfiset.

19.26. (jatkoa) Etsi kaikki *normin saavuttavat* alkiot $f \in c_0^*$, ts. alkiot $\alpha \in \ell^1$, joilla on olemassa $x \in \overline{B}_{c_0}$ siten, että $\langle x|\alpha\rangle = \|\alpha\|_1$

Huomautuksia lukuun V.

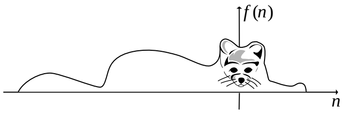
Hajaantuva Fourier-sarja. ℓ^1:n duaalin avulla on helposti konstruoitavissa jaksollinen jatkuva funktio, jonka Fourier-sarja hajaantuu ainakin yhdessä pisteessä.[101] Tämä oli aikanaan vaikea juttu.

[101] [M].

Historiaa. Bull. AMS kertoo kesän 2004 numerossa, että Bairen kategorialauseeseen perustuva Banachin ja Steinhausin lauseen todistus on peräisin S. Saksilta.[102] Alkuperäisempi todistus: Ks. [RN], No 31.

Hyvä lukija. Kirjoita tekijälle parannusehdotuksia lukuun V.

[102] Stanislaw Saks 1897–1942, Puola.



VI KONVEKSIT JOUKOT JA JATKUVAT LINEAARIMUODOT

Funktionaalianalyysin keskeisiin tuloksiin kuuluu Bairen kategorialauseen mielenkiintoisten seurausten lisäksi ennen kaikkea Hahnin ja Banachin lause 21.4, jonka tärkeä seuraus on se, että normiavaruuden $(E, \|\cdot\|)$ duaali E^* on aina epätriviaali, vieläpä niin että kaikille $x \in E \setminus \{0\}$ on olemassa jatkuva lineaarimuoto $f : E \to \mathbb{K}$, jolle $f(x) \neq 0$. Hilbertin avaruudessa tämä väite on ilman muuta tosi, koska siellä jatkuvat lineaarimuodot voidaan tulkita samoiksi kuin avaruuden vektorit. Yleisessä normiavaruudessa Hahnin ja Banachin lauseen todistaminen sen sijaan edellyttää yllättäen valinta-aksiooman käyttöä.

Aikomuksenamme on ymmärtää Hahnin ja Banachin lauseen geometrinen luonne ja todistaa siitä ensin geometrinen versio, Banachin erottelulause, jonka mukaan kahden avoimen, konveksin joukon väliin voi sijoittaa suljetun hypertason, joka erottaa ne omiin puoliavaruuksiinsa. Aloitamme täydentämällä tietojamme vektoriavaruuden hypertasoista ja muista konvekseista joukoista.

20. Konveksia lineaarialgebraa

20.1. Lineaarimuodot ja affiinit hypertasot.

Olemme jo määritelleet lineaarisen hypertason luvussa 9. Kertaamme määritelmän:

Huomautus 20.1. Vektoriavaruuden V lineaarinen hypertaso on aliavaruus $W \subset V$, joka toteuttaa seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot:

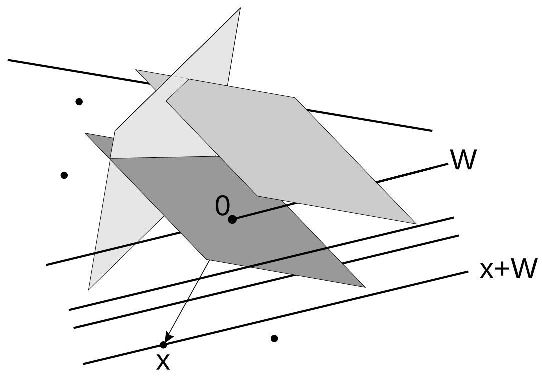
(1) W on jonkin nollasta eroavan lineaarimuodon $f : V \to \mathbb{K}$ ydin.
(2) W on V:n maksimaalinen aito aliavaruus; se ei sisälly mihinkään muuhun aitoon aliavaruuteen kuin itseensä.
(3) Aliavaruuden W jokainen (tai jokin) Hamel-kanta voidaan laajentaa koko avaruuden V Hamel-kannaksi lisäämällä siihen yksi vektori $x \notin W$.

Lineaarimuodon muut tasa-arvopinnat saadaan ytimestä siirtämällä.

Määritelmä 20.2. Vektoriavaruuden osajoukko $A \subset V$ on *affiini aliavaruus*, jos se toteuttaa seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot

(1) A on muotoa $A = x + W = \{x + w \mid w \in W\}$, missä W on lineaarinen aliavaruus.
(2) $A - A = \{x - y \mid x \in A,\, y \in A\}$ on vektorialiavaruus.

Maksimaalinen aito affiini aliavaruus on *affiini hypertaso* eli *hypertaso*. Kun W on lineaarinen hypertaso, niin $x + W$ on siis affiini hypertaso.



KUVA 42. AFFIINEJA ALIAVARUUKSIA JA HYPERTASOJA AVARUUDESSA $\mathbb{R}^3$.

HUOMAUTUS 20.3. Lineaarikuvauksen $L : V \to W$ tasa-arvojoukot ovat ekvivalenssirelaation $Lx = Ly$ ekvivalenssiluokat. Pisteen x kautta kulkeva tasa-arvojoukko eli luokka $[x] = \{y \in V \mid Lx = Ly\}$ saadaan kuvauksen L ytimestä siirrolla:

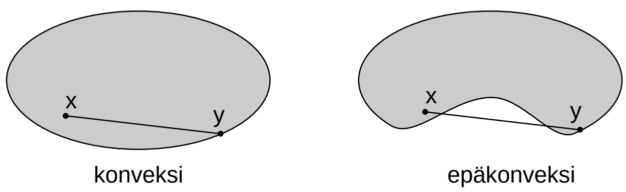
$$[x] = x + \operatorname{Ker} L = \{x + z \mid z \in \operatorname{Ker} L\}.$$

Tasa-arvojoukot ovat siis ytimen kanssa isometrisesti isomorfisia affiineja aliavaruuksia. Erityisesti lineaarimuodon tasa-arvojoukot ovat siten lineaarisen hypertason siirrettyjä kopioita, sen kanssa yhdensuuntaisia affiineja hypertasoja. Asiaa on eräässä erikoistapauksessa käsitelty kohdassa 9.35.

20.2. Konveksit joukot vektoriavaruudessa.
Seuraavassa V on $\mathbb{R}-$kertoiminen vektoriavaruus; erityisesti V saa siis olla $\mathbb{C}-$vektoriavaruus.

MÄÄRITELMÄ 20.4. Joukko $A \subset V$ on *konveksi* eli *kupera*, mikäli se sisältää pisteidensä väliset *janat*:

$$x, y \in A \implies \{\alpha x + \beta y \mid \alpha, \beta \geq 0\,,\ \alpha + \beta = 1\} \subset A,$$



KUVA 43. KONVEKSI JA EPÄKONVEKSI JOUKKO.

ESIMERKKEJÄ 20.5. Konvekseja joukkoja ovat esimerkiksi vektoriavaruuden affiinit aliavaruudet sekä normiavaruuden avoimet ja suljetut pallot.
Lisäksi konveksius säilyy lineaarikuvauksissa ja siirroissa mennen, tullen.

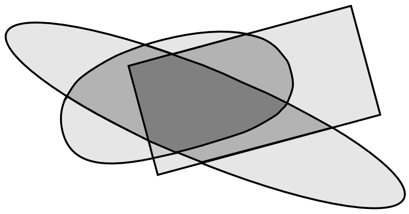
Lause 20.6.

(1) *Olkoon $A \subset V$ konveksi joukko ja $T : V \to W$ lineaarinen. Silloin kuvajoukko $T(A)$ on konveksi.*
(2) *Olkoon $B \subset W$ konveksi joukko ja $T : V \to W$ lineaarinen. Silloin alkukuvajoukko $T^{-1}(B)$ on konveksi.*
(3) *Olkoon $A \subset V$ konveksi joukko $a \in V$ ja $T : V \to V$ translaatio $x \mapsto x + a$. Silloin kuvajoukko $T(A)$ on konveksi.*

Todistus. Helppo harjoitustehtävä. $\square$

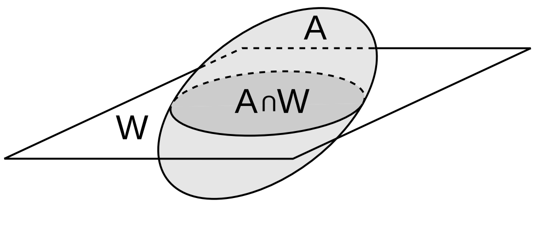
Konveksius säilyy leikkauksessa, mutta ei tietenkään yhdisteessä:

Lause 20.7. *Olkoon $A_i \subset V$ konveksi joukko kaikilla $i \in I$. Silloin leikkaus $\bigcap_{i \in I} A_i$ on konveksi.*



Kuva 44. Konveksien joukkojen leikkaus.

Aivan erityisesti konveksin joukon A ja aliavaruuden $W \subset V$ leikkaus on W:n konveksi osajoukko.

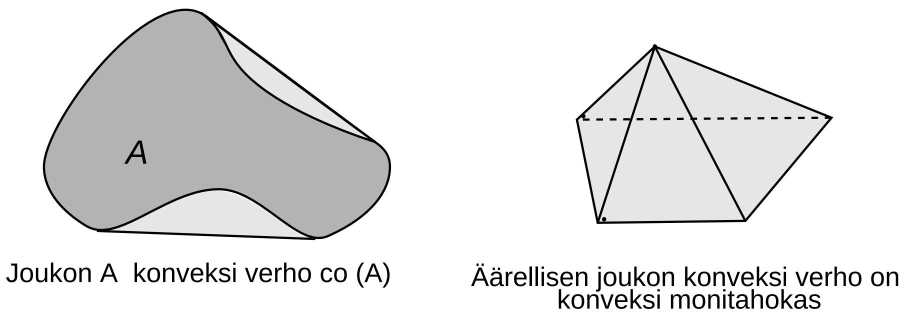


Kuva 45. Konveksin joukon A ja aliavaruuden W leikkaus.

Todistus. Ilmiselvää tämäkin. $\square$

Määritelmä 20.8. Joukon $A \subset V$ *konveksi verho* on suppein joukon A sisältävistä konvekseista joukoista, nimittäin leikkaus

$$\mathrm{co}\,(A) = \cap \{ B \mid A \subset B \,,\ B \text{ on konveksi} \}$$



KUVA 46. KAKSI KONVEKSIA VERHOA.

HUOMAUTUS 20.9. Joukon A konveksin verhon alkiot ovat samat kuin A:n alkioiden *konveksit kombinaatiot*:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k,$$

missä $x_1, \dots x_n \in A$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ ja $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$. Erityisesti $\operatorname{co}(A) \subset \langle A \rangle$.

PERUSTELU. A:n alkioista muodostettujen konveksien kombinaatioiden joukko on selvästi itsekin konveksi joukko ja sisältää A:n, joten se sisältää myös $\operatorname{co}(A)$:n.

Toisensuuntaisen inkluusion osoittamiseksi riittää todistaa, että konveksi joukko, tässä tapauksessa $\operatorname{co}(A)$, sisältää alkioidensa konveksit kombinaatiot $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. Tämän voi tehdä induktiopäättelyllä n:n suhteen: Tapaukset $n = 1$ ja $n = 2$ ovat triviaaleja, joten jää tehtäväksi induktioaskel. Oletamme siis, että $\operatorname{co}(A)$ sisältää $n - 1$:n alkion konveksit kombinaatiot. Tehtävänä on näyttää, että $\operatorname{co}(A)$ sisältää alkion

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k, \qquad \text{missä} \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ x_k \in \operatorname{co}(A) \\ \lambda_k \in \mathbb{R}^+ \\ \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1. \end{cases}$$

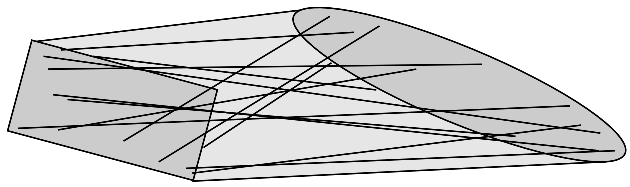
Induktio-oletuksen vuoksi voimme olettaa, että mikään kertoimista λ_k ei ole nolla. Voimme siis kirjoittaa

$$x = \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k\Big)\Big(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{\lambda_m}{\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j} x_m\Big) + \lambda_n x_n, \text{ missä} \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ x_k \in A \\ \frac{\lambda_k}{\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k} \in \mathbb{R}^+ \text{ ja } \lambda_n \in \mathbb{R}^+ \\ \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k} = 1. \end{cases}$$

Siinäpä se! $\square$

Seuraus 20.10. *Vektoriavaruuden V kahden konveksin osajoukon A ja B yhdisteen konveksi verho* $\mathrm{co}\,(A \cup B)$ *muodostuu kaikista A:n ja B:n pisteiden välisistä janoista:*

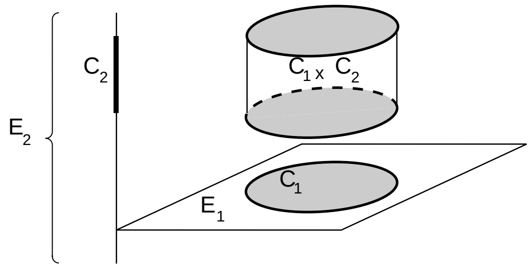
$$x \in \mathrm{co}\,(A \cup B) \iff x = \alpha a + \beta b, \ \textit{missä} \begin{cases} a \in A, b \in B, \\ \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1. \end{cases}$$



Kuva 47. Kahden konveksin joukon yhdisteen konveksi verho.

Huomautus 20.11. Mielivaltaisen monen — mahdollisesti eri avaruuksissa olevan — konveksin joukon $C_i \subset E_i$ tulojoukko $\prod_{i \in I} C_i$ on tuloavaruuden $\prod_{i \in I} E_i$ konveksi osajoukko.

Perustelu. Yleensä tarvitsemme vain tapausta, jossa tulossa on vain äärellisen monta tekijää, ja se palautuu induktiolla kahden joukon tulon tutkimiseen, missä puolestaan ei ole vaikeuksia.



Kuva 48. Kahden konveksin joukon tulojoukko.

Yleisessä tapauksessa on annettava tai tiedettävä tarpeelliset määritelmät. Yleinen tulojoukko on määritelmän mukaan

$$\prod_{i \in I} V_i = \{ f : I \to \bigcup_{i \in I} V_i \mid \text{ kaikilla } i \in I : \ f(i) \in V_i \}.$$

Konveksiutta koskeva väite saadaan siitä, että vektoriavaruuden rakenne määritellään vektoriavaruuksien tuloon luonnollisella tavalla pisteittäin. $\square$

Toisin kuin edelliset, on seuraava[103] lineaarialgebran lause epätriviaali. Se on — kuten myöhemmin tulemme huomaamaan — Banachin erottelulauseen ja siten myös Hahnin ja Banachin lauseen lineaarialgebrallinen vastine.

[103] Harvoin esitetty. Merkityksetönkö? Joka tapauksessa hauska.

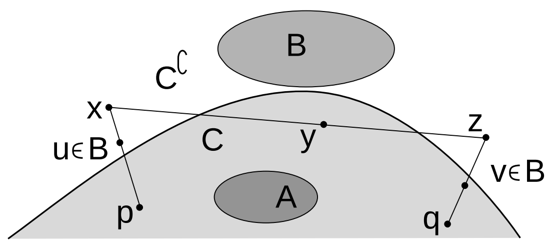
LAUSE 20.12 (∗) (STONEN EROTTELULAUSE 1937). *Vektoriavaruuden V kaksi erillistä konveksia osajoukkoa A ja B voi aina erottaa omiin konvekseihin puolia-varuuksiinsa seuraavassa mielessä: On olemassa konveksi joukko $C \subset V$ siten, että*

(1) *myös komplementti $C^{\complement} = V \setminus C$ on konveksi*
(2) *$A \subset C$ ja $B \subset C^{\complement}$.*

TODISTUS. Konstruoidaan aluksi C luonnollisella tavalla käyttäen Zornin lemmaa. Tarkastelemme kaikkien sopivien $C-$ehdokkaiden perhettä

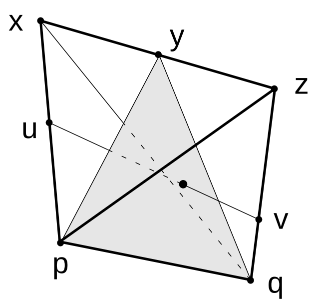
$$\mathcal{C} = \{A\text{:n sisältävät, } B\text{:tä leikkaamattomat konveksit joukot}\}.$$

Inkluusio "$\subset$" on perheen $\mathcal{C}$ järjestysrelaatio, ja se toteuttaa Zornin lemman ehdon: jokaisella perheen $\mathcal{C}$ täysin järjestetyllä osajoukolla on joukkoon $\mathcal{C}$ kuuluva yläraja, nimittäin alkioidensa yhdiste. Zornin lemman mukaan on siis olemassa maksimaalinen $\mathcal{C}$:n alkio, eli maksimaalinen A:n sisältävä, B:tä leikkaamaton konveksi joukko. Sellaisen valitsemme joukoksi C. Riittää näyttää, että myös joukon C komplementti $C^{\complement}$ on konveksi. Oletetaan, että $C^{\complement}$ ei ole konveksi, jolloin on olemassa pisteet $x \in C^{\complement}$, $z \in C^{\complement}$ ja niiden välisen janan piste $y \in \operatorname{co}\{x, z\}$ siten, että $y \in C$.



KUVA 49. STONEN EROTTELULAUSEEN TODISTUS.

Koska $x \notin C$, niin konveksi verho $\operatorname{co}(\{x\} \cup C)$ on aidosti laajempi kuin C ja leikkaa siis C:n maksimaalisuuden vuoksi joukkoa B. Siksi on olemassa C:hen kuuluva piste p, jonka yhdysjana x:ään leikkaa B:tä vaikkapa pisteessä u. Vastaava pätee pisteelle z, ja saadaan pisteet $q \in C$ ja $v \in B \cap\,]q, z[$. Tarkastelemalla pisteiden x, z, q ja p konveksina verhonaan virittämää tavallista tetraedria,



KUVA 50. MAHDOTON TILANNE.

jonka särmillä sijaitsevat pisteet u, v ja y huomaa, että kolmio $\operatorname{co}\{p, q, y\}$ jakaa sen kahteen osaan, joista toisessa on piste u, toisessa v. Jana $]u, v[$ lävistää tämän kolmion. Tämä on mahdotonta, sillä nurkkiensa tavoin kolmiomme sisältyy konveksiin joukkoon C, mutta päätepisteidensä tavoin jana sisältyy konveksiin joukkoon B, joka ei leikkaa C:tä. $\square$

Huomautus 20.13 (Ihmeellinen vastaesimerkki). Hyvin lievin lisäoletuksin Stonen erottelulauseen joukot C ja $C^{\complement}$ ovat reaalisen vektoriavaruuden puoliavaruuksia siinä mielessä, että on olemassa lineaarimuoto eli lineaarikuvaus $f : V \to \mathbb{R}$, jolla $f(A) \subset]-\infty, c]$ ja $f(B) \subset [c, \infty[$. Esimerkiksi äärellisulotteisessa avaruudessa käy aina juuri näin. Sen sijaan äärettömulotteisesta vektoriavaruudesta V voidaan aina valita komplementaariset konveksit epätyhjät joukot C ja $C^{\complement}$ siten, että

$$
\begin{aligned}
C &\subset \{x \in V \mid \exists y \in C^{\complement} :]x, y[\subset C^{\complement}\}, \text{ ja kääntäen myös} \\
C^{\complement} &\subset \{x \in V \mid \exists y \in C :]x, y[\subset C\}.
\end{aligned}
$$

Tämän saa aikaan valitsemalla V:lle Hamel-kannan ja järjestämällä sen hyvin.[104] Jokainen vektori $x \in V$ on kantavektorien yksikäsitteinen äärellinen lineaarikombinaatio. Valitaan C:ksi niiden vektorien joukko, joiden koordinaattiesityksessä viimeinen nollasta eroava koordinaatti on positiivinen.

21. Konveksit joukot normiavaruudessa

21.1. Jatkuvat lineaarimuodot ja suljetut affiinit hypertasot.

Voisimme jatkaa konveksien joukkojen lineaarialgebran tutkimista pitkällekin, mutta funktionaalianalyysi ottaa huomioon myös topologisia ominaisuuksia. Tarkastelussa tarvitaan tällöin apuna suljettuja hypertasoja. Muistamme, että Hilbert-avaruuden lineaarimuoto on jatkuva tasan silloin, kun sen ydin on suljettu hypertaso. Tämän väitteen todistuksessa käytimme Fréchet'n ja Rieszin esityslausetta. Vaikka esityslauseella ei ole vastinetta yleisen normiavaruuden tapauksessa, niin lineaarimuodon ydintä koskeva väite on silti nytkin tosi.

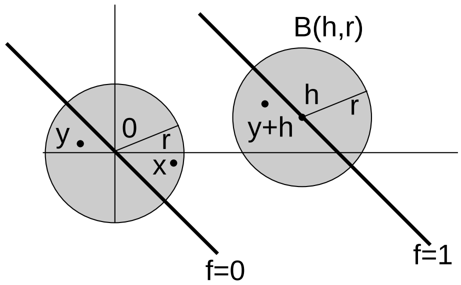
Lause 21.1 (Suljetut hypertasot normiavaruudessa).

(1) *Normiavaruudessa E määritelty nollasta eroava lineaarimuoto on jatkuva aina ja vain, kun sen ydin on suljettu.*
(2) *Epäjatkuvan lineaarimuodon ydin on tiheä koko avaruudessa E.*
(3) *Vastaavat väitteet pätevät ytimen lisäksi lineaarimuodon muillekin tasa-arvojoukoille eli affiineille hypertasoille.*

Todistus. Lineaarimuodon jatkuvuus takaa tietenkin, että sen ydin on suljettu, koska yksipisteinen joukko $\{0\} \subset \mathbb{K}$ on suljettu ja ydin on sen alkukuva. Käänteinen puoli vaatii laskutoimituksen: Olkoon ydin $\operatorname{Ker}(f) \subset E$ suljettu. Koska nollakuvaus on jatkuva, voimme olettaa, että f ei ole nolla, vaan on olemassa $h \in E$ siten, että $f(h) = 1$. Koska $\operatorname{Ker}(f)$ on suljettu, voidaan valita $h-$keskinen avoin pallo $B(h, r)$, joka ei leikkaa ydintä $\operatorname{Ker}(f)$. Osoitamme, että f on rajoitettu r-säteisessä origokeskisessä pallossa. Teemme antiteesin, että näin ei ole, vaan on olemassa

[104] Liite.

sellainen $x \in E$, että $\|x\| < r$ ja $|f(x)| = |c| > 1$. Olkoon $y = -x/c$, jolloin $\|y\| = \|x\| \,/\, |c| < r$ ja $f(y) = -f(x)\,/\,c = -1$, joten



Kuva 51. Suljettu ydin.

$f(y+h) = f(y) + f(h) = -1 + 1 = 0$, ja siis $y + h \in B(h,r) \cap \mathrm{Ker}(f) = \emptyset$, mikä on ristiriita, joka osoittaa, että f on rajoitettu r-säteisessä origokeskisessä pallossa.

Hypertaso eli maksimaalinen aito aliavaruus $H \subset E$ on joko suljettu tai tiheä siitä syystä, että sen sulkeuma on sitä itseään isompi aliavaruus, siis maksimaalisuuden nojalla joko E tai H.

Ydintä koskevat väitteet koskevat yhtä lailla muitakin tasa-arvopintoja, koska ne saadaan ytimestä siirrolla, joka on homeomorfismi. □

Huomautus 21.2. Äärettömulotteisten normiavaruuksien välinen lineaarikuvaus ei yleensä ole jatkuva, vaikka sen ydin olisi suljettu. Vastaesimerkin tarjoaa identtinen kuvaus, kun avaruudessa on kaksi epäekvivalenttia normia.[105]

Ryhdymme nyt tarkastelemaan normiavaruuden muitakin konvekseja joukkoja kuin affiineja aliavaruuksia.

21.2. Konveksin joukon sulkeuma ja sisus.

Lause 21.3. *Normiavaruudessa konveksi joukko C on aina polkuyhtenäinen, siis myös yhtenäinen.*

Todistus. Konveksin joukon kaksi pistettä voi yhdistää suorastaan janalla. □

Lause 21.4. *Normiavaruudessa E konveksin joukon C sulkeuma $\overline{C}$ on konveksi.*

Todistus. Olkoon $c \in \mathrm{co}\,\overline{C}$, jolloin c voidaan lausua konveksina kombinaationa

$$c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i,$$

missä $c_i \in \overline{C}$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ja $\lambda_i \in [0,1]$. Valitaan joukosta C jonot $c_{ij} \to c_i$ ja huomataan, että

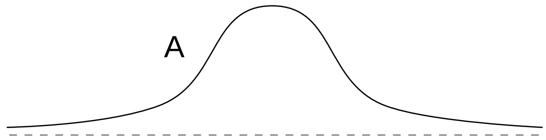
$$C \ni \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_{ij} \to \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i = c. \qquad \square$$

[105] Derivointioperaattori avaruudelta $(\mathcal{C}^\infty([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ itselleen on epäjatkuva, vaikka sen ydin on yksiulotteinen.

Huomautus 21.5. Osajoukon $A \subset E$ konveksin verhon sulkeuma on edellisen lauseen mukaan konveksi. Se on siis suppein konveksi ja suljettu joukko, joka sisältää A:n. Sanomme sitä A:n *konveksiksi suljetuksi verhoksi* $\overline{\mathrm{co}}\,(A)$. Koska $\overline{\mathrm{co}}\,(A)$ on A :ta laajempi suljettu joukko, niin se sisältää sulkeuman $\overline{A}$ ja siis konveksina joukkona myös sen konveksin verhon:

$$\mathrm{co}\,(\overline{A}) \subset \overline{\mathrm{co}}\,(A)$$

Esimerkillä, vaikkapa joukolla $A = \{(x, \frac{1}{1+x^2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ avaruudessa $\mathbb{R}^2$ voi todeta, että inkluusio saattaa olla aito.

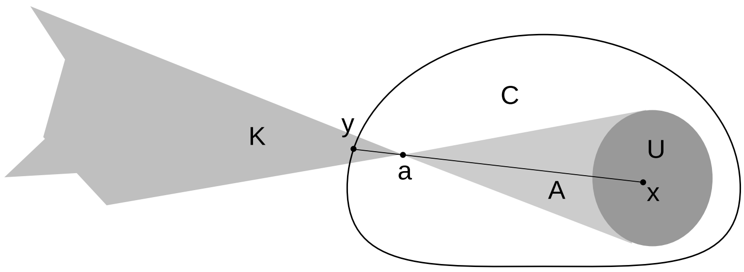


Kuva 52. $\mathrm{co}\,(\overline{A}) \subsetneq \overline{\mathrm{co}}\,(A)$.

Konveksin joukon sisuskin on konveksi, mutta tämä asia ei ole aivan yhtä välittömästi ilmeinen kuin sulkeuman konveksius. Todistamme seuraavassa saman tien vähän voimakkaamman tuloksen:

Lemma 21.6. *Olkoon C normiavaruuden E konveksi joukko, $x \in \operatorname{int} C$ ja $y \in \overline{C}$. Tällöin* avoin jana $]x, y[= \{\lambda x + \mu y \mid \lambda, \mu > 0,\ \lambda + \mu = 1\}$ *sisältyy C:n sisukseen* $\operatorname{int} C$.

Todistus. Koska x on joukon $C \subset E$ sisäpiste, on olemassa avoin joukko $U \subset E$, jolle $x \in U \subset C$. Olkoon $a \in\,]x, y[$. Riittää näyttää, että $[x, a[\, \subset \operatorname{int} C$. Yleisyydestä tinkimättä voimme merkintöjen yksinkertaistamiseksi olettaa, että a on origo. Osoitetaan ensin, että $a = 0 \in C$. Jos näin ei olisi, niin konveksius estäisi mitään joukon $K = \bigcup_{\lambda<0} \lambda U$ alkiota kuulumasta joukkoon C. Avoin joukko K sisältyisi siis C:n komplementin sisukseen, mutta tietysti $y \in K$, joten nyt y olisi C:n komplementin sisäpiste vastoin oletusta $y \in \overline{C}$.



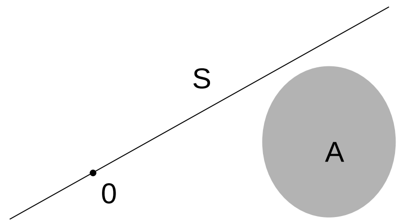
Kuva 53. Konveksi sisus.

Niinpä origo a kuuluu konveksiin joukkoon C. Konveksius takaa nyt, että avoin joukko $A = \bigcup_{0<\lambda<1} \lambda U$ sisältyy C:hen, mutta tutkittava jana $]a, x]$ sisältyy joukkoon A, mikä todistaa väitteen. $\square$

SEURAUS 21.7. *Normiavaruudessa konveksin joukon $C \subset E$ sisus on konveksi.*

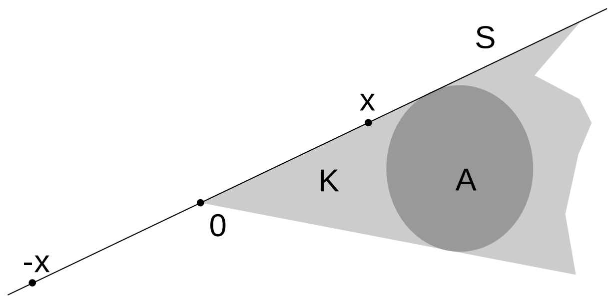
Seuraavaksi todistamme muutamia viime kädessä hyvin syvällisiä lauseita, joiden yksinkertasiselta näyttävä sanoma on, että normiavaruuden aito konveksi osajoukko sisältyy johonkin suljettuun puoliavaruuteen. Aloitamme vaatimattoman näköisellä lemmalla, jonka todistaminen kuitenkin vaatii juuri todistamamme lemman lisäksi ajattelua.

LEMMA 21.8. *Olkoot E vähintään kaksiulotteinen normiavaruus ja $A \subset E$ konveksi avoin joukko, johon origo ei kuulu. Tällöin on olemassa yksiulotteinen aliavaruus eli origon kautta kulkeva suora $S \subset E$, joka ei leikkaa joukkoa A.*



KUVA 54. KONVEKSIN JOUKON VÄISTÄMINEN.

TODISTUS. Voimme olettaa, että A ei ole tyhjä. Joukko $K = \bigcup_{\lambda>0} \lambda A$ on epätyhjä, avoin ja konveksi eikä sisällä origoa eikä siis myöskään alkioidensa vastavektoreita.

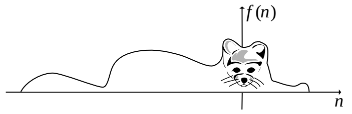


KUVA 55. APUKARTIO.

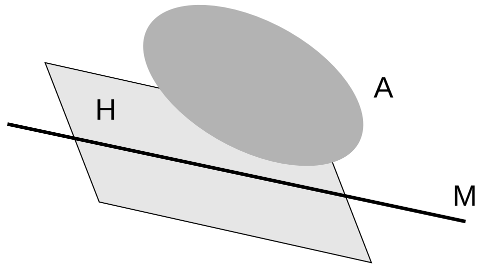
Koska avaruus E on vähintään kaksiulotteinen, on origon komplementti $E \setminus \{0\}$ tietenkin yhtenäinen joukko. Sen aito, epätyhjä osajoukko K on avoin, joten se ei voi olla suljettu yhtenäisesä metrisessä avaruudessa $M = E \setminus \{0\}$, vaan joukon K sulkeumaan avaruudessa M kuuluu jokin piste $x \notin K$. Olemme huolehtineet siitä, että $x \neq 0$. Osoitamme, että x virittää halutunlaisen suoran S. Ensinnäkin K:n määritelmä takaa, että positiivisilla λ ei λx kuulu joukkoon K. Toisaalta myöskään $-\lambda x$ ei ole K:ssa, sillä muuten olisi $-\lambda x \in K = \operatorname{int} K$, jolloin edellisen lemman nojalla origo olisi K:n sisäpiste. $\square$

21.3. Mazurin laajennuslause ja Banachin erottelulause.

Seuraavassa on keskeisessä asemassa Mazurin laajennuslause. Jo sen äärellisulotteisilla versioilla on oma merkityksensä mm. optimointiteoriassa, mutta meidän kannaltamme oleellisin on ääretönulotteinen versio.



Lause 21.9 (Mazurin laajennuslause)[106]. *Olkoon A konveksi, avoin, epätyhjä joukko reaalisessa normiavaruudessa E ja olkoon $M \subset E$ affiini aliavaruus siten, että $M \cap A = \emptyset$. Tällöin on olemassa hypertaso $H \subset E$ siten, että $M \subset H$ ja $H \cap A = \emptyset$. Tällainen H on suljettu.*



Kuva 56. Mazurin laajennuslause.

Todistus. Voimme olettaa, että $0 \in M$, jolloin M on lineaarinen aliavaruus ja $0 \notin A$. Oletamme aluksi vielä, että $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Hypertasoehdokkaaksi H valitaan maksimaalinen alkio inkluusiorelaatiolla järjestetystä perheestä

$$\mathcal{A} = \{N \subset E \mid N \text{ on lineaarinen aliavaruus, } M \subset N,\ N \cap A = \emptyset\}.$$

Jos E on äärellisulotteinen, niin tällainen maksimaalinen aliavaruus voidaan konstruoida laajentamalla aliavaruutta M vaiheitain dimensio kerrallaan, kunnes laajentaminen ei enää onnistu leikkaamatta joukkoa A, mikä välttämättä tapahtuu ennenkuin aliavaruuden dimensio saavuttaa koko avaruuden $E = \mathbb{R}^n$ dimension n. Jos E ei ole äärellisulotteinen, niin maksimaalisen alkion olemassaolo voidaan äärellisulotteisuuteen vetoamatta perustella Zornin lemmalla, sillä aliavaruusperheen $\mathcal{A}$ jokaisella inkluusion mielessä täysin järjestetyllä osaperheellä on yläraja perheessä $\mathcal{A}$, nimittäin alkioidensa yhdiste.

Maksimaalinen aliavaruus H toteuttaa selvästikin lauseen ehdot, kunhan näemme, että se on hypertaso. Tarkastelemme aluksi äärellisulotteista tilannetta. Valitaan H:lle jokin kanta $(x_1, \ldots, x_m)$ ja täydennetään se koko avaruuden $E = \mathbb{R}^n$ kannaksi $(x_1, \ldots, x_n)$. Osoitetaan, että "uusien" kantavektorien $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ virittämä aliavaruus $F = \langle x_{m+1}, \ldots, x_n \rangle$ on yksiulotteinen. Projektio

$$\varphi : E \to F : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mapsto \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i x_i$$

on avoin kuvaus (19.12-13) ja kuvaa siis A:n avoimeksi, konveksiksi, origoa sisältämättömäksi joukoksi avaruuteen F. Jos F olisi vähintään kaksiulotteinen, niin olisi edellisen lemman nojalla olemassa F:n yksiulotteinen aliavaruus S, joka ei leikkaisi A:n kuvajoukkoa $\varphi(A)$. Silloin olisi

$$M \subset H = \varphi^{-1}(\{0\}) \subsetneq \varphi^{-1}(S)$$

[106]Stanislaw Mazur 1905–1981, Puola.

ja

$$\varphi^{-1}(S) \cap A = \emptyset$$

joten aliavaruus $\varphi^{-1}(S)$ rikkoisi H:n maksimaalisuutta. Kannan avulla konstruoimamme aliavaruus F on siis yksiulotteinen ja H on hypertaso ainakin siinä tapauksessa, että $E = \mathbb{R}^n$. Ääretönulotteisessa tapauksessa käytämme samaa todistusmenetelmää, mutta kantana on nyt Hamelin kanta: Valitaan aliavaruudelle $H \subset E$ jokin Hamel-kanta K, ja laajennetaan se koko E:n kannaksi $L \supset K$. Kannan avulla määritelty projektio aliavaruudelle

$$\varphi : E \to F = \langle L \smallsetminus K \rangle : \sum_{x \in L} \alpha_x x \mapsto \sum_{x \in L \smallsetminus K} \alpha_x x$$

on esimerkin 19.13 mukaan nytkin avoin kuvaus.

Löydetty hypertaso H ei ole tiheä, koska se ei leikkaa avointa joukkoa A. Siksi se on lauseen 21.1 nojalla suljettu.

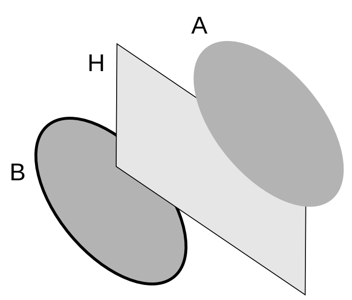
Näin on reaalinen versio todistettu. Kompleksinen versio palautuu reaaliseen, sillä kompleksikertoiminen normiavaruus on luonnollisesti samalla reaalikertoiminen. Näin on olemassa reaalisessa mielessä hypertaso $H \supset M$, joka ei leikkaa A:ta. Nyt

$$H \cap iH$$

on kompleksisessa mielessä aliavaruus ja selvästi maksimaalinen sellainen eli kompleksinen hypertaso. Sekään ei tietenkään leikkaa A:ta ja sekin on suljettu. $\square$

SEURAUS 21.10. (BANACHIN EROTTELULAUSEEN REAALINEN MUOTO). *Olkoon E reaalikertoiminen normiavaruus ja A ja $B \subset E$ kaksi erillistä konveksia joukkoa, joista ainakin toinen — olkoon se A — avoin. Tällöin on olemassa jatkuva lineaarikuvaus $f : E \to \mathbb{R}$, joka erottaa joukot A ja B. Tällä tarkoitamme, että*

$$f(A) \cap f(B) = \emptyset.$$



KUVA 57. BANACHIN EROTTELULAUSE.

TODISTUS. Voimme olettaa, että joukot ovat epätyhjiä. Erotusten joukko

$$C = A - B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\} = \bigcup_{b \in B} (A - b)$$

on avoin, konveksi eikä sisällä origoa. Sovellamme Mazurin lausetta siihen ja aliavaruuteen $M = \{0\}$. Saamme origon kautta kulkevan suljetun hypertason H, joka ei leikkaa C:tä. On olemassa jokin lineaarimuoto — olkoon se f — jonka ydin on H. Tämä toteuttaa lauseen ehdon, sillä f on jatkuva ja jos $a \in A$ ja $b \in B$ siten, että $f(a) = f(b)$, niin $(a - b) \in (A - B) \cap \mathrm{Ker}(f) = (A - B) \cap H = \emptyset$. $\square$

Vaikka konveksius on reaalinen käsite, on Banachin erottelulauseesta olemassa seuraava näennäisesti kompleksinen muoto.

Seuraus 21.11. (Banachin erottelulauseen kompleksinen muoto).
Olkoot E kompleksinen normiavaruus ja A ja $B \subset E$ kaksi erillistä konveksia joukkoa, joista ainakin toinen — olkoon se A — avoin. Tällöin on olemassa jatkuva lineaarimuoto eli kompleksilineaarikuvaus $f : E \to \mathbb{C}$, joka erottaa joukot A ja B siinä mielessä, että on olemassa reaaliluku α, jolle

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\, f(x) &< \alpha \quad \forall x \in A \textit{ ja} \\ \mathrm{Re}\, f(x) &\geq \alpha \quad \forall x \in B. \end{aligned}$$

Perustelu. Lause palautuu reaaliseen tilanteeseen, kun huomaa, että jokainen kompleksikertoiminen vektoriavaruus E, on samalla reaalikertoiminen vektoriavaruus. Pienellä laskulla voi tarkastaa, että jos $f : E \to \mathbb{C}$ on kompleksilineaarinen, niin sen reaaliosa

$$g : E \to \mathbb{R} : g(x) = \mathrm{Re}\, f(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) + \overline{f(x)})$$

on reaalilineaarinen — yleensä ei tietenkään kompleksilineaarinen. Toisaalta jokainen kompleksisessa vektoriavaruudessa määritelty reaalilineaarimuoto $g : E \to \mathbb{R}$ on siitä muodostetun kompleksilineaarisen kuvauksen

$$f : E \to \mathbb{C} : x \mapsto g(x) - ig(ix)$$

reaaliosa. E:n reaali- ja kompleksilineaarimuotojen joukot ovat siis tässä mielessä samat. Myös on selvää, että f ja g ovat yhtä aikaa jatkuvat.

21.4. Hahnin ja Banachin lause.
Näytämme nyt, että Banachin erottelulause ja Mazurin laajennuslause ovat olennaisesti yhtäpitäviä Hahnin ja Banachin kuuluisan lauseen kanssa, josta ne yleensä on tapana johtaa funktionaalianalyysin oppikirjoissa. Teemme sen todistamalla Hahnin ja Banachin lauseen Mazurin laajennuslauseen avulla.

Lause 21.12 (Hahn ja Banach 1927-29.)[107].
Olkoon $F \subset E$ normiavaruuden aliavaruus ja $f : F \to \mathbb{K}$ lineaarimuoto, jolla

$$|f(x)| \leq \|x\| \quad \forall x \in F.$$

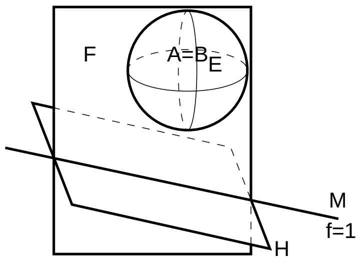
Tällöin on olemassa lineaarimuoto $g : E \to \mathbb{K}$, jolle

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) \quad \forall x \in F \quad \textit{ja} \\ |g(x)| &\leq \|x\| \quad \forall x \in E. \end{aligned}$$

[107] Hans Hahn 1879–1934, Itävalta.

TODISTUS. Voidaan olettaa, että $f \neq 0$. Käytetään Mazurin laajennuslausetta. Valitaan konveksiksi, avoimeksi joukoksi E:n avoin yksikköpallo $A = B_E$ ja affiiniksi aliavaruudeksi avaruuden F hypertaso

$$M = \{x \in F \mid f(x) = 1\}.$$



KUVA 58. HAHNIN JA BANACHIN LAUSEEN TODISTUS.

Mazurin lause antaa avaruuden E suljetun hypertason $H \supset M$, joka ei leikkaa yksikköpalloa B_E. Koska $H \cap F$ sisältää F:n hypertason M, mutta ei yhdy koko F:ään (joka E :n aliavaruutena tietenkin leikkaa sen yksikköpalloa), niin $H \cap F = M$. Määritellään g siksi E:n lineaarimuodoksi, joka saa H:ssa arvon 1. Se täyttää vaatimukset. $\square$

Lauseen oletus merkitsee, että $f : F \to \mathbb{K}$ on aliavaruudessa F jatkuva ja sen normi $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$ on enintään 1. Hahnin ja Banachin lause sanoo, että tällaisella f on olemassa laajennus koko avaruuden lineaarimuodoksi g, jolla myös on enintään normi 1. Erityisesti g on jatkuva.

HUOMAUTUS 21.14. (YLEISTYKSISTÄ). Hahnin ja Banachin lauseesta seuraa yksinkertaisella skaalauksella, että jokaisella aliavaruuden jatkuvalla lineaarimuodolla on olemassa laajennus koko avaruuden jatkuvaksi lineaarimuodoksi, jolla on sama normi.

Hahnin ja Banachin lauseessa maaliavaruutena on $\mathbb{K}$. Tietenkin sen tilalla voi olla mikä tahansa yksiulotteinen avaruus. Tarkastelemalla koordinaatteja erikseen huomaa, että jatkuvan lineaarikuvauksen voi jatkaa aliavaruudesta koko avaruuteen, kunhan maalipuolella on äärellisulotteinen normiavaruus. Lause ei päde edes tässä lievemmässä muodossa, jos maalipuolella on yleinen normiavaruus.

Hahnin ja Banachin lause pätee samalla tavalla *seminormiavaruudessa* E, siis olettaen, että $\|\cdot\|$ on muuten kuten normi, mutta sallitaan $\|x\| = 0$ myös kun $x \neq 0$. Edellä esitetty todistus toimii tällöinkin.

Reaalikertoimisessa tapauksessa riittää olettaa, että normin roolissa on pelkkä positiivinen *sublineaarikuvaus* eli *sublineaarinen funktionaali*, toisin sanoen muuten seminormi, mutta vaaditaan homogeenisuus $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ ainoastaan positiivisille λ. Tämä muoto Hahnin ja Banachin lauseesta on tunnetuin ja se on paras todistaa suoraan Zornin lemman avulla, ensin reaalisena versiona kuten useimmissa kirjoissa tehdäänkin.

Mazurin laajennuslause, Banachin erottelulause ja Hahnin ja Banachin lause yleistyvät todistuksineen myös ns. lokaalikonvekseihin topologisiin vektoriavaruuksiin. Yleisissä topologisessa vektoriavaruudessa sen sijaan ei käy näin, vaan esimerkkinä voi mainita, että topologisen vektoriavaruuden jatkuvien lineaarimuotojen joukko, eli sen topologinen duaali, saattaa olla pelkkä $\{0\}$.

22. Duaaliavaruuksien teoriaa

22.1. Duaali ja transpoosi.

KERTAUS 22.1. Jos E on normiavaruus tai edes topologinen vektoriavaruus, merkitsemme sen *algebrallista* ja *topologista duaaliavaruutta*

$$E' = \{f : E \to \mathbb{K} \mid f \text{ on lineaarinen}\}$$
$$E^* = \{f : E \to \mathbb{K} \mid f \text{ on lineaarinen ja jatkuva}\}$$

Olemme jo huomanneet, että monen klassisen avaruuden duaali on jokin toinen tunnettu avaruus. Toisaalta duaalin muodostaminen on yleisesti konstruktio, jolla syntyy uusia avaruuksia. Tässä luvussa takastelemme niitä yleiseltä kannalta.

LAUSE 22.2. *Jos E on normiavaruus, F sen aliavaruus ja $x \in E \setminus \overline{F}$, eli jos etäisyys $d = d(x, F) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ on suurempi kuin 0, niin on olemassa jatkuva lineaarimuoto $f \in E^*$ siten, että*

$$\begin{aligned} F &\subset \operatorname{Ker}(f), \\ \|f\| &= 1 \\ \textit{ja} \qquad f(x) &= d. \end{aligned}$$

TODISTUS. Tarkastellaan aliavaruuksien summaa

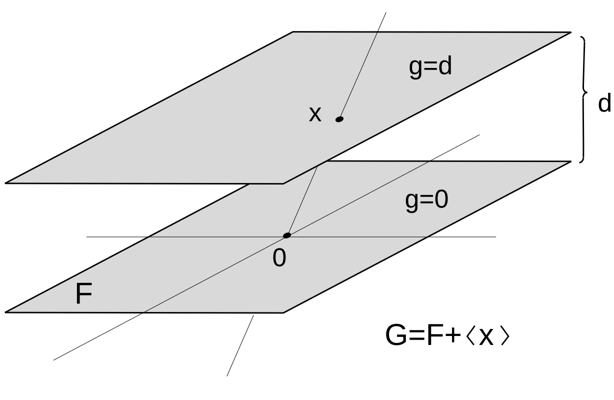
$$G = F + \langle x \rangle.$$

Koska $x \notin F$, niin $\langle x \rangle \cap F = \{0\}$, eli $\langle x \rangle + F$ on suora summa $\langle x \rangle \oplus F$, jolloin jokaisella vektorilla $z \in G$ on vain yksi esitys muodossa

$$z = a + b = a + \lambda x,$$

missä $a \in F$ ja $b = \lambda x \in \langle x \rangle = \mathbb{K}x$. Ideana on huomata, että

$$g : G \to \mathbb{K} : z = a + \lambda x \mapsto \lambda d$$



KUVA 59. LAUSE 22.2.

on halutunlainen lineaarimuoto E:n aliavaruudessa G ja käyttää Hahnin ja Banachin lausetta sen laajentamiseen koko avaruuteen E. Loppu on tarkastusta:

(1) $g(x) = d$.
(2) $g \in G'$ ja $\mathrm{Ker}(g) = F$.
(3) $\|g\| = 1$, erityisesti $g \in G^*$, sillä

$$\begin{aligned}\|g\| &= \sup\left\{\frac{|g(z)|}{\|z\|} \mid z \in G \setminus \{0\}\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{|\lambda d|}{\|a+\lambda x\|} \mid a \in F,\ \lambda \in \mathbb{K},\ a+\lambda x \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{d}{\|\frac{a}{\lambda}+x\|} \mid a \in F,\ \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{d}{\|-y+x\|} \mid y \in F\right\} \\ &= \frac{d}{\inf\{\|x-y\| \mid y \in F\}} = \tfrac{d}{d} = 1.\end{aligned}$$

(4) On siis Hahnin ja Banachin lauseen mukaan olemassa vaaditunlainen laajennus. □

Huomautus 22.3. Etäisyysehto $d > 0$ on välttämätön, voisihan F muuten olla vaikka tiheä aliavaruus, jolloin siinä häviävää lineaarimuotoa 0 ei voisi laajentaa muuksi jatkuvaksi lineaarimuodoksi kuin nollaksi.

Seuraus 22.4. *Jos E on normiavaruus ja F sen sellainen suljettu aliavaruus, että mikään nollasta eroava jatkuva lineaarimuoto $f \in E^*$ ei häviä F:ssä, niin F on koko E.*

Seuraus 22.5. *Jos E on normiavaruus ja $x \in E \setminus \{0\}$, niin on olemassa $f \in E^*$ siten, että*

$$\begin{aligned}\|f\| &= 1 \text{ ja} \\ f(x) &= \|x\|.\end{aligned}$$

Todistus. Käytetään lausetta 22.2 valiten $F = \{0\}$. □

Seuraus 22.6. *Jos E on normiavaruus ja $x \in E$, niin*

$$\|x\| = \sup_{f \in B_{E^*}} |f(x)|.$$

Erityisesti, jos $f(x) = 0$ kaikilla $f \in E^*$, niin $x = 0$.

Huomautus 22.7. Seurauksen 22.6 väite ei ole triviaali, vaan tärkeä tulos, jonka todistamiseksi on tarvittu Hanhin ja Banachin lause, siis viime kädessä Zornin lemma. Väite merkitsee, että luonnollinen kuvaus

$$E \to E^{**} : x \mapsto [f \mapsto f(x)]$$

on isometrinen lineaarikuvaus, eli *upotus.* E voidaan siis samastaa normiavaruutena erääseen *biduaalinsa* E^{**} aliavaruuteen: $E \subset E^{**}$.

SEURAUS 22.8. *Jokaisella normiavaruudella E on olemassa täydentymä, ts. täydellinen normiavaruus eli Banachin avaruus, $\widetilde{E} \supset E$ siten, että E on $\widetilde{E}$:ssä tiheä.*

TODISTUS. Esimerkin 14.3 mukaan normiavaruuden duaaliavaruus E^* on Banachin avaruus. Siis myös E^*:n duaali E^{**} on täydellinen. Edellä samastettiin E erääseen E^{**}:n aliavaruuteen, sekin nimeltään E. Nyt E:n sulkeuma E^{**}:ssa on täydellisen avaruuden suljettuna aliavaruutena itsekin täydellinen, ja tietysti E on siinä tiheä. $\square$

MÄÄRITELMÄ 22.9. Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T \in \mathcal{B}(E, F)$. Kuvauksen T *transpoosi eli duaalikuvaus* on lineaarikuvaus

$$T^t : F^* \to E^* : f \mapsto f \circ T.$$

LAUSE 22.10. *Olkoot E ja F normiavaruuksia ja $T \in \mathcal{B}(E, F)$. Tällöin T:n transpoosi $T^t : F^* \to E^*$ on jatkuva ja*

$$\|T^t\| = \|T\|.$$

TODISTUS. Transpoosin T^t jatkuvuus on ilmeinen asia, sillä jos $x \in E$ ja $f \in E^*$, niin

$$\begin{aligned} |(T^t f)(x)| &= |f(Tx)| \leq \|f\|\|Tx\| \leq \|f\|\|T\|\|x\|, \text{ joten} \\ \|T^t f\| &\leq \|T\|\|f\|, \text{ ja siis} \\ \|T^t\| &\leq \|T\|. \end{aligned}$$

Sen todistamiseen, että transponointi todella säilyttää operaattorinormin, tarvitaan Hahnin ja Banachin lausetta. Seurauksen 22.6 mukaan on

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \sup_{f \in B_{F^*}} |f(Tx)| = \sup_{f \in B_{F^*}} |(T^t f)(x)| \\ &\leq \sup_{f \in B_{F^*}} \|(T^t f)\|\|x\| = \|x\| \sup_{f \in B_{F^*}} \|(T^t f)\| \\ &= \|x\|\|T^t\|, \text{ joten} \\ \|T\| &\leq \|T^t\|. \qquad \square \end{aligned}$$

HUOMAUTUS 22.11. Transpoosin muodostaminen $T \mapsto T^t$ on lineaarinen isometria $\mathcal{B}(E, F) \to \mathcal{B}(F^*, E^*)$, toisin sanoen

$$(\lambda T + \mu S)^t = \lambda T^t + \mu S^t$$
$$(T \circ S)^t = S^t \circ T^t.$$

PERUSTELU. Isometrisuus on lause 22.10 ja lineaarisuus ilmeinen.

HUOMAUTUS 22.12. Hilbert-avaruuden H operaattorin adjungaattia tarkoittavaa merkintää T^* käytetään usein myös tarkoittamaan T:n transpoosia. Koska

Hilbert-avaruuden duaali on se itse, niin adjungaatti onkin isomorfiaa vaille sama asia kuin transpoosi: kaikilla $x, y \in H$ on

$$(x|T^*y) = f_{T^t y}(x)$$

Kompleksikertoimisessa tapauksessa on kuitenkin syytä noudattamaamme varovaisuuteen: koska $y \mapsto f_y$ on konjugaattilineaarinen, on sitä myös isomorfismi transpoosin ja adjungaatin välillä. Käytännössä ei tule ongelmia, koska Hilbert-avaruuden duaalin alkiot lähes aina samastetaan vektoreihin, jolloin käytetään pelkästään adjungaattia. On kyllä hyvä muistaa, että vaikka adjungaatin muodostaminen on konjugaattilineaarikuvaus, niin transpoosin muodostaminen on lineaarinen myös kompleksisessa tapauksessa, kuten matriisialgebrassa on totuttu laskemaan.

Huomautus 22.13. Duaaliavaruuden alkioita eli jatkuvia funktionaaleja merkitään toisinaan kuten funktiota, toisinaan taas aakkosten loppupään kirjaimilla kuten yleensäkin vektoreita, tarvittaessa tosin pilkuilla tai tähdillä koristellen. Alkion $x^* \in E^*$ arvoa kohdassa $x \in E$ eli alkioiden $x \in E$ ja $x^* \in E^*$ *duaalituloa* merkitään luvun 13 tapaa noudattaen $x^*(x)$:n sijasta usein, jopa yleensä

$$x^*(x) = \langle x|x^*\rangle.$$

Muuttujien suhteen melko symmetrinen merkintätapa antaa lineaarikuvauksen transpoosin määritelmälle tyylikkään ja adjungaatin määritelmää muistuttavan ulkoasun:

$$\langle Tx|x^*\rangle = \langle x|T^t x^*\rangle \qquad \forall x \in E,\, x^* \in F^*.$$

22.2. Jonon heikko suppeneminen ja rajoittuneisuus.

Määritelmä 22.14. Olkoon E normiavaruus. Joukko $A \subset E$ on *heikosti rajoitettu*, mikäli jokainen $f \in E^*$ kuvaa sen rajoitetuksi joukoksi, eli

$$\sup_{x \in A} |\langle x|f\rangle| < \infty \quad \forall f \in E^*.$$

Koska jatkuva lineaarikuvaus kuvaa rajoitetut joukot rajoitetuiksi joukoiksi, niin jokainen normin mielessä rajoitettu joukko on heikosti rajoitettu, mutta osoittautuu, että tämä ehto pätee myös kääntäen, ja koko käsite on siis tarpeeton:

Lause 22.15. *Normiavaruuden E joukko A on heikosti rajoitettu aina ja vain ollessaan rajoitettu normin mielessä, eli kun*

$$\sup_{x \in A} \|x\| < \infty.$$

Todistus. Koska E^* on Banachin avaruus, voidaan tasaisen rajoituksen periaatetta soveltaa lineaarikuvausperheeseen

$$\mathcal{H} = \{f \mapsto \langle x|f\rangle \mid x \in A\} \subset \mathcal{B}(E^*, \mathbb{K}).$$

On siis olemassa luku M, jolle

$$|\langle f|x\rangle| \leq M\|f\| \quad \forall x \in A, f \in E^*.$$

Hahnin ja Banachin lauseen seurauksena upotus $E \to E^{**}$ on lineaarinen isometria ja siis

$$\|x\| \leq M \quad \forall x \in A. \qquad \square$$

Heikko rajoittuneisuus on sama asia kuin rajoittuneisuus, mutta jonon heikko suppeneminen eroaa yleensä suppenemisesta normin mielessä:

Määritelmä 22.16. Normiavaruuden E jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suppenee heikosti* kohti vektoria $x \in E$,

$$\begin{aligned} & x_n \rightharpoonup x, \\ \text{eli} \quad & x_n \xrightarrow{w} x, \end{aligned}$$

mikäli jokaisella $f \in E^*$ pätee $\langle x_n|f\rangle \to \langle x|f\rangle$.

Huomautus 22.17.

(1) Normiavaruuden E heikosti suppeneva jono on aina rajoitettu.
(2) Suppeneva jono suppenee aina heikosti, mutta heikosta suppenemisesta ei seuraa suppeneminen normin mielessä. Vastaesimerkin antaa avaruuden ℓ^2 standardikantavektoreiden jono $(e_n)_{n=1}^\infty$, joka suppenee nollaa kohti heikosti, vaikka $\|e_i\| = 1$. Avaruudessa ℓ^2 pallon keskipiste kuuluu siis sen pinnan heikkoon sulkeumaan!
(3) Äärellisulotteisessa avaruudessa jono suppenee heikosti aina ja vain supetessaan tavallisessa mielessä.
(4) Luvussa 23 määritellään ns. *heikko topologia*, jonka mielessä tapahtuva konvergenssi on samaa kuin heikko suppeneminen. Heikkoa topologiaa ei yleensä anna mikään normi eikä se edes ole aina metrisoituva.

22.3. Banachin limekset $(*)$.

Huomautus 22.18. Tavoittelemme kuuta taivaalta: yritämme määritellä raja-arvon jokaiselle rajoitetulle reaalilukujonolle

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x \in \ell^\infty.$$

Lähtökohtana ovat seuraavat tavallisen raja-arvon ominaisuudet:

(1) $c = \{x \mid x \text{ suppenee}\}$ on ℓ^∞:n suljettu aliavaruus tavallisen sup-normin mielessä, jota koko ajan käytämme.
(2) $x \mapsto \lim x$ on lineaarinen ja jatkuva, ts. $\lim \in c^*$.
(3) Kun $x \in c$, niin
$$\inf x_n \leq \lim x_n \leq \sup x_n.$$
(4) Lineaarimuoto $\lim : c \to \mathbb{R}$ on siirtoinvariantti siinä mielessä, että jonoilla $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(x_{n+k})_{n\in\mathbb{N}}$ $(k \in \mathbb{N})$ on sama raja-arvo.

Tarkoituksena on osoittaa, että lineaarimuoto $\lim \in c^*$ voidaan laajentaa lineaarimuodoksi LIM koko avaruuteen ℓ^∞ siten, että ominaisuudet (3) ja (4) säilyvät, jolloin tietysti samalla

(5) $\liminf x_n \le \mathrm{LIM}(x) \le \limsup x_n$ ja erityisesti
(6) $\mathrm{LIM} \in \ell^{\infty *}$ ja $\|\mathrm{LIM}\| = 1$.

On Hahnin ja Banachin lauseen nojalla heti selvää, että jonkinlainen laajennus jatkuvaksi lineaarimuodoksi avaruudessa ℓ^∞ on olemassa. Suuruusluokkaehto (3) ja siirtoinvarianssi (4) kaipaavat perusteluja.

Määritelmä 22.19. Lineaarimuoto $\mathrm{LIM} \in \ell^{\infty *}$ on nimeltään *Banachin limes*, *Mazurin limes*[108] eli *yleistetty raja-arvokäsite*, mikäli se toteuttaa edellä mainitut ehdot (3), (4), (5) ja (6).

Lause 22.20. *Banachin limeksiä on olemassa.*

Todistus. Olkoon $x \in \ell^\infty$. Määritellään

$\mathrm{LIM}_n(x) = \frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$
$p(x) = \limsup_{n\to\infty} \mathrm{LIM}_n(x)$
$c_\Sigma = \{x \in \ell^\infty \mid \exists \lim_{n\to\infty} \mathrm{LIM}_n(x)\}$.
$\mathrm{LIM}\, x = \lim_{n\to\infty} \mathrm{LIM}_n(x)$, kun $x \in c_\Sigma$.

Nyt on helppoa todeta, että Hahnin ja Banachin lauseen sublineaariversion ehdot ovat voimassa:

(1) p on äärellinen ja sublineaarinen koko avaruudessa ℓ^∞:

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \text{ja} \quad p(tx) = tp(x) \quad \forall x, y \in \ell^\infty,\ t \ge 0.$$

(2) c_Σ on ℓ^∞:n vektorialiavaruus.
(3) $\mathrm{LIM} : c_\Sigma \to \mathbb{R}$ on lineaarinen.
(4) $\mathrm{LIM}(x) \le p(x) \quad \forall x \in c_\Sigma$.

Näin ollen on siis olemassa funktionaalin LIM lineaarinen laajennus $\mathrm{LIM} : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ siten, että

$$-p(-x) \le \mathrm{LIM}(x) \le p(x).$$

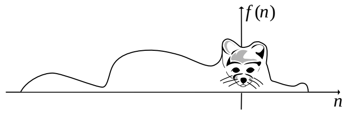
Ilmi selvästi $\mathrm{LIM} \in (\ell^\infty)^*$ ja

$$\inf x_n \le \mathrm{LIM}(x) \le \sup x_n.$$

Translaatioinvarianssin toteamiseksi riittää näyttää, että jonoilla $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $x_\tau = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ on sama yleistetty raja-arvo, eli että $\mathrm{LIM}(x - x_\tau) = 0$. Tässä on hyötyä arviosta (4).

$$\begin{aligned}\|\mathrm{LIM}(x - x_\tau)\| &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{(x_1 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n+1})}{n}\\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{(x_1 - x_{n+1})}{n} = 0. \qquad \square\end{aligned}$$

[108]Ks. [W] s. 132



Harjoitustehtäviä ja huomautuksia lukuun VI

Harjoitustehtäviä lukuun VI.

20.1. Todista lause 20.6: konveksius säilyy lineaarikuvauksissa ja siirroissa.

20.2. Todista, että konveksien joukkojen tulojoukko on konveksi.

20.3. Näytä, että (jo semi-)normiavaruuden E yksikköpallolla $B = B(0, 1)$ on seuraavat geometriset ominaisuudet

(1) B on konveksi.
(2) B *absorboi pisteet*; ts. kaikille $x \in E$ on olemassa luku $M > 0$ siten, että $Mx \in B$.
(3) B on *tasapainoinen*, ts. jos $x \in B$ ja $|\lambda| \leq 1$, niin $\lambda x \in B$.

Piirrä lopuksi esimerkkinä normin

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

yksikköpallo avaruudessa $\mathbb{R}^2$ tai $\mathbb{R}^3$.

21.1. Hahnin ja Banachin lauseessa maaliavaruutena on yksiulotteinen avaruus. Tarkastelemalla koordinaatteja erikseen voi lauseesta tehdä version, jossa maalipuolella on äärellisulotteinen normiavaruus. Tee sellainen! Saat tinkiä laajennuksen normista.

21.2. Olkoot E ja F Banachin avaruuksia ja $G \subset E$ tiheä aliavaruus sekä $T \in \mathcal{B}(G, F)$. (a) Näytä, että T voidaan laajentaa kuvaukseksi $\widetilde{T} \in \mathcal{B}(E, F)$. Vihje: Jos $z_n \to x \in E$, niin $\exists \lim_{n\to\infty} Tz_n$. (b) Onko vihjeessä ehdotetu laajennus ainoa, mahdollinen?

21.3. (jatkoa) Osoita esimerkillä, että Hahnin ja Banachin lauseen vastine ei päde, jos maalipuolen $\mathbb{K}$ korvataan yleisellä normiavaruudella. Vihje: Valitse tiheä $F \subset E$ ja jatkettavaksi kuvaukseksi F:n identtinen kuvaus.[109]

21.4. $(*)$ Todista reaalinen Hahnin ja Banachin lause klassisessa muodossa eli *Hahnin ja Banachin lauseen sublineaarikuvausversio*:

Oletetaan, että $F \subset E$ on vektorialiavaruus, $g : F \to \mathbb{R}$ on lineaarinen, $\varphi : \mathbf{E} \to \mathbb{R}_+$ on sublineaarinen ja $g(x) \leq \varphi(x)$ kaikilla $x \in F$. Väitetään, että on olemassa lineaarimuoto, siis $f : E \to \mathbb{R}$, jolla $f \big|_F = g$, ja $f(x) \leq \varphi(x)$ kaikilla $x \in E$.

Käytä Zornin lemmaa kaikkiin g:n laajennuksiin $h : E' \to \mathbb{R}$, joilla ehto pätee, järjestyksenä tietysti "laajennuksena oleminen". Riittää löytää aito laajennus — vaikkapa vain yhden dimension verran. (Ensimmäinen) sellainen konstruoidaan valitsemalla jokin $x_0 \in E \setminus \overline{F}$ ja asettamalla $f(m + \alpha x_0) = f(m) + c\alpha$ sopivalla vakiolla $c \in \mathbb{R}$. Epäyhtälöehto merkitsee, että on oltava

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{m}{\alpha}\right) + c \leq \varphi\left(x_0 + \frac{m}{\alpha}\right) \quad \forall \alpha > 0,\, m \in F \\ \text{ja} \quad & f\left(-\frac{m}{\alpha}\right) - c \leq \varphi\left(-x_0 - \frac{m}{\alpha}\right) \quad \forall \alpha < 0,\, m \in F. \end{aligned}$$

Osoita, että tällainen c on olemassa.

[109] Vihjeen antamassa ratkaisussa F ei ole täydellinen. Osaatko korjata asian? Minä en keksinyt parempaa esimerkkiä. Tästä esimerkistä kiitos Lassi Kuritulle.

21.5. Täydennä Banachin erottelulauseen kompleksisen version 21.11 perusteluja: Olkoon E kompleksinen vektoriavaruus ja E_r vastaava reaalinen vektoriavaruus, ts. additiivisena ryhmänä $E = E_r$, mutta E_r:ssä sallitaan ainoastaan reaaliluvulla kertominen. Olkoon $g : E_r \to \mathbb{R}$ reaalilineaarinen ja

$$f(x) = g(x) - ig(ix) \quad \forall\, x \in E.$$

Osoita, että f on kompleksilineaarinen.

21.6. Olkoon E normiavaruus, $x, y \in E$. Näytä, että $x \neq y$, jos ja vain jos on olemassa $f^* \in E^*$, jolle $f^*(x) \neq f^*(y)$.

21.7. Olkoon E äärettönulotteinen normiavaruus. Osoita, että on olemassa ääretön lineaarisesti riippumaton joukko alkioita $f^* \in E^*$, joille $\|f\| = 1$.

21.8. Olkoon E äärettönulotteinen Banachin avaruus. Osoita, että on olemassa jono äärettönulotteisia suljettuja aliavaruuksia

$$E \supsetneq H_1 \supsetneq H_2 \supsetneq H_3 \supsetneq \dots .$$

21.9. Lineaarikuvausten avaruus

$$\mathcal{B}(E, F) = \{\text{jatkuvat lineaarikuvaukset:} E \to F\}$$

varustettuna operaattorinormilla on täydellinen, kun F on täydellinen. Todista Hahnin ja Banachin lauseen avulla, että jos $\mathcal{B}(E, F)$ on täydellinen, niin F on täydellinen.

21.10. Todista Banachin erottelulause Hahnin ja Banachin lauseen avulla. Tarvitsemmekohan yleistä muotoa, jossa käytetään sublineaarifunktiota p? Siinä tapauksessa emme ole saaneet kaunista lauseiden ekvivalenssitodistusta.

22.1. Todista, että jonolla $(x_i)_1^\infty$ voi olla enintään yksi heikko raja-arvo x.

22.2. Olkoon $x = (x_k)_1^\infty \in \ell^p$ kiinteä ja $1 < p < \infty$. Määritellään ℓ^p:ssä jono (y_n) asettamalla

$$\begin{aligned} y_1 &= (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) \\ y_2 &= (0, x_1, x_2, x_3, \dots) \\ y_3 &= (0, 0, x_1, x_2, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

Näytä, että (y_k) suppenee heikosti nollaan eli $y_k \rightharpoonup 0$ avaruudessa ℓ^p. Tiedät, että $\ell^{p*} = \ell^q$.

22.3. (jatkoa) Anna esimerkki funktioavaruuden $L^p[0,1]$:n jonosta, joka suppenee heikosti, mutta ei normin mielessä. Tässä $1 < p < \infty$.

22.4. Näytä, että äärellisulotteisessa avaruudessa $E = \mathbb{R}^n$ jonon heikko ja vahva suppeneminen ovat sama asia.

22.5. Osoita, että jos H on Hilbert-avaruus ja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H$ sen jono, niin seuraavat ovat yhtäpitäviä:

(1) $x_n \rightharpoonup x$ ja $\|x_n\| \to \|x\|$
(2) $x_n \to x$.

Ohje: Tutki ensin tilannetta, jossa $\|x_n\| = \|x\|$.

22.6. Onko jonolla $f_n(t) = \exp(\sin \frac{n}{t})$, $n \in \mathbb{N}$, heikosti suppenevaa osajonoa $L^p[0,1]$:ssä? $(1 < p < \infty)$.

22.7. Määrää Hilbert-avaruuden yksikköpallon pinnan $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$ sulkeuma, konveksi verho, heikko sulkeuma ja suljettu konveksi verho.

22.8. $(*)$ Funktion $\varphi \in \mathcal{C}^1[0,1]$ Sobolev-normia, missä $1 < p < \infty$, merkitään $\|\varphi\|_{1,p} = \|\varphi\|_p + \|\varphi'\|_p$. Näytä, että jos $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{C}[0,1]$ on jono, jolle $\|f_n\|_{1,p} \le 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin on olemassa osajono $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ja funktiot f ja $h \in L^p[0,1]$, joille

a) $f_{n_k} \rightharpoonup f$ avaruudessa $L^p[0,1]$,
b) $f'_{n_k} \rightharpoonup h$ avaruudessa $L^p[0,1]$ ja
c)
$$\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx = -\int_0^1 h(x)g(x)\,dx$$
kaikille niille $g \in \mathcal{C}^1[0,1]$, joille $g(0) = g(1) = 0$.

Vertaa Sobolev-avaruuksia käsittelevään lukuun ja huomaa, että h on f:n distribuutioderivaatta.

Huomautuksia lukuun VI.

Isomorfialause. On selvää, että lineaarikuvausen $L : E \to F$ tasa-arvojoukot ovat täsmälleen samoja kuin tekijäavaruuden $E/\operatorname{Ker} L$ alkiot, joten $E/\operatorname{Ker} L$ ja kuva-avaruus $L(E)$ ovat isomorfiset vektoriavaruudet. Tämän äärellisulotteinen erikoistapaus on lineaarialgebran *dimensiolause*.

Historiaa. Ensimmäiset Hahnin ja Banachin lauseen suuntaiset tulokset ovat Rieszin ja Hellyn[110] lauseet vuosilta 1910 ja 1912. Hahnin lause julkaistiin Crellen[111] lehden 100-vuotisjuhlanumerossa v. 1927. Banachin versio esiintyy vuoden 1929 kirjassa [B]. Kompleksinen versio, Bohnenblust-Sobczyk-Suhomlinov[112], saatiin vasta 1930-luvun lopulla. Mazurin geometrinen versio on vuodelta 1933.

Sulkeuman konveksiudesta. Seuraava tyylikäs todistus konveksiuden säilymiselle sulkeumassa ei käytä jonoja ja kelpaa siten esikuvaksi yleistettäessä jopa metrisoitumattomaan topologiseen vektoriavaruuteen: Olkoot

$$\begin{cases} \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+ \\ \alpha + \beta = 1. \end{cases}$$

Kuvaus $\varphi : (x,y) \mapsto \alpha x + \beta y$ on jatkuva $E \times E \to E$. Siksi kaikille joukoille $J \subset E \times E$ pätee jatkuvuuden määritelmästä saatava kaava

$$\varphi(\overline{J}) \subset \overline{\varphi(J)},$$

[110] Eduard Helly 1884–1943, Saksa-USA.

[111] August Leopold Crelle 1780–1855, Saksa. Ensimmäisen merkittävän matemaattisen aikakauslehden perustaja.

[112] H F. Bohnenblust n. 1938 Princeton, USA, Andrew F. Sobczyk 1915 - , USA.

ja kun vielä muistamme, että tuloavaruudessa[113] tulojoukon sulkeuma on aina sulkeumien tulo $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$, niin saamme

$$\begin{aligned} \alpha\overline{C} + \beta\overline{C} &= \varphi(\overline{C} \times \overline{C}) = \varphi(\overline{C \times C}) \\ &\subset \overline{\varphi(C \times C)} = \overline{\alpha C + \beta C} \subset \overline{C}, \end{aligned}$$

mikä takaakin sulkeuman konveksiuden. □

Täydentymän konstruktiosta. Huomaa, miten täydentymää käytettiin ja miten se konstruoitiin suoraan puhuttaessa Lebesgue'in ja Sobolevin avaruuksista luvuissa 15 ja 16.

ℓ^∞:n duaali. Avaruuden ℓ^∞ duaali sisältää tietenkin kaikki Banachin limekset. Toisaalta on niin, että $\ell^{\infty *}$ on kaikkien joukossa $\mathbb{N}$ määriteltyjen rajoitettujen, äärellisesti additiivisten mittojen joukko.

Additiivisen mitan probleema. Tarkastellaan kysymystä onko olemassa kaikille joukoille $A \subset \mathbb{R}^n$ määritelty *äärellisesti additiivinen mitta*, jolla mitattuina tavallisessa mielessä yhtenevät joukot olisivat yhtä suuria. Yllättävä vastaus on: "Riippuu dimensiosta."

Jos $n \geq 3$, niin on olemassa vastaesimerkki, sillä *Banachin ja Tarskin paradoksina*[114] tunnettu valinta-aksioomaan perustuva konstruktio[115] jakaa vaikkapa pallon äärellisen moneen osaan, joista parin siirron ja kierron jälkeen voidaan koota kaksi alkuperäisen kanssa yhtenevää palloa. Konstruktio ei kuitenkaan toimi, kun $n \leq 2$. Yhdessä ja kahdessa dimensiossa onkin olemassa halutunlainen joukkofunktio. Yksiulotteisessa avaruudessa sen olemassaolon voi todistaa seuraavalla tavalla Hahnin ja Banachin lauseen avulla.

Otetaan tavoitteeksi määritellä rajoitettujen funktioiden sup-normilla varustetussa Banachin avaruudessa $\mathcal{F}_b = \mathcal{B}d(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ jatkuva lineaarinen funktionaali $\varphi\colon \mathcal{F}_b \to \mathbb{R}$, jolla on seuraavat ominaisuudet

(1) $\varphi(1) = 1$.
(2) Jos $f(t) \geq 0$ kaikissa pisteissä $t \in \mathbb{R}$, niin $\varphi(f) \geq 0$.
(3) φ on *siirtoinvariantti*: $\varphi(T_x f) = \varphi(f)$, missä on merkitty $T_x f(t) = f(t-x)$.
(4) φ on *peilausinvariantti*: $\varphi(Rf) = \varphi(f)$, missä on merkitty $Rf(t) = f(-t)$.

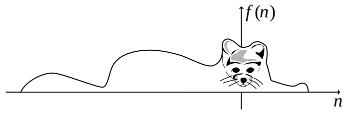
Jos tällainen φ löytyy, niin etsityksi joukkofunktioksi kelpaa tietenkin $\mu(A) = \varphi(\chi_A)$.

Jotta ehto (3) pätisi, on ainakin oltava $\varphi(f - T_x f) = \varphi(f) - \varphi(T_x f) = 0$ kaikilla $f \in \mathcal{F}_b$ ja siis myös $\varphi(g) = 0$ kaikilla $g \in M = \langle \{ f - T_x f \mid f \in \mathcal{F}_b,\, x \in \mathbb{R} \} \rangle$. Jatkuvan funktionaalin φ rajoittuman aliavaruuteen M on siis oltava nolla eli φ saadaan jatkamalla nollafunktionaali aliavaruudesta $M \subset \mathcal{B}d$ koko avaruuteen $\mathcal{B}d$. Saamme ehdon (2) voimaan, jos järjestämme niin, että φ saa positiivisia arvoja konveksissa avoimessa joukossa $A = \{ f \in \mathcal{F}_b \mid \inf f > 0 \}$. Tämä on Mazurin laajennuslauseen mukaan toteutettavissa, sillä seuraavan pienen lemman mukaan M ja A ovat erillisiä. Ehto (1) saadaan voimaan jakamalla saatu φ luvulla $\varphi(1)$. Lopuksi saadaan ehto (4) voimaan korvaamalla näin normeerattu φ funktionaalilla $\psi(f) = \frac{1}{2}\big(\varphi(f) + \varphi(Rf)\big)$.

[113] $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Tulon sulkeumaa koskeva väite pätee kyllä minkä tahansa topologisten avaruuksien tulolle. Ks. 4.3.2.

[114] Alfred Tarski 1902–1983. Maineikas loogikko. Puola-USA.

[115] Periaatteessa jo Hausdorff v.1917



Lemma. *Olkoot* $f_1, ..., f_n \in \mathcal{B}d(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *ja* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. *Tällöin funktio* $g = \sum_{i=1}^{n}(f_i - T_{x_i} f_i)$ *ei kuulu edellä määriteltyyn konveksiin joukkon* A, *vaan*

$$\inf g = \inf_{t \in \mathbb{R}} \left(\sum_{i=1}^{n} (f_i - T_{x_i} f_i)(t) \right) \leq 0.$$

Perustelu. Todistuksen keksimiseksi voi vaikka aloittaa tilanteella, jossa $n = 1$, 2 tai 3. Sen tehtyään huomaa, että kannattaa laskea yhteen g:n arvot sopivasti valituissa pisteissä ja todeta, että summa on pienempi kuin vakio kertaa pisteiden lukumäärä, jonka taas voi valita mielivaltaisen suureksi. Sopivasti valittuja pisteitä ovat tässä luvut $t = \sum_{i=1}^{n} j_i x_i$, missä $j_i \in \mathbb{N}$. Tarkkaan ottaen valitaan ensin $p \in \mathbb{N}$ ja sitten tutkittaviksi p^n lukua $t_{j_1,\ldots,j_n} = \sum_{i=1}^{n} j_i x_i$, missä $1 \leq j_k \leq p$. Näin saadaan tutkitavaksi summa

$$S_p = \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{p} g\,\big(\sum_{i=1}^{n} j_i x_i\big).$$

Sijoittamalla tähän funktion g lauseke ja ryhmittelemällä termit f_i:den mukaan huomaa, että termit kumoavat toisensa parittain ja jäljelle jäävät ainoastaan ne, joissa esiintyy $f_i(\sum_k j_k x_k)$, missä $j_k = 0$ tai p. Näitä on vain $Kp^{(n-1)}$ kappaletta jollain vakiolla K, joka erityisesti ei riipu lukumäärästä p. Näin $|S_p| \leq Kp^{(n-1)}$. Koska summassa S_p on alkuperäisiä termejä p^n kpl, niin joku luvuista $t = \sum_{i=1}^{n} j_i x_i$ toteuttaa epäyhtälön $g(t) \leq \frac{K}{p}$. Koska $p \in \mathbb{N}$ oli mielivaltainen, on $\inf g \leq 0$. $\square$

Entäpä 2-ulotteinen tapaus? Yleistetään koko tilannetta: Kaikki yhteneväisyyskuvaukset muodostavat *tason symmetriaryhmän*, joka toimii joukossa $E = \mathbb{R}^2$ ja jonka suhteen invarianttia mittaa haetaan. Voi yrittää konstruoida äärellisesti additiivisen invariantin mitan itselleen ryhmälle G ja siirtää sen joukkoon E. Valinta-aksiooman avulla pystyy todistamaan, että jokaisessa Abelin ryhmässä on invariantti mitta, ja että tämä ominaisuus periytyy aliaryhmille ja tekijäryhmille. Tätä kautta päästään käsiksi erityisesti tason symmetriaryhmään ja yleensäkin ns. ratkeaviin ryhmiin.[116] Seuraava huomautus antaa vähän yksityiskohtia.

Banachin limeksen yleistyksestä puoliryhmille. *Puoliryhmä* on epätyhjä joukko S varustettuna laskutoimituksella $+$, josta oletetaan vain, että se on assosiatiivinen. Puoliryhmässä S voidaan määritellä *siirto*:

Funktion $f \in \mathcal{B}d = \mathcal{B}d(S, \mathbb{R})$ *(oikeanpuoleinen) siirrännäinen* on funktio $T_s f \in \mathcal{B}d$: $T_s f(t) = f(t + s)$. Kuvaus $\mathcal{B}d \to \mathcal{B}d$: $f \mapsto T_s f$ on "matkaa" $s \in S$ vastaava *(oikea) siirto.*

(1) Siirto on jatkuva: $\|T_s f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$, missä "=" ainakin silloin, kun S on ryhmä.
(2) Suoraan määritelmästä seuraa siirron lineaarisuus ja positiivisuus:

$$T_s(f + g)_s = T_s f + T_s g,$$
$$T_s(\lambda f) = \lambda T_s f \text{ ja}$$
$$f \geq 0 \implies T_s f \geq 0.$$

[116] [Gf]?

(3) Puoliryhmän assosiatiivisuus antaa vastaavan ominaisuuden siirrolle:

$$T_{s+t}f = T_t(T_s f),$$

missä järjestyksellä on merkitystä, ellei puoliryhmä satu olemaan kommutatiivinen kuten $\mathbb{N}$.

Puoliryhmän S *siirtoinvarinatti keskiarvo* on lineaarimuoto $\varphi \in \mathcal{F}_b^*$, jolle pätee kaikilla $s \in S$ ja $f \in \mathcal{B}d$:

(1) $\varphi(T_s f) = \varphi(f)$
(2) $\inf f \leq \varphi(f) \leq \sup f$.

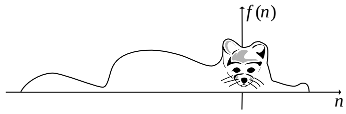
Esimerkiksi Banachin limes on siirtoinvariantti keskiarvo kommutatiivisella puoliryhmällä $\mathbb{N}$. Siirtoinvariantti keskiarvo on yleensä kaikkea muuta kuin yksikäsitteinen. Siirtoinvariantteja keskiarvoja on olemassa joissakin puoliryhmissä, mutta ei kaikissa. Erityisesti kommutatiivisessa puoliryhmässä on siirtoinvariantti keskiarvo. Todistus toistelee edellisten huomatusten ideoita.

Seuraavissa ryhmissä on siirtoinvariantti keskiarvo:

(1) Jokainen äärellinen ryhmä.
(2) Jokainen kompakti topologinen ryhmä.
(3) Sellaisen ryhmän aliryhmään tai tekijäryhmä, jolla on siirtoinvariantti keskiarvo.
(4) Ryhmä, jonka jollain normaalilla aliryhmällä ja vastaavalla tekijäryhmällä on siirtoinvariantti keskiarvo.
(5) Ratkeava ryhmä.

Todistukset eivät ole varsinaisesti vaikeita.

Hyvä lukija. Kirjoita tekijälle parannusehdotuksia lukuun VI.



VII HEIKOT TOPOLOGIAT JA REFLEKSIIVISET AVARUUDET (∗)

23. Heikot topologiat

23.1. Topologioita.

Joukon X kaikkien osajoukkojen joukkoa 2^X on tapana sanoa X:n *potenssijoukoksi.* Nimen ja merkintätavan taustalla on havainto, että n-alkioisella joukolla on tasan 2^n eri osajoukkoa.

Muistamme luvusta 1, että topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ on joukko X varustettuna topologialla eli perheellä $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ osajoukkojaan, joita sanomme avaruuden X avoimiksi joukoiksi ja jotka toteuttavat topologian aksioomat: X ja $\emptyset$ ovat avoimia, samoin mielivaltaisen monen avoimen joukon yhdiste ja äärellisen monen avoimen joukon leikkaus.

Esimerkki 23.1. Esimerkkejä topologisista avaruuksista:

(1) Joukon X suppein mahdollinen topologia on sen *indiskreetti topologia*

$$\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}.$$

(2) Joukon X laajin mahdollinen topologia on sen *diskreetti topologia* 2^X, jossa kaikki joukot ovat avoimia. Diskreetti topologia on esimerkki *metrisoituvasta* topologiasta, ts. se saadaan standardikonstruktiolla jostakin metriikasta, nimittäin *diskreetistä metriikasta*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x = y \\ 1 \text{ muuten.} \end{cases}$$

(3) (a) Normiavaruuden $(E, \|\cdot\|)$ *normitopologia* on sen kaikkien *normin* $\|\cdot\|$ *mielessä avointen* joukkojen joukko:

$$\mathcal{T} = \{A \subset E \mid \forall x \in A \quad \exists r > 0 : B_{\|\cdot\|}(x, r) \subset A\}.$$

Pallot $B_{\|\cdot\|}(x, r)$ määritellään samalla tavalla kuin metriikkaan liittyvät pallot: $B_{\|\cdot\|}(x, r) = \{y \in E \mid \|x-y\| < r\}$. Erityisesti lukujen avaruus $\mathbb{K}$ ajatellaan seuraavassa, kuten yleensäkin, varustetuksi norminsa $|\cdot|$ topologialla.
(b) Muistamme, että seminormi on muuten sama asia kuin normi, paitsi että nollasta eroavankin vektorin seminormi voi olla 0 (Määr. 6.2). Seminormiavaruuden (E, p) *seminormitopologia* on sen kaikkien *seminormin* p *mielessä avointen* joukkojen joukko:

$$\mathcal{T} = \{A \subset E \mid \forall x \in A \quad \exists r > 0 : B_p(x, r) \subset A\},$$

missä *semipallot* $B_p(x, r)$ on määritelty: $B_p(x, r) = \{y \in E \mid p(x - y) < r\}$.

Määritelmä 23.2. (Lokaalikonveksi topologia).

(1) Olkoon E vektoriavaruus ja $\mathcal{N}$ joukko sen seminormeja. Seminormiparveen $\mathcal{N}$ liittyvä *lokaalikonveksi topologia* $\mathcal{T}$ on suppein topologia, jossa kaikkiin seminormeihin $p \in \mathcal{N}$ liittyvät semipallot $B_p(x,r)$ ovat avoimia, toisin sanoen

$$\mathcal{T} = \{A \subset E \mid \forall x \in A \, \exists r > 0, p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{N} \text{ siten, että } \bigcap_{j=1}^{n} B_{p_j}(x,r) \subset A\}.$$

(2) Edellisestä tärkeä erikoistapaus on se, jossa $I \subset E'$ on joukko E:n lineaarimuotoja ja $\mathcal{N}$ muodostuu kaikista muotoa

$$p_f(\cdot) = |\langle \cdot | f \rangle|$$

olevista seminormeista p_f, missä $f \in I$. Tätä lokaalikonveksia topologiaa sanomme *pariin* (E, I) *liittyväksi heikoksi topologiaksi*

$$\sigma(E, I).$$

(3) Kun E on normiavaruus, tarjoutuu edellisen erikoistapaukseksi luonnostaan E:n *heikko topologia* eli *w-topologia*

$$\sigma(E, E^*).$$

(4) Erityisesti normiavaruudella E^* on edellisen mukaan heikko topologia

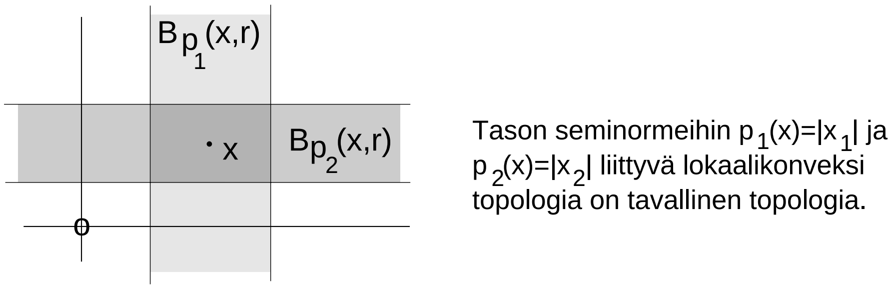
$$\sigma(E^*, E^{**}),$$

mutta koska $E \subset E^{**}$, niin duaaliavaruudella E^* on yhtä luontevasti myös topologia

$$\sigma(E^*, E),$$

jota sanomme sen *w^*-topologiaksi.*

Lokaalikonveksien ja heikkojen topologioiden määritelmät ovat ensi näkemältä mutkikkaita. Palaamme niihin pian uudelleen paremmin varustautuneina käsitteiden ymmärtämiseen.



Kuva 60. Koordinaattiseminormit.

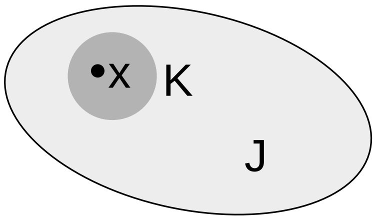
23.2. Topologian kanta ja alikanta.

Määritelmä 23.3. Avaruuden X topologian $\mathcal{T}$ osajoukko $\mathcal{K}$ eli kokoelma avoimia joukkoja on topologian $\mathcal{T}$ *kanta*, mikäli jokainen avoin joukko $A \in \mathcal{T}$ on yhdiste joistakin kantaan $\mathcal{K}$ kuuluvista joukoista. Käyttämällä kätevää merkintää $\bigcup \mathcal{K}_A = \bigcup_{B \in \mathcal{K}_A} B$ määritelmän ehto saa muodon

$$A \in \mathcal{T} \iff \exists \mathcal{K}_A \subset \mathcal{K}: \quad A = \bigcup \mathcal{K}_A.$$

Huomautus 23.4.

(1) Metrisen topologian kannaksi kelpaa kaikkien avoimien pallojen joukko.
(2) Mikä tahansa topologia on itsensä kanta.
(3) Lokaalikonveksin topologian kannaksi kelpaa kaikkien äärellisen monista avoimista semipalloista muodostettujen leikkausten joukko.
(4) Jos $\mathcal{K} \subset \mathcal{T}$ on avaruuden X topologian $\mathcal{T}$ kanta, niin X:n joukon $J \subset X$ sisäpisteet voi karakterisoida seuraavasti: $x \in \operatorname{int} J \iff \exists K \in \mathcal{K} : x \in K \subset J$.



Kuva 61. Sisäpiste.

Määritelmä 23.5. Topologian $\mathcal{T}$ osajoukko $\mathcal{A}$ on $\mathcal{T}$:n *alikanta*, mikäli siihen kuuluvien joukkojen äärelliset leikkaukset $A_1 \cap \cdots \cap A_n$ muodostavat topologian $\mathcal{T}$ kannan. Tämä merkitsee, että jokainen avoin joukko $A \in \mathcal{T}$ on yhdiste joistakin $\mathcal{A}$:han kuuluvien joukkojen äärellisistä leikkauksista:

$$A \in \mathcal{T} \iff \quad A = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} A_{ij} \quad \text{joillekin } A_{ij} \in \mathcal{A}.$$

Esimerkki 23.6.

(1) Jokainen topologian kanta on saman topologian alikanta.
(2) Lokaalikonveksin topologian alikannaksi kelpaa kaikkien semipallojen joukko $\{B_p(x,r) \mid p \in \mathcal{N},\ x \in E,\ r > 0\}$. Tämä on meille tärkein esimerkki!
(3) Olkoon X joukko ja $\mathcal{A} \subset 2^X$ mikä tahansa kokoelma sen osajoukkoja. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi sellainen topologia, että $\mathcal{A}$ on sen alikanta, nimittäin $\mathcal{A}$:han kuuluvien joukkojen äärellisten leikkausten yhdisteiden joukko $\mathcal{T}$:

$$A \in \mathcal{T} \iff \quad A = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j=1}^{n_i} A_{ij} \quad \text{joillekin } A_{ij} \in \mathcal{A}.$$

23.3. Aliavaruustopologian kanta ja alikanta.
Topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T})$ osajoukko $Y \subset X$ voidaan luonnollisella tavalla varustaa topologialla sopimalla, että avoimia ovat Y:n leikkaukset X:n avointen joukkojen kanssa, kuten tunnetusti on asian laita metrisen avaruuden aliavaruudessakin.

MÄÄRITELMÄ 23.7. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $Y \subset X$. Topologian $\mathcal{T}$ aliavaruuteen Y *indusoima topologia* eli Y:n *aliavaruustopologia* on $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap A \mid A \in \mathcal{T}\}$. Topologinen avaruus $(Y, \mathcal{T}_Y)$ on tällöin avaruuden X *topologinen aliavaruus*.

LAUSE 23.8. *Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus ja $Y \subset X$.*

(1) *Jos $\mathcal{K}$ on $\mathcal{T}$:n kanta, niin*
$$\mathcal{K}_Y = \{K \cap Y \mid K \in \mathcal{K}\}$$
on $\mathcal{T}_Y$:n kanta.

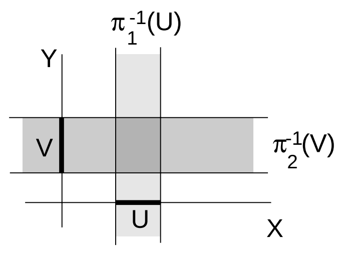
(2) *Jos $\mathcal{A}$ on $\mathcal{T}$:n alikanta, niin*
$$\mathcal{A}_Y = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{A}\}$$
on $\mathcal{T}_Y$:n alikanta.

(3) *Erityisesti, jos E on seminormijoukkoon $\mathcal{N}$ liittyvä lokaalikonveksi avaruus ja F sen lineaarinen aliavaruus, niin seminormien $p \in \mathcal{N}$ rajoittumat aliavaruuteen F määrittelevät siihen aliavaruustopologian.*

TODISTUS. Harjoitustehtäviä. $\square$

23.4. Tulotopologia ja Tihonovin lause.
Kahden tai useamman, vaikka äärettömänkin monen topologisen avaruuden tulojoukon voi luonnollisella tavalla varustaa topologialla käyttämällä alikannan ja kannan käsitteitä. Harjoituksen vuoksi aloitamme kahden avaruuden tapauksella. Ideana on valita tuloon suppein topologia, jossa luonnolliset projektiokuvaukset tulevat olemaan jatkuvia.

MÄÄRITELMÄ 23.9. Olkoot $(X, \mathcal{T}_X)$ ja $(Y, \mathcal{T}_Y)$ kaksi topologista avaruutta. Tulojoukon $X \times Y$ *tulotopologia* on se topologia $\mathcal{T}$, jonka alikantana ovat avointen joukkojen alkukuvat projektiokuvauksissa
$$\pi_X : X \times Y \to X : (x, y) \mapsto x$$
$$\pi_Y : X \times Y \to Y : (x, y) \mapsto y.$$



KUVA 62. TULOTOPOLOGIAN ALIKANTA JA KANTA.

HUOMAUTUS 23.10.

(1) Joukon $U \subset X$ alkukuva on $\pi_X^{-1}(U) = U \times Y$ ja joukon $V \subset Y$ alkukuva on $\pi_Y^{-1}(V) = X \times V$.
(2) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$ pätee kaikilla $A \subset X$ ja $B \subset Y$.
(3) Aikaisemmin määrittelemämme normiavaruuksien tulon topologia on selvästikin tulotopologia.
(4) Vastaavasti määritellään äärellisen monen topologisen avaruuden tuloavaruus

$$X_1 \times \cdots \times X_n.$$

Saman tuloksen saisi määrittelemällä rekursiivisesti $X_1 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ kaikilla n.

Ennen Tihonovin yleisen lauseen todistamista varten todistamme harjoitusmielessä erikoistapauksen:

LAUSE 23.11. *Kahden kompaktin topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T}_X)$ ja $(Y, \mathcal{T}_Y)$ tulo on kompakti.*

TODISTUS. Olkoon tulo $X \times Y$ lausuttu avoimien joukkojen yhdisteenä

$$X \times Y = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Tehtävänä on löytää äärellinen osapeite. On selvää, että voimme olettaa kaikkien A_i olevan tulotopologian kantajoukkoja, siis muotoa

$$A_i = U_i \times V_i$$

joillekin avoimille $U_i \subset X$ ja $V_i \subset Y$. Olkoon $x \in X$. Merkitsemme

$$I_x = \{i \in I \mid \exists y \in Y \text{ siten, että } (x, y) \in U_i \times V_i\}.$$

Tällöin

$$\{x\} \times Y \subset \bigcup_{i \in I_x} U_i \times V_i$$

ja siis

$$Y \subset \bigcup_{i \in I_x} V_i.$$

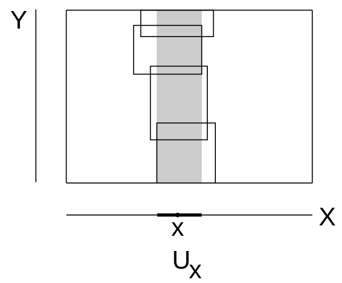
Koska avaruus Y on oletettu kompaktiksi ja joukot V_i avoimiksi, on olemassa äärellinen $H_x \subset I_x$ siten, että jo

$$Y \subset \bigcup_{i \in H_x} V_i.$$

Olkoon

$$U_x = \bigcap_{i \in H_x} U_i$$

Tämä joukko sisältää tietysti pisteen x ja on lisäksi avoin, koska on leikattu vain äärellisen monta avointa joukkoa.



KUVA 63. KAHDEN KOMPAKTIN AVARUUDEN TULO ON KOMPAKTI.

Lisäksi

$$U_x \times Y \subset \bigcup_{i \in I_x} U_i \times V_i.$$

Joukot U_x muodostavat kompaktin avaruuden X avoimen peitteen ja niistä voidaan siis poimia äärellinen osapeite $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_n} = X$. Nyt indeksijoukko $H = H_{x_1} \cup \cdots \cup H_{x_n} \subset I$ on äärellinen ja $X \times Y = \bigcup_{i \in H} U_i \times V_i$. $\square$

On aika määritellä äärettömän monen topologisen avaruuden tulo.

MÄÄRITELMÄ 23.12. Olkoot $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologisia avaruuksia kaikilla $i \in I$. Tulojoukon $\prod_{i \in I} X_i$ *tulotopologia* on se topologia $\mathcal{T}$, jonka alikantana ovat avointen joukkojen alkukuvat projektiokuvauksissa

$$\pi_j : \prod_{i \in I} X_i \to X_j : (x_i)_{i \in I} \mapsto x_j.$$

ESIMERKKI 23.13 (PISTEITTÄINEN SUPPENEMINEN). Olkoon J joukko ja X topologinen avaruus. Kaikkien funktioiden avaruus

$$X^J = \{f : J \to X \mid f : j \mapsto f(j) \text{ on funktio}\}$$

on sama asia kuin tuloavaruus

$$\prod_{j \in J} X_j, \qquad \text{missä } X_j = X \quad \forall j \in J.$$

Kaikkien funktioiden avaruudessa X^J on siten mahdollista määritellä tulotopologia. Tätä sanotaan *pisteittäisen suppenemisen topologiaksi.* Syy nimeen on ilmeinen: reaalifunktioiden $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jono $(f_n)_{n \in N}$ suppenee avaruuden $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ tulotopologian mielessä aina ja vain supetessaan pisteittäin.

Vastaavalla tavalla on tulotopologia sama kuin pisteittäisen suppenemisen topologia myös avaruudessa $s = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Tämä tulotopologia on metrisoituva!

LAUSE 23.14 (TIHONOV). *Mielivaltaisen monen kompaktin topologisen avaruuden tulo on kompakti.*

TODISTUS. Todistus on periaatteessa samantapainen kuin kahden avaruuden tulon tapauksessa, mutta joudumme käyttämään kantajoukkojen sijasta alikantajoukkoja. Tarvitaan siis seuraava apulause, jonka todistamisessa varsinainen ongelma on:

Lause 23.15 (Alexander)[117]. *Topologinen avaruus* $(X, \mathcal{T})$ *on kompakti, kunhan* $\mathcal{T}$*:llä on sellainen alikanta* $\mathcal{A}$*, että jokaisesta avaruuden* X *peitteestä alikantaan* $\mathcal{A}$ *kuuluvilla joukoilla voidaan valita äärellinen osapeite.*

Todistus. Todistus on Zornin lemman käyttöä.[118] Teemme vastaoletuksen: On olemassa epäkompakti avaruus $(X, \mathcal{T})$, jolla kuitenkin on lauseen oletuksen mukainen topologian alikanta $\mathcal{A}$. Olkoon

$$\Psi = \{\mathcal{V} \subset \mathcal{T} \mid \bigcup \mathcal{V} = X \text{ ja } \bigcup \mathcal{H} \subsetneq X \text{ kaikille äärellisille } \mathcal{H} \subset \mathcal{V}\}.$$

Ψ on siis niiden avointen peitteiden $\mathcal{V}$ joukko, joilla ei ole äärellistä osapeitettä. Tarkastamme, että Ψ toteuttaa Zornin lemman ehdon, kun järjestysrelaationa on joukkojen inkluusio.

Olkoon Ξ joukon Ψ epätyhjä osaketju eli täysin järjestetty joukko avaruuden X avoimia peitteitä, joista millään ei ole äärellistä osapeitettä. Ketjulla Ξ pitäisi olla yläraja joukossa Ψ. Sellaiseksi kelpaakin yhdiste sen kaikista joukoista, siis

$$\Lambda = \bigcup \Xi,$$

onhan tämä varmasti avaruuden X avointen peitteiden yhdisteenä itsekin sen avoin peite, eikä sillä voi olla äärellistä osapeitettäkään, koska sellainen sisältyisi peitteiden täydellisen järjestyksen takia yhteen näistä peitteistä vastoin ehtoa, jonka mukaan millään niistä ei pitänyt olla äärellistä osapeitettä.

Asiat ovat siis kunnossa ja Zornin lemma takaa maksimaalisen alkion $\mathcal{M}$ olemassolon inkluusiolla järjestetyssä joukossa Ψ. Sillä on seuraavat ominaisuudet:

(1) $\mathcal{M}$ on avaruuden X avoin peite
(2) Peitteellä $\mathcal{M}$ ei ole äärellistä osapeitettä
(3) Jos peitteeseen $\mathcal{M}$ lisätään yksikin uusi avoin joukko, niin syntyneellä peitteellä on äärellinen osapeite.

Ideana on konstruoida näitä yhdistelemällä $\mathcal{M}$:lle sittenkin äärellinen osapeite. Tarkastelkaamme niiden peitteeseen $\mathcal{M}$ kuuluvien joukkojen perhettä $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$, jotka samalla ovat alikantajoukkoja. Koska tietenkin $\mathcal{M} \cap \mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, niin äärellisen monen perheeseen $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$ kuuluvan joukon yhdiste ei voi peittää avaruutta X. Toisaalta $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$ muodostuu pelkistä alikantajoukoista ja olemme olettaneet, että sellaisista muodostetulla peitteellä on äärellinen osapeite. Siksi ei siis myöskään koko perhe $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$ voi olla X:n peite, vaan

$$\exists x \in X \setminus \bigcup \mathcal{M} \cap \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{M} \setminus \bigcup \mathcal{M} \cap \mathcal{A}.$$

Olkoon $V \in \mathcal{M}$ siten, että $x \in V$. Koska x on avoimen joukon V pisteenä sen sisäpiste, on olemassa kantajoukko, siis äärellisen monen alikantajoukon $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ leikkaus siten, että

$$x \in A_1 \cap \cdots \cap A_n \subset V.$$

[117] James Waddell Alexander 1888–1971, USA

[118] On ihan mielenkiintoista muistaa, että Zornin lemma on loogisesti yhtäpitävä valinta-aksiooman kanssa, joka väittää, että jokainen epätyhjien joukkojen tulojoukko on epätyhjä. Ekvivalenssi todistetaan liitteessä.

Piste x on valittu siten, että

$$x \notin \bigcup(\mathcal{M} \cap \mathcal{A}).$$

Yksikään joukoista $A_1, \ldots, A_n$ ei siis voi kuulua perheeseen $\mathcal{M} \cap \mathcal{A}$. Koska joukot A_j kuuluvat kaikki alikantaan $\mathcal{A}$, yksikään A_j ei ole $\mathcal{M}$:n alkio, vaan A_j:n lisääminen $\mathcal{M}$:ään tekee siitä ehdon (3) nojalla peitteen, jolla on äärellinen osapeite:

$$\begin{aligned}
&\forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad \exists\, B_1^j, \ldots, B_{m_j}^j \in \mathcal{M} : \\
&X = B_1^j \cup \cdots \cup B_{n_j}^j \cup A_j.
\end{aligned}$$

Kaikki näin valitut äärellisen monta joukkoa $B_i^j \in \mathcal{M}$ peittävät yhdessä joukon $V \in \mathcal{M}$ kanssa koko avaruuden X, sillä

$$X = \left(\bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{m_j} B_i^j\right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) \subset \left(\bigcup_{j=1}^{n} \bigcup_{i=1}^{m_j} B_i^j\right) \cup V.$$

Tämä on vastoin joukon $\mathcal{M}$ määritelmää. $\square$

TIHONOVIN LAUSEEN TODISTUS. Tihonovin lauseen todistamiseksi riittää Alexanderin lauseen perusteella näyttää, että kompaktien avaruuksien tulon $\prod_{i \in I} X_i$ peitosta tulotopologian alikantajoukoilla voidaan poimia äärellinen osapeitto. Olkoon siis

$$X = \prod_{i \in I} X_i = \bigcup_{\mu \in M} A_\mu,$$

missä jokainen A_μ on jonkin avoimen joukon $U_\mu \subset X_{i_\mu}$ alkukuva projektiossa:

$$A_\mu = \pi_{i_\mu}^{-1}(U_\mu).$$

Nyt on olemassa indeksi $i_0 \in I$, jolle

$$X_{i_0} = \bigcup_{i_\mu = i_0} U_\mu,$$

sillä muuten voisi kaikilla $i \in I$ valita "koordinaatin" $x_i \in X_i$, joka ei kuuluisi yhdisteeseen $\bigcup_{i_\mu = i} U_\mu$, jolloin piste $x = (x_i)_{i \in I} \in X$ ei — vastoin oletusta — kuuluisikaan yhdisteeseen $\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = X$.

Avaruuden X_{i_0} kompaktiuden nojalla sillä on olemassa äärellinen osapeite

$$X_{i_0} = U_{\mu_1} \cup \cdots \cup U_{\mu_k},$$

ja voidaan muodostaa tuloavaruuden äärellinen osapeite

$$X = A_{\mu_1} \cup \cdots \cup A_{\mu_k}. \qquad \square$$

23.5. Banachin ja Alaoglun lause heikosta kompaktiudesta.
Tulkitsemme seuraavassa normiavaruuden duaalin w^*-topologian tulotopologiaksi — itse asiassa pisteittäisen konvergenssin topologiaksi — jolloin saamme käyttöön Tihonovin lauseen kompaktiuden toteamiseksi.

Lause 23.17 (w^*-topologian karakterisointi). *Olkoon E normiavaruus. Tällöin topologinen duaali E^* on vektoriavaruuden $\mathbb{K}^E$ vektorialiavaruus. Lisäksi w^*-topologia $\sigma(E^*, E)$ tekee siitä tulotopologialla varustetun avaruuden $\mathbb{K}^E$ topologisen aliavaruuden.*

Todistus. Tietysti $E^* \subset \mathbb{K}^E$, joten riittää todistaa, että avaruuden $\mathbb{K}^E$ tulotopologia on sama kuin seminormien

$$p_x(f) = |f(x)|$$

lokaalikonveksi topologia.

(1) Kuvaukset $\pi_x : \mathbb{K}^E \to \mathbb{K} : f \mapsto f(x)$ määrittelevät tulotopologian ja ovat siten varmasti sen mielessä jatkuvia. Itseisarvokuvaus $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$ on tietysti jatkuva. Siksi tutkittavat seminormit, so. yhdistetyt kuvaukset

$$p_x = |\cdot| \circ \pi_x$$

ovat jatkuvia ja niiden semipallot siis avoimia tulotopologian mielessä. Kaikki lokaalikonveksin topologian alikantajoukot ovat näin ollen tulotopologiassa avoimia, joten kaikki muutkin lokaalikonveksin topologian avoimet joukot ovat tulotopologiassa avoimia.

(2) Olkoon seuraavaksi A tulotopologian alikantajoukko, siis muotoa

$$A = \pi_x^{-1}(B),$$

missä $B \subset \mathbb{K}$ on avoin. On selvää, että riittää tarkastella tilannetta, jossa B on $\mathbb{K}$:n topologian kantajoukko, siis 1-ulotteinen avoin pallo

$$B = B(\lambda, r) \subset \mathbb{K}.$$

Valitaan $g \in \mathbb{K}^E$ siten, että $\lambda = \pi_x(g) = g(x)$. Nyt $\pi_x^{-1}(B) = B_{p_x}(g, r)$, sillä

$$\begin{aligned} f \in \pi_x^{-1}(B) &\iff |f(x) - \lambda| < r \iff |f(x) - g(x)| < r \\ &\iff |(f-g)(x)| < r \iff p_x(f-g) < r \\ &\iff f \in B_{p_x}(g, r). \end{aligned}$$

Lokaalikonveksissa topologiassa avoimeksi todistettava joukko $\pi_x^{-1}(B)$ on siis suorastaan semipallo.

Lauseen 23.3.(3) mukaan seminormit p_x siis määräävät $\mathbb{K}^E$:n indusoiman aliavaruustopologian aliavaruuteen E^*. Toisaalta samat seminormit määräävät w^*-topologian $\sigma(E^*, E)$. Topologiat ovat näin ollen samat. $\square$