(5) Satunnaismuuttujat $f_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $(i \in I)$ ovat *riippumattomat*, mikäli niiden virittämät σ -algebrat ovat riippumattomat, eli mikäli kaikille $i_1, \ldots, i_n \in I$, $B_{i_1}, \ldots, B_{i_n} \in \mathcal{B}$ pätee

$$\mathbf{P}(f_{i_1}(\omega) \in B_{i_1}, \ldots, f_{i_n}(\omega) \in B_{i_n}) = \mathbf{P}(f_{i_1}(\omega) \in B_{i_1}) \ldots \mathbf{P}(f_{i_n}(\omega) \in B_{i_n}).$$

Määritelmä 11.20. (Brownin liike). Yksiulotteinen *Brownin liike* eli *Wienerin prosessi*[59] on kuvaus

$$W : \Omega \times [0, \infty[\to \mathbb{R} : \quad (\omega, t) \mapsto W_t(\omega)$$

jolla on seuraavat ominaisuudet

(0) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ todennäköisyysavaruus.
(1) Jokainen osittaiskuvaus $\omega \mapsto W_t(\omega)$ on satunnaismuuttuja eli mitallinen.
(2) Melkein kaikki osittaiskuvaukset $t \mapsto W_t(\omega)$ ovat jatkuva.[60]
(3) $W_0(\omega) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega$.
(4) Lisäykset ovat normaalijakautuneita siten, että kun $0 \le s < t < \infty$, niin kaikilla Borel-joukoilla $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ on

$$\mathbf{P}(W_t - W_s \in B) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_B \exp\Big(-\frac{x^2}{2(t-s)}\Big)\, dx.$$

(5) Lisäykset ovat riippumattomia: Kaikilla luvuilla $0 \le s_1 < \cdots < s_n \in [0, \infty[$ ovat satunnaismuuttujat $W_{s_1}, W_{s_2} - W_{s_1}, \ldots, W_{s_n} - W_{s_{n-1}}$ riippumattomia.

Tulkinta: $W_t(\omega)$ on kulun $\omega \in \Omega$ sijainti hetkellä t. Ensimmäinen aksiooma sanoo, että toteutunut kulku valitaan $\mathbf{P}$-mielessä satunnaisesti. Toinen aksiooma sanoo, että melkein jokainen toteutunut kulku on jatkuva ja kolmas sanoo, että se aloitetaan kohdasta 0. Neljäs aksiooma ilmoittaa, että kiinteällä aikavälillä tapahtuneet liikahdukset ovat jakautuneet Gaussin jakaumalla, jonka keskiarvo on 0 (ei aitoa trendiä) ja varianssi on verrannollinen aikaan (ei aitoa dispersiota). Tämä on keskeisen raja-arvolauseen takia luonnollinen vaatimus, kun halutaan, että Brownin liike on diskreetin satunnaiskulun raja-arvo.[61] Riippumattomuusaksiooma ilmoittaa, että kulku jatkuu saavuttamastaan kohdasta kuten origosta, siis "unohtaen historiansa" (saavuttamaansa kohtaa lukuunottamatta).

Huomautus 11.21.
Osoittautuu, että aksioomat (1)-(5) määrittelevät kuvauksen W eli Brownin liikkeen yksikäsitteisesti (Norbert Wiener 1923).

Tavoitteenamme on nyt määritellä *Stieltjes-tyyppinen integraali* funktion $t \mapsto W_t(\omega)$ suhteen, siis

$$\int_0^T f(t)\, dW_t\,(\omega).$$

[59] Norbert Wiener 1894–1964, USA-Ruotsi.
[60] Riittääkö tämä takaamaan mitallisuuden tuloavaruudessa?
[61] Itse asiassa (4) seuraa muista aksioomista.

Vaikka yksittäinen toteutunut satunnaiskulku eli osittaiskuvaus $t \mapsto W_t(\omega)$ on annetulla välillä $[s,t] \subset [0,\infty[$ jatkuva, niin se on itse asiassa todennäköisyydellä 1 rajoittamattomasti heilahteleva. Stieltjes-integraalin määritelmä toimii kuitenkin ainoastaan silloin, kun integroiva funktio on rajoitetusti heilahteleva.[62]

Itôn oivallus on, että määriteltävä integraali riippuu mitta-avaruuden pisteestä ω, ja onkin syytä yrittää konstruoida joukossa Ω määritelty reaaliarvoinen L^2-funktio

$$\omega \mapsto \int_0^T f(t)\, dW_t(\omega)$$

eikä sen yksittäisiä arvoja. Tämä onnistuu: integraali on määrittelyssään käytettävien summien raja-arvo Lebesgue'in avaruuden $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ mielessä, kun jakoa tihennetään. Esitämme nyt tarkan määritelmän tilanteessa, jossa integroitava funktio on muotoa $f(t,\omega) = u(W_t(\omega))$, missä $t \in [0,T]$ ja $\omega \in \Omega$.[63]

Määritelmä 11.22. (Itôn stokastinen integraali).
Olkoon $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integroituva ja

$$(*) \qquad \int_0^T \mathbf{E_P}\, u(W_t)^2 dt \,<\infty,$$

eli $u \circ W \in L^2(\Omega \times [0,T], \mathbf{P} \times m)$. Tässä on tavalliseen tapaan merkitty *odotusarvoa* symbolilla $\mathbf{E_P}$, joten

$$\mathbf{E_P}\, u(W_t)^2 \;=\; \int_\Omega u(W_t(\omega))^2\, d\,\mathbf{P}(\omega),$$

kaavassa $(*)$ on siis integrointi yli joukon $\Omega \times [0,T]$ tulomitan $\mathbf{P} \times m$ suhteen, missä m on Lebesgue'in mitta välillä [0,T].

Määritellään *Itôn stokastinen integraali* käyttämällä Riemann-Stieltjes-summissa tasavälistä jakoa ja funktioiden arvoja jakovälien alkupisteissä.[64]

$$\int_0^T u(W_t)\, dW_t = \lim_{n\to\infty} \left(\Big(\sum_{i=1}^n u\big(W_{(i-1)\frac{T}{n}}\big)\Big) \cdot \Big(W_{i\frac{T}{n}} - W_{(i-1)\frac{T}{n}} \Big) \right),$$

missä konvergenssi tapahtuu avaruudessa $L^2(\Omega, \mathbf{P})$.

Huomautus 11.23. Ei ole kovin vaikeaa todistaa, että Itôn integraali on olemassa asettamillamme ehdoin. L^2-avaruuden alkiona se on määritelty ainoastaan $\mathbf{P}$-melkein kaikilla $\omega \in \Omega$.

---

[62] [A].

[63] Tarkastelu yleistyy kyllä tilanteeseen, jossa $f(t,\omega) = u(t, W_t(\omega))$, siis erityisesti sallitaan tavallinen deterministinen funktio.

[64] Jälkimmäinen ehto on yllättäen oleellinen; lukemalla integroitavan arvon esimerkiksi osavälin keskipisteestä saataisiin erilainen integraali.

ESIMERKKI 11.24.

(1) Olkoon aluksi u vakiofunktio 1. Koska integraalin määritelmässä summa ei riipu jaosta, saadaan odotettu arvo:

$$\int_0^T 1\,dW_t = W_T - W_0 = W_T.$$

(2) Olkoon seuraavaksi $u(s) = s$. Perustelemme seuraavaksi Itôn kaavan avulla, miksi integraaliksi saadaan hieman yllättäen

$$(**)\qquad \int_0^T W_t\,dW_t = \tfrac{1}{2}W_T^2 - \tfrac{T}{2}.$$

Itôn kaava on vastine tavallisesta analyysistä tutulle integraalin ja derivaatan käänteisyydelle.

LAUSE 11.25 (ITÔN KAAVA). *Oletetaan, että $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on kahdesti jatkuvasti derivoituva. Tällöin*

$$u(W_T) - u(W_0) = \int_0^T u'(W_t)\,dW_t + \tfrac{1}{2}\int_0^T u''(W_t)\,dt.$$

Integraalin $\int_0^T u'(W_t)\,dW_t$ olemassaoloehto

$$(*)\qquad \int_0^T \mathbf{E_P}\,u'(W_t)^2 dt < \infty,$$

toteutuu automaattisesti. Huomaa, että korjaustermi on tavallisen jatkuvan funktion Riemann-integraali.

TODISTUSIDEA. Kaavan todistaminen ei ole erityisen vaikeaa. (Sen keksiminen on sitäkin yllättävämpi suoritus.) Todistus alkaa siten, että arvioidaan funktiota u'' polynomilla. □

Esimerkin 11.26. kohta $(**)$ perustellaan valitsemalla Itôn kaavassa $u(t) = t^2$.

Harjoitustehtäviä ja huomautuksia lukuun III

Harjoitustehtäviä lukuun III.

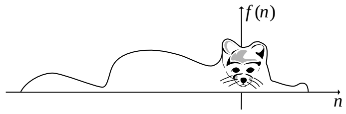
7.1. Näytä että sisätulon määräämä normi toteuttaa normin määritelmän ehdot:

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Milloin pätee $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$? Vihje: jos ja vain jos joko $u = av$ tai $v = au$ jollekin $a \neq 0$. Päteekö tämä muuten kaikissa normiavaruuksissa?

8.1. Todista sisätuloavaruuden keskenään ortogonaalisille alkoille *Pythagoraan lause*:

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$



8.2. Todista sisätuloavaruuden keskenään ortogonaalisille alkioille *yleistetty Pythagoraan lause*:

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

8.3. Olkoon E kompleksikertoiminen sisätuloavaruus. Todista *polaarikaava*, joka lausuu sisätulon normin avulla:

$$(x|y) = \tfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right).$$

8.4. Todista lause 8.3 eli Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälö $|(x|y)| \le \|x\|\,\|y\|$ yleisessä sisätuloavaruudessa ja näytä, että tässä on yhtäsuuruus aina ja vain, kun x ja y ovat lineaarisesti riippuvia. (Reaalinen ensin. Voit olettaa, että $\|x\| = \|y\| = 1$.)

8.5. Todista, että jos reaalikertoimisessa normiavaruudessa suunnikassääntö pätee, niin

$$(x|y) = \tfrac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

on sisätulo, joka antaa alkuperäisen normin. Ohje: Hankaluus on lineaarisuudessa x:n suhteen. Todista ensin additiivisuus, siis $(x|y) = (x|y) + (z|y)$. Ehto $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ palautuu tähän ja sisätulolausekkeen jatkuvuuteen.

Vastaava tulos pätee kompleksisessakin tapauksessa, mutta tarvitaan kompleksinen polaarikaava ja todistus on hiukan pitempi.

9.1. Näytä, että vektoriavaruus V on aliavaruuksiensa A_1 ja A_2 lineaarialgebrallinen suora summa tasan silloin, kun jokainen vektori $x \in V$ voidaan tasan yhdellä tavalla hajottaa summaksi $x = y + z$, missä $y \in A_1$ ja $z \in A_2$. Yleistä tämä myös useamman kuin kahden aliavaruuden suoralle summalle.

9.2. Tarkasta, että minkä tahansa — vinonkin — projektion kuva-avaruus ja ydin leikkaavat toisensa ainoastaan origossa ja että ne yhdessä virittävät koko avaruuden, joka siis on projektion ytimen ja kuvan suora summa.

9.3. Todista, että normiavaruuden minkä tahansa osajoukon $S \subset E$ *virittämä suljettu aliavaruus* $\overline{\langle S\rangle}$ on suppein suljettu aliavaruus, joka sisältää joukon S. Merkintä $\langle S\rangle$ tarkoittaa joukon S virittämää aliavaruutta eli suppeinta S:n sisältävää aliavaruutta.

9.4. (jatkoa) a) Näytä esimerkillä, että suljetun joukon virittämä aliavaruus ei yleensä ole suljettu ja siis ainakin joskus

$$\langle \overline{S}\rangle \ne \overline{\langle S\rangle}.$$

b) Osoita, että kuitenkin aina $\langle \overline{S}\rangle \subset \overline{\langle S\rangle}$.

9.5. Todista huomautus 9.15, jonka mukaan, jos K ja L ovat Hilbertin avaruuden H suljettuja aliavaruuksia, niin

$$H = K \overset{\perp}{\oplus} L \iff K = L^\perp \iff L = K^\perp.$$

9.6. Olkoon $A \subset E$ sisätuloavaruuden osajoukko. Määrää $\{0\}^\perp$, $E^\perp$, $A \cap A^\perp$ ja $\langle A^\perp\rangle$.

9.7. Olkoon $E = (\mathcal{C}[0,1], \mathbb{R})$ varustettu sisätulolla $(f,g) = \int_0^1 f\overline{g}\,dt$. Keksi jokin nollasta eroava funktio $g \in \mathcal{C}[0,1]$, joka on kohtisuorassa funktiota $f \in E$, $f(x) = x$, vastaan.

9.8. a) Olkoon $M \subset H$ Hilbertin avaruuden aliavaruus. Osoita, että

$$M^\perp = \{0\} \iff \overline{M} = H.$$

b) Olkoon $M \subset H$ Hilbertin avaruuden osajoukko. Osoita, että

$$((M^\perp)^\perp)^\perp = M^\perp.$$

9.9. Olkoon avaruudessa ℓ^2 $x_1 = (2,1,0,0,0,\dots)$, $x_2 = (0,2,1,0,0,\dots)$, $x_3 = (0,0,2,1,0,0,\dots)$ jne. Määrää $\langle x_1, x_2, x_3, \dots\rangle^\perp$.

9.10. Jos $(e_1, e_2, e_3, \dots)$ on jokin H:n ortonormaali kanta, niin onko $(e_2, e_3, e_4, \dots)$ H:n ortonormaali kanta? Entäpä

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(e_2 - e_1), \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_2), e_3, e_4, \dots\right)?$$

9.11. Mitkä seuraavista ℓ^2:n joukoista ovat suljettuja?

$$\begin{aligned}
&A = \{\tfrac{1}{k}e_k \mid k = 1,2,3,\dots\}, \quad \text{missä } e_k = (0,\dots,0,1,0\ \dots)\\
&B = \{\tfrac{1}{k}e_1 \mid k = 1,2,3,\dots\}\\
&C = \{x\}^\perp, \quad \text{missä } x \in \ell^2\\
&D = Y^\perp, \quad \text{missä } Y \subset \ell^2
\end{aligned}$$

9.12. a) Olkoot A ja B Hilbertin avaruuden H suljettuja aliavaruuksia siten, että $A \subset B$ ja olkoot P ja Q ortogonaaliprojektiot niille. Määrää PQ ja QP.

b) Entäpä, jos oletetaankin $A \subset B^\perp$?

9.13. Todista, että sisätuloavaruuden keskenään ortogonaaliset alkiot ovat lineaarisesti riippumattomia.

9.14. (Zornin lemman harjoittelua.) a) Anna esimerkki järjestetystä joukosta, joka ei ole ketju.

b) Olkoon $X = (\mathcal{C}^1[0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \text{derivaatta } f' \text{ on olemassa ja jatkuva}\}$. Onko relaatio

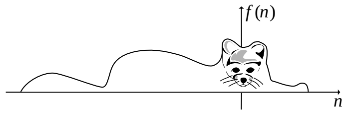
$$f \le g \iff f'(x) \le g'(x)\,\forall\, x \in [0,1]$$

järjestys joukossa X?

Jos $B \subset X$ siten, että "$\le$" indusoi B:hen täydellisen järjestyksen, niin onko B:llä maksimaalinen alkio?

9.15. (Hamel-kannasta ja ON-kannasta.) Jokaisella vektoriavaruudella V on Hamelin kanta eli maksimaalinen lineaarisesti riippumaton joukko. Todistus on esitetty liitteessä ja matkii Hilbertin kannan olemassolotodistusta käyttämällä Zornin lemmaa.

a) Todista, että Hamelin kannan alkioiden äärellisinä lineaarikombinaatioina saadaan kaikki vektorit, ts. $V = \langle E\rangle$.



b) Keksi jokin Hamelin kanta vektoriavaruudelle

$$V = \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \bigm| p \text{ on polynomi ja } p(-t) = p(t)\,\forall t\}.$$

c) $(*)$ Osoita, että kaikki saman vektoriavaruuden V Hamelin kannat ovat yhtä mahtavia joukkoja. Vektoriavaruudella on siis *lineaarialgebrallinen* eli *Hamel-dimensio*.

d) Todista, että ääretönulotteisen Hilbertin avaruuden ℓ^2 jokin Hamel-kanta on ylinumeroituva. *Hilbert-dimensio* ja Hamel-dimensio ovat siis eri asioita. Vihje: Koeta etsiä ylinumeroituvan monta lineaarisesti riippumatonta vektoria avaruudesta ℓ^2.

e) Osoita, että ääretönulotteisen Hilbert-avaruuden H ortonormaali kanta eli Hilbertin kanta E ei voi samalla olla sen Hamelin kanta.

9.16. Todista, että jokainen Hilbert-avaruuden vektori $a \in H$ määrittelee lineaarikuvauksen $f_a : H \to \mathbb{K} : x \mapsto (x|a)$, joka on jatkuva, ja itse asiassa $\|f_a\| = \|a\|$.

9.17. Fréchet'n ja Rieszin esityslause karakterisoi eli kuvailee täydellisesti kaikki jatkuvat lineaarikuvaukset $H \to \mathbb{K}$. Miten sen avulla voi karakterisoida lineaarikuvaukset $H \to \mathbb{K}^2$? Entä $H \to E$, missä $\dim E < \infty$?

9.18. Hilbertin avaruuden jokaiseen vektoriin $a \in H$ liittyy jatkuva lineaarimuoto $f_a \in H^*$, nimittäin

$$f_a : H \to \mathbb{K} : x \mapsto (x|a).$$

Fréchet'n ja Rieszin esityslause sanoo, että Hilbert-avaruudessa kaikki jatkuvat lineaarimuodot ovat tyyppiä f_a. Vektorien a ja vastaavien jatkuvien lineaarimuotojen välinen yhteys on kuvaus, vieläpä (kompleksisessa tapauksessa konjugaattilineaarinen) normiavaruusisomorfismi

$$H \to H^* : a \mapsto f_a.$$

Näytä esimerkillä (2-ulotteinen riittää), että saatu isomorfismi avaruuden $H = \mathbb{R}^2$ ja sen duaalin $\mathbb{R}^{2^*}$ välillä riippuu $\mathbb{R}^2$:ssa käyttämämme sisätulon valinnasta. (Tee toinen sisätulo vinokulmaisesta kannasta.)

Filosofointia: Jos edellä käytetään ao. sisätulon suhteen ortonormaalia kantaa ja vastaavia matriiseja, niin kuvausta $a \mapsto f_a$ esittää pystyvektorin transponointi vaakavektoriksi. Vinokulmaisessa kannassa käy toisin. Edellisen tehtävän merkitys on siinä, että sen mukaan transponoinnin merkitys riippuu kannan — oikeastaan siis kannasta saatavan sisätulon — valinnasta.

Differentiaalilaskennassa on tapana sanoa, että a on funktion $f_a : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ *gradientti* — lineaarikuvauksen kyseessä ollen sama jokaisessa pisteessä. Huomaa, että gradientti siis riippuu paitsi derivoitavasta funktiosta myös avaruuden $\mathbb{R}^n$ sisätulon valinnasta, mikä ei ole outoa, onhan gradientti kohtisuorassa tasa-arvokäyriä vastaan ja suorat kulmat riippuvat sisätulosta.

9.19. Olkoon $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : L(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2$. Määrää $\operatorname{Ker} L$ ja $(\operatorname{Ker} L)^\perp$. Etsi sellainen $a \in \mathbb{R}^3$, että $L(x) = (x|a)$ kaikille $x \in \mathbb{R}^3$.

9.20. (Koordinaattien suppeneminen) Todista, että $\mathbb{C}^n$:n standardikannassa $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, ja itse asiassa jokaisessa ortonormaalissa kannassa, pätee

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i = x \iff \sum_{i=1}^{\infty} (x_i|e_j) = (x|e_j) \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Päteekö vastaava avaruudessa ℓ^2? Ohje: epäile!

9.21. (jatkoa) Anna esimerkki ℓ^2:n jonosta $(x^m)_{m\in\mathbb{N}}$, ts.

$$x^m = (x_k^m)_{k=1}^\infty\,,\ \text{missä}\ \sum_{k=1}^\infty |x_k^m|^2 < \infty$$

ja vektorista $x = (x_k)_{k=1}^\infty \in \ell^2$, joilla $x_k^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} x_k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$, mutta ei $x^m \to x$ avaruuden ℓ^2 metriikassa.

9.22. Olkoon $A = \{(x_k)_1^\infty \in \ell^2 \bigm| |x_k| \le \frac{1}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}\}$. Osoita, että A on ℓ^2:n metriikassa kompakti. Ohje: Näytä A jonokompaktiksi osoittamalla, että jos (x^m) on jono A:n alkioita ja $x \in \ell^2$, niin $x^m \to x$ ℓ^2-mielessä, jos ja vain jos $x^m \to x$ koordinaateittain. Lisäkysymys: Onko $\overline{\langle A\rangle}$:n yksikköpallo kompakti?

9.23. Osoita, että $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ ja

$$|||x|||_2 = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_{2k}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=0}^\infty |x_{2k+1}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ovat ekvivalentteja normeja avaruudessa ℓ^2.

9.24. Määritellään

$$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \{(x_n)_1^\infty \in \ell^2 \bigm| x_n \ne 0 \text{ vain äärellisen monella } n\}$$

Näytä, että $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ on ℓ^2:n aliavaruus — siis itsekin sisätuloavaruus — mutta ei Hilbertin avaruus.

9.25. Määrää $\{(-1,2,0,0,\dots)\}^\perp$ avaruudessa ℓ^2.

9.26. Näytä, että Hilbert-avaruus H on äärellisulotteinen, jos ja vain jos sen jokainen aliavaruus on suljettu.

9.27. Sisätuloavaruus, jossa projektiolause pätee kaikille suljetuille aliavaruuksille, on aina täydellinen, minkä huomaa soveltamalla lausetta aliavaruuteen H. Tarkastapa tämä.

9.28. Todista, että joukko $A\times B$ on yhtä mahtava kuin mahtavampi joukoista A ja B, elleivät molemmat ole äärellisiä. Vihje: A ja $A\times A$ ovat joko yhtä mahtavaia tai äärellisiä.

10.1. Osoita, että rengas- ja vektoriavaruusaksioomien lisäksi operaattorialgebrassa $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ pätee näitä rakenteita yhdistävä yhtälöpari

$$\lambda(TS) = (\lambda T)S = T(\lambda S) \tag{1}$$

ja operaattorialgebra on siis *algebra*. Kuvauksille "tulo" on tässä kuvausten yhdistäminen, joka äärellisulotteisessa tilanteessa vastaa matriisien kertolaskua. Saat samalla vaivalla yhtälön (1) myös siinä yleisemmässä tapauksessa, jossa S ja T ovat vektoriavaruuksien lineaarikuvauksia $U \xrightarrow{T} V \xrightarrow{S} W$.

10.2. Osoita, että operaattorialgebrassa $\mathcal{B} = \mathcal{B}(H)$ pätee epäyhtälö, mutta ei aina yhtälö

$$\|ST\| \le \|S\|\|T\|, \tag{2}$$

joten operaattoreiden tulo on *jatkuva bilineaarikuvaus* $\mathcal{B} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$. Saat samalla vaivalla epäyhtälön (2), kunhan S ja T ovat normiavaruukisen välisiä jatkuvia lineaarikuvauksia $E \xrightarrow{T} F \xrightarrow{S} G$.

10.3. Kertaa symmetrisen matriisin diagonalisoimisen pääideat diagonalisoimalla matriisi $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

10.4. Todista lause 10.16, jonka mukaan sisätuloavaruuden lineaarinen surjektio $U : H \to H$: on unitaarinen, jos ja vain jos ortonormaalissa kannassa $E = (e_i)_{i \in I}$ pätevät seuraavat keskenään yhtäpitävät ehdot

(4) $(Ue_i|Ue_j) = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in I.$
(5) $\sum_{k \in I} a_{ik}\overline{a_{kj}} = \delta_{ij} \qquad \forall i, j \in I.$ Tässä $a_{ij} = (Ue_j|e_i)$.

10.5. Todista lause 10.22, jonka mukaan operaattorin T adjungaatti on olemassa ja yksikäsitteinen ja sillä on seuraavat ominaisuudet:

(1) $(Tx|y) = (x|T^*y)$ kaikilla $x, y \in H$.
(2) $T^{**} = T$
(3) $\|T^*\| = \|T\|$
(4) Kuvaus $T \mapsto T^*$ on konjugaattilineaarinen, ts. $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$ ja $(T + S)^* = T^* + S^*$.
(5) $(TS)^* = S^*T^*$
(6) Jos T on kääntyvä, niin myös T^* on kääntyvä ja $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

10.6. Todista seuraus 10.23, jonka mukaan operaattori $T \in \mathcal{B}$ on unitaarinen aina ja vain, kun $T^* = T^{-1}$ ja hermiittinen aina ja vain, kun $T^* = T$.

10.7. Todista, että adjungaatin T^* yleistetty matriisi kannassa E on $\overline{A}^t = (\overline{a_{ji}})$, missä $A = (a_{ij})$ on T:n matriisi.

10.8. Todista, että $\operatorname{Ker} T = T^*(H)^\perp$ ja siis myös $\operatorname{Ker} T^* = T(H)^\perp$.

10.9. Olkoon T normaali operaattori. Osoita, että $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^*$ ja siis myös $T(H) = T^*(H)$. Ohje: $\|T\| = \|T^*\|$. Laske $(T^*Tx - TT^*x|x)$ kaikille x.

10.10. Onko totta, että äärellisasteisen normaalin operaattorin ominaisarvoista vain äärellisen moni eroaa nollasta? Entä yleensä äärellisasteisen operaattorin?

10.11. Tarkasta, että oikea ja vasen siirto ovat toistensa adjungaatit.

10.12. Selvitä ja perustele jotenkin kohdan 10.32 väite, jonka mukaan diagonaalinen operaattori on kompakti tasan silloin, kun sen nollasta eroavat ominaisarvot muodostavat nollaa kohti suppenevan jonon tai äärellisen joukon.

10.13. Määrää esimerkissä 10.33. esiintyvien projektioiden T_g ja T_t komplementaarinen projektio, ydin ja kuva sekä tutki erikoistapauksena, onko kuvaus $t \mapsto T_t$ jatkuva $\mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$

11.1. Osoita, että funktiot $u_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikt} \quad (k \in \mathbb{Z})$ muodostavat sisätulon

$$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

mielessä ortonormaalin jonon. Ohje: Tämän saa aika helposti kompleksianalyysin keinoin. Voi myös vedota reaaliseen tulokseen, johon palaudutaan siirtymällä reaali- ja imaginaariosiin.

11.2. (jatkoa) Olkoon $H = L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ja $g(t) = t \;\forall\, t \in [0, 2\pi]$. Laske g:n kertoimet eli koordinaatit $c_k(g)$ kannan $(u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ suhteen. Laske myös $\|g\|_{L^2}$.

11.3. (jatkoa) Olkoon $H = L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$ ja $g(t) = t \; \forall t \in [0, 2\pi]$. Etsi joukosta A alkio eli funktio $f \in A$, jolle etäisyys g:stä eli $\|f - g\|$ on mahdollisimman pieni, kun
a) $A = \{f \in H \mid c_{2k}(f) = 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}\}$
b) $A = \{f \in H \mid \|f\| \leq \frac{1}{3}\}$

11.4. (jatkoa) Kuten edellinen tehtävä, mutta
A on aliavaruus $\langle 1 + e^{it}, e^{it} + e^{2it} \rangle$, jonka virittävät vektorit $1 + e^{it}$ ja $e^{it} + e^{2it}$.

11.5. Haarin värekannasta puuttuu vakiofunktio, koska vakio ei kuulu avaruuteen $L^2(\mathbb{R})$. Esitä välin [0,1] karakteristinen funktio värekannassa ja selitä, kuinka on mahdollista, että funktio, jonka keskiarvo on 1, voidaan esittää "kombinaationa" funktioista, joiden keskiarvo on 0.

11.6. Laske ensimmäiset Legendre'in polynomit Gram-Schmidt-ortogonalisoimalla jono $(p_0, p_1, p_2) \subset L^2[-1, 1]$, missä $p_n(t) = t^n$.

11.7. $(*)$ Olkoot f ja $g \in L^2[0, 1]$ siten, että $f(t) = e^t$ ja $g(t) = t$ kaikilla t. Määrää λ siten, että $(f + \lambda g) \perp g$ sisätulon $(f|g) = \int_0^1 f\overline{g}\, dt$ suhteen.

11.7. $(*)$ Kompleksisen vektoriavaruuden *kompleksinen struktuuri* liittyy siihen, miten kannan avulla hajotetaan vektori reaali- ja imaginaariosakseen koordinaateittain. Mieti, missä mielessä $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$.

Huomautuksia lukuun III.

Terminologiaa. Sisätuloavaruus on toiselta nimeltään *pre-Hilbert-avaruus.*

Kantaa, jossa alkion esitys koordinaatteina on riippumaton termien järjestyksestä sanotaan *ehdottomaksi kannaksi.* Tässä kirjassa esiintyvät kannat, siis Hamelin ja Hilbertin kanta, ovat kumpikin ehdottomia, mutta funktionaalianalyysissä esiintyy muitakin kantakäsitteitä.

Lineaarikuvausten eri lajien historiallinen terminologia on aika sekavaa.

- *Operaattori* on jatkuva lineaarikuvaus Hilbertin avaruudelta itselleen. Operaattori "operoi" avaruudessa. Vanha nimi operaattorille on "transformaatio". Jäänteenä tästä sanasta on operaattorille yleisesti käytetty merkintä T. Kirjoituksissa sallitaan operaattorin usein olevan epäjatkuva tai operoivan eri avaruuksien välillä. Operattorin ei tuolloin tarvitse edes olla määritelty koko avaruudessa. Itse asiassa melkein mitä tahansa lineaarikuvauksia kuulee sanottavan operaattoreiksi, toisinaan epälineaarisiakin. Tässäkin kirjassa, luvussa 18, puhutaan "integraalioperaattorista" $A : \mathcal{C}[0, 1] \to \mathcal{C}[0, 1]$, jonka sanotaan olevan "kompakti operaattori", vaikka $\mathcal{C}[0, 1]$ ei ole Hilbertvaan pelkkä Banachin avaruus. Yksinkertaistaen "operaattori" on "kuvaus, joka liittää vektoreihin vektoreita".
- *Lineaarinen funktionaali* on lineaarikuvaus vektoriavaruudelta kerroinkunnalleen, siis sama asia kuin *lineaarimuoto.* Vanhastaan "funktionaali" liittää vektoreihin lukuja. Toisissa kirjoissa saatetaan sana "funktionaali" varata lineaarisille funktionaaleille. Toisinaan kunta-arvoisia funktioita sanotaan "funktioiksi" ja kaikki muut funktiot ovat "kuvauksia".
- *Sublineaarinen kuvaus* eli *sublineaarinen funktionaali* on muilta osin sama asia kuin seminormi (Vrt. määr 6.2.), paitsi että sublineaariselta kuvaukselta vaaditaan homogeenisuus $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ ainoastaan positiivisille λ. Sublineaarinen kuvaus on ei-negatiivinen eikä siis ole lineaarinen ellei ole nollakuvaus!

- *Transformaatio* on vanha nimi operaattorille. (Ks. yllä.)
- *Lineaarimuoto* on sama kuin lineaarinen funktionaali. (Ks. yllä.)
- Seuraavat adjektiivit tarkoittavat operaattorista $T \in \mathcal{B}(H)$ puhuttaessa samaa asiaa: *hermiittinen*, *itseadjungoitu*, *hermiittisesti konjugoitu*, *konjugaattisymmetrinen*, joissakin teoksissa harhaanjohtavasti myös *"symmetrinen"*.

Joukko-opin historiaa. Cantor-Schröder-Bernsteinin lauseen todisti Georg Cantor ensin käyttäen valinta-aksioomaa — itse asiassa hyvinjärjestyslausetta. Felix Bernstein todisti 19-vuotiaana opiskelijana lauseen ilman valinta-aksioomaa. Saman teki tästä tietämättä F.W.K.E. Schröder. Sama Bernstein keksi muuten vakuutusmatemaatikkona ollesssaan vuonna 1924 veriryhmien periytymismekanismin.

Fréchet, Jordan ja von Neumann keksivät suunikassäännön merkityksen reaaliseesa tapauksessa; jälkimmäiset kaksi myös kompleksisen version. Ks. [Y].

ℓ^2 ja L^2 Von Neumann on luonut abstraktien Hilbert-avaruuksien teorian kvanttimekaniikan matemaattiseksi perustaksi. Avaruuksien ℓ^2 ja L^2 isomorfisuus on samalla ratkaisu tärkeään fysikaaliseen ongelmaan. Klassinen kvanttimekaniikkahan syntyi alun perin kahdessa eri muodossa, nimittäin Heisenbergin[65] matriismekaniikkana ja Schrödingerin[66] aaltomekaniikkana. Von Neumannin lause selittää osaltaan, missä mielessä nämä ovat sama taeoria.

Naalin suku (Alopex). Funktio-naali *(Alopex banach)*, taustanaan ortogonaali *(Alopex cartesii)* on tämän kirjan logo ja maskotti.

Bra ja ket. Diracin[67] keksimän merkintätavan mukaan sisätuloa merkitään väkäsulkein $\langle\cdot|\cdot\rangle$ ja se oletetaan tällöin lineaariseksi jälkimmäisen tekijänsä, "ketvektorin" $|x\rangle$ suhteen. Näin merkittäessä ensimmäistä, siis konjugaattilineaarista tekijää $\langle y|$ sanotaan "bra-vektoriksi". Kun vielä käytetään *Einsteinin summaussääntöä*, jonka mukaan toistuvien indeksien yli aina summataan, on esimerkiksi separoituvan Hilbert-avaruuden identtinen kuvaus mahdollista lausua elegantisti muodossa $|x\rangle \mapsto |e_i\rangle\langle e_i|x\rangle$ eli lyhyesti $I = |e_i\rangle\langle e_i|$, missä $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ on ortonormaali kanta. Luvun z kompleksikonjugaattia merkitään Diracin standardissa z^* ja operaattorin T adjungaattia $T^\dagger$.

Käänteisalkiot. Ryhmästä $\mathrm{GL}(H)$ puhuttaessa *käänteisalkion* käsite vaatii hieman taustatietoa. Periaatteessahan renkaan $(\mathcal{B}(H), +, \circ)$, kääntyvien alkioiden eli *kääntyvien operaattoreiden* ryhmän muodostavat vain ne jatkuvat lineaaribijektiot, joiden käänteinenkin on lineaarinen ja jatkuva. Onko muita olemassa? Lineaarikuvauksen käänteiskuvaus on tietenkin aina lineaarinen, mutta sen jatkuvuus ei ole itsestään selvää. Asian ratkaisee *avoimen kuvauksen lause*, jonka mukaan kahden Banachin avaruuden välisen jatkuvan bijektion käänteiskuvaus todella on aina jatkuva. (Ks. luku 19.)

---

[65] Werner Heisenberg 1901–1976, Saksa

[66] Erwin Schrödinger 1887–1961, Itävalta.

[67] Paul Adrien Maurice Dirac 1902–1984. Maineikas fyysikko. Englanti ja USA.

Hermiittisyys ja jatkuvuus. Me tarkastelemme vain jatkuvia operaattoreita. *Hellingerin ja Toeplitzin lauseen* 19.18 mukaan jatkuvuus kuitenkin seuraa lineaarisuudesta ja hermiittisyyden määrittelevästä kaavasta $(Ax|y) = (x|Ay)$, joten jatkuvuuden voisi jättää vaatimatta hermiittisyyden määritelmässä.

Jordanin normaalimuoto. Vaikka mielivaltainen operaattori ei diagonalisoidu edes äärellisulotteisessa avaruudessa, on sillä kuitenkin kompleksikertoimisessa tapauksessa *Jordanin normaalimuoto*. Tämä tarkoittaa, että on olemassa $\mathbb{K}^n$:n lineaarialgebrallinen kanta, jossa lausuttuna T:n matriisi on muotoa

$$\mathrm{Mat}(T) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & A_m \end{pmatrix},$$

missä *lohkot* A_j ovat muotoa

$$A_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_j & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_j \end{pmatrix}$$

olevia matriiseja, joilla on yksi ominaisarvo, nimittäin λ_j. Usein lohkot A_j ovat yksiöitä (λ_j), muulloin tietenkin diagonalisoitumattomia, sillä diagonalisoituvista matriiseista ainoastaan homotetioilla on vain yksi ominaisarvo.

On olemassa myös reaalinen versio.[68]

Diagonalisointi ja projektiot. Diagonalisoinnin kannassa voi tulkita siten, että operaattori lausutaan lineaarikombinaationa projektioista joillekin ortonormaaleille koordinaattiakseleille, onhan

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{(x|e_i)e_i}_{P_{e_i}x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_{e_i} x.$$

ja yleisemmin

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\cdot|e_i)e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i P_{e_i},$$

missä $(\cdot|e_i)e_i = P_i$ on ortogonaaliprojektio e_i-akselille.[69]

Iterointi ja operaattoriarvoiset alkeisfunktiot. Yhdistämällä operaattoria itsensä kanssa sitä voi *iteroida*, sillä on *potenssit*: $T^n = T \circ T \circ \dots \circ T$.

[68] Ks. [G]. Hauska kirja aiheesta Euklidisen avaruuden operaattorit on [H-2]. Tarkka analyysi yleistetystä diagonalisoinnista on [H-3].

[69] Ortogonaalijonon suppenemisehdon (ℓ^2) tiedämme!

Koska lauseen 6.14 mukaan itseisesti suppenenvat sarjat suppenevat Banachin avaruudessa, pystymme määrittelemään Banach-algebrassa $\mathcal{B}$ *operaattoriarvoisen analyyttisen funktion* potenssisarjana $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n$. Esimerkiksi *eksponenttifunktio*

$$e^T = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!} T^n$$

on hyvin määritelty kaikilla $T \in \mathcal{B}$ ja *Carl Neumannin sarja*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$$

suppenee, kun $\|T\| < 1$. Approksimoimalla jatkuvaa funktiota polynomilla on mahdollista määritellä $f(T)$, kunhan f on jatkuva.

Kohdassa 10.31 käytettiin menestyksellisesti tietoja operaattorin $P(T)$ ominaisarvoista, kun P oli sopiva polynomi. Palaamme luvussa 25 tutkimaan yleisemminkin operaattoreiden T ja $f(T)$ ominaisarvojen välistä yhteyttä, spektraalikuvauslausetta.

Banach-versio yleistetystä matriisista. Operaattorin yleistetyn matriisiesityksen lausekkeessa

$$T = \sum_{(i,j) \in I^2} a_{ij} (\cdot | e_j) e_i.$$

esiintyvä sisätulo-osa $(\cdot | e_j)$ on Hilbertin avaruuden H duaalin tyypillinen alkio. Lauseketta voi yrittää yleistää Banachin avaruudelle esimerkiksi muotoon

$$T = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij} \varphi_j(\cdot) e_i,$$

missä $(\varphi_j)_{j \in J} \subset E^*$. Ainakin äärellisten indeksijoukkojen I, J tapauksessa tällainen on mielekästä, vaikka ei kannasta tai ortogonaalisuudesta sanoisi mitään. Banachin avaruuden ja sen duaalin sarjateoria ei kuulu tämän kirjan piiriin. Viitteitä: [Di], [M], [W],

Brownin liikkeen historiaa. Kasvitieteilijä Robert Brown huomasi vuonna 1828 siitepölyhiukkasten liikahtelevan satunnaisesti nestepisarassa. Tämän havainnon tulkinta molekyylien lämpöliikkeestä johtuvaksi ilmiöksi on yksi tapa saada selville atomaaristen ilmiöiden mittakaava ja siten tärkeä keksintö fysiikan historiassa. Satunnaiskulkua esintyy myös arvopaperipörssissä: osakkeen hintaa ajan funktiona voi trendittömässä tilanteessa pitää yksiulotteisena Brownin liikkeenä. Tämän asian keksi ja julkaisi L. Bachelier[70] v. 1900 väitöskirjassaan Theorie de la Spéculation, joka sisälsi myös martingaalien perusominaisuuksia ja oli siinä määrin edellä aikaansa, että sitä ei ymmärretty eikä Bachelier saanut koskaan kunniaa. Albert Einstein käytti Brownin liikettä laskuissaan 1905, mutta alan tunnustetut pioneerit ovat kuitenkin Wiener (prosessin olemassaolotodistus 1923) ja Itô[71] (integrointi Brownin liikkeen suhteen 1942–1945).

---

[70] Louis Bachelier 1870–1946, Ranska.

[71] Kijosi Itô 1915- Japani.

Erikoisfunktiot. Legendre'in polynomit toteuttavat differentiaaliyhtälön

$$(1-x^2)\frac{d^2 f}{dx^2} - 2x\frac{df}{dx} + n(n+1)f = 0.$$

Erilaisissa painotetuissa ja painottamattomissa ja yleisemmissäkin mitta-avaruuksissa määritellyissä Lebesgue'in avaruuksissa on käytössä kantoja, joiden alkioita sanotaan *erikoisfunktioiksi.* Tällaisia ovat Legendre'in polynomien lisäksi mm. esimerkiksi *Laguerre'in polynomit*[72] , *Besselin funktiot* ja *palloharmoniset funktiot.* Kuten sini, kosini ja Legendre'in polynomit saadaan monet muutkin erikoisfunktiojonot sopivien differentiaaliyhtälöiden ratkaisuina[73] ja niihin perustuvia ortogonaalikehitelmiä voidaan klassisten Fourier-sarjojen tavoin käyttää joidenkin differentiaaliyhtälöiden ratkaisujen esittämiseen edullisella tavalla.

Fourier-muunnoksen lausekkeesta. Käytännössä lasketaan useimmiten

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-ixy} f(x)\, dx.$$

Fourierin ja Plancherelin operaattorilla on tosin itse asiassa integraalilausekekin, nimittäin[74]

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixy}-1}{-ix} f(x)\, dx.$$

Sen käänteisoperaatori on

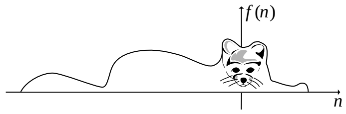
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dy} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixy}-1}{ix} \hat{f}(x)\, dx.$$

Hyvä lukija. Kirjoita tekijälle parannusehdotuksia lukuun III.

[72] Edmond Nicolas Laguerre 1834–1886, Ranska

[73] Sinin ja kosinin voi alunperin määritellä differentiaaliyhtälön $y'' + y = 0$ ratkaisuiksi.

[74] Ks. [AG], Vol. I p. 74-77.



IV ESIMERKKEJÄ NORMIAVARUUKSISTA

12. Klassisia normiavaruuksia

Esittelemme muutamia Banachin avaruuksia. *Klassiset Banach-avaruudet* ovat paitsi hyvä harjoituskohde ja malli muiden funktio- ja jonoavaruuksien käsittelylle myös käyttökelpoisia matematiikan eri aloilla ja sovelluksissa. Funktionaalianalyysin teoriassa ja sovelluksissa on tavallista, että tarkastellaan yhtä aikaa useita eri avaruuksia tai avaruuksien muodostamia perheitä.

Seuraavassa ei teoriaan tule eroja siitä onko kerroinkunnaksi $\mathbb{K}$ valittu $\mathbb{R}$ vai $\mathbb{C}$.

Luettelo 12.1. Seuraavat ovat *klassisia Banachin avaruuksia*:

(1) $\mathbb{K}^n$,

(2) jonoavaruudet

$$\ell^1 = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|x\|_1 < \infty\},$$
$$\ell^p = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \big(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\big)^{1/p} = \|x\|_p < \infty\}, \ (1 < p < \infty),$$
$$\ell^\infty = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| = \|x\|_\infty < \infty\},$$
$$c = \{x \in \ell^\infty \mid \ \exists \lim_{i\to\infty} x_i\} \quad \text{normina } \|x\|_\infty,$$
$$c_0 = \{x \in c \mid \ \lim_{i\to\infty} x_i = 0\} \ \text{normina } \|x\|_\infty,$$

(3) kohdan (2) klassisten jonoavaruuksien mukaan muotoillut Banach-arvoiset jonoavaruudet, erityisesti äärellisen monen Banachin avaruuden tuloavaruus

(4) funktioavaruudet

$\mathcal{F}_b(X, E) = \{f : X \to E \mid f \text{ on rajoitettu}\}$ normina $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$, kun X on joukko ja E on Banachin avaruus, esim. $\mathbb{K}$,

$\mathcal{C}_b(X, E) = \{f \in \mathcal{F}_b(X, E) \mid f \text{ on jatkuva}\}$ normina sama $\|f\|_\infty$, kun X on topologinen avaruus ja E Banachin avaruus,

$\mathcal{C}(X, E) = \{f : X \to E \mid f \text{ on jatkuva}\}$, joka on sama kuin $\mathcal{C}_b(X, E)$, jos X on kompakti,

$\mathcal{B}(E, F) = \{f \in \mathcal{C}(E, F) \mid f \text{ on lineaarinen}\}$, normina operaattorinormi $\|\cdot\|$, kun E ja F ovat normiavaruuksia, joista F täydellinen,

(5) Lebesgue'in avaruudet $L^p(A)$,

(6) Sobolevin avaruudet $W^{k,p}$.

Klassisiksi Banachin avaruuksiksi ovat vähitellen ylentymässä myös monet muut jono- ja funktioavaruudet, joita emme käsittele, kuten *Orliczin*, *Hardyn* ja *Besovin*[75] avaruudet sekä BMO sukulaisineen.

13. Jonoavaruuksia

13.1. Hölderin ja Minkowskin epäyhtälöt.

Vektoriavaruus $\mathbb{K}^n$ varustettuna *euklidisella normilla* $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2}$ on tunnetusti Hilbert-avaruus ja siis myös Banachin avaruus. Olemme jo luvussa 5.2 todenneet, että avaruuden $\mathbb{K}^n$ kaikki normit ovat keskenään ekvivalentteja ja että siis äärellisulotteinen normiavaruus on täydellinen valitusta normista riippumatta.

Annamme muutamia esimerkkejä normeista avaruudessa $\mathbb{K}^n$. Esimerkit ovat tärkeitä, sillä vastaavat normit esiintyvät myös klassisissa ääretönulotteisissa jono- ja funktioavaruuksissa ℓ^p ja $L^p(A)$.

Esimerkki 13.1. Avaruudessa $\mathbb{K}^n$ on mm. seuraavat normit, missä $1 < p < \infty$

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \\
\|x\|_p &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \\
\|x\|_\infty &= \sup_{1\le k\le n} |x_k|.
\end{aligned}$$

Perustelu. On helppoa tarkastaa, että $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_\infty$ ovat normeja ja että jokainen $\|\cdot\|_p$ toteuttaa ensimmäiset kolme normin määrittelevää ehtoa. Kolmioepäyhtälön johtaminen on hankalampaa. Euklidisen normin $\|\cdot\|_2$ tapauksessa sen todistamisessa näyttelee oleellista osaa Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälö $|(x|y)| \le \|x\|_2\|y\|_2$, jota ei tietenkään ole muussa kuin sisätuloavaruudessa. Se on kuitenkin yleistettävissä *Hölderin epäyhtälöksi*[76], joka on CSB:n epäyhtälön tavoin muutenkin tärkeä kuin pelkästään kolmioepäyhtälön todistuksen osana.

Lause 13.2 (Hölderin epäyhtälö). *Olkoot p ja q kaksi positiivilukua, joilla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, toisin sanoen $p > 1$ ja $q = \frac{p}{p-1}$, ja olkoot x ja $y \in \mathbb{K}^n$ kaksi vektoria. Tällöin on voimassa Hölderin epäyhtälö*

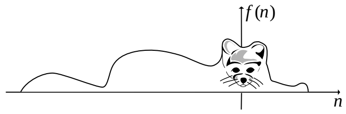
$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q},$$

jonka voi kirjoittaa lyhyesti

$$|(x|y)| \le \|x\|_p \, \|y\|_q \, ,$$

[75] Wladyslaw Orlicz 1903–1990, Puola. Godfrey Harold Hardy 1877–1947, Englanti. Oleg Vladimirovitš Besov 1933– ?.

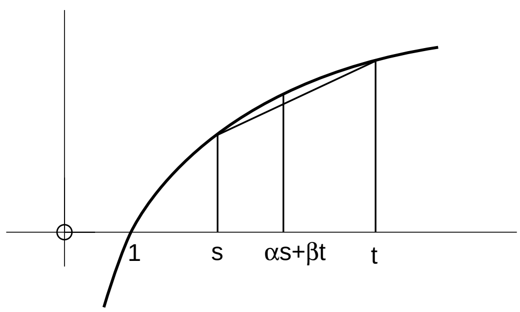
[76] Otto Ludwig Hölder 1859–1937, Saksa.



missä $(x|y)$ *on vektoreiden* x *ja* $y \in \mathbb{K}^n$ *standardisisätulo* $\sum_{k=1}^{n} x_k \,\overline{y}_k$.

TODISTUS. Hölderin epäyhtälön todistus käyttää hyväkseen sitä tietoa, että logaritmifunktion $\log : \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$ kuvaaja on toisen derivaatan negatiivisuuden vuoksi alhaalta katsoen *kovera*: kaikissa positiivilukujen s ja t välisissä pisteissä, siis pisteissä $\alpha s + \beta t$, joissa $\alpha, \beta \geq 0$ ja $\alpha + \beta = 1$, pätee

$$\log(\alpha s + \beta t) \geq \alpha \log t + \beta \log s.$$



KUVA 33. LOGARITMIFUNKTIO ON KOVERA.

Soveltamalla tätä epäyhtälöä lukuihin $s = a^p$ ja $t = b^q$, $\alpha = \frac{1}{p}$, $\beta = \frac{1}{q}$, missä a ja b ovat mitä tahansa positiivilukuja, saadaan

$$\log\left(\tfrac{1}{p}a^p + \tfrac{1}{q}b^q\right) \geq \tfrac{1}{p}\log a^p + \tfrac{1}{q}\log b^q = \log(ab)$$

eli *Youngin epäyhtälö*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

joka pätee tietysti myös, kun a tai b on 0. Hölderin epäyhtälö on helppo johtaa Youngin epäyhtälön avulla valitsemalla

$$a = \frac{|x_k|}{\|x\|_p}, \quad b = \frac{|y_k|}{\|y\|_q}$$

ja summaamalla:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{|x_k|}{\|x\|_p}\,\frac{|y_k|}{\|y\|_q} &\leq \sum_{k=1}^{n}\left(\tfrac{1}{p}\left(\tfrac{|x_k|}{\|x\|_p}\right)^p + \tfrac{1}{q}\left(\frac{|y_k|}{\|y\|_q}\right)^q\right)\\ &= \tfrac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p} + \tfrac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q} = \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1. \quad \square\end{aligned}$$

MÄÄRITELMÄ 13.3. Positiivilukuja p ja q, joilla $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, sanotaan toistensa *duaalieksponenteiksi*. Myös 1 ja ∞ ovat toistensa duaalieksponentit.

Hölderin epäyhtälö pätee myös, kun eksponentti p on 1 tai ∞:

LAUSE 13.4 (HÖLDERIN EPÄYHTÄLÖ EKSPONENTILLA $p = 1$ TAI ∞). *Olkoot x ja $y \in \mathbb{K}^n$ kaksi vektoria. Tällöin*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \sup_{1 \leq k \leq n} |y_k|,$$

eli erityisesti

$$|(x|y)| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty ,$$

missä $(x|y)$ on vektoreiden x ja $y \in \mathbb{K}^n$ standardisisätulo $\sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y}_k$.

TODISTUS. Harjoitustehtävä. $\square$

SEURAUS 13.5 (MINKOWSKIN KOLMIOEPÄYHTÄLÖ)[77]. *Kaikille $x, y \in \mathbb{K}^n$ ja $1 \leq p \leq \infty$ pätee*

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p.$$

TODISTUS. Tapaukset $p = 1$ ja $p = \infty$ ovat helppoja. Tapauksessa $1 < p < \infty$ käytetään Hölderin epäyhtälöä:

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_p^p &= \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \\
&= \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k||x_k + y_k|^{p-1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k + y_k|^{p-1} \\
&\leq \|x\|_p \, \|(|x_k + y_k|^{p-1})_{k=1}^n\|_q + \|y\|_p \, \|(|x_k + y_k|^{p-1})_{k=1}^n\|_q \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^{(p-1)q} \right)^{1/q}, \text{ missä } (p-1)q = p \\
&= (\|x\|_p + \|y\|_p) \, {\|x + y\|_p}^{p/q}.
\end{aligned}$$

Jakamalla puolittain luvulla ${\|x + y\|_p}^{p/q}$ saadaan

$$\|x + y\|_p^{p - p/q} \leq (\|x\|_p + \|y\|_p),$$

joka on $\| \cdot \|_p-$ normin kolmioepäyhtälö, sillä $p - \frac{p}{q} = 1$. $\square$

13.2. Klassiset jonoavaruudet.

ESIMERKKI 13.6 (ℓ^p-AVARUUDET). Vektorilaskutoimitukset on määritelty *kaikkien lukujonojen avaruudessa* $s = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K}) = \{x = (x_n)_{\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{K}\}$ tavalliseen tapaan: $(x + y)_n = x_n + y_n$ ja $(\lambda x)_n = \lambda x_n$. Klassiset jonoavaruudet ℓ^p, missä $1 \leq p \leq \infty$, ovat s:n vektorialiavaruuksia. Asianomaisin normein ne ovat

[77] HERMANN MINKOWSKI 1864–1909, Einsteinin opettaja, Saksa.

Banachin avaruuksia, ja pätee *Hölderin epäyhtälö jonoille* $x \in \ell^p$ ja $y \in \ell^q$, missä p ja q ovat toistensa duaalieksponentit:

$$|\langle x|y\rangle| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k||y_k| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q.$$

Tässä $\langle x|y\rangle$ on vektoreiden $x \in \ell^p$ ja $y \in \ell^q$ duaalitulo[78] $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \, y_k$, jonka olemassaolo, siis sarjan suppeneminen perustuu Hölderin epäyhtälöön.

Perustelut. Jätämme tapaukset $p = 1$ ja $p = \infty$ harjoitustehtäviksi ja oletamme, että $1 < p < \infty$. On todistettava, että osajoukko

$$\ell^p = \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \bigm| \|x\|_p = (\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p)^{1/p} < \infty\}$$

on vektorialiavaruus, että $\| \cdot \|_p$ on ℓ^p:ssä normi, ja että saatu normiavaruus on täydellinen. Aliavaruusehdot ovat

$$\begin{aligned} x + y \in \ell^p \quad & \forall \, x, y \in \ell^p \quad \text{ja} \\ \lambda x \in \ell^p \quad & \forall \, x \in \ell^p, \, \lambda \in \mathbb{K}. \end{aligned}$$

Jälkimmäinen on välittömästi selvää, onhan

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda x_k|^p = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_k|^p = |\lambda|^p \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty.$$

Summaa koskeva väite puolestaan todistetaan avaruuden $(\mathbb{K}^n, \| \cdot \|_p)$ kolmioepäyhtälön avulla. Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p,$$

joten

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k + y_k|^p \right)^{1/p} \leq \|x\|_p + \|y\|_p < \infty.$$

Näin on samalla tullut johdetuksi ℓ^p:n normille positiivinen homogeenisuus ja kolmioepäyhtälö. Muut normin määrittelevät ehdot, positiivisuus ja definiittisyys ovat ilmeisiä, joten ℓ^p on normiavaruus. Sen täydellisyys todistetaan yleisessäkin tapauksessa samalla tavalla kuin teimme kohdassa 9.26 avaruudelle ℓ^2.

[78] Nimi saa oikeutuksensa siitä, että tosiasiassa ℓ^p ja ℓ^q ovat toistensa duaalit, kun p ja q ovat äärelliset duaalieksponentit. Huomaa laskiessasi erot sisätuloon: Duaalitulo on lineaarinen, ei konjugaattilineaarinen, kummankin muuttujansa suhteen. Muuttujat eli tekijät ovat eri avaruuksien vektoreita. Tapauksessa $n = 2$, siis sisätuloavaruudessa ℓ^2 on $(x|y) = \langle x|\overline{y}\rangle$, missä $\overline{y}$ saadaan y:stä kompleksikonjugoimalla kaikki koordinaatit.

Hölderin epäyhtälö jonoille $x \in \ell^p$ ja $y \in \ell^q$ seuraa välittömästi äärellisulotteisesta erikoistapauksestaan, jonka mukaan kaikille $n \in \mathbb{N}$ pätee

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{1/q} = \|x\|_p \|y\|_q,\end{aligned}$$

ja siis myös

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k||y_k| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q. \qquad \square$$

Esimerkki 13.7 (Avaruudet c ja c_0). Avaruudet

$$\begin{aligned} c &= \{x \in \ell^\infty \mid \exists \lim_{i\to\infty} x_i\} \quad \text{ja} \\ c_0 &= \{x \in c \mid \lim_{i\to\infty} x_i = 0\} \end{aligned}$$

ovat normilla $\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} x_k$ varustettuina Banachin avaruuksia. Aliavaruudet $c_0 \subset c$ ja $c \subset \ell^\infty$ ovat suljettuja.

Perustelu. Esimerkin 13.1 yhteydessä mainittiin jo ennakkoon, että ℓ^∞ on $\|\cdot\|_\infty$-täydellinen. Asia todistetaan kohdassa 14.1, vieläpä hieman yleisemmässä muodossa. Koska täydellisyys periytyy metrisen avaruuden suljettuihin aliavaruuksiin, riittää siis näyttää, että c ja c_0 ovat normiavaruuden ℓ^∞ suljettuja aliavaruuksia. Näytetään malliksi, että c_0 on suljettu.

Olkoon $(f_n)_\mathbb{N} \subset c_0$ jono, joka suppenee kohti vektoria $f \in \ell^\infty$. Osoitetaan, että $f \in c_0$, eli että $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $f_n \to f$ avaruudessa ℓ^∞, on olemassa n_ε siten, että

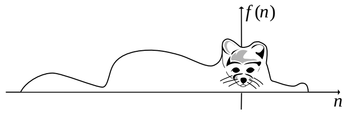
$$\|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Koska $f_{n_\varepsilon} \in c_0$, on olemassa $t_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $t \geq t_\varepsilon$ on $|f_{n_\varepsilon}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, jolloin

$$|f(t)| = |f(t) - f_{n_\varepsilon}(t) + f_{n_\varepsilon}(t)| \leq |f(t) - f_{n_\varepsilon}(t)| + |f_{n_\varepsilon}(t)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \qquad \square$$

kun $t \geq t_\varepsilon$. $\square$

Huomautus 13.8. Normiavaruuden vektorialiavaruus voidaan tietysti aina varustaa alkuperäisen avaruuden normilla, jolloin sitä sanotaan normialiavaruudeksi. Esimerkiksi avaruudet c_0, c ja ℓ^∞ ovat siis toistensa normialiavaruuksia. Mikään ei kuitenkaan estä varustamasta normiavaruuden vektorialiavaruutta jollakin aivan muulla normilla. Esimerkiksi $(\ell^1, \|\cdot\|_1)$ on $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$:n vektorialiavaruus, mutta ei normialiavaruus. Seuraavaksi tarkastamme, että näin on.



LAUSE 13.9. *Olkoon* $1 \leq p < s \leq \infty$. *Tällöin* $\ell^p \subsetneq \ell^s$ *vektorialiavaruutena, mutta ei normialiavaruutena eikä edes topologisena aliavaruutena. Tarkemmin sanoen inkluusiokuvaus*

$$\ell^p \to \ell^s : x \mapsto x$$

on kyllä jatkuva eli rajoitettu, itse asiassa

$$\|x\|_s \leq \|x\|_p \quad \forall x \in \ell^p \,,$$

mutta ei ole olemassa vakiota $C \in \mathbb{R}_+$, *jolla olisi* $\|x\|_p \leq C\|x\|_s \quad \forall x \in \ell^p$.

TODISTUS. Jos $s = \infty$, väite on ilmeinen. Yleisessä tapauksessa inkluusiokuvauksen jatkuvuuden todistaminen käy rajoittumalla ensin yksikköpallon kuoreen: Olkoon $x \in \ell^p$ siten, että $\|x\|_p = 1$. Tällöin tietysti $|x_i| \leq 1\,\forall i$, joten

$$\|x\|_s^s = \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{|x_i|^s}_{\leq 1} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{|x_i|^p}_{\leq 1} = \|x\|_p^p = 1.$$

Vastaava epäyhtälö yleiselle $x \in \ell^p$ saadaan tästä skaalauksella:

$$\|x\|_s = \left\| \frac{x}{\|x\|_p} \right\|_s \|x\|_p \leq 1 \cdot \|x\|_p.$$

Toisensuuntaisen normiepäyhtälön kumoaminen jää harjoitustehtäväksi. Inkluusioiden aitouden voi todeta esimerkeistä $(1, 1, 1, \dots) \in \ell^\infty \setminus \ell^p$, kun $1 \leq p < \infty$, ja $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{1/r}, \left(\frac{1}{3}\right)^{1/r}, \left(\frac{1}{4}\right)^{1/r}, \dots \right) \in \ell^s \setminus \ell^p$, kun $1 \leq p < r < s < \infty$. $\square$

HUOMAUTUS 13.10.

a) Inkluusiokuvauksen $\ell^p \to \ell^s$ normi on tasan yksi, minkä näkee valitsemalla $x = (1, 0, \dots)$.

b) Edellä on sivutuotteena saatu helppoja esimerkkejä epäjatkuvasta lineaarikuvauksesta; esimerkiksi identtinen kuvaus $(\ell^1, \|\cdot\|_\infty) \to (\ell^1, \|\cdot\|_1)$ on epäjatkuva.

HUOMAUTUS 13.11. Jonoavaruuksien ℓ^p, c ja c_0 määritelmissä voidaan $\mathbb{K}$ korvata millä tahansa normiavaruudella E. Näin syntyy vektoriarvoisia jonoavaruuksia, joita voi merkitä vaikka ℓ^p_E ja c_E ja $c_{0,E}$. Normin määritelmät ja täydelliselle E jonoavaruuksien täydellisyystodistukset toimivat sellaisinaan myös näille. Itse asiassa jokaista koordinaattia x_j varten voidaan jopa valita eri avaruus E_j, josta se poimitaan. Lähtemällä Hilbert-avaruuksista saadaan ℓ^2-konstruktiolla uusi Hilbert-avaruus, muuten yleensä ei, kuten perusesimerkki $E = \mathbb{K}$ osoittaa.

13.12. SEURAUS. *Olkoon* $p \in [1, \infty]$. *Äärellisen monen Banachin avaruuden* E_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ *tulo*

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i$$

varustettuna normilla

$$\|x\|_p = \|(x_1, \dots, x_n)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & \textit{kun } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{i \in \{1, \dots, n\}} \|x_i\|, & \textit{kun } p = \infty \end{cases}$$

on Banachin avaruus. Tuloavaruuksista on lisää tietoa luvussa 17.

PERUSTELU. Valitse huomautuksessa 13.11. $E_x = \{0\}$ kaikille paitsi äärellisen monelle avaruudelle E_i. $\square$

14. Jatkuvien funktioiden ja lineaarikuvausten avaruuksia

Avaruuden $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ täydellisyyttä käytettiin jo luvussa 3 hyväksi sovellettaessa Banachin kiintopistelausetta differentiaali- ja integraaliyhtälöiden ratkomiseen. Täydellisyys perustuu funktion jatkuvuuden säilymiseen tasaisessa konvergenssissa. Seuraavassa laajennamme sup-normin ja sen sukulaisten käyttöä hieman useammanlaisiin avaruuksiin.

14.1. Jatkuvien funktioiden avaruuksia.

ESIMERKKI 14.1. ($\mathcal{F}_b(X, E)$).

(1) Kun X on joukko ja E on Banachin avaruus, niin *rajoitettujen funktioiden avaruus* $\mathcal{F}_b(X, E) = \{f : X \to E \mid f \text{ on rajoitettu}\}$ on Banachin avaruus, kun se on varustettu normilla
$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$
(2) Kun X on metrinen avaruus ja E on Banachin avaruus, niin rajoitettujen jatkuvien funktioiden avaruus $\mathcal{B}d\mathcal{C}(X, E)$ on Banach-avaruuden $\mathcal{B}d(X, E)$ suljettu aliavaruus ja siis itsekin Banachin avaruus. Erityisesti, jos X on kompakti, niin kaikki jatkuvat funktiot ovat rajoitettuja ja tässä tapauksessa $\mathcal{C}(X, E) = \mathcal{B}d\mathcal{C}(X, E)$ on Banachin avaruus.

TODISTUS. Rajoitettujen funktioiden avaruus on tietenkin normiavaruus. Sen täydellisyyden todistaminen etenee periaatteessa samaan tapaan kuin jonoavaruuksien tapauksessa, nimittäin pisteittäisen konvergenssin avulla: Olkoon $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-jono $\mathcal{B}d(X, E)$:ssä. Kullakin $x \in X$ jono $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ on Cauchy avaruudessa E, siis suppeneva:
$$f_n(x) \to f(x) \in E.$$
Osoitamme, että näin syntyvä funktio $f : X \to E$ on rajoitettu ja suppeneminen $f_n(x) \to f(x)$ tasaista. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että
$$\begin{aligned} n, m > n_\varepsilon \implies &\|f_n - f_m\|_\infty \le \varepsilon, \text{ eli} \\ &\|f_n(x) - f_m(x)\| \le \varepsilon \,\forall x \in X. \end{aligned}$$
Kiinnitetään $n > n_\varepsilon$ ja x ja huomataan, että lauseke $\|f_n(x) - f_m(x)\|$ on muuttujan $f_m(x)$ jatkuva funktio, joten epäyhtälö säilyy rajalla $f_m(x) \to f(x)$:
$$\|f_n(x) - f(x)\| \le \varepsilon \quad \forall x \in X,\ n \ge n_\varepsilon.$$
Siis $f = f_n - (f_n - f)$ on rajoitettu ja $\|(f_n - f)\|_\infty \le \varepsilon$, kun $n > n_\varepsilon$.

Jatkuvia funktioita koskevat väitteet seuraavat siitä, että jatkuvuus säilyy tasaisessa konvergenssissa ja siitä, että kompaktissa avaruudessa jokainen jatkuva funktio on rajoitettu, koska jatkuva kuvaus vie kompaktin joukon kompaktiksi joukoksi. $\square$

Sivutuotteena on todistettu:

Lause 14.2. *Jonoavaruus $\ell^\infty = \mathcal{B}d(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ on täydellinen.*

14.2. Jatkuvien lineaarikuvausten avaruuksia.

Esimerkki 14.3. Jatkuvien lineaarikuvausten avaruus $\mathcal{B}(E, F)$ on operaattorinormilla varustettuna täydellinen, mikäli E on normiavaruus ja F on Banachin avaruus. Erityisesti jokaisen normiavaruuden duaaliavaruus $E^* = \mathcal{B}(E, \mathbb{K})$ on Banachin avaruus.

Todistus. Olkoon $(T_n)_1^\infty$ Cauchy-jono avaruudessa $\mathcal{L}(E, F)$. Rajoittamalla kuvaukset T_n avaruuden E yksikköpalloon B saadaan jono kuvauksia $T_n : B \to F$. Koska jatkuvan lineaarikuvauksen T operaattorinormi on sama asia kuin sen yksikköpallorajoittuman sup-normi, siis

$$\|T\| = \sup_{x \in B} \|Tx\|,$$

niin on saatu Cauchy-jono rajoitettujen kuvausten avaruudessa $\mathcal{B}d(B, F)$. Koska tämä avaruus on edellisen huomautuksen nojalla täydellinen, niin jono suppenee. On siis olemassa kuvaus $T : B \to F$ siten, että $T_n(x) \to T(x)$ tasaisesti yksikköpallossa $B \subset E$. Nyt T on "yksikköpallossa lineaarinen" siinä mielessä, että jos x, y ja $\lambda x + \mu y \in B$, niin

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y),$$

sillä T_n:n lineaarisuuden takia on on $T_n(\lambda x + \mu y) = \lambda T_n(x) + \mu T_n(y)$ ja toisaalta

$$\begin{aligned} T_n(\lambda x + \mu y) &\to T(\lambda x + \mu y) \text{ ja} \\ \lambda T_n(x) + \mu T_n(y) &\to \lambda T(x) + \mu T(y). \end{aligned}$$

Tällainen T voidaan laajentaa lineaarikuvaukseksi[79] $T : E \to F$ määrittelemällä kaikille $x \in E \setminus \{0\}$:

$$T(x) = \|x\| T\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Koska lineaarikuvauksen operaattorinormi on sen yksikköpallorajoittuman sup-normi, on selvää, että $T \in \mathcal{B}(E, F)$ ja että $T_n \to T$ operaattorinormin mielessä. □

15. Lebesgue'in avaruudet (∗)

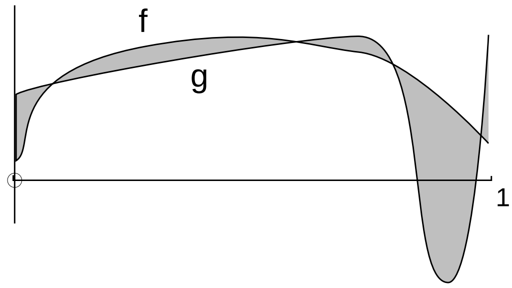
15.1. Integraalinormit jatkuvien funktioiden avaruudessa.

Sup-normi $\|\cdot\|_\infty$ tekee jatkuvien funktioiden avaruudesta $\mathcal{C}[0, 1]$ Banachin avaruuden, jossa suppeneminen on funktioiden tasaista konvergenssia. On kuitenkin muitakin luonnollisia tapoja mitata funktioiden välistä etäisyyttä kuin erotuksen itseisarvon maksimi. Esimerkiksi kahden jatkuvan funktion f ja $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ kuvaajien välisen alueen pinta-ala

$$\int_0^1 |f(x) - g(x)| \, dx$$

[79] Laskepa läpi, jos et muuten usko.

on luonnollinen tapa mitata kuvaajien erilaisuutta, varsinkin tilanteessa, jossa f ja g eroavat toisistaan vain pienessä joukossa, mutta siellä halutaan sallia suurikin erotus.



Kuva 35. Kuvaajien välinen ala.

Fourier-sarjojen suppenemistavan ymmärtämiselle ovat puolestaan ratkaisevan tärkeitä integraalin

$$\int_0^1 f(x)\overline{g}(x)\,dx$$

määrittelemä sisätulo ja vastaava normi $\|\cdot\|_2$. Nämä seikat sekä analogia ℓ^p-avaruuksiin antavat aiheen määritellä saman tien parven integraalinormeja jatkuville funktioille.

Määritelmä 15.1. Olkoon $1 \le p < \infty$. Kaikille funktioille $f \in \mathcal{C}[0,1]$ asetetaan

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Osoitamme seuraavassa, että tämä on hyvä määritelmä normiavaruusteorian kannalta; saadaan normeja ja lisäksi vielä Hölderin epäyhtälö jatkuville funktioille. On kuitenkin heti syytä huomauttaa siitä, että avaruudet $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|_p)$ ovat kaikki epätäydellisiä, kun $1 \le p < \infty$.

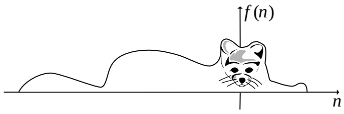
Lause 15.2. *Kuvaus $f \mapsto \|f\|_p$ on normi avaruudessa $\mathcal{C}[0,1]$, kun $1 \le p < \infty$. Lisäksi duaalieksponenteille $p, q \in [0,\infty]$ pätee Hölderin epäyhtälö integraaleille*

$$\|fg\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,|g(x)|\,dx \ \le \|f\|_p\,\|g\|_q \quad \forall\, f,g \in \mathcal{C}[0,1].$$

Erityisesti tapauksessa $p = q = 2$ Cauchyn, Schwarzin ja Bunjakovskin epäyhtälö on voimassa jatkuvien funktioiden integraalisisätulolle:

$$|(f|g)| = |\int_0^1 f(x)\,\overline{g}(x)\,dx| \le \|f\|_2\,\|g\|_2 \quad \forall\, f,g \in \mathcal{C}[0,1].$$

Todistus. Tapaukset $p = 1$ ja $p = \infty$ ovat helppoja, joten käsitellään tilannetta $1 < p < \infty$. Voimme jäljitellä vastaavia jonoavaruuksia koskevia todistuksia. Kolmioepäyhtälön todistamiseksi johdetaan nytkin ensin *Hölderin epäyhtälö* käyttäen



kohdan 13.2 Youngin epäyhtälöä $a\,b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. On tietenkin vain valittava

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{ja} \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q},$$

ja integroitava tästä saatava pisteittäinen epäyhtälö puolittain.

Minkowskin kolmioepäyhtälö integraaleille seuraa Hölderin epäyhtälöstä tutulla tavalla: Olkoot $1 \le p \le \infty$, $f \in \mathcal{C}[0,1]$ ja $g \in \mathcal{C}[0,1]$. Tietysti myös $f+g$ on jatkuva ja

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_0^1 |f(x)+g(x)|^p\,dx \\
&\le \int_0^1 |f(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx + \int_0^1 |g(x)|\,|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \\
&\le \Big(\int_0^1 |f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_0^1 |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\Big)^{1/q} \\
&\quad + \Big(\int_0^1 |g(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int_0^1 |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\Big)^{1/q} \\
&= \|f\|_p\,\|f+g\|_p^{p/q} + \|g\|_p\,\|f+g\|_p^{p/q} \\
&= \big(\|f\|_p + \|g\|_p\big)\,\|f+g\|_p^{p/q}\,.
\end{aligned}$$

Tästä kolmioepäyhtälö integraalinormeille seuraa, sillä $p - p/q = p\,(1-1/q) = 1$. $\square$

Jatkuvien funktioiden avaruus on täydellinen sup-normin $\|\cdot\|_\infty$ mielessä, mutta varsinaisille integraalinormeille pätee päinvastoin seuraava lause:

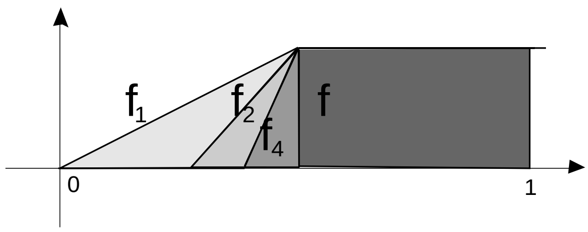
LAUSE 15.3. *Normiavaruus* $(\mathcal{C}[0,1], \|f\|_p)$ *on epätäydellinen, kun* $1 \le p < \infty$.

TODISTUS. Riittää löytää suppenematon Cauchy-jono. Esimerkiksi kelpaa kaikilla $p \in [1,\infty[$ sama funktiojono

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : \; f_n(x) = \begin{cases} \max\{0\,,\, 1 + n(x-\frac{1}{2})\}, \text{ kun } x < \frac{1}{2}, \\ 1 \text{ kun } x \ge \frac{1}{2}, \end{cases}$$

joka suppenee jokaisen integraalinormin $\|\cdot\|_p$ mielessä kohti pisteittäistä rajafunktiotaan

$$f : [0,1] \to \mathbb{K} : \; f(x) = \begin{cases} 0 \text{ kun } x < \frac{1}{2}, \\ 1 \text{ kun } x \ge \frac{1}{2}. \end{cases}$$



KUVA 36. $\|\cdot\|_1$-SUPPENEMATON CAUCHY-JONO.

Rajafunktio on epäjatkuva ja lisäksi on uskottavaa ja helppo tarkastaa, että ei voi olla olemassa jatkuvaa funktiota $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, jota kohti sama jono $(f_n)_\mathbb{N}$ myös suppenisi integraalinormin $\|\cdot\|_p$ mielessä. □

15.2. $\mathcal{L}^p(A)$-seminormiavaruudet.
Avaruuden $(\mathcal{C}[0,1], \|f\|_p)$ $(1 \le p < \infty)$ epätäydellisyys on mahdollista "korjata upottamalla se osaksi jotakin täydellistä avaruutta", josta Cauchy-jonoille sitten löytyy raja-arvot. Edellisen lauseen sisältämä vastaesimerkki antaa aiheen arvata, että tällainen avaruus voidaan konstruoida ottamalla mukaan sopiva määrä epäjatkuvia funktioita. Epäjatkuvien funktioiden mukaanotto ei yllätä, onhan jatkuvuus melko mielenkiinnoton ominaisuus laskettaessa integraaleja.

Tavoitteena on nyt konstruoida kullakin $1 \le p < \infty$ Banachin avaruus $L^p[0,1]$, jolla on seuraavat ominaisuudet.

- (⋆) $\mathcal{C}[0,1]$ on $L^p[0,1]$:n vektorialiavaruus.
- (⋆) $\mathcal{C}[0,1]$ on $L^p[0,1]$:n normialiavaruus, ts. $\|f\|_p = \|f\|_{Lp}\ \forall\, f \in \mathcal{C}[0,1]$.
- (⋆) $\mathcal{C}[0,1]$ on *tiheä* $L^p[0,1]$:ssä, ts. $L^p[0,1]$ on $\mathcal{C}[0,1]$:n sulkeuma $L^p[0,1]$:ssä.

Nämä ominaisuudet sanovat, että $L^p[0,1]$ on $\mathcal{C}[0,1]$:n *täydentymä*. Hahmottelemme tämän luvun huomautuksissa ja osoitamme luvussa 22 tarkasti, että millä tahansa normiavaruudella on täydentymä. On helppo harjoitus todistaa, että täydentymä on isometrisen isomorfismin tarkkuudella yksikäsitteinen. Puhuessamme em. funktioavaruuksista toivoisimme oikeastaan lisäksi, että:

- (⋆) $L^p[0,1]$:n alkiot olisivat funktioita $[0,1] \to \mathbb{K}$ ja normilla olisi kaikilla $f \in L^P$ sama lauseke kuin aikaisemmin:

$$\|f\|_{Lp} = \|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Henri Lebesgue'in mittateoria ratkaisee tulkintakysymyksen ihmeellisellä tavalla muuttamalla hiukan funktion käsitettä. Valmistelevana toimenpiteenä konstruoidaan seuraavassa kohdassa perhe seminormiavaruuksia, joiden vektorit ovat funktioita.

Huomautus 15.5. Oletamme seuraavassa yleisen mitan käsitteen tunnetuksi ja tarkastelemme mitta-avaruutta $(A, \varGamma, \mu)$. Mitta μ voidaan kyllä korvata tavallisella Lebesgue'in mitalla m esityksen loogisuuden siitä kärsimättä; sovellusesimerkkejä saadaan tällöin kuitenkin paljon vähemmän.

Määritelmä 15.6. Olkoon $1 \le p \le \infty$. Merkitään $M(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ on mitallinen}\}$. Seminormiavaruus $\mathcal{L}^p(A) = \mathcal{L}^p(A,\mu)$ määritellään asettamalla

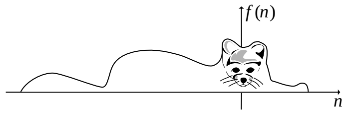
$$\mathcal{L}^p(A) = \left\{ f \in M(A) \;\middle|\; |f|_p < \infty \right\},$$

missä $|\cdot|_p$ on *$\mathcal{L}^p$–seminormi*

$$|f|_p = |f|_{\mathcal{L}^p(A)} = \left(\int_A |f|^p\, d\mu\right)^{1/p} \qquad \text{kun } 1 \le p < \infty$$

ja

$$|f|_\infty = |f|_{\mathcal{L}^\infty(A)} = \operatorname{ess\,sup}_A |f|.$$



HUOMAUTUS 15.7. (a) Määritelmän mukaan $\operatorname{ess\,sup}_A |f|$ on $\inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid |f(a)| \leq \lambda$ melkein kaikilla $x \in A\}$.
(b) Kun $f \in \mathcal{L}^p(A)$, niin $|f(x)| < \infty$ μ-mk $x \in A$.
(c) Todistamme seuraavana kohtana, että $\mathcal{L}^p(A)$ on todella seminormiavaruus määritelmän 6.2. mielessä.
(d) Lebesgue'in monotonisen konvergenssin lause ja dominoidun konvergenssin lause antavat eräin ehdoin[80] tulokseksi funktiojonon suppenemisen $f_i \to f$ "integraalin mielessä", toisin sanoen suppenemisen $\mathcal{L}^1$–seminormin $|\cdot|_1$ suhteen eli, että

$$\lim_{i\to\infty} \int_A |f - f_i| \, d\mu = 0.$$

LAUSE 15.8 (HÖLDERIN EPÄYHTÄLÖ INTEGRAALISEMINORMEILLE). *Olkoot p ja q duaalieksponentteja. Funktioille $f \in \mathcal{L}^p(A)$ ja $g \in \mathcal{L}^q(A)$ on $fg \in \mathcal{L}^1(A)$ ja*

$$|fg|_1 \leq |f|_p \, |g|_q \, .$$

TODISTUS. *Tapaus* $p = 1$ (tai $p = \infty$) on selvä, koska tällöin

$$|f(x)g(x)| \leq \big(\operatorname{ess\,sup}_A |g|\big) \, |f(x)| \qquad \mu\text{-mk } x \in A,$$

ja siis

$$\int_A |fg| \, d\mu \leq |g|_\infty \int_A |f| \, d\mu = |f|_1 \, |g|_\infty \, .$$

Tutkimme nyt tapausta $1 < p < \infty$: Jos $|f|_p = 0$ tai $|g|_q = 0$, niin väite on selvä, koska silloin $fg = 0$ μ-mk A:ssa.

Olkoot $|f|_p > 0$ ja $|g|_q > 0$. Kuten aikaisemmissa vastaavissa todistuksissa käytämme taas Youngin epäyhtälöä $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ $\quad \forall a \geq 0,\, b \geq 0$, tutuilla valinnoilla

$$a = \frac{|f(x)|}{|f|_p} \quad \text{ja} \quad b = \frac{|g(x)|}{|g|_q}.$$

Arvio

$$\frac{|f(x)g(x)|}{|f|_p \, |g|_q} \leq \frac{1}{p} \, \frac{|f(x)|^p}{|f|_p^p} + \frac{1}{q} \, \frac{|g(x)|^q}{|g|_q^q}$$

saadaan nyt ainoastaan μ-mk $x \in A$, mutta tämä riittää sille, että puolittain integroimalla saadaan $fg \in \mathcal{L}^p(A)$ ja

$$\frac{|fg|_1}{|f|_p \, |g|_q} \leq \tfrac{1}{p} \, \frac{|f|_p^p}{|f|_p^p} + \tfrac{1}{q} \, \frac{|g|_q^q}{|g|_q^q} = 1$$

eli

$$|fg|_1 \leq |f|_p \, |g|_q \, . \qquad \square$$

[80] Monotonisessa: $f_i \nearrow f$, dominoidussa $|f_i| \leq g$ ja $\int g < \infty$. Mitta- ja integraaliteorian perustulokset!

LAUSE 15.9 (MINKOWSKIN EPÄYHTÄLÖ.). *Olkoon* $1 \le p \le \infty$. *Jos* $f \in \mathcal{L}^p(A)$ *ja* $g \in \mathcal{L}^p(A)$, *niin myös* $f + g \in \mathcal{L}^p(A)$ *ja*

$$|f+g|_p \le |f|_p + |g|_p \,. \tag{1}$$

TODISTUS.
Tapaus $p = 1$ ja $p = \infty$ ovat triviaaleja. Tapaus $1 < p < \infty$ käsitellään käyttäen Hölderin epäyhtälöä tutulla tavalla ja saadaan

$$|f+g|_p^p \le \big(|f|_p + |g|_p\big)\, |f+g|_p^{p/q} \,.$$

Tästä kolmioepäyhtälö (1) seuraa, sillä $p - p/q = p\,(1 - 1/q) = 1$, kunhan varmistamme, etteivät molemmat puolet laskussamme ole äärettömiä, eli että $f + g \in \mathcal{L}^p(A)$:

Koska $f(x) \in \mathbb{K}$ ja $g(x) \in \mathbb{K}$ μ-mk $x \in A$, niin näille x saadaan

$$|f(x)+g(x)|^p \le \begin{cases} 2^p\,|f(x)|^p & \text{kun } |f(x)| \ge |g(x)| \\ 2^p\,|g(x)|^p & \text{kun } |f(x)| \le |g(x)|. \end{cases}$$

Näin ollen

$$|f+g|^p \le 2^p\,|f|^p + 2^p\,|g|^p \qquad \mu\text{-mk } A\text{:ssa},$$

ja $f + g \in \mathcal{L}^p(A)$, kuten pitikin. $\square$

Avaruudet $\mathcal{L}^p(A)$ eivät yleisessä tapauksessa ole normiavaruuksia, eivätkä edellä esiintyvät seminormit todellakaan yleensä ole normeja. Esimerkiksi tavallisen Lebesgue'in mitan m suhteen muodostetussa avaruudessa $\mathcal{L}^p[0,1]$ on $\|f\|_p = 0$, kunhan $f(x) = 0$ mk. Seuraavassa kohdassa poistetaan tämä puute.

15.3. L^p-normiavaruudet.

HUOMAUTUS 15.10. Olkoon (X, Γ, μ) mitta–avaruus, $A \in \Gamma \setminus \{\emptyset\}$ ja $1 \le p \le \infty$. Avaruus $L^p(A)$ muodostetaan funktioavaruudesta $\mathcal{L}^p(A)$ *samastamalla* keskenään sellaiset funktiot, jotka yhtyvät mitan μ mielessä melkein kaikkialla joukossa A. Tarkemmin sanomme, että funktiot $f \in M(A)$ ja $g \in M(A)$ ovat *ekvivalentteja*, merkitään $f \sim g$, jos

$$f = g \quad \mu\text{-mk } A\text{:ssa}.$$

Näin määritelty relaatio '$\sim$' on todella ekvivalenssirelaatio. Jokainen funktio $f \in M(A)$ määrää eli virittää siis nyt *ekvivalenssiluokan*

$$\tilde{f} = [f] = \big\{ g \in M(A) \;\big|\; g \sim f \big\}\,,$$

jolle jokainen funktio $g \in \tilde{f}$ on *edustaja* ja jolle siis erityisesti f on aina edustaja.

HUOMAUTUS 15.11. $L^p(A)$–alkion $\tilde{f}$ edustajaksi riittää valita *melkein kaikkialla määritelty* $\mathcal{L}^p$*-funktio* $f \colon A \to \mathbb{K}$.

Lebesgue'in avaruus $L^p(A)$ määritellään seuraavassa näiden ekvivalenssiluokkien joukkona varustettuna edustajakohtaisin laskutoimituksin ja edustajakohtaisella normilla $\|[f]\|_p = \|f\|_p$.

Määritelmä 15.12. $L^p(A) = L^p(A,\mu) = \{\tilde{f} \mid f \in \mathcal{L}^p(A)\}$.

Lause 15.13. *Avaruus $L^p(A)$ on normiavaruus määrittelyin*

(i) $\alpha\,\tilde{f} = \widetilde{\alpha f}$ *kaikille* $\tilde{f} \in L^p(A)$, $\alpha \in \mathbb{K}$,

(ii) $\tilde{f} + \tilde{g} = \widetilde{f+g}$ *kaikille* $\tilde{f}$, $\tilde{g} \in L^p(A)$ *ja*

(iii) $\|\tilde{f}\|_p = \|\tilde{f}\|_{L^p(A)} = |f|_{\mathcal{L}^p(A)}$.

Todistus. Luokkien laskutoimitukset ja seminormi ovat edustajien valinnoista riippumattomia ja $L^p(A)$ on asetetuin määritelmin selvästi vektoriavaruus. Seminormiominaisuudet periytyvät seminormiavaruudesta $\mathcal{L}^p(A)$. Edelleen $\|\cdot\|_p$ on nyt myös *definiitti*:

$$\|\tilde{f}\|_p = 0 \iff |f|_p = 0 \iff f = 0 \ \mu\text{-mk} \iff \tilde{f} = \tilde{0}\,. \qquad \square$$

Lause 15.14 (Riesz ja Fischer). *Avaruus $L^p(A)$ on Banachin avaruus.*

Todistus. Osoitamme että avaruuden $L^p(A)$ jokainen itseisesti suppeneva sarja suppenee. Lauseen 6.14 mukaan tämä takaa täydellisyyden.

Olkoon $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{f}_i$ avaruuden $L^p(A)$ itseisesti suppeneva sarja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\tilde{f}_i\|_p \le M < \infty.$$

On osoitettava, että se suppenee. Valitaan jokaiselle $i \in \mathbb{N}$ alkion $\tilde{f}_i$ edustajaksi mitallinen funktio $f_i \colon A \to \mathbb{K}$. Aikaisempien täydellisyystodistusten tapaan nytkin etsitään rajafunktiota — tässä sarjan summaa — pisteittäin. Lisätarkastelun aiheuttaa se, että funktiomme voivat käyttäytyä nollamittaisissa joukoissa miten tahansa.

Tapaus $1 \le p < \infty$: Funktiot $g_l : A \to \mathbb{K}$

$$g_l(x) = \sum_{k=1}^{l} |f_k(x)|\,, \qquad l = 1, 2, \ldots\,,$$

ja niiden pisteittäinen raja–arvo $g : A \to \mathbb{K}$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$$

ovat mitallisia joukossa A. Kolmioepäyhtälöstä seuraa arvio

$$|g_l|_p \le M \qquad \text{jokaiselle } l = 1, 2, \ldots.$$

Jos nyt sovelletaan Fatoun lemmaa[81] jonoon $(g_l^p)_{l\in\mathbb{N}}$, niin saadaan

$$|g|_p = \Big(\int_A g^p \, d\mu\Big)^{1/p} = \Big(\int_A \lim_{l\to\infty} g_l^p \, d\mu\Big)^{1/p} \le \Big(\varliminf_{l\to\infty} \int_A g_l^p \, d\mu\Big)^{1/p} \le M\,.$$

[81] Pierre Joseph Louis Fatou 1878–1929, Ranska. Fatoun lemma on mittateorian perustuloksia: Mitallisille funktioille $f_i : A \to [0,\infty], i = 1,2,\ldots$ on $\int_A \liminf_{i\to\infty} f_i \, d\mu \le \liminf_{i\to\infty} \int_A f_i \, d\mu$.

Näin ollen

$$0 \le g(x) < \infty \qquad \mu\text{-mk } x \in A,$$

joten lukusarja

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

suppenee itseisesti ja siis suppenee μ-mk $x \in A$, ts. joukossa $A \setminus E$, missä poikkeusjoukko E on nollamittainen: $\mu(E) = 0$. Täydennetään f:n määritelmää asettamalla

$$f(x) = 0, \qquad \text{kun } x \in E.$$

Tällöin f on mitallinen ja $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ μ-mk $x \in A$.

Osoitetaan, että $\sum_{k=1}^{n} \tilde{f}_k \to \tilde{f}$ avaruudessa $L^p(A)$: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k|_p < \varepsilon \quad \forall \quad n \ge n_\varepsilon.$$

Koska μ-mk $x \in A$:

$$|f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|^p = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)|^p = \lim_{m\to\infty} |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)|^p,$$

niin Fatoun lemman mukaan

$$\begin{aligned}
|f - \sum_{k=1}^{n} f_k|_p^p &= \int_A |f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)|^p \, d\mu \\
&= \int_A \lim_{m\to\infty} |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)|^p \, d\mu \\
&\le \varliminf_{m\to\infty} \int_A |\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)|^p \, d\mu \\
&= \varliminf_{m\to\infty} |\sum_{k=n+1}^{m} f_k|_p^p \le \varliminf_{m\to\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{m} |f_k|_p \right)^p < \varepsilon^p \ \forall n \ge n_\varepsilon.
\end{aligned}$$

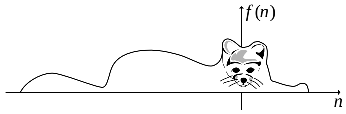
Näin on todistettu, että

$$f - \sum_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{L}^p(A)$$

ja siis myös

$$f = \left(f - \sum_{k=1}^{n} f_k \right) + \sum_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{L}^p(A),$$

$$\text{eli} \quad \tilde{f} \in L^p(A).$$



Samalla havaitsimme, että

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$$

avaruudessa $L^p(A)$ ja väite on todistettu.

Tapaus $p = \infty$: Todistamme suoraan, että $L^p(A)$:n Cauchy-jono $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suppenee. Annettuun $\varepsilon > 0$ liittyy $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $i,\, j \geq n_\varepsilon$ on

$$\|\tilde{f}_i - \tilde{f}_j\|_\infty = |f_i - f_j|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x\in A} |f_i(x) - f_j(x)| < \varepsilon\,.$$

Asetetaan

$$E_i = \bigl\{x \in A \bigm| |f_i(x)| > |f_i|_\infty\bigr\}\,, \qquad i = 1, 2, \dots\,,$$

ja

$$E_{i,j} = \bigl\{x \in A \bigm| |f_i(x) - f_j(x)| > |f_i - f_j|_\infty\bigr\}\,, \qquad i,\, j = 1, 2, \dots\,,$$

sekä

$$E = \Bigl(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\Bigr) \cup \Bigl(\bigcup_{i,j=1}^{\infty} E_{i,j}\Bigr)\,.$$

Tällöin E on nollamittaisten joukkojen numeroituvana yhdisteenä nollamittainen. Koska nyt

$$|f_i(x) - f_j(x)| < \varepsilon \qquad \text{kaikille } x \in A \setminus E \text{ kun } i,\, j \geq n_\varepsilon,$$

niin jono (f_i) suppenee tasaisesti joukossa $A \setminus E$, ja voimme määritellä funktion $f\colon A \to \mathbb{K}$ asettamalla

$$f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{i\to\infty} f_i(x) & \text{kun } x \in A \setminus E \\ 0 & \text{kun } x \in E. \end{cases}$$

Tällöin jokaiselle $x \in A \setminus E$ on

$$|f(x)| \leq |f_i(x)| + |f(x) - f_i(x)| \leq |f_i|_\infty + \varepsilon \qquad \text{kun } i \geq n_\varepsilon.$$

On siis $\tilde{f} \in L^\infty(A)$, ja lisäksi

$$\|\tilde{f} - \tilde{f}_i\|_\infty = |f - f_i|_\infty \leq \varepsilon \qquad \text{kun } i \geq n_\varepsilon. \qquad \square$$

Huomautus 15.15. Jos kysymyksessä on Lebesgue-mitan tapaus

$$(X, \varGamma, \mu) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{M}^n, m_n),$$

niin usein samastetaan f ja $\tilde{f}$. Alkion $\tilde{f}$ sijasta käytetään sen edustajaa f, jota voidaan tarvittaessa modifioida nollamittaisessa joukossa; puhe 'L^p-funktioista' on ymmärrettävä tässä mielessä. Menettely ei yleensä aiheuta sekaannusta.

Yleisessä tapauksessa avaruudet $\mathcal{L}^p$ ja L^p voivat kuitenkin olla hyvin erilaisia: Jos mitta-avaruutena on esimerkiksi $\bigl(\mathbb{R}^n, 2^{\mathbb{R}^n}, \delta_0\bigr)$, missä δ_0 on *Diracin mitta* eli *"δ-funktio"*, siis $\delta_0(A) = 1$, kun $0 \in A$ ja muuten $\delta_0(A) = 0$, niin silloin $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n, \delta_0)$ täsmälleen silloin kun $f\colon A \to \mathbb{K}$ jollekin $A \subset \mathbb{R}^n$ siten, että $0 \in A$ ja $|f(0)| < \infty$. Koska nyt $f = 0$ δ_0-mk tasan silloin, kun $f(0) = 0$, niin $L^p(\mathbb{R}^n, \delta_0)$ määräytyy yhden pisteen funktioista $f\colon \{0\} \to \mathbb{K}$. Olennaisesti siis $L^p(\mathbb{R}^n, \delta_0) = \mathbb{K}$.

Toisaalta voi myös olla $L^p = \mathcal{L}^p$: Jos ehdosta $\mu(E) = 0$ seuraa $E = \emptyset$, niin $\tilde{f} = \{f\}$. Tästä tapauksesta esimerkin antaa jonoavaruus ℓ^p.

LAUSE 15.16. *Jos* $\mu(A) < \infty$ *ja* $1 \le p < r \le \infty$, *niin*

$$L^r(A) \subset L^p(A) \tag{1}$$

ja

$$\|\tilde f\|_p \le \big(\mu(A)\big)^{1/p-1/r}\,\|\tilde f\|_r \qquad \textit{kaikille } \tilde f \in L^r(A). \tag{2}$$

TODISTUS. Osoitetaan inkluusio (1). Arvio (2) jää harjoitustehtäväksi.

Tapaus $r < \infty$: Olkoon $\tilde f \in L^r(A)$, $f\colon A \to \mathbb{K}$ sen edustaja, ja asetetaan

$$A_1 = \big\{x \in A \;\big|\; |f(x)| < 1\big\}\,.$$

Silloin

$$\begin{aligned}\int_A |f|^p\,d\mu &= \int_{A_1} |f|^p\,d\mu + \int_{A\smallsetminus A_1} |f|^p\,d\mu \\ &\le \mu(A) + \int_A |f|^r\,d\mu < \infty\,,\end{aligned}$$

joten $f \in \mathcal{L}^p(A)$. On siis $\tilde f \in L^p(A)$.

Tapaus $r = \infty$: Olkoon $\tilde f \in L^\infty$ ja $f\colon A \to \mathbb{K}$ sen edustaja. Silloin

$$\int_A |f|^p\,d\mu \le \big(\operatorname{ess\,sup}_A |f|\big)^p\,\mu(A) = \|\tilde f\|_\infty^p\,\mu(A) < \infty\,,$$

joten $\tilde f \in L^p(A)$. □

VASTAESIMERKKI 15.17. Kun $\mu(A) = \infty$, niin L^p–avaruuksien inkluusio ei päde: Esimerkiksi tavallisessa Lebesgue'in mitta-avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, pätee m.k. määritellylle funktiolle $f\colon x \mapsto 1/x$, että $\tilde f \in L^2(\mathbb{R})$ mutta $\tilde f \notin L^1(\mathbb{R})$. Avaruudet $L^p(A)$ eksponentin p eri arvoilla eivät siis yleisesti ole sisäkkäisiä kumpaankaan suuntaan. Toisaalta jonoavaruudet ℓ^p ovat $L^p(A)$-avaruuksia ja sisäkkäisiäkin, mutta eri päin kuin äärellismittaisessa tapauksessa!

ESIMERKKI 15.18 (HILBERT-AVARUUS $L^2(A)$). Erikoistapauksen $L^p(A)$–avaruuksien joukossa muodostaa $L^2(A)$–avaruus, jossa voidaan määritellä sisätulo asettamalla

$$(\tilde f \,|\, \tilde g)_2 = \int_A f\,\overline{g}\,d\mu\,.$$

Tämä kuvaus $(\cdot\,|\,\cdot)_2\colon L^2(A) \times L^2(A) \to \mathbb{K}$ on hyvin määritelty, sillä oikea puoli on olemassa, koska $f\,g \in \mathcal{L}^1(A)$ Hölderin epäyhtälön nojalla. On lisäksi ilmeistä, että näin määritelty $(\tilde f \,|\, \tilde g)_2$ ei riipu $\mathcal{L}^2$–edustajien valinnasta ja toteuttaa sisätulon aksioomat.

Rieszin ja Fischerin lauseesta 15.14 seuraa, että $L^2(A) = \big(L^2(A), (\cdot\,|\,\cdot)_2\big)$ on Hilbert-avaruus.

Esimerkki 15.19 (Jonoavaruudet ℓ^p). Jonoavaruudet ℓ^p voidaan tulkita L^p- avaruuksiksi, kunhan mitaksi valitaan lukumäärä joukossa $\mathbb{N}$, ts.

$$(X, \Gamma, \mu) = \big(\mathbb{N}, 2^{\mathbb{N}}, \mu\big)$$

mittana lukumäärämitta $\mu = \#$. Tällöin on

$$\ell^p = L^p(\mathbb{N}, \mu) = \mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mu).$$

Selitys. Kuvaus $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ on *jono*, jolle tavalliseen tapaan käytetään merkintää

$$\xi = (\xi_n)_n = (\xi_1, \xi_2, \dots)\,, \qquad \text{kun } \xi_n = f(n).$$

On siis $\xi \in \ell^\infty$, jos ja vain jos

$$\operatorname{ess\,sup}_{n\in\mathbb{N}} |f(n)| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n| < \infty\,,$$

ja tapauksessa $1 \le p < \infty$ on $\xi \in \ell^p$ jos ja vain jos

$$\int_{\mathbb{N}} |f|^p \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty\,. \qquad \square$$

Huomautus 15.20. Olemme saaneet lupaamamme tulkinnan avaruuden $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ täydentymän alkioille, kun $1 \le p < \infty$. Jatkuvat funktiot ovat Lebesgue-mitallisia ja samastetaan tietysti ekvivalenssiluokkiinsa, jolloin $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K}) \subset L^p([a,b])$. Aliavaruuden $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ sulkeuma on nyt etsitty täydentymä, sillä $L^p([a,b])$ on täydellinen. Itse asiassa tämä sulkeuma on koko avaruus $L^p([a,b])$, ts. jatkuvien funktioiden avaruus on tiheä $L^p([a,b])$:ssä. Tämän tuloksen todistaminen kuuluu mittateorian alaan, mutta koska asia on tärkeä hahmottelemme kuitenkin todistuksen tämän luvun lopun huomautuksien yhteydessä.

Tapaus $p \ne \infty$ on erilainen: $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{K})$ on jo itse täydellinen normin $\|\cdot\|_\infty$ mielessä ja siis suljettu normialiavaruus, ei missään tapauksessa tiheä, avaruudessa $L^\infty([a,b])$.

Lebesgue'in avaruudet ja niiden sukulaiset, mm. Sobolevin avaruudet, ovat matemaattisen analyysin tärkeitä työkaluja. Palaammekin Lebesgue'in avaruuksiin vielä monta kertaa; todistamme mm., että $L^p(A)$ ja $L^q(A)$ ovat toistensa duaaleja, kun p ja $q \in\,]1,\infty[$ ovat duaalieksponentit ja siis erityisesti, että $L^p(A)$ on näillä p:n arvoilla *refleksiivinen*, eli duaaliavaruutensa duaali.

15.4. Sobolevin avaruudet $(*)$.

Huomautus 15.21. Lebesgue'in avaruudet ovat jatkuvien funktioiden avaruuden $\mathcal{C}[a,b]$ täydentymiä $\|\cdot\|_p$-normien suhteen. Analyysin tarpeisiin niissä on se vika, että derivaattaa ei ole määritelty edes lähtökohtana olevassa avaruudessa $\mathcal{C}[a,b]$. Tämä antaa aiheen tehdä vastaavan yleistyksen *jatkuvasti derivoituvien funktioiden avaruudelle* $\mathcal{C}^1[a,b]$, normina

$$\|f\|_{p,\mathcal{C}^1} = \|f\|_p + \|f'\|_p,$$

missä $1 \le p \le \infty$.

Huomaa, että kuten Lebesgue'in avaruuksien tapauksessa nytkin $p = \infty$ on käsiteltävä eri tavalla, sillä $\|f\|_{p,\mathcal{C}^1}$ antaa tasaisen suppenemisen sekä funktiolle että derivaatalle ja tekee avaruudesta $\mathcal{C}^1$ täydellisen täydentämättäkin.[82] Tämä heijastuu myös joihinkin tapauksen $p = 1$ käsittelyssä tuleviin hankaluuksiin.

Ylempiä derivaattoja voi ottaa huomioon lähtemällä avaruudesta $\mathcal{C}^n[a,b]$ ja ottamalla normin lausekkeeseen kaikki derivaatat. Analyysin kirjoissa tarkastellaan sitä paitsi yleensä usean muuttujan funktioiden avaruuksia.

Seuraavassa esitellään perustapauksesta $\mathcal{C}^1[a,b]$ täydentämällä syntyvät *Sobolevin avaruudet*[83] $W_p = W^{1,p}(]a,b[) = H^{1,p}(]a,b[)$ $(1 \le p < \infty)$. Osoittautuu, että ne voi realisoida seuraavalla tavalla. Merkitään kompaktikantajaisten $\mathcal{C}^1$-funktioiden aliavaruutta $\mathcal{C}^1_c$.

MÄÄRITELMÄ 15.22. Olkoon $1 \le p < \infty$. Määritellään

$$W^{1,p}(]a,b[) = \Big\{ f \in L^p[a,b] \;\Big|\; \exists u \in L^p[a,b] \text{ se. } \forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(]a,b[) : \int_a^b \varphi u = -\int_a^b \varphi' f \Big\}.$$

Funktio $u \in L^p[a,b]$ on funktion f *distribuutioderivaatta*, *heikko derivaatta* eli *derivaatta*.

HUOMAUTUS 15.23. Osittaisintegroinnin avulla huomaa, että jatkuvasti derivoituvan funktion f distribuutioderivaataksi kelpaa sen tavallinen derivaatta. Tämä antaa aiheen merkitä $u = f'$ yleisessäkin tapauksessa, etenkin kun alkio $u \in L^p[a,b]$ määräytyy yksikäsitteisesti derivaatan määrittelevästä ehdosta $\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(]a,b[) : \int_a^b \varphi u = -\int_a^b \varphi' f$. (Harjoitustehtävä.)

LAUSE 15.24. *Sobolevin avaruus $W^{1,p}$ on pisteittäisin laskutoimituksin vektoriavaruus. Normi $\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|f'\|_p$ tekee siitä Banachin avaruuden ja derivoinnista $f \mapsto f'$ jatkuvan lineaarikuvauksen $W^{1,p} \to L^p$.*

PERUSTELU. Ei kovinkaan vaikeaa, mutta tylsää laskentoa. □

HUOMAUTUS 15.25. $W^{1,p}$:n alkiot ovat luonnollisen normin mielessä likimain samoja kuin jatkuvasti derivoituvat funktiot. Päätulos on, että $\mathcal{C}^1[a,b]$ on isometrisen isomorfismin tarkkuudella Sobolevin avaruuden $W^{1,p}$ aliavaruus ja lisäksi tiheä, ts. $W^{1,p}$ on sen täydentymä. Tämä ei ole itsestään selvää. Historiallisesti on jopa niin, että alun perin määriteltiin erikseen toisaalta avaruus $W^{1,p}$ ja toisaalta täydentämällä syntyvä avaruus $H^{1,p}$; näiden samuuden todistaminen oli aikanaan merkittävä tutkimustulos. Hahmottelemme alla pääkohdat.

MÄÄRITELMÄ 15.26. Olkoot $1 \le p < \infty$. Määritellään:

$$\mathcal{C}^1_p(]a,b[) = \Big\{ f \in \mathcal{C}^1(]a,b[) \;\Big|\; f \text{ ja } f' \in L^p[a,b] \Big\} \text{ ja}$$
$$H^{1,p}(]a,b[) = \mathcal{C}^1_p(]a,b[) : \text{n täydentymä normissa } \|\cdot\|_{1,p}.$$

[82] Tapauksessa $p = \infty$ saadaan itse asiassa Lipschitz-jatkuvien funktioiden avaruus.

[83] SERGEI L. SOBOLEV 1908-1989, Venäjä.

Lause 15.27. *Olkoon $f \in L^p[a,b]$. Tällöin $f \in H^{1,p}(]a,b[)$, jos ja vain jos on olemassa avaruuden $\mathcal{C}_p^1(]a,b[)$ Cauchy-jono g_j, jolla $\|g_j - f\|_p \to 0$.*

Lause 15.28. *$H^{1,p}(]a,b[) \subset W^{1,p}(]a,b[)$ normialiavaruutena.*

Perustelu. Olkooon $f \in H^{1,p}(]a,b[)$ ja $(g_j)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}_p^1(]a,b[)$ Cauchy-jono, jolla $g_j \to f$. Derivaattojen jono $(g_j')_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}^p[a,b]$ on Cauchy-jono, siis suppenee, ja on analyysin rutiinia todeta, että sen rajafunktio kelpaa f:n derivaataksi. □

Lause 15.29. (Friedrichs, Deny ja Lions, Meyer ja Serrin)[84] *$H^{1,p}(]a,b[) = W^{1,p}(]a,b[)$ normialiavaruutena.*

Perustelu. Tämä lause tuli kuuluisaksi 1958. Nykyisin muutaman sivun mittainen todistus löytyy reaalianalyysin oppikirjoista. Työvaiheita ovat siirtyminen kompaktikantajaisiin funktioihin, silotukset sekä reaalifunktioiden perusominaisuuksien, kuten Urysohnin lemman ja ykkösen $\mathcal{C}^\infty$-ositusten käyttö. □

16. Normiavaruuksien duaaleja

Muistamme aluksi, että esimerkin 14.3 mukaan normiavaruuden $(E, \|\cdot\|)$ duaali on Banachin avaruus $E^* = B(E, \mathbb{K})$, jossa normina on operaattorinormi.

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \le 1} |\langle x|f\rangle|.$$

Tiedämme jo, että Hilbertin avaruuden duaali on tulkittavissa avaruudeksi itsekseen ja että tämä asia on tärkeä. Muidenkin klassisten Banachin avaruuksien duaaleilla on samantapaisia tulkintoja. Tämän pykälän alkuun on koottu luettelo eräiden klassisten Banachin avaruuksien duaaleista. Näiden tulkinta ja todistukset vaihtelevat vaikeusasteeltaan. Helposti ymmärrettävää ja muistettavaa on, että kun p ja $q = \frac{p}{p-1} \in]1, \infty[$ ovat äärelliset duaalieksponentit, niin Lebesgue'in normiavaruudet $L^p(A)$ ja $L^q(A)$ ovat olennaisesti toistensa duaaliavaruudet. Tämä asiantila, joka todistetaan luvussa VII, on luonnollisesti syynä duaalieksponenttien nimeen, vaikka vastaava ei päde molemmin puolin parille $1, \infty$.

Luettelo 16.1.

(1) *Hilbert-avaruuden H duaali on $H^* = H$.*
(2) *Äärellisulotteisen avaruuden $\mathbb{K}^n$ duaali on $(\mathbb{K}^n)^* = \mathbb{K}^n$.*
(3) *Jonoavaruuden ℓ^1 duaali on ℓ^∞.*
(4) *Jonoavaruuden ℓ^p duaali on ℓ^q, kun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $p, q \in]1, \infty[$.*
(5) *Jonoavaruuden c duaali on ℓ^1.*
(6) *Jonoavaruuden c_0 duaali on ℓ^1.*
(7) *Jonoavaruuden ℓ^∞ duaali muodostuu kaikista äärellisesti additiivisista mitoista luonnollisten lukujen osajoukkojen joukossa.*
(8) *Lebesgue'in avaruuden $L^p(A)$ duaali on $L^q(A)$, kun $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,; $p, q \in]1, \infty[$.*
(9) *Lebesgue'in avaruuden $L^1(A)$ duaali on $L^\infty(A)$, jos mitta μ on σ-additiivinen joukossa A.*

---

[84] Kurt Otto Friedrichs 1901–1982 Saksa-USA. J.Deny, ?–? Ranska. J.L. Lions, 1928–2001 Ranska. Kenneth R. Meyer ?–? USA. James Serrin, ca. 1926– ?? USA.

(10) *Lebesgue'in avaruuden $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ duaali muodostuu niistä äärellisesti additiivisista joukkofunktioista τ, joilla on sellainen absoluuttinen jatkuvuusominaisuus, että jos $\tau(A) = 0$, niin $m(A \cap B) = 0$ kaikille B, joille $m(B) < \infty$.*[85]

(11) *Funktioavaruuden $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{K})$ duaali muodostuu rajoitetusti heilahtelevista funktioista $f : [0,1] \to \mathbb{K}$, normina kokonaisheilahtelu ja toimintana Stieltjes-integraali $g \mapsto \int_0^1 g(t)df(t)$. Tämä väite on alkuperäinen* Rieszin esityslause.[86]

(12) *Funktioavaruuden $\mathcal{C}(X,E)$ duaali muodostuu kaikista säännöllisistä $\mathbb{K}$-arvoisista Borel-mitoista joukossa X, jos X on kompakti ja Hausdorff. Tämä väite on moderni* Rieszin esityslause.

(13) *Tuloavaruuden $E \times F$ duaali on $E^* \times F^*$.*

(14) *Tekijäavaruuden E/F duaali samastuu F:n annihilaattoriin avaruudessa E^* eli aliavaruuteen $F^\perp = \{x^* \in E^* \mid x^*(f) = 0$ kaikille $f \in F\}$.*

(15) *Suljetun aliavaruuden $F \subset E$ duaali F^* on vastaavasti tekijäavaruus $E^*/F^\perp$.*

(16) *Aliavaruudella $F \subset E$ on sama duaali kuin sulkeumallaan $\overline{F}$.*

Selityksiä ja alustavia perusteluja. Kaikki väitteet ovat tosia vain isomorfismin mielessä. Hilbert-avaruuksia koskeva väite (1) on Fréchet'n ja Rieszin esityslause ja kohta (2) seuraa siitä, että äärellisulotteisen avaruuden kaikki normit ovat ekvivalentteja euklidisen, siis Hilbert-avaruudeksi tekevän normin kanssa.

Tunnistamme $L^p(A)$-avaruuksien $(1 \le p < \infty)$ duaalit vasta luvussa 27, mutta voimme jo nyt näyttää, että jonoavaruuksilla on vastaavat ominaisuudet, siis $\ell^{p*} = \ell^q$, kun p ja q ovat toistensa duaalieksponentit ja $1 < p < \infty$. Tulkintana eli isomorfismina tässä on, että jono $(a_n)_\mathbb{N}$ tulkitaan jonoavaruudessa funktionaaliksi

$$(b_n)_\mathbb{N} \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n .$$

Se, että ℓ^1:n duaali on ℓ^∞ todistetaan samaan tapaan luvussa 19.5 käyttäen lisätietona tasaisen rajoituksen periaatetta luvusta 19.2. Jonoavaruudet c ja c_0 on helppo dualisoida samalla tekniikalla. Sen sijaan $\ell^{\infty *}$ on jotain aivan muuta kuin jonoavaruus, vaikka edellisten isomorfismien mielessä kyllä onkin $\ell^1 \subset \ell^{\infty *}$.

Lebesguen avaruuksien osalta funktio g samastetaan funktionaaliin

$$f \mapsto \int fg\,.$$

Tämä johtaa välitömästi siihen ideaan, että myös mitta voidaan koettaa tulkita funktioavaruudessa määritellyksi funktionaaliksi, joka liittää funktioon f luvun $\int f\,d\mu$. Erityisesti jatkuvien funktioiden avaruuden duaalin alkio saadaan rajoitetusti heilahtelevasta funktiosta $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ muodostamalla *Stieltjes-integraali*

$$f \mapsto \int_0^1 f\,dg.$$

[85] [He-S] §20.27 ja §20.35, [RN] § 50, [Y] §IV.9.

[86] Vuosilta 1909 - 19010. Ks. esim. [W] ja [Y] §IV.9. Älä sekoita Fréchet'n ja Rieszin esityslauseeseen.

Aliavaruuden ja tekijäavaruuden duaalisuudessa tulkintaa varten tarvitaan tietenkin tekijäavaruuden määritelmä luvusta 17. Sitten alkiota $\varphi \in (E/F)^*$ vastaa funktionaali $\varphi \circ \pi$, missä π on kanoninen surjektio. Aliavaruuden duaalin alkio saadaan tekijäavaruuden $E^*/F^\perp$ alkiosta $[x^*]$ asettamlla $[x^*](x) = x^* \big|_F$.

Lause 16.2.

(1) *Avaruuden ℓ^p duaali on isomorfinen avaruuden ℓ^q kanssa, kun p ja q ovat toistensa duaalieksponentit ja $1 \le p, q < \infty$.*
(2) *Suppenevien jonojen avaruudella c ja nollaan suppenevien jonojen avaruudella c_0 on molemmilla duaalinaan ℓ^1, isomorfismin tarkkuudella $c_0^* = \ell^1$. ja myös $c^* = \ell^1$. Tulkinnoissa eli isomorfismeissa $y \mapsto f_y$ on pieni ero:*

$$f_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \qquad \forall\, x = (x_1, \dots) \in c_0,\, y = (y_1, \dots) \in \ell^1.$$

$$f_y(x) = y_0 \lim_{n\to\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n \quad \forall\, x = (x_1, \dots) \in c,\, y = (y_0, \dots) \in \ell^1.$$

Perustelu. Todistetaan, että ℓ^p:n duaali on ℓ^q, kun $1 < p$. Hölderin epäyhtälön mukaan ainakin jokainen $y \in \ell^q$ tuottaa jatkuvan lineaarikuvauksen

$$f_y : \ell^p \to \mathbb{K} : x \mapsto \langle x|y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,$$

ja vieläpä

$$|f_y(x)| = |\langle x|y\rangle| \le \|x\|_p \|y\|_q,$$

joten $\|f_y\| \le \|y\|_q$.

Lisäksi kuvaus $y \mapsto f_y$ on injektio, sillä jos $f_y(x) = 0$ kaikille $x \in \ell^p$, niin erityisesti $f_y(e_n) = y_n = 0$ kaikille "luonnollisille yksikkövektoreille" $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$, joten $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$.

Ongelmaksi jää osoittaa, että kuvaus $y \mapsto f_y$ on surjektio $\ell^q \to \ell^{p*}$ ja että $\|f_y\|$ on tasan $\|y\|_q$. Olkoon $f \in \ell^{p*}$. Muodostetaan jono

$$y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (f(e_n))_{n\in\mathbb{N}},$$

joka jo todetun mukaan on ainoa mahdollinen ehdokas etsityksi jonoksi $y \in \ell^q$. On näytettävä, että y todella kuuluu avaruuteen ℓ^q, että $f = f_y$ ja että $\|f_y\| \ge \|y\|_q$.

Tarkastellaan jonoa

$$t_n = \begin{cases} \frac{|y_n|^q}{y_n}, & \text{kun } y_n \ne 0 \\ 0 \;, & \text{kun } y_n = 0, \end{cases}$$

jolloin

$$|t_n|^p = |y_n|^{p(q-1)} = |y_n|^q.$$

Saadaan arvio

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}|y_n|^q = \sum_{n=1}^{N} t_n y_n = \sum_{n=1}^{N} t_n f(e_n) = f\Big(\sum_{n=1}^{N} t_n e_n\Big) \leq \\ \leq \|f\|\Big(\sum_{n=1}^{N}|t_n|^p\Big)^{1/p} = \|f\|\Big(\sum_{n=1}^{N}|y_n|^q\Big)^{1/p}.\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\Big(\sum_{n=1}^{N}|y_n|^q\Big)^{1-1/p} = \Big(\sum_{n=1}^{N}|y_n|^q\Big)^{1/q} \leq \|f\| \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Toisin sanoen $\|y\|_q \leq \|f\|$ ja erityisesti $y \in \ell^q$.

Tarkastetaan lopuksi, että $f_y = f$. Ainakin $f(e_n) = f_y(e_n)\,\forall n \in \mathbb{N}$. Väite seuraa siis siitä, että kummatkin kuvaukset ovat lineaarisia ja jatkuvia ja että luonnollisten yksikkövektorien e_n virittämä lineaarinen aliavaruus $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ on tiheä avaruudessa ℓ^p.

Näin on selitetty tapaus, jossa sekä p että q ovat äärellisiä. Tapaus $p = 1$, $q = \infty$ todistetaan luvussa 19 käyttäen apuna Banachin ja Steinhausin lausetta eli tasaisen rajoittuneisuuden periaatetta. Yhteydet $c_0^* = \ell^1$ ja $c^* = \ell^1$ voi perustella suunnilleen samalla tavalla. Ks. harjoitustehtävät 19.24 ja 19.25. □

Lause 16.3 (Rieszin esityslauseen alkuperäinen muoto). *Funktioavaruuden $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{K})$ duaali muodostuu rajoitetusti heilahtelevista funktioista, normina kokonaisheilahtelu.*

Perustelu. Banachin keksimä todistus käyttää myöhemmin esitettävää Hahnin ja Banachin lausetta 21.4, mutta hahmottelemme sen kuitenkin jo nyt.

Aluksi on todettava, että jokainen *rajoitetusti heilahteleva funktio* $g : [0,1] \to \mathbb{K}$ todella määrää vastaavan *Stieltjes-integraalin*[87] avulla lineaarikuvauksen

$$\varphi_g \colon \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{K} \colon f \mapsto \int_0^1 f\,dg.$$

Sitten tarkastetaan, että tämän kuvauksen operaattorinormi on sama kuin g:n *kokonaisheilahtelu*, joka voidaan lausua muodossa

$$\|g\|_M = \sup \sum_{i\in I} \Big|\int_{E_i} 1\,dg\Big|,$$

missä supremum on otettu yli kaikkien välin $[0,1]$ ositusten äärellisen moneksi parittain erilliseksi Borel-joukoksi E_i.

Pääongelmana on konstruoida g, kun tunnetaan $\varphi \in \mathcal{C}[0,1]^*$. Menetellään seuraavasti: Kaikilla $t \in [0,1]$ asetetaan

$$g(t) = \varphi(\chi_{[0,t]}).$$

[87] [A]

Tässä on ongelmana, että osavälin karakteristinen funktio $\chi_{[0,t]}$ ei ole jatkuva. Hahnin ja Banachin lause sanoo kuitenkin, että on olemassa φ:n jatko laajempaan avaruuteen $L^\infty[0,1]$. Voimme siis tulkita $\varphi \in L^\infty[0,1]^*$, jolloin $g(t)$ on määritelty. Lopuksi todistetaan, että g on rajoitetusti heilahteleva ja että kaikilla $f \in \mathcal{C}[0,1]$ todella pätee

$$\varphi(f) = \int_0^1 f\,dg.$$

Tässä on avuksi, jos huomaa, että jatkuvaa funktiota voi approksimoida tasaisesti porrasfunktiolla, siis $\mathcal{C}[0,1] \subset \overline{\langle\{g_t \mid t \in [0,1]\}\rangle}$.

17. Tulo- ja tekijäavaruuksia

17.1. Tuloavaruuksia ja suoria summia.

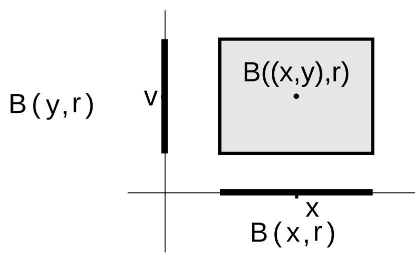
MÄÄRITELMÄ 17.1. Kahden normiavaruuden E ja F *tuloavaruus* eli *tulo* on joukko $E \times F$ varustettuna vektoriavaruuslaskutoimituksilla

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$$

ja normilla

$$\|(x,y)\| = \|(x,y)\|_\infty = \max\{\, \|x\|\,,\ \|y\|\,\}.$$

HUOMAUTUS 17.2. Sovitaan tässä normi yksikäsitteisesti näin, vaikka tuloavaruudeksi usein, mm. edellä kohdassa 13.12, sanotaankin vektoriavaruutta $E \times F$ varustettuna millä tahansa tämän kanssa ekvivalentilla normilla. Näitä ovat ennen kaikkea analogisella tavalla muodostettavat $\|\cdot\|_p$-normit ($1 \le p < \infty$). ∞-normilla on kuitenkin seuraava miellyttävä erityisominaisuus: $E \times F$:n avoin pallo on tulojoukko vastaavista E:n ja F:n avoimista palloista: $B_{\|\cdot\|_\infty}((x,y),r) = B(x,r) \times B(y,r)$.



KUVA 37. PALLOJEN TULO, TULON PALLO.

HUOMAUTUS 17.3. E:n ja F:n avointen, suljettujen, yhtenäisten tai kompaktien joukkojen tulojoukot ovat tuloavaruudessa $E \times F$ avoimia, suljettuja, yhtenäisiä tai vastaavasti kompakteja[88], mutta tuloavaruudessa on runsaasti muitakin joukkoja,

[88] Viimeksi mainittu tulos on hieman epätriviaali, mutta hämmästyttävä on ANDREI NIKOLAEVITŠ TIHONOVIN (1906–1993, Venäjä.) lause 23.14, jonka mukaan kompaktisuuden säilyminen pätee myös äärettömän monen topologisen avaruuden tulolle.

joilla on kukin näistä ominaisuuksista. Erityisesti siellä ovat avoimia kaikki edellä kuvattujen avointen pallojen yhdisteet, ja vain ne.

HUOMAUTUS 17.4. *Projektiokuvaukset*

$$\pi_1 : E \times F \to E : (x, y) \mapsto x \text{ ja}$$
$$\pi_2 : E \times F \to F : (x, y) \mapsto y$$

ovat jatkuvia lineaarikuvauksia. Kummallakin on normi 1, kun E ja $F \neq \{0\}$.

Lisäksi ovat voimassa normiyhtälöt

$$\|(x, 0)\| = \|x\| \text{ ja } \|(0, y)\| = \|y\|,$$

joten $E \sim E \times \{0\}$ ja $F \sim \{0\} \times F$ ovat normiavaruusisomorfismin tarkkuudella tulon aliavaruuksia.

Jos tulkitsemme tällä tavalla $E, F \subset E \times F$, niin

$$E \times F = E \oplus F,$$

onhan jokainen $E \times F$:n alkio tasan yhdellä tavalla esitettävissä summana E:n ja F:n alkioista: $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$. Tästä syystä tuloavaruutta sanotaan toisinaan avaruuksien E ja F *ulkoiseksi suoraksi summaksi.*

HUOMAUTUS 17.5. Kahden täydellisen normiavaruuden tulo on täydellinen. Tämä on edellä saatu sivutuotteena kohdassa 13.12, mutta on helppo todistaa suoraankin. Itse asiassa yleensäkin kahden metrisen avaruuden tulossa on vastaavasti käytettävissä metriikka

$$d_\infty((a, x), (b, y)) = \max\{d_1(a, b), d_2(x, y)\}$$

ja tietysti täydellisyys periytyy kahden metrisen avaruuden tuloon.

HUOMAUTUS 17.6. *Äärettömän monen vektoriavaruuden E_i, $i \in I$ tulo* on joukko

$$\Big\{f : I \to \bigcup_{i \in I} E_i \;\Big|\; \forall i : f(i) \in E_i\Big\}$$

varustettuna pisteittäisin laskutoimituksin. Sille ei ole käytössä mitään yleisesti vakiintunutta normia. Kaikkien lukujonojen avaruudessa $s = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$ on kylläkin harjoitustehtävän 13.10 mukainen luonnollinen metriikka, joka antaa pisteittäisen suppenemisen topologian.

17.2. Tekijäavaruuksia $(*)$.

MÄÄRITELMÄ 17.7. Olkoon W vektoriavaruuden V aliavaruus. *Tekijäavaruus* V/W määritellään ekvivalenssiluokkien joukkona[89]

$$V/W = \{[x] \;\big|\; x \in V\},$$

[89]Määritelmä saattaa olla tuttu algebran tai lineaarialgebran kurssilta. Tekijäjoukko ja tekijärakenne ovat peruskäsitteitä, jotka piileksivät tavalla tai toisella lähes kaiken matematiikan taustalla. Yksi esimerkki tekijäavaruuksista — seminormiavaruuden $L^p(A)$:n tekijänormiavaruus $\mathcal{L}^p(A)$ — on jo tullut määritellyksi luvussa 15. Siellä aliavaruutena W on $\{f \in \mathcal{L}^p(A) \mid f(x) = 0 \text{ } \mu\text{-mk } x \in A\} = \{f \in \mathcal{L}^p(A) \mid |f|_p = 0\}$.

missä ekvivalenssirelaationa $x \sim y$ on $x - y \in W$, jolloin

$$[x] = \{y \in V \mid x \sim y\} = x + W = x - W.$$

Tekijäavaruudelle V/W saadaan vektoriavaruuden rakenne määrittelemällä laskutoimitukset ekvivalenssiluokille edustajittain, kuten jo teimme Lebesgue'in avaruuksia konstruoidessamme.

$$\begin{aligned} [x] + [y] &= [x + y] \text{ ja} \\ \lambda[x] &= [\lambda x]. \end{aligned}$$

On välttämätöntä mutta helppoa todeta, että summan $x + y$ ja tulon λx luokka riippuvat vain luokista $[x]$ ja $[y]$, eivät niiden edustajista $x \in [x]$ ja $y \in [y]$. Sen jälkeen on ikävän pitkä rutiiniasia tarkastaa vektoriavaruuden aksioomat ja todeta erityisesti, että nolla-alkio on

$$0 = [0] = W \in V/W.$$

Huomautus 17.8. *Kanoninen surjektio* eli *kanoninen projektio*

$$\pi_W : V \to V/W : x \mapsto [x]$$

on lineaarinen surjektio, jonka ydin on W.

Määritelmä 17.9. (Tekijänormi). Olkoon F normiavaruuden[90] E suljettu aliavaruus. *Tekijänormiavaruus* eli *tekijäavaruus* E/F on vektoriavaruus E/F varustettuna normilla

$$\|[x]\| = \inf\{\|y\| \mid y \sim x\} = \inf\{\|x + n\| \mid n \in F\} = \inf\{\|x - n\| \mid n \in F\}.$$

Perustelu. $\|[x]\|$ on toisaalta origon etäisyys ekvivalenssiluokasta $[x] = x + F$, toisaalta x:n etäisyys suljetusta aliavaruudesta F. Tarkastamme nyt, että näin todella saadaan normi. Samalla huomaamme, että kolmioepäyhtälö ja homogeenisuusehto ovat voimassa riippumatta siitä onko F suljettu vai ei[91]: Kun $[x]$ ja $[y] \in E$, niin valitaan mielivaltaiselle $\varepsilon > 0$ luokkien edustajat $x_\varepsilon \in [x]$ ja $y_\varepsilon \in [y]$ siten, että

$$\begin{aligned} \|[x]\| \le \|x_\varepsilon\| &\le \|[x]\| + \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ ja} \\ \|[y]\| \le \|y_\varepsilon\| &\le \|[y]\| + \tfrac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

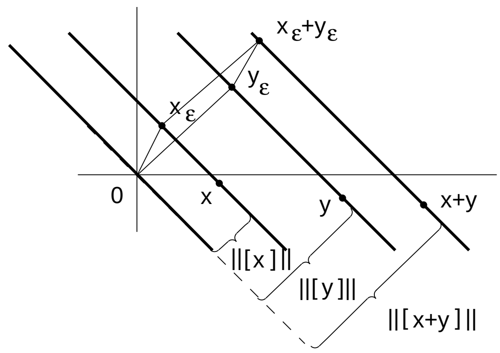
Tällöin pätee määritelmän ja alkuperäisen kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} \|[x] + [y]\| = \|[x_\varepsilon] + [y_\varepsilon]\| = \|[x_\varepsilon + y_\varepsilon]\| &\le \|x_\varepsilon + y_\varepsilon\| \\ &\le \|x_\varepsilon\| + \|y_\varepsilon\| \le \|[x]\| + \tfrac{\varepsilon}{2} + \|[y]\| + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &= \|[x]\| + \|[y]\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

[90] Vastaava konstruktio tuottaa seminormiavaruudelle tekijäseminormiavaruuden.

[91] Yleisessäkin tapauksessa E/F siis on seminormiavaruus.

mistä kolmioepäyhtälö seuraakin. Ehto $\|\lambda[x]\| = |\lambda|\|[x]\|$ todistetaan vastaavalla tavalla.



KUVA 38. TEKIJÄAVARUUDEN KOLMIOEPÄYHTÄLÖ.

Definiittisyysehdon tarkistamiseksi oletetaan $\|[x]\| = 0$. Koska pisteen etäisyys suljetusta joukosta on 0 aina ja vain kun piste kuuluu ao. joukkoon, on $x \in F = [0]$, eli $[x] = [0]$. $\square$

LAUSE 17.10. *Olkoon $F \subset E$ suljettu aliavaruus. Tällöin kanoninen surjektio*

$$\pi_F : E \to E/F : x \mapsto [x]$$

on jatkuva lineaarikuvaus ja sitäpaitsi myös avoin kuvaus *eli kuvaa kaikki avoimet joukot avoimiksi joukoiksi.*

TODISTUS. Koska $x \in [x]$, niin lineaarikuvauksen $\pi_F : E \to E/F : x \mapsto [x]$ normi on suoraan $\|[x]\|$:n määritelmän mukaan tasan 1, paitsi tapauksessa $F = E$, jolloin $\pi_F = 0$.

Samaan tapaan kuin vastaava jatkuvuutta koskeva lause, voidaan helposti todistaa, että normiavaruuksien välisen lineaarikuvaus on avoin, kunhan avoimen yksikköpallon kuva sisältää origokeskisen pallon. Kanonisen surjektion tapauksessa E:n yksikköpallon B_E kuva on täsmälleen E/F:n yksikköpallo $B_{E/F}$, sillä

$$\|[x]\| < 1 \implies \exists x_\varepsilon \in E : [x] = [x_\varepsilon] \ \& \ \|x_\varepsilon\| < 1$$

joten $B_{E/F} \subset \pi(B_E)$. $\square$

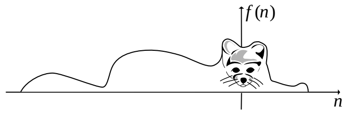
LAUSE 17.11. *Olkoon F Banachin avaruuden E suljettu aliavaruus. Tällöin tekijäavaruus E/F on täydellinen.*

TODISTUS. Lauseen 6.14 mukaan riittää todistaa, että E/F:n jokainen itseisesti suppeneva sarja:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [x_k]$$

suppenee. Ideana on valita luokille $[x_k]$ sellaiset edustajat $x_k \in [x_k]$, että niidenkin muodostama sarja suppenee. Se on helppoa, voidaanhan edustajat tekijänormin määritelmän mukaan valita esimerkiksi siten, että

$$\|x_k\| \leq \|[x_k]\| + \frac{1}{2^k},$$



jolloin

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\|[x_k]\| + \frac{1}{2^k}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\|[x_k]\| + 1 < \infty.$$

Koska E on täydellinen, niin x_k:ista muodostettu sarja siis suppenee, eli on olemassa

$$x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k,$$

jolloin kanonisen surjektion π_F lineaarisuus ja jatkuvuus takaavat, että

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[x_k] = \lim_{n\to\infty}[\sum_{k=1}^{n} x_k] = [\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} x_k] = [x]. \qquad \square$$

Harjoitustehtäviä ja huomautuksia lukuun IV

Harjoitustehtäviä lukuun IV.

13.1. Todista Hölderin epäyhtälö haluamassasi avaruudessa eksponenteilla $p = 1$ ja $q = \infty$.

13.2. Todista, että normiavaruuksien välisen lineaarikuvauksen avoimeksi todistamiseksi riittää näyttää, että avoimen yksikköpallon kuva sisältää origokeskisen pallon.

13.3. Lauseena 13.9 on osoitettu, että $\ell^p \subset \ell^q$, kun $1 \le p \le q \le \infty$ ja että inkluusiokuvaus $i : \ell^p \to \ell^q : x \mapsto x$ on jatkuva ja sen normi on 1.

Kumoa toisensuuntaiset normiepäyhtälöt ℓ^p-avaruuksien inkluusioissa eli näytä, että inkluusiokuvaukset eivät ole avoimia kuvauksia kuva-avaruudelleen.

13.4. Osoita, että

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n$$

on sisätulo avaruudessa ℓ^p, kun $1 \le p \le 2$, mutta että vain tapauksessa $p = 2$ näin saadaan Hilbert-avaruus.

13.5. Todista, että suunnikassääntö ei päde avaruudessa $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$, ellei p ole 2.

13.6. Olkoon $T : \ell^1 \to \ell^1$ määritelty kaavalla

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\tfrac{x_2}{2}, \tfrac{x_3}{3}, \tfrac{x_4}{4}, \dots).$$

Osoita, että $T \in \mathcal{B}(\ell^1, \ell^1)$ ja määritä $\|T\|$.

13.7. Olkoon $T : \ell^2 \to \ell^2$ määritelty kaavalla

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (\tfrac{x_2}{2}, \tfrac{x_3}{3}, \tfrac{x_4}{4}, \dots).$$

Osoita, että $T \in \mathcal{B}(\ell^2, \ell^2)$ ja määritä $\|T\|$.

13.8. Olkoon $w_n > 0\,\forall n$ ja

$$\ell^2_w = \big\{x = (x_n)_1^\infty \mid \sum_1^\infty |x_n|^2 w_n < \infty\big\}.$$

Osoita, että ℓ_w^2 on sisätuloavaruus, sisätulona $(x|y) = \sum_1^n x_n \overline{y}_n w_n$. Anna esimerkki jonosta $w = (w_n)_1^\infty$, jolla $(n \log n)_1^\infty \in \ell_w^2$.

13.9. Osoita, että $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_k|^2\right)^{1/2}$ ja

$$|||x||| = \left(\sum_{k=1}^\infty |x_{2k}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=0}^\infty |x_{2k+1}|^2\right)^{1/2}$$

ovat ekvivalentteja normeja avaruudessa ℓ^2.

13.10. Varustetaan kaikkien lukujonojen avaruus

$$s = \mathbb{K}^\mathbb{N} = \{x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{K}\}$$

metriikalla

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

a) Osoita, että on oikeutettua sanoa metriikkaa d *pisteittäisen suppenemisen metriikaksi*, sillä avaruudessa s seuravat ehdot (1) ja (2) ovat yhtäpitäviä jonolle $(x^m)_{k\in\mathbb{N}}$, missä $x^m = (x_k{}^m)_{k\in\mathbb{N}}$:

(1) $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{d} x$

(2) $x_k^n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{K}} x_k$ koordinaateittain eli erikseen kullekin $k \in \mathbb{N}$.

b) Osoita, että (s,d) on täydellinen metrinen avaruus.

14.1. Olkoon $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ lineaarikuvaus $Tf = f(0)$. Määritä $\|T\|$, kun avaruudessa $\mathcal{C}[0,1]$ on a) sup-normi, b) L^1-normi $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$.

14.2. Olkoon $T : \mathcal{C}[0,1] \to \mathcal{C}[0,1]$ lineaarikuvaus

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

Määritä $\|T\|$, kun avaruudessa $\mathcal{C}[0,1]$ on sup-normi.

15.1. Ovatko avaruuden $\mathcal{C}^1[0,1]$ normit $\|\cdot\|_1$ ja $\|\cdot\|_2$ ekvivalentit?

15.2. Olkoon $E = \mathcal{C}[0,1]$ ja $\rho \in E$ positiivinen funktio. Osoita, että

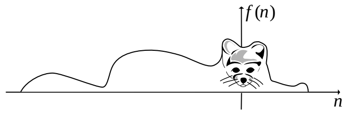
$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\rho(t)\,dt$$

on sisätulo vektoriavaruudessa E.

15.3. Olkoon $E = \mathcal{C}[0,1]$ ja $\rho \in E$ einegatiivinen funktio. Osoita, että

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\rho(t)\,dt$$

on sisätulo vektoriavaruudessa E, jos ja vain jos joukko $\{x \in [0,1] \mid \rho(x) = 0\}$ ei sisällä yhtään avointa väliä.



15.4. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mitallinen joukko ja $m(A) < \infty$. Jos $f_i \to f$ avaruudessa $L^2(A)$, niin päteekö välttämättä, että $f_i \to f$ avaruudessa $L^1(A)$?

15.5. Viimeistele lauseen 15.16 todistus osoittamalla, että jos $\mu(A) < \infty$ ja $1 \leq p < r \leq \infty$, niin

$$\|\tilde{f}\|_p \leq \big(\mu(A)\big)^{1/p-1/r} \|\tilde{f}\|_r \qquad \text{kaikille } \tilde{f} \in L^r(A).$$

Vihje: Hölderöi $\int 1 \cdot |f|^p$.

15.6. Osoita, että $L^2(\mathbb{R}) \not\subseteq L^1(\mathbb{R})$ ja $L^1(\mathbb{R}) \not\subseteq L^2(\mathbb{R})$. Onko $L^2[0,1] \subset L^1[0,1]$?

Tehtävät 15.7-15.15 edellyttävät mittateorian tuntemista.

15.7. Todista, että Hölderin epäyhtälössä pätee yhtäsuuruus silloin ja vain silloin, kun on olemassa (reaali)luvut λ ja μ, joista ainakin toinen $\neq 0$ siten, että $\lambda f(x)^p = \mu g(x)^q$ melkein kaikkialla.

15.8 Olkoon $\mu(A) < \infty$. Näytä, että jos $f : A \to [0,1]$ on mitallinen ja $1 < p, q < \infty$ ovat duaalieksponentteja, niin

$$\int_A f \, d\mu \leq \mu(A)^{\frac{1}{q}} \left(\int_A f^p \, dp \right)^{\frac{1}{p}}.$$

15.9. Olkoon $\mu(A) < \infty$. Näytä, että $L^p(A) \subset L^s(A)$, kun $p \geq s \geq 1$.

15.10. Olkoot $A = \,]0,\infty[$ (!) ja μ Lebesgue'in mitta $\mathbb{R}$:ssa sekä $s \in \mathbb{R}$. Jos $f_s(x) = x^s$ kaikilla $x > 0$, niin onko $f_s \in L^p(A)$ jollekin $p \in [1,\infty]$?

15.11. Olkoot $A = \,]0,1[$ (!) ja μ Lebesgue'in mitta $\mathbb{R}$:ssa sekä $s \in \mathbb{R}$. Jos $f_s(x) = x^s$ kaikilla $x > 0$, niin onko $f_s \in L^p(A)$ jollekin $p \in [1,\infty]$?

15.12. Olkoot $A = I = [0,1]$ (!) ja μ Lebesgue'in mitta $\mathbb{R}$:ssa sekä $(f_i)_1^\infty$ jono $L^1(A)$:ssa ja $f \in L^1(A)$. Jos $f_i(x) \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ kaikilla $x \in I$, niin voiko päätellä, että $f_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} f$ avaruudessa $f \in L^1(A)$? Opastus: Ei.

15.13. Olkoot $g \in L^q(A)$, $1 < p, q < \infty$ duaalieksponentteja ja μ Lebesgue'in mitta. Näytä, että kuvaus $T : L^p(A) \to \mathbb{R}$

$$T(f) = \int_A g f \, d\mu$$

on jatkuva lineaarikuvaus

15.14. Näytä, että

$$\|f\|_{L^\infty(A)} = \inf\{M \in \mathbb{R}_+ \bigm| \mu(\{x \in A \bigm| |f(x)| > M\}) = 0\}$$

on normi $L^\infty(A)$:ssa. (Merkitse $A_M = \{x \in A \bigm| |f(x)| > M\}$)

15.15. Olkoon $I = [0,1]$ ja μ Lebesgue'in mitta I:ssä sekä $1 \leq p < \infty$. Onko $T \mapsto T(f) = f(0)$ kuvaus $L^p(I) \to \mathbb{R}$? Opastus: Ei.

15.16. Olkoon $I = [0,1]$ ja μ Lebesgue'in mitta I:ssä sekä $1 \leq p < \infty$ ja $f : I \to \mathbb{R}$ mitallinen ja rajoitettu funktio. Määritä

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

15.17. Olkoon $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ Asetetaan kaikilla $r \in \mathbb{R}$:

$$M(f)(x) = \sup_{t>0} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} |f| \, d\mu.$$

Näytä, että $M(f)$ on kuvaus $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (nimeltään f:n *maksimaalifunktio*). Onko $M(f)$ jatkuva? Vihje:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{2t} \int_{x-t}^{x+t} f \, d\mu = f(t).$$

15.18. ($*$) Viimeistele huomautuksen 15.20 perusteleminen etsimällä todistus sille, että jatkuvien funktioiden avaruus on $\|\cdot\|-$tiheä $L^p([a,b])$:ssä. Vihje: Tämä tulos kuuluu mittateorian perustietoihin. Todistuksia on monenlaisia riippuen siitä, miten mittateoria on otettu käyttöön. Eräät perustuvat *Lusinin lauseeseen*[92], toiset *konvoluution* käyttöön jne. Ks. esim [R-1] s. 251 tai [L].

15.19. Todista, että normiavaruuden täydentymä on isometrisen isomorfismin tarkkuudella yksikäsitteinen.

15.20. Derivoi funktio $f(x) = x^2$ Sobolevin avaruuden heikon derivaatan mielessä.

15.21. (jatkoa) Todista yleisesti osittaisintegroinnin avulla, että jatkuvasti derivoituvan funktion f distribuutioderivaataksi kelpaa sen tavallinen derivaatta.

15.22. (jatkoa) Todista, että alkio $u \in L^p[a,b]$ määräytyy yksikäsitteisesti Sobolevin avaruuden derivaatan määrittelevästä ehdosta $\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(]a,b[) : \int_a^b \varphi u = -\int_a^b \varphi' f$.

16.1. Tarkastelemme Lebesguen avaruutta $L^1(\#)$, missä $\#$ on lukumäärämitta välin $[0,1]$ numeroituvien osajoukkojen ja niiden komplementtien muodostamassa σ-algebrassa. Osoita, että $L^1(\#)^* \neq L^\infty(\#)$ näyttämällä, että funktionaalia $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\, t \, dt$ ei voi esittää muodossa $\varphi(f) = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$, missä g olisi $\#$-mitallinen. Ohje: ainoa ehdokas olisi $g(t) = t$.

17.1. Todista huomautus 17.2, jossa väitetään, että tuloavaruuden avoin pallo on avointen pallojen tulo.

17.2. Miten määrittelisit kolmen metrisen avaruuden tuloavaruuden?

17.3. Todista lause 17.4, jonka mukaan kahden täydellisen normiavaruuden tulo on täydellinen.

17.4. Määritellään

$$F = \{(x_n)_1^\infty \in \ell^1 \mid x_n \neq 0 \text{ vain äärellisen monella } n\}$$

Näytä, että F on aliavaruus. Olkoon $x \in \ell^1$. Laske $\|x + F\| = \inf_{y \in F} \|x + y\|_1$.

17.5. Todista määritelmässä 17.7 tarvittava tieto, jonka mukaan $[x+y]$ ja $[\lambda x]$ riippuvat ainoastaan luokista $[x]$ ja $[y]$, eivät niiden edustajista x ja y.

17.6. Olkoon $E = \mathcal{C}[-1,1]$ ja $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$. Olkoon $\|\cdot\|_\infty$ sup-normi avaruudessa E.

a) Näytä, että F on E:n suljettu aliavaruus.

[92] Nikolai Nikolaevitš Lusin 1883–1950 Venäjä.

b) Laske $\|[f]\|_{E/F}$, missä $f(x) = x$ kaikille $x \in [-1, 1]$.
c) Laske $\|[f]\|_{E/F}$, missä $f(x) = \cos x$ kaikille $x \in [-1, 1]$.

17.7. Olkoon E normiavaruus ja $F \subset E$ sen suljettu aliavaruus. Osoita, että $x_n + F \to x + F$ avaruudessa E/F, jos ja vain jos on olemassa jono $(y_n) \subset F$, jolla $x_n + y_n \to x$ avaruudessa E.

Huomautuksia lukuun IV.

ℓ^p-avaruudet eivät ole isomorfisia, kun $1 \le p < q \le \infty$. Tämän todisti jo Banach itse klassisessa kirjassaan [B] vuodelta 1929.

ℓ^p:n duaali, kun $0 < p < 1$. Itse asiassa ℓ^∞ on ℓ^p:n duaali myös kaikilla $0 < p < 1$, jolloin vastaava jonoavaruus ℓ^p tosin ei ole normiavaruus, vaan ns. kvasinormiavaruus, jollaisen yksikköpallo ei ole konveksi ja jollaisen duaalista ei siten voi luvussa 22 käytettävän Hahnin ja Banachin lauseen avulla päätellä mitään.

Rieszin esityslause ja yleinen integraali. Rieszin esityslauseen mukaan avaruuden $\mathcal{C}(X, \mathbb{K})$ jatkuvat lineaarimuodot ovat olennaisesti sama asia kuin integraalit

$$f \mapsto \int f \, d\mu.$$

Onkin mahdollista asettaa tämä yleisen integraalin määritelmäksi ja määritellä vasta jälkeenpäin joukon mitta vastaavan karakteristisen funktion integraalina. Tätä *Daniellin integraalina* tunnettua ideaa käyttää mm. N. Bourbaki[93] kirjasarjassaan.

Täydentymä. Yleisen normiavaruuden täydentymän olemassaolon voi todistaa vetoamalla tapaan, jolla mielivaltaiselle metriselle avaruudelle konstruoidaan täydentymä. Siinä samastetaan täydentymän alkiot alkuperäisen avaruuden Cauchy-jonojen ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssina jonojen erotuksen konvergenssi nollaan. Tämä on myös tunnettu tapa rakentaa reaaliluvut rationaaliluvuista. Kohdassa 22.8. esitämme normiavaruuden täydentymän olemassaololle duaaliavaruuksien teoriaan, viime kädessä Hahnin ja Banachin lauseeseen 21.4 perustuvan elegantin todistuksen.

Historiaa. Steinhaus[94] v. 1919: L^1:n duaali on L^∞.

Hyvä lukija. Kirjoita tekijälle parannusehdotuksia lukuun IV.

[93] Nicolas Bourbaki, 1900-luvulla toiminut monipäinen fiktiivinen matematiikko, "Nancago" (yhtäaikaisesti Ranska ja USA).

[94] Hugo Dyonizy Steinhaus 1887–1972, Puola.

V YHTÄJATKUVAT KUVAUSPERHEET JA BAIREN KATEGORIAT

Tässä luvussa todistettavat lauseet liittyvät jo Weierstrassin lauseen ja Banachin kiintopistelauseen yhteydessä sivuamaamme aihepiiriin, jatkuviin funktioihin täydellisessä metrisessä avaruudessa. Nyt johdettavissa lauseissa keskeinen käsite on funktioperheen yhtäjatkuvuus.

18. Yhtäjatkuvat ja prekompaktit kuvausperheet

18.1. Ascolin ja Arzelán lause.

MÄÄRITELMÄ 18.1. Olkoon $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ joukko funktioita eli *funktioperhe* metristen avaruuksien X ja Y välillä sekä $x_0 \in X$. Sanomme, että

(1) perheen $\mathcal{H}$ funktiot ovat *yhtäjatkuvia pisteessä* x_0, eli että perhe $\mathcal{H}$ on *yhtäjatkuva pisteessä* x_0, jos kaikki funktiot $f \in \mathcal{H}$ ovat jatkuvia pisteessä x_0 siten, että jatkuvuuden standardimääritelmässä kullakin ε voidaan δ valita niin pieneksi, että se kelpaa kaikille $f \in \mathcal{H}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X \; \forall f \in \mathcal{H} : d(x, x_0) \leq \delta \implies d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

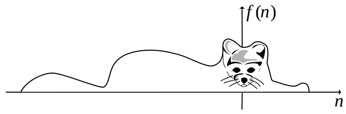
(2) perhe $\mathcal{H}$ on *yhtäjatkuva*, jos $\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in X$.
(3) perhe $\mathcal{H}$ on *tasaisesti yhtäjatkuva*, jos kullakin ε kelpaa sama δ kaikille $f \in \mathcal{H}$ ja kaikille $x_0 \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x_0 \in X \; \forall x \in X \; \forall f \in \mathcal{H} : d(x, x_0) \leq \delta \implies d(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon.$$

Rajoitetun joukon sulkeuma on äärellisulotteisessa avaruudessa $\mathbb{K}^n$ kompakti Heinen ja Borelin tunnetun lauseen mukaan, ja Rieszin lause 6.15 kertoo meille, että ääretönulotteisessa avaruudessa asia on toisin. Tämä asiantila antaa aiheen antaa nimen joukolle, jonka sulkeuma on kompakti. Asetamme samalla toisenkin lähisukuisen määritelmän.

MÄÄRITELMÄ 18.2.

(1) Topologisen avaruuden X osajoukko K on *relatiivikompakti*, jos sen sulkeuma $\overline{K}$ on kompakti, eli jos K sisältyy johonkin kompaktiin joukkoon.
(2) Metrisen avaruuden X osajoukko K on *prekompakti*, jos kaikille $\varepsilon > 0$ on olemassa joukon K peite äärellisen monella $\varepsilon-$säteisellä pallolla $B(x, \varepsilon)$, missä $x \in X$.



Huomautus 18.3.

(1) Prekompaktisuuden määritelmässä voi yhtä lailla vaatia, että jokainen x kuuluu joukkoon K.
(2) Relatiivikompaktius ja prekompaktius periytyvät osajoukolle ja sulkeumalle.
(3) Metrisen avaruuden osajoukolle kompaktius ja jonokompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.
(4) Täydellisen metrisen avaruuden osajoukolle prekompaktius ja relatiivikompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.
(5) Äärellisulotteisen avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukolle rajoittuneisuus, prekompaktius ja relatiivikompaktius ovat yhtäpitäviä ehtoja.

Perustelu. Harjoitustehtäviä.

Määritelmä 18.4. Olkoon X joukko ja Y metrinen avaruus.

(1) Funktioperhe $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(X, Y)$ on *pisteittäin rajoitettu*, jos jokaisen pisteen $x \in X$ kuvien joukko $\mathcal{H}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{H}\} \subset Y$ on rajoitettu.
(2) Vastaavasti määritellään käsitteet *pisteittäin prekompakti* ja *pisteittäin relatiivikompakti* funktioperhe.

Lause 18.5 (Ascolin lause)[95]. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia, joista X kompakti. Tällöin joukolle jatkuvia funktioita $\mathcal{H} \subset \mathcal{C}(X, Y)$ seuraavat kaksi ehtoa ovat yhtäpitäviä:*

(1) *$\mathcal{H}$ on avaruuden $\mathcal{C}(X, Y)$ sup-metriikassa*

$$d(f, g) = d_\infty(f, g) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

prekompakti joukko.
(2) *$\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva ja pisteittäin prekompakti funktioperhe.*

Todistus. Oletetaan ensin, että $\mathcal{H}$ on prekompakti sup-metriikassa. On melko ilmeistä, että $\mathcal{H}$ on pisteittäin prekompakti eli jokaisen pisteen $x \in X$ kuvien joukko $\mathcal{H}(x)$ on prekompakti. Jokaisella $\varepsilon > 0$ on nimittäin oletuksen mukaan olemassa joukon $\mathcal{H}$ *äärellinen $\varepsilon-$peite,* siis funktiot $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{H}$, joilla on se ominaisuus, että jokaisella $f \in \mathcal{H}$ on $d(f, f_i) < \varepsilon$ jollekin $i \in \{1, \dots, n\}$. Tällöin tietysti myös pisteessä $x \in X$ on $d(f(x), f_i(x)) < \varepsilon$. Etsitty joukon $\mathcal{H}(x)$ peite on $B(f_i(x), \varepsilon)$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

Osoittaaksemme, että $\mathcal{H}$ on yhtäjatkuva kohdassa $x_0 \in X$, valitsemme prekompaktille joukolle $\mathcal{H}$ äärellisen $\frac{\varepsilon}{3}$ -peitteen $f_1, \dots, f_n$. Koska jokainen f_i on jatkuva, on kullakin i olemassa δ_i siten, että $d(f_i(x), f_i(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$, kunhan $d(x, x_0) \leq \delta_i$. Olkoon $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$. Jos nyt $d(x, x_0) \leq \delta$, niin

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), f(x_0)) \leq 3\tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Todistuksen alkupuoli oli siis helppo ja lauseen varsinainen sisältö onkin siinä, että yhtäjatkuvuus ja pisteittäinen prekompaktius yhdessä ovat riittävä ehto prekompaktisuudelle sup-metriikassa. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $x \in X$. Yhtäjatkuvuusoletuksen mukaan on olemassa luku $r_x > 0$ siten, että $\forall f \in \mathcal{H}, \forall y \in B(x, r_x)$:

[95] Guido Ascoli 1887–1957, Italia.

$d(f(y),f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{4}$. Näin saadusta kompaktin joukon X avoimesta peitteestä valitaan äärellinen osapeite:

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, r_{x_i}).$$

Jokainen joukoista $\mathcal{H}(x_i)$ on oletuksen mukaan prekompakti, joten myös niiden äärellinen yhdiste

$$K = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{H}(x_i)$$

on prekompakti. On siis olemassa pisteet $c_1, \ldots, c_n \in K \subset Y$ siten, että

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(c_j, \tfrac{\varepsilon}{4}).$$

On olemassa n^m eri funktiota äärellisestä joukosta $\{x_1, \ldots, x_m\}$ äärelliseen joukkoon $\{c_1, \ldots, c_n\}$. Olkoon Φ kaikkien näiden funktioiden joukko:

$$\Phi = \mathcal{F}(\{x_1, \ldots, x_m\}, \{c_1, \ldots, c_n\})$$

Kullakin $\varphi \in \Phi$ merkitään

$$L_\varphi = \{f \in \mathcal{H} \mid d(f(x_i), \varphi(x_i)) < \tfrac{\varepsilon}{4} \ \forall x_i \in \{x_1, \ldots, x_m\}\}.$$

Useimmat joukoista L_φ voivat hyvinkin olla tyhjiä, mutta eivät kaikki, itse asiassahan joukkojen L_φ yhdiste on koko $\mathcal{H}$. Lause on todistettu, jos onnistumme näyttämään, että kukin joukko L_φ mahtuu johonkin $\varepsilon-$säteiseen palloon avaruudessa $\mathcal{C}(X,Y)$. Tämäkin on melko ilmeistä, sillä keskipisteeksi käy mikä tahansa L_φ:n alkio. Jos nimittäin f ja $g \in L_\varphi$ ja $x \in X$, niin valitaan x_i siten, että $x \in B(x_i, r_{x_i})$, jolloin

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x_i)) &< \tfrac{\varepsilon}{4} \quad \text{ja} \\ d(g(x), g(x_i)) &< \tfrac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Koska f ja $g \in L_\varphi$, niin $f(x_i)$ ja $g(x_i)$ ovat kumpikin enintään etäisyydellä $\frac{\varepsilon}{4}$ pisteestä $\varphi(x_i)$ ja siis

$$d(f(x_i), g(x_i)) \leq \tfrac{\varepsilon}{2},$$

joten kolmioepäyhtälön nojalla

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) < \varepsilon. \qquad \square$$

Ascolin lauseesta on usein käytössä erikoistapaus, jossa maalipuolen avaruus Y on $\mathbb{R}$ (tai yhtä lailla $\mathbb{K}^n$). Tässä on oleellista, että maalipuolella prekompaktius nyt merkitsee samaa kuin relatiivinen (jono-) kompaktisuus, onhan $\mathbb{R}^n$ täydellinen. Myös $\mathcal{C}(X,Y)$ on tässä tilanteessa täydellinen, joten sielläkin prekompaktius liittyy jonojen osajonoihin:

Seuraus 18.6. (Ascolin ja Arzelán[96] lemma). *Olkoon $\mathcal{H}$ pisteittäin rajoitettu ja yhtäjatkuva perhe funktioita $X \to \mathbb{R}^n$, missä X on kompakti metrinen avaruus. Tällöin jokaisella jonolla $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ on osajono, joka suppenee tasaisesti kohti jotakin jatkuvaa funktiota $f : X \to \mathbb{R}^n$.*

18.2. Normaaliperhepäättely (∗).

Sovellus 18.7. Kompleksianalyysissä Ascolin ja Arzelán lemmaa on tapana sanoa *normaaliperhepäättelyksi.* Tarkasteltavana on tällöin yleensä jono jossakin alueessa $\Omega \subset \mathbb{C}$ — ei siis kompaktissa joukossa — määriteltyjä analyyttisiä funktioita $f_i : \Omega \to \mathbb{C}$. Oletuksena on, että jono on *tasaisesti rajoitettu kompakteissa joukoissa*, ts. että jokaisella kompaktilla $K \subset \Omega$ on olemassa vakio $M_K > 0$ siten, että kaikilla $x \in K$ ja $i \in \mathbb{N}$ on

$$|f_i(x)| \le M_K.$$

Väitteenä on, että on olemassa analyyttinen funktio

$$f : \Omega \to \mathbb{C},$$

jota kohti jokin osajono $(f_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti jokaisessa kompaktissa joukossa $K \subset \Omega$.

Päättely perustuu Ascolin ja Arzelán lemman lisäksi siihen Cauchyn integraalikaavasta saatavaan tietoon, että kompakteissa joukoissa tasaisesti rajoitettu funktioperhe on yhtäjatkuva, ja että analyyttisistä funktioista koostuvan jonon raja-arvo on analyyttinen, jos suppeneminen on tasaista kompakteissa osajoukoissa.

18.3. Kompakteista integraalioperaattoreista (∗).

Sovellus 18.8. *Jos* integraaliydin $K : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *on jatkuva, niin* integraalioperaattori

$$A : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$$
$$Af(t) = \int_0^1 K(s,t)f(s)\,ds$$

on kompakti operaattori[97]*, ts. avaruuden $\mathcal{C}[0,1] = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ yksikköpallon kuva*

$$\mathcal{H} = A(\overline{B}_{\mathcal{C}[0,1]}(0,1)) = \{Af \mid \|f\|_\infty \le 1\}.$$

on relatiivikompakti joukko maaliavaruudessa $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Todistus. Koska $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on täydellinen, ovat sen prekompaktit ja relatiivikompaktit joukot samoja.

$[0,1]$ on kompakti, $\mathbb{R}$ täydellinen ja yksikköpallon kuva $\mathcal{H}$ on perhe jatkuvia funktioita $[0,1] \to \mathbb{R}$. Funktioperheen $\mathcal{H}$ prekompaktisuus seuraa siis Ascolin ja Arzelán lemmasta, mikäli perhe on pisteittäin rajoitettu ja yhtäjatkuva.

---

[96] Cesare Arzelá 1847–1912, Italia.

[97] Kompaktit operaattorit ovat monin tavoin lähellä äärellisulotteisia. Palaamme asiaan. [Ri].