ILMAINEN MAINOSKAPPALE
Tässä on vain ensimmäinen kirja. Jos haluat muut viisi, osta kaunis kovakantinen sidottu kirja, 210 sivua, omakustannushintaan ottamalla yhteyttä Lauri.V.Kahanpaa@jyu.fi.

Kuusi ensimmäistä kirjaa Eukleideen Alkeista, eli

Tasogeometria

Eukleideen Alkeista monen välivaiheen kautta suomentanut
Kuopion kymnaasin lehtori Pekka Aschan 1857
ja nykysuomeksi toimittanut ja kommentoinut
Jyväskylän yliopiston lehtori Lauri Kahanpää 2006-2011
Epilogi: Aatu Nykänen
Taiteellinen konsultointi: Soili Hokkanen
Kommentoijan kustannuksella
Kirjapaino Kopi-Jyvä
Jyväskylä 2011
ISBN 978-952-92-8819-9

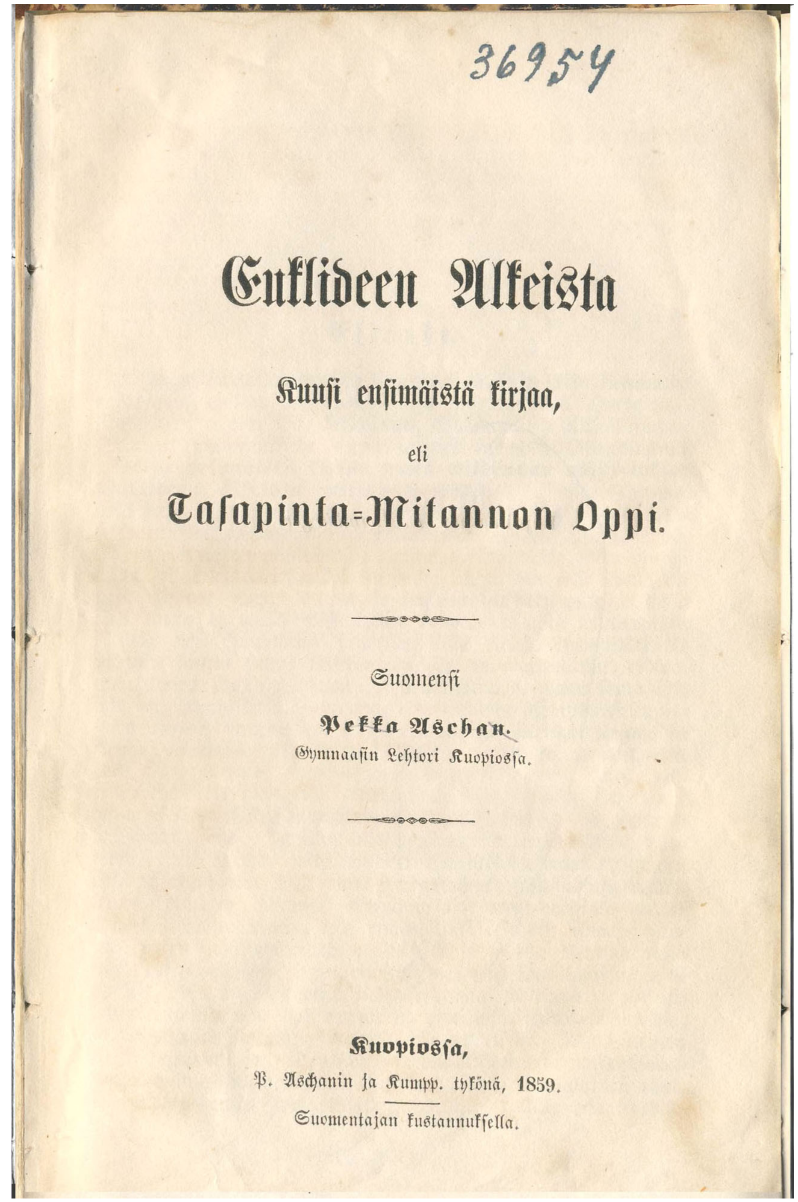
. Esipuhe
. Alkuperäinen esipuhe
. Alkuperäinen alkulause
. Ensimmäinen kirja
. Toinen kirja
. Kolmas kirja
. Neljäs kirja
. Viides kirja
. Kuudes kirja
. Epilogi: Opetustavasta 1800-luvun alkupuolella
. Hakemisto
. Viitteet

Geometria personifioituna naiseksi, joka opettaa joukkoa luostariveljiä.
Alkukirjain Eukleideen Alkeiden käsikirjoituksesta, jonka lienee 1309-1316 kirjoittanut Bathin Adelard.

Esipuhe

Eukleideen (n. 325 - 265 e.Kr.) Alkeet oli kahdentuhannen vuoden ajan mallina matemaattiselle täsmällisyydelle ja yleensäkin matemaattiselle ajattelulle. Siksi sitä käytettiin myös näiden taitojen opettamisen välineenä, vaikka Alkeita ei ole tarkoitettu oppikirjaksi eikä varsinkaan nuortenkirjaksi. 1800-luvulla lukuihin liittyvä matematiikka ohitti geometrian täsmällisyydessä. Kun Eukleides menetti asemansa yleisenä ajattelun mallina, Alkeet vähitellen syrjäytyi kanonisen koulukirjan roolista. Tilalle tulleissa kirjoissa otettiin enemmän tai vähemmän onnistuneesti huomioon joko koululaisen vähittäinen oppiminen tai matematiikassa tapahtunut kehitys, joissain tapauksissa molemmat näkökohdat. Pisimpään Eukleideen kirja säilytti asemansa vanhoillisissa Englannissa ja Ruotsissa — sekä Suomessa. Mårten Strömerin (1707-1770) kohtalaisen tarkka ruotsinkielinen käännös [?] oli täällä käytössä pitkälti yli vuosisadan. (M. Strömer: 6 ensimmäistä kirjaa 1744, koko teos 1748, yhteensä ainakin 15 painosta, joista yksi Kuopiossa 1846 ja viimeisin 1884.) Kun suomenkielinen lukio-opetus aloitettiin Jyväskylässä 1858, alettiin tarvita suomenkielisiä oppikirjoja. Strömerin ruotsinnosta oli jo kahdesti aikaisemmin alettu kääntää suomeksi. D. E. D. Europaeus [?] oli kääntänyt Alkeiden ensimmäisen kirjan 1847. Käännös on nähtävissä osoitteessa http://koulut.etela-karjala.fi/savilu/Europaeus/oppikirja/etusivu.htm . Seuraavana vuonna oli ilmestynyt piirilääkäri Wolmar Schildt-Kilpisen [?] kääntämänä Alkeiden neljä ensimmäistä lukua, mutta suomenkielinen matemaattinen sanasto oli vielä kovin vakiintumatonta ja Kilpinen oli liiankin innokas keksimään uudissanoja. (Onnistuneita ovat mm. tiede, taide, jalkine ja päätelmä.) Niinpä Kuopion kymnaasin lehtori Peter (Pekka) Aschan [?] käänsikin Jyväskylän Lyseon tarpeisiin kokonaan uudelleen neljä ensimmäistä kirjaa ja niiden lisäksi vielä viidennen ja kuudennen, kaiken kaikkiaan koko tasogeometrian. Näin oli suomennettu puolet Alkeista. Kirja ilmestyi 1859 — tasan 150 vuotta sitten.

On kohtalon ivaa, että Eukleideen tasogeometria ilmestyi suomeksi juuri, kun se oli jäämässä pois koulukirjakäytöstä Suomessakin. Aschan tosin puolusti kirjaa julkisesti mutta taipui sitten ja suomensi korvaavan, alkujaan tanskalaisperäisen oppikirjan, "Mundtin Eukleideen" [?] (C.E. Mundt: Laerebog i den elementaire Plangeometrie, 1838, ruotsintanut ja osin mukaillut J. E. Bergroth nimellä Elementarkurs i plana geometrin af C.E. Mundt, Helsingissä 1865.),


36954

Euklideen Alkeista

Kuusi ensimäistä kirjaa,

eli

Tasapinta=Mitannon Oppi.

Suomensi

Pekka Aschan.

Gymnaasin Lehtori Kuopiossa.

Kuopiossa,

P. Aschanin ja Kumpp. tykönä, 1859.

Suomentajan kustannuksella.

josta sitten tuli geometrian perusoppikirja useimpiin alkuaikojen suomenkielisiin oppikouluihin.
Aschanin käännöksen kohtaloksi tuli siten jonkinasteinen unohdus — ainakaan siitä ei tullut sellaista suurlevikkistä menestysteosta, joka Eukleideen Alkeet on maailmalla muuten ollut. Täydellisiä Eukleideen Alkeita ei vieläkään ole saatavilla suomeksi, eikä tasogeometrian osuuttakaan ole käännetty uudelleen Aschanin jälkeen. Suomessa käytettyjen geometrian oppikirjojen historiaa on selvitetty Aatu Nykäsen väitöskirjassa [?] vuodelta 1945, joka on edelleen kirjastoissa hyvin saatavissa.
Alkeet ei ole geometrian alkeisoppikirja eikä sovi koulukirjaksi, mutta siihen kannattaa kuitenkin tutustua, sillä matematiikan yleinen esitystapa ja teorian rakenne käsitteineen, todistuksineen, aksioomineen, määritelmineen ja teoreemoineen on pitkälti peräisin tästä teoksesta ja säilynyt periaatteessa samanlaisena. Juuri geometria tarjoaa erinomaisen mahdollisuuden harjoitella sekä uskottavien että yllättävältä tuntuvien väitteiden todistamista ja ymmärtämistä. Epäeuklidisen geometrian olemassaolo vain lisää motivaatiota tuntea ja ymmärtää myös klassista teoriaa.
Käsillä oleva teos esittää Eukleideen tasogeometrian kaikkine yksityiskohtineen, mutta ei aivan sanatarkasti. Näissä kansissa on jopa kaksikin eri versiota, eikä kumpikaan ole tarkka käännös. Aivan tarkkaa käännöstä ei edes ole mahdollista tehdä. Eukleideen itsensä kirjoittamat käsikirjoitukset ovat tietenkin kadonneet jo kauan sitten ja tietomme niistä perustuvat säilyneisiin kopioihin, ties kuinka moneen kertaan jäljennettyihin. Alkuperäisten rekonstruoimiseksi on nähty vaivaa jo vuosisatojen ajan. 1800-luvulla käsikirjoitusten vertailuun perustuva filologinen tutkimus nousi kukoistukseen Euroopassa ja vuosisadan vaihteessa tanskalainen Johan Ludwig Heiberg julkaisi sana sanalta huolellisesti läpi mietityn Eukleides -edition. 1900 -luvun alkupuolella englantilainen Sir Thomas Little Heath täydensi Heibergin tutkimuksia ja kirjoitti Eukleideen Alkeista englanninkielisen version, jota yleensä pidetään parhaana laitoksena. Kun viittaan ”Eukleideen alkuperäistekstiin” tai ”käsikirjoituksiin” tai lyhyesti vain ”Eukleideeseen itseensä”, tarkoitan Heathin kirjaa. En kuitenkaan ole kääntänyt Heathin editiota suomeksi, vielä vähemmän etsinyt tieteen toistaiseksi viimeistä sanaa siitä mikä todistus on todella peräisin Eukleideelta itseltään ja mikä ei.
Kuten kirjaa selaava heti huomaa, olen valokopioinut ja julkaissut uudelleen Aschanin suomennoksen sellaisenaan. Fraktuurakirjasimiin tottuu yhtä nopeasti kuin vieraaseen käsialaan; harjoitusmateriaaliksi olen kopioinut alkuperäisen esipuheen ja alkulauseen antiikvakirjasimin.
Aschanin teksti on ”tarkka käännös”, tosin ei tietenkään Heathin kriittisestä versiosta, vaan Strömerin laitoksesta, jota vielä 1800-luvulla käytettiin kouluissa. Aschanin teksti poikkeaa kyllä monin paikoin teoksesta, josta se on suomennettu. Käytössäni on ollut Strömerin kirja vuodelta 1813, joten osa huomaamistani eroista voi olla peräisin myöhempiin painoksiin tehdyistä muutoksista. Paikoitellen Aschan kuitenkin kertoo tehneensä muutoksen itse. Hän on kirjoittanut sekaan omia kommenttejaan, jotka ovat erityisen mielenkiintoisia siksi, että niistä heijastuu, miten geometriaa on ymmärretty oikein ja väärin ja mihin sitä on ajateltu tarvittavan. Lukemalla Aschanin tekstiä saa välitöntä tuntumaa siihen, millaiseksi asiaksi matematiikka on mielletty kulttuurissa, josta omamme on parissa vuosisadassa muovautunut.
Tarkoituksenani ei kuitenkaan ole vain tuoda vanhaa tekstiä uudelleen painettavaksi, vaan ennen kaikkea saada Eukleideen Alkeiden tunnetuin osa kohtuullisen helposti luettavaan muotoon. Siksi olen myös kirjoittanut lähes kaiken uudelleen nykysuomeksi käyttäen moderneja käsitteitä, usein myös lyhennettyjä ilmaisuja ja merkintöjä. Samalla olen vertaillut käännöstä ja Eukleideen alkutekstejä koettaen päätellä miten kirja ymmärrettiin siihen aikaan, kun sitä käytettiin koulussa. Kirjoittaessani en voinut olla ihailematta muinaisten kreikkalaisten korkeaa tieteen tasoa – enkä myöskään sitä kehitystä, jonka tuloksena nykyisin on kohtuullisella vaivannäöllä mahdollista ymmärtää syvällisesti, mitä he oikeastaan keksivätkään.

Alkuperäinen esipuhe

Jo on yksitoista wuotta kulunut siitä, kuin äitin kieltämme rakastawa, opiltansa ja kunnoltansa jalo maamies, herra lääkitystieteen tohtori **W. Kilpinen**, Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran kustannuksella ensin julkaisi suomeksi kääntämänsä **”Neljä ensimmäistä kirjaa ynnä viidennen määritykset Eukleideen Alkeista mittaustieteessä.”** Tämä käännös, ehkä ensimmäisiä kokeita suomen kielen käyttämiseen suuretieteellisissä tutkistelemisissa, onnistuikin niin hywin, että se huoli, joka vielä näkyy pimittävän yleisön tarkkaamista, kohta häwisi asian laitaa ymmärtäwistä lukijoista, nimittäin että nämä aineet olisivat aivan outoja ja korkeita suomeksi esitellä, koska kieli muka ei wielä olisi kyllin taiwutettu niitä selittämään. Mutta ettei kuitenkaan suuretieteellisiä kirjoja enemmältä ole präntin kautta tullut julkisuuteen, sen on waikuttanut, ei suomen kielen suotta soimattu kykenemättömyys, waan sama syy, joka on estänyt kirjallisuutemme rikastumista useammista muistakin tieteen haaroista, se syy nimittäin, etteiwät tämmöisiä kirjoja oppimattomat Suomalaiset ole paljon kaiwanneet, eikä edes siwistyneempi herras-sääty, jonka suurempi muukalais-ruotsinkieliseen pukuunsa tottunut oppi ei itsessänsä tuntenut halua kääntymään suomalaiseen kirjallisuuteen, jota pidettiin wähä-arvoisena. Ja kuin niistä ei ole ollut erinomaista puutosta, niin harwat mitättömään kirjantekoon owat ryhtyneet, ehkä useampi tätä kyllä owat harrastelleet; sillä suosittelematon lempi kylmenee hiljanki. Nytpä jo ajat ovat entisistä muuttuneet siihen määrään, ettei enään tulla toimeen ainoasti suomen kielen suosittelemisessä, waan sitä jo todella aletan waatia itsekultakin julkisissa wirantoimituksissa, sekä kouluissakin, ja se on siis, ehkä wielä ruotsin kielen rinnalla, woittanut luonnollisen oikeutensa, olla wälikappaleena yhteisissä keskustelemisissa, ja opin sanansaattajana suomalaiselle nuorisolle. Tämä suomen kielen arvon ja oikeuksien myönnyttäminen matkaansaatti myös wiime kuluneinea aikoina, että selwä suomalainen oppilaitos perustettiin Jywäskylän kaupunkiin, kaikille maamiehille suurimmaksi iloksi ja ihanimmaksi toiwoksi. Ja onkin koulu jo Lokakuun ensimmäisenä päiwänä alkawa työnsä, niinkuin se jo sitä ennen on warustettu opettajilla ja tarpeellisilla opetus

Esipuhe.

Jo on yksitoista wuotta kulunut siitä, kuin äitin kieltämme rakastawa, opiltansa ja kunnoltansa jalo maamies, Herra lääkitystieteen tohtori **W. Kilpinen,** Suomalaisen Kirjallisuuden Seuran kustannuksella ensin julkaisi suomeksi kääntämänsä **„Neljä ensimäistä kirjaa ynnä wiidennen määritykset Euklideen alkeista mittaustieteessä.″** Tämä käännös, ehkä ensimäisiä kokeita suomen kielen käyttämiseen suuretieteellisissä tutkistelemuksissa, onnistuikin niin hywin, että se huoli, joka wielä näkyy pimittäwän yleisön tarkkaamista, kohta häwisi asian laitaa ymmärtäwissä lukijoissa, nimittäin että nämä aineet olisiwat aiwan outoja ja korkeita suomeksi esitellä, koska kieli muka ei wielä olisi kyllin taiwutettu niitä selittämään. Mutta ettei kuitenkaan suuretieteellisiä kirjoja enemmältä ole präntin kautta tullut julkisuuteen, sen on waikuttanut, ei suomen kielen suotta soimattu kykenemättömyys, waan sama syy, joka on estänyt kirjallisuutemme rikastumista useammissa muissakin tieteen haaroissa, se syy nimittäin, etteiwät tämmöisiä kirjoja oppimattomat Suomalaiset ole paljon kaiwanneet, eikä edes siwistyneempi herras-sääty, jonka suurempi, muukalais-ruotsinkieliseen pukuunsa tottunut oppi ei itsessänsä tuntenut halua kääntymään suomalaiseen kirjallisuuteen, jota pidettiin wähä-arwoisena. Ja kuin niistä ei ole ollut erinomaista puutosta, niin harwat mitättömään kirjantekoon owat ryhtyneet, ehkä useampi tätä kyllä owat harrastelleet; sillä suosittelematon lempi kylmenee hiljanki. Nytpä jo ajat owat entisistä muuttuneet siihen määrään, ettei enään tulla toimeen ainoasti suomen kielen suosittelemisellä, waan sitä jo todella aletan waatia itsekultakin julkisissa wirantoimituksissa, sekä kouluissakin, ja se on siis, ehkä wielä ruotsin kielen rinnalla, woittanut luonnollisen oikeutensa, olla wälikappaleena yhteisissä keskustelemuksissa, ja opin sanansaattajana suomalaiselle nuorisolle. Tämä suomen kielen arwon ja oikeuksien myönnyttäminen matkaansaatti myös wiime kuluneina aikoina, että selwä suomalainen oppilaitos perustettiin Jywäskylän kaupunkiin, kaikille maamiehille suurimmaksi iloksi ja ihanimmaksi toiwoksi. Ja onkin koulu jo Lokakuun ensimäisenä päiwänä alkawa työnsä, niinkuin se jo sitä ennen on warustettu opettajilla ja tarpeellisilla opetuskaluilla. Ainoasti suomalainen oppikirjasto on osin wielä hätäwarainen, sillä kirjoja ei kaswa kuin sieniä lämpimän sateen jälestä, waan aikaa woittain niitä kyllä tehdään hywiäkin ja huonommat paraiten parannellaan käytettäissä. Alkuperänä tähän teokseen on saman suomenkielisen koulun tarwe, joka, Herra tohtori Kilpiseltä esitelty, Suomalaisen Kirjallisuuden Seuralta on allekirjoitetulle uskottu täytettäwäksi. Olen epäilemättä käynytkin työhön siinä wakuutuksessa, että, kuin on paljon yhtaikaa ja kiiruulla tehtäwänä, myös kehnommankin apu on otollinen.

Mutta tosin ei taitaisi olla ylönpalttista sanella moniahta sana itsestä kirjastani ja mikä sitä kirjoittaissa on pidetty päätarkoituksena ja silmämääränä. Se minun aina oli muistettawa, että kirja piti tehtämän semmoinen, että se kelpaisi nuorempienkin koululaisten käsiin pantawaksi ja siis olisi yksinkertaisesti esitelty, juuri poikalapsien tiedon ja taidon mukaan. Tämän syyn tautta täytyi mun ensi alussa hyljätä Kilpiseltä ja muilta käytetyt suuretieteelliset merkit, joiden selittäminen alkawaisille tekee melkein yhtä paljo waiwaa kuin sisältä lukeminen. Toiseksi oliwat sekä kaikki määritykset tarkemmin rajoitettawat, tiedesanain joukosta sopiwammat walittawat ja niiden merkitykset wissisti määrättäwät, että erinomattain esittelöiden todistukset niin saannettawat, että selwästi nähtäisi, mikä pitäisi toteen näytettämän ja miten niiden totuus polwi polwelta seuraisi todeksi tunnetuista lauseista. Mitä wiime mainittuihin tulee, niin herra tohtori Kilpisen kirja todistuksiensa puolesta on mitä paraita löytyä taitaa, ja sen lauseet ja johtaukset selwästi, lyhykäisesti ja kaikin puolin tyydyttäwästi eteen asetetut. Sitä olenkin seurannut, jos kohta en sanasta sanaan, kaikissa, missä en ole nähnä etuisemmaksi tykkänään poiketa toiselle polulle. Ne muistutukset ja lisäykset, jotka siellä täällä owat tekstiin liitetyt, toiwomme puolustawan paikkansa, koska ne taikka yksinkertaisesti selittäwät sisällepitojen oikeata ymmärrystä ja järjestystä, taikka esittelewät tärkeitä totuuksia ja muita nuorison älyn ja järjen teroituksen aineita.

Näillä johde-sanoilla jätän uskalluksella kirjani yleisön tutkittawaksi. Kuopiossa 20:nä päiwänä Syyskuuta 1858.

Pekka Aschan.

---

kaluilla. Ainoasti suomalainen oppikirjasto on osin wielä hätäwarainen, sillä kirjoja ei kaswa kuin sieniä lämpimän sateen jälestä, waan aikaa woittain niitä kyllä tehdään hywiäkin ja huonommat paraiten parannellaan käytettäissä. Alkuperänä tähän teokseen on saman suomenkielisen koulun tarwe, joka, herra tohtori Kilpiseltä esitelty, Suomalaisen Kirjallisuuden Seuralta on allekirjoitetulle uskottu täytettäwäksi. Olen epäilemättä käynytkin työhön siinä wakuutuksessa, että, kuin on paljon yhtaikaa ja kiiruulla tehtäwänä, myös kehnommankin apu on otollinen.

Mutta tosin ei taitaisi olla ylenpalttista sanella moniahta sana itsestä kirjastani ja mikä sitä kirjoittaissa on pidetty päätarkoituksena ja silmämääränä. Se minun aina oli muistettawa, että kirja piti tehtämän semmoinen, että se kelpaisi nuorempienkin koululaisten käsiin pantawaksi ja siis olisi yksinkertaisesti esitelty, juuri poikalapsien tiedon ja taidon mukaan. Tämän syyn kautta täytyi mun ensi alusta hyljätä Kilpiseltä ja muilta käytetyt suuretieteelliset merkit, joiden selittäminen alkawaisille tekee melkein yhtä paljo waiwaa, kuin sisältä lukeminen. Toiseksi oliwat sekä kaikki määritykset tarkemmin rajoitettawat, tiedesanain joukosta sopiwimmat walittawat ja niiden merkitykset wissisti määrättäwät, että erinomattain esittelöiden todistukset niin saannetawat, että selwästi nähtäisi, mikä pitäisi toteen täytettämän ja miten niiden totuus polwi polwelta seuraisi todeksi tunnetuista lauseista. Mitä wiime mainittuihin tulee, niin herra Kilpisen kirja todistuksiensa puolesta on mitä parhaita löytää taitaa, ja sen lauseet selwästi, lyhykäisesti ja kaikin puolin tyydyttäwästi eteen asetetut. Sitä olenkin seurannut, jos kohta en sanasta sanaan, kaikissa, missä en ole nähnä etuisemmaksi tykkänään poiketa toiselle polulle. Ne muistutukset ja lisäykset, jotka siellä täällä owat tekstiin liitetyt, toiwomme puolustawan paikkansa, koska ne taikka yksinkertaisesti selittäwät sisälläpitojen oikeata ymmärrystä ja järjestystä, taikka esittelewät tärkeitä totuuksia ja muita nuorison älyn ja järjen teroituksen aineita.

Näillä johde-sanoilla jätän uskalluksella kirjani yleisön tutkittawaksi. Kuopiossa 20:nä päiwänä Syyskuuta 1858.

Pekka Aschan.

Alkuperäinen alkulause

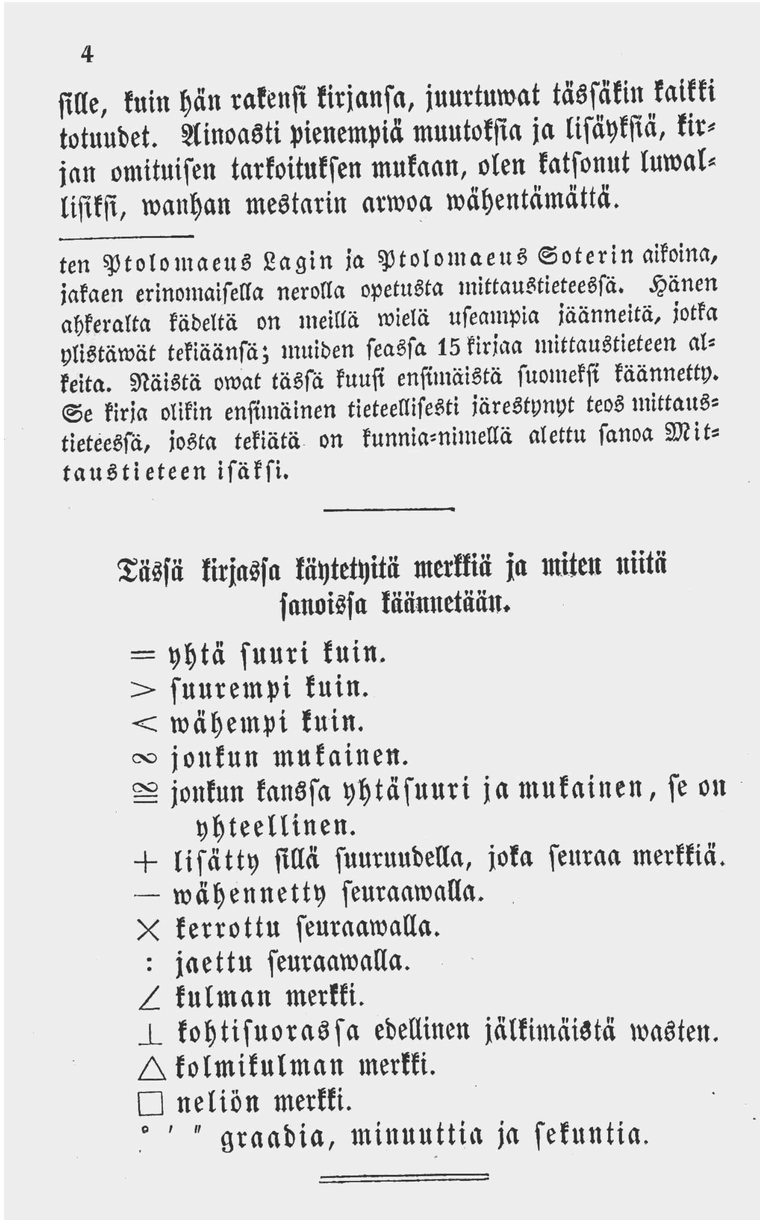
Mittaustiede on tieto suuruuksista, joiden rajat owat awaruudessa ja joiden tunnusmerkkinä owat itse awaruuden ominaisuudet, nimittäin ulottuwaisuus pituudelle, leweydelle ja sywyydelle. Mittaustiede tutkii näitä suuruuksia taikka erittäin, taikka toinen toiseensa werrattuina, mittailee ja määräilee niitä kaikin puolin, sillä tuottaaksensa niistä täydellisen tiedon. Tätä tehdessä seuraa hän tarkkaa järjestystä, alkaa määräämällä, mitä milläkin ymmärretään ja kuinka sitä toisesta eroittamalla nimitetään, edespanee, mitä siitä jo taidetaan itsestänsä tietää, ja tehden itseselwät tiedot perustuksiksi, päättää kaikella todella, mitä näistä taitaa seurata. Siis ei mittaustiede ole perustuksetta, sen täytyy alusta pitää wakaana totena yhtä ja toista, josta sitten wetää wastaansanomattomia seurauksia. Sen wisseys riippuu kokonansa perusteiksi pannuista totuuksista. Jos owat semmoisia, joita suotta epäilemättä woidaan myönnyttää ihmisjärjen mukaisiksi, niin mittaustieteellä on kaikki se wisseys, kuin häneltä taidetaan waatia. Mutta koska erityisiä perustuslauseita woidaan walita, ja näistä myöskin eritawalla seurauksia wetää, niin nähdään, että koko tieteen järjestys taitaa monella tawalla luonnistua. Tässä kirjassa seuraamme Euklidestä[a], se on samoille perustuksille, kuin hän rakensi kirjansa, juurtuwat tässäkin kaikki totuudet. Ainoasti pienempiä muutoksia ja lisäyksiä, kirjan omituisen tarkoituksen mukaan, olen katsonut luwallisiksi, wanhan mestarin arwoa wähentämättä.

[a] EUKLIDEKSESTÄ on aiwan wähän tietoja jälellä. Sen waan tiedämme, että hän 300 wuotta ennen Kristusta eleskeli *Alexandria* nimisessä kaupungissa Egyptin maalla, kuningasten Ptolemaios Lagin ja Ptolemaios Soterin aikoina, jakaen erinomaisella nerolla opetusta mittaustieteessä. Hänen ahkeralta kädeltä on meillä wielä useampia jäänneitä, jotka ylistäwät tekiäänsä, muiden seassa 15 kirjaa mittautieteen alkeita. Näistä owat tässä kuusi ensimmäistä suomeksi käännetty. Se kirja olikin ensimäinen tieteelliesti järjestynyt teos mittaustieteestä, josta tekiätä on kunnia-nimellä alettu sanoa *Mittaustieteen isäksi.*

Alku-lause.

Mittaustiede on tieto suuruuksista, joiden rajat owat awaruudessa ja joiden tunnustusmerkkinä owat itse awaruuden omaisuudet, nimittäin ulottuwaisuus pituudelle, leweydelle ja sywyydelle. Mittaustiede tutkii näitä suuruuksia taikka erittäin, taikka toinen toiseensa werrattuina, mittailee ja määräilee niitä kaikin puolin, sillä tuottaaksensa niistä täydellisen tiedon. Tätä tehdessä seuraa hän tarkkaa järjestystä, alkaa määrämällä, mitä milläkin ymmärretään ja kuinka sitä toisesta eroittamalla nimitetään, edespanee, mitä siitä jo taidetaan itsestänsä tietää, ja tehden itseselwät tiedot perustuksiksi, päättää kaikella todella, mitä näistä taitaa seurata. Siis ei mittaustiede ole perustuksetta, sen täytyy alusta pitää wakaana totena yhtä ja toista, josta sitten wetää wastaansanomattomia seurauksia. Sen wisseys rippuu kokonansa perusteeksi pannuista totuuksista. Jos owat semmoisia, joita suotta epäilemättä woidaan myönnyttää ihmisjärjen mukawiksi, niin mittaustieteellä on kaikki se wisseys, kuin häneltä taidetaan waatia. Mutta koska erityisiä perustuslauseita woidaan walita, ja näistä myöskin eritawalla seurauksia wetää, niin nähdään, että koko tieteen järjestys taitaa monella tawalla luonnistua. Tässä kirjassa seuraamme Euklidestä *), se on samoille perustuk-

*) **Euklidekſestä** on aiwan wähän tietoja jälellä. Sen waan tiedämme, että hän 300 wuotta ennen Kristusta eleskeli Alexandria nimisessä kaupungissa Egyptin maalla, kuningas-



4

sille, kuin hän rakensi kirjansa, juurtuwat tässäkin kaikki totuudet. Ainoasti pienempiä muutoksia ja lisäyksiä, kirjan omituisen tarkoituksen mukaan, olen katsonut luwallisiksi, wanhan mestarin arwoa wähentämättä.

ten Ptolomaeus Lagin ja Ptolomaeus Soterin aikoina, jakaen erinomaisella nerolla opetusta mittaustieteessä. Hänen ahkeralta kädeltä on meillä wielä useampia jäänneitä, jotka ylistäwät tekiäänsä; muiden seassa 15 kirjaa mittaustieteen alkeita. Näistä owat tässä kuusi ensimäistä suomeksi käännetty. Se kirja olikin ensimäinen tieteellisesti järestynyt teos mittaustieteessä, josta tekiätä on kunnia-nimellä alettu sanoa Mittaustieteen isäksi.

Tässä kirjassa käytetyitä merkkiä ja miten niitä sanoissa käännetään.

= yhtä suuri kuin.
> suurempi kuin.
< wähempi kuin.
∞ jonkun mukainen.
≌ jonkun kanssa yhtäsuuri ja mukainen, se on yhteellinen.
+ lisätty sillä suuruudella, joka seuraa merkkiä.
— wähennetty seuraawalla.
× kerrottu seuraawalla.
: jaettu seuraawalla.
∠ kulman merkki.
⊥ kohtisuorassa edellinen jälkimäistä wasten.
△ kolmikulman merkki.
□ neliön merkki.
° ′ ″ graadia, minuuttia ja sekuntia.

Tässä kirjassa käytetyitä merkkiä ja miten niitä sanoissa äännetään.

= yhtä suuri kuin.
> suurempi kuin.
< wähempi kuin.
∞ jonkun mukainen. (Nyk. yhdenmuotoinen.)
≌ jonkun mukainen ja yhtä suuri, se on yhteellinen. (Nyk. yhtenevä(inen).)
+ lisätty sillä suuruudella, joka seuraa merkkiä.
− wähennety seuraawalla.
× kerrottu seuraawalla.
: jaettu seuraawalla.
∡ kulman merkki.
⊥ kohtisuorassa edellinen jälkimmäistä wasten.
△ kolmikulman merkki.
□ neliön merkki.
° ′ ″ graadia (astetta), minuuttia ja sekuntia.

Ensimmäinen kirja

1.2. Määritelmiä. Toisin kuin nykyisessä matemaattisessa tyylissä on tapana, Eukleides listaa kussakin kirjassa eli luvussa käyttämänsä määritelmät asianomaisen kirjan alkuun. Siksi etenkin ensimmäisen kirjan määritelmien luettelo on pitkä. Alla esitetyt määritelmät ovat hyvinkin tarkasti Eukleideen alkuperäiset, mutta kaikki muistutukset ovat Aschanin tekemiä tai ainakin valitsemia — pitkää traditiota noudattaen. Noudatan itsekin samaa traditiota kommentoimalla sekä Eukleidesta että käännöksiä. Olen muotoillut määritelmät hieman uudemmalle suomenkielelle ja kirjoittanut perään huomioni näillä pienillä kirjasimilla.

(1) *Piste* on se, jossa ei ole osia.

(2) *Viiva* on pituus leveydettä.

Ainoat Alkeissa esiintyvät viivat ovat suora ja ympyrä osineen, vaikka Eukleides on varmasti tuntenut paljon muitakin käyriä.

(3) Viivan päät ovat pisteitä.

Pisteen määritelmiä on kaksi. Tämän jälkimmäisen, historiallisesti ilmeisesti vanhemman, variantteihin Eukleides joutuu turvautumaan teoriaa rakentaessaan — yleensähän pisteitä saadaan kahden suoran tai ympyrän leikkauspisteinä. Vertaa määritelmään 6, jossa kuvataan tasokuvion reunat viivoiksi. Avaruusgeometriassa kappaleen reuna on pinta. Ajatus ulotteisuuksien hierarkiasta elää modernissa dimensioteoriassa.

(4) Suora viiva eli *jana* tai *suora* on sellainen viiva, joka kulkee mutkittelematta alku- ja loppupisteensä välillä.

Eukleideen alkuperäinen määritelmä on hieman erilainen, lyhyt ja tulkinnanvarainen eikä mainitse päätepisteitä.
Suoraa viivaa voi postulaatin (2) mukaan nimenomaan jatkaa tarpeen mukaan kumpaankin suuntaan kuinka pitkälle tahansa, joten tässä tulee todella määritellyksi sekä suora että jana. Käytän tarpeen mukaan kumpaakin sanaa.

Ensimäinen Kirja.

Määrityksiä (Definitioner).

1. Piste on se, jossa ei ole osia.

Muistutus. Pisteellä ei ole pituutta, leweyttä, ei sywyyttä, ei osia toinen toisensa jatkossa, joita jakamalla woisit eroittaa. Se siis ei ole mikään suuruus; osoittaa ainoasti jonkun paikan awaruudessa.

2. Wiiwa on pituus leweydettä.

M. Wiiwaa woisit eroittaa pituudellensa, woisit jatka eli lyhentää; mutta koska sillä ei ole leweyttä, niin et sitä kuitenkaan käsitä ulkonaisesti, waan tajuat sen ainoasti ymmärryksellä.

3. Wiiwan päät owat pisteitä.

M. Ja missä hywänsä leikkaat wiiwan, saat pisteen.

4. Suora wiiwa on se, joka juoksee tasan (se on:  **mutkitta ja kaarteitta) alku- ja loppupisteensä wälillä. Wääräksi, eli mutkaiseksi, sanotaan sitä, joka ei osaksikaan ole suora.**

M. Tästä ymmärretään, ettei kahden pisteen wälillä woi olla useampia erinäisiä suoria wiiwoja, kuin waan yksi. Se on myös lyhyin tie kahden pisteen, eli paikan wälillä. Mittaa se, niin heidän wälimatkan tiedätki.

5. Pinta on se, jolla on ainoasti pituutta ja leweyttä.

M. Pinnan taidat jakaa pitkittäin ja poikittain miten tahdot, waan jos lohkaista aiwot, hajoaa se käsistäsi, sillä siihen tarwittaisi paksuutta, eli sywyyttä, jota pinnalla ei ole.

6

Pinta on siis, niinkuin wiiwakin, ainoasti ymmärryksellä tajuttawa.

6. **Kukin pinta on ääritetty wiiwoilta, eli rajoilta, joiden yli hän ei ylety.**

7. **Pintaa sanotaan tasaiseksi** (muukalaisella nimellä: plan), **jossa taidetaan wetää suoria wiiwoja mihin päin hywänsä, niin että ne yhdistywät pinnan kanssa. Pintaa, joka ei osaksikaan ole tasainen, kutsutaan epätasaiseksi.**

*) **Kappale** (wastaa muukalaista: solid figur) **on se, jolla, paitsi pituutta ja leweyttä, myöskin on sywyyttä.**

M. Kappaleen tunnet ja eroitat niinkuin erityisen muista kappaleista. Sitä nimikin: „kappale" osoittaa. Mutta koska mittaustieteessä ainoasti awaruuden erinäiset omaisuudet tulewat tutkittawiksi, niin myös kappaleessa merkitään ainoasti sen laajuus ja rajoitukset, lukua pitämättä aineesta, jolta se täytetään. Kuitenkaan ei sen ruumillinen olento katoa sillä, ettei huolita tietää, mistä aineesta se tehty on.

*) Kappaleen rajat owat pintoja.

M. Ja pinnan rajat owat wiiwoja, wiiwan rajat pisteitä. Kappaleessa siis pinnat, wiiwat ja pisteet owat luonnollisesti yhdistetyt ja ikäänkuin äärettömästä awaruudesta eroitetut. Tässä yhteydessä heitä woitki käsittää, waan jos eroitat ne kappaleesta, niin ne kyllä taidat ymmärtää, waan et kuwailla heitä muuten kuin waillinaisilla merkeillä.

8. **Jos kaksi wiiwaa tapaawat toinen toisensa samalla tasapinnalla, eiwätkä ole yhtenä wiiwana, sanotaan wiiwain wäliaukeemaa tasakulmaksi** (plan angel).

M. Wiiwoja itsiänsä kutsutaan kulman **kyljiksi**, eli **siwuiksi**, ja pistettä, jossa ne sattuwat toisiinsa, kulman **kärekksi.**

---

*) Nämä määritykset eiwät löydykään tällä paikalla Euklideen kirjassa, waan tarpeellisia ollen, lisätään ne tähän.

Aschan mainitsee ilman perusteluja monenlaisia tähän määritelmään kuulumattomia suoran viivan ominaisuuksia, kuten että kahden pisteen kautta kulkee vain yksi suora, että janalla on pituus ja että jana on kahden pisteen välinen lyhin tie. Hän määrittelee myös omatoimisesti, että muu kuin suora viiva on käyrä (wäärä) ja piirtää kuvan.

(5) *Pinta* on se, jolla on ainoastaan pituutta ja leveyttä.

Viivat ja pinnat ovat toisaalta havainnollisia asioita, toisaalta teoreettisia. Aschan on tästä opetuksen ongelmasta tietoinen ja kuvailee Strömeriä laajemmin pinnan ulotteisuuksia parhaansa mukaan korostaen toisaalta myös pinnan abstraktia luonnetta.

(6) Pinnalla on *reunaviivat*, joiden yli se ei ylety.

Vertaa määritelmään 3.

(7) Pintaa sanotaan *tasoksi*, jos se sisältää kaikensuuntaisia suoria.

Eukleideen määritelmä sisältää ajatuksen, että taso sisältää kokonaan jokaisen sellaisen suoran, joka kulkee ainakin kahden siihen kuuluvan pisteen kautta. Aschan määrittelee lisäksi omin päin, että muu pinta kuin taso on *kaareva*. Hän määrittelee ja kuvailee tässä kohdassa Eukleideesta tietoisesti poiketen myös *kappaleen* käsitteen. Aschanin kirjassa ei ole mukana Eukleideen Alkeiden avaruusgeometriaosaa, vaan tässä kohdassa kyse on sinänsä ihan viisaasta myönnytyksestä käytännön tarpeille. "Kappaleiden reunat ovat pintoja". Tämäntapaiset lausahdukset olivat vielä 1800-luvun puolivälissä "totta" ja "selviä" useimpien matemaatikoidenkin mielestä. Vasta analyysin täsmentyminen ja siis esim. Cauchyn ja Weierstrassin opetukset ja "patologiset" vastaesimerkit toivat yleisempään tietoisuuteen, että asiassa on ongelmia. Eukleides ei sano mitään näin epämääräistä.

(8) Jos kaksi saman tason viivaa kohtaavat toisensa, niin niiden väliin jäävää aluetta sanotaan *tasokulmaksi*.

Kulman, etenkin käyräviivaisen, käsite on vaikea asia. Monien muiden tavoin myös Aschan poikkeaa tässä Eukleideesta, joka määrittelee kulman em. viivojen väliseksi kaltevuudeksi. Omana kommenttinaan Aschan lisää, että viivoja itseänsä sanotaan kulman *kyljiksi* ja yhteistä pistettä sen *kärjeksi*.
Kulman määritteleminen näin johtaa siihen, että "oikokulmaa" ja sitä suurempia kulmia ei ole olemassa, ei tietenkään myöskään negatiivisia kulmia. Kuitenkin on järkevää sanoa esimerkiksi, että "kaksi tylppää kulmaa ovat yhteensä enemmän kuin kaksi suoraa kulma". Näin Eukleides menetteleekin.

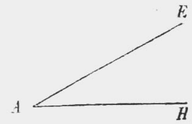
(9) Kulmaa, jonka rajaavat suorat viivat, sanotaan *suoraviivaiseksi kulmaksi*.

Käyräviivaisten kulmien yhtäsuuruus ja suorakulmaisuus pitäisi jossain määritellä, mutta asia on hankala eivätkä käyräviivaisia kulmia koskevat päättelyt oikein toimikaan, vaikka myöhemmin ainoa käsiteltävä käyrä viiva on ympyrä. Aschan vetoaa raja-arvon kaltaiseen havaintoon: "Wääräwiiwaista kulmaa määrätään niinkuin juoksisiwat wiiwat suoraan sitä suuntaa, jota toinen toisestansa erotessa alkavat lähetä." Aschanin kuvaus kulmien merkitsemistavoista on viehättävä: "... Wälistä kirjoitetaan kulman kainaloon joku pieni kirjain, jolla kulmaa nimitetään." Aschan samaistaa kulman ja sen suuruuden. Näemme pian, että Eukleides on paljon varovaisempi.

(10) Jos suora viiva (puolisuora) leikkaa toista suoraa siten, että kummallakin puolen on yhtä suuret kulmat, niin sanotaan, että nuo kulmat ovat *suoria kulmia* ja suorat toistensa *normaaleja*.

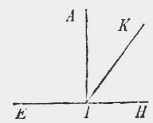
Tässä kohdassa Aschan määrittelee samalla *vieruskulman, suplementtikulman* eli *täytekulman* käsitteen. Lisäksi hän ottaa muitta mutkitta käyttöön astemitan. Tämä on käytännön sovelluksien kannalta ihan järkevää, mutta kulmien ja muiden suuruuksien samaistaminen mittalukuihin tekee melkein mahdottomaksi ymmärtää Eukleideen 2. kirjassa esitettävää geometrista algebraa ja 5. kirjassa esitettävää suhdeoppia, joissa ideana on nimenomaan tulla toimeen ilman numeroita — erityisesti ilman irrationaalilukuja. Aschan sen enempää kuin Eukleideskaan ei kerro suoraan, millä ehdolla kaksi kulmaa ovat yhtä

7



9. Kulmaa, jota suorat wiiwat reunailewat, sanotaan suorawiiwaiseksi.

M. **Wääräwiiwainen** kulma on siis se, jonka yksi, eli molemmat kyljet owat wääriä. Kulman suuruutta ei määrätä kylkien pituudesta, waan heidän lewiämisestä toinen toisestansa. Wääräwiiwaista kulmaa määrätään niinkuin juoksisiwat wiiwat suoraan sitä suuntaa, jota toinen toisestansa erotessa alkawat lähteä. — Yksinäistä kulmaa nimitetään tawallisesti sillä kirjaimella (A), joka on kulman käressä. Mutta jos useampia kulmia pistää samaan kärkeen, niin kukin eroitetaan siten, että ne kolme kirjainta, jotka owat kulman ympärillä, mainitaan perättäin ja keskimäisenä aina sitä, joka seisoo kulman käressä. Esim. sanotaan (katso seur. kuwaa) kulma wiiwain AI ja IE wälillä AIE:ksi, eli EIA:ksi, ja wiiwoilta AI ja KI reunailtua kulmaa AIK:ksi, eli KIA:ksi. Wälistä kirjoitetaan kulman kainalohon joku pieni kirjain, jolla kulmaa nimitetään.



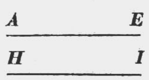
10. Jos suora wiiwa seisoo toisen suoran wiiwan päällä ja tätä wasten kumpaisellekin puolelle tekee yhtäsuuret kulmat, niin molempaa yhtä suurta kulmaa sanotaan suorakulmaksi, ja wiiwaa sanotaan kohtisuoraksi (vertikal) toista wasten, jonka päällä se seisoo.

M. Näin wieretysten olewia kulmia kutsutaan tawallisesti **siwullisiksi** kulmiksi, eli **täytekulmiksi** (supplement-anglar). Suora kulma on siis se, joka on siwullisensa suuruinen. Kulmat AIH ja AIE owat suoria, ja wiiwa AI on kohtisuorassa EH:ta wasten, jota merkitään näin: AI $\perp$ EH. Sitä, että joku kulma on suora, osoitetaan usein alkupuustaimella S, esim. kulma AIH = S. Jos kohtisuora wiiwa juoksee luotilangan suuntaa, niin sitä kutsutaan **pystysuoraksi** (vertikal), ja toista wiiwaa, jota wasten se seisoo, **waakasuoraksi** (horizontel). — Suoraa kulmaa jos jaetaan kärestä ulospäin 90:neen yhtäsuureen osakulmaan, niin jokaista kutsutaan muukalaisella nimellä **graadiksi**. Graadit wielä jaetaan 60:neen **minuutti**-kulmaan, ja minuutit 60:neen **sekuntiin**. Näiden merkit owat (° ′ ″), joten kulman ollessa 10 graadia, 35 minuuttia ja 23 sekuntia suuri, kirjoitetaan lyhykäisesti 10° 25′ 23″. Niinmuodoin saadaan suorasta kulmasta mitta, johon muitakin kulmia käy wertaaminen.

11. Kutakin kulmaa, joka on suoraa kulmaa suurempi, sanotaan tylsäkulmaksi.

12. Teräwäkulmaksi taas sanotaan sitä, joka on pienempi suoraa kulmaa.

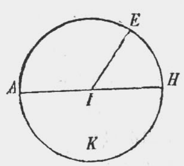
M. Kulma KIE on tylsä, KIH teräwä, molemmat suoran kulman suhteen **winokulmia**. (Edel. kuwa).



13. Suoria wiiwoja sanotaan yhtäsuuntaisiksi, jos ne samalla tasapinnalla juoksewat aina yhtäkaukaisena toisistansa, eiwätkä kummallakaan puolella yhdy, waikka heitä pitennettäisi kuinka etäälle hywänsä.

14. Kuwio on kaikin puolin rajoitettu tila.

M. Kuwioita, joiden rajat owat samassa tasapinnassa, kutsutaan **tasapintaisiksi** (plana). Näissä alkeissa saadaan lukea ainoasti tasapintaisista kuwioista, joiden mitannollista esittelöä yleisesti kutsutaan **tasapinta-mitannoksi** (planimetri) *). Kuitenkaan alkeisopillisissa kirjoissa, taikka „alhaisessa mittaustieteessä", ei tutkita kaikenlaisia tasapintaisia kuwioita, waan ainoasti seuraawia.



15. Ympyrä (cirkel) **on tasapintainen, wäärän wiiwan sillä tawoin rajoittama kuwio, että kaikki suorat wiiwat, jotka samasta pisteestä kuwion sisällä lankeawat rajalle, owat yhtäsuuret.**

*) Sana „tasapinta-mitanto" merkitsee tässä kuwioiden sekä tieteellistä, että mitannollista esittelöä. Mutta sillä myös usein nimitetään ainoasti jälkimäistä, eli osoitusta kuwioiden mittaamiseen.

suuret tai millä ehdolla kulma on toista suurempi. Aksioomissa yhtä- ja erisuuruuden ominaisuuksia kyllä käsitellään. Sen sijaan Eukleides todistaa kohdassa 1.11 huolellisesti, että suora kulma on olemassa.

(11) Suoraa kulmaa suurempi kulma on *tylppä kulma.*
(12) Suoraa kulmaa pienempi kulma on *terävä kulma.*
(13) Tason suorat ovat *yhdensuuntaiset*, jos niillä ei ole yhteisiä pisteitä, vaan ne ovat aina yhtä kaukana toisistaan.

Tämä on Aschanin määritelmä. Eukleides määrittelee yhdensuuntaisuuden vasta määritelmässä (23). Eukleideen vanhemmassa numeroinnissa määritelmä (13) sanoo hämärästi suunnilleen, että reuna on sama kuin ääri. Olennaisempaa kuin ero numeroinnissa on, että Aschanin määritelmän osa, jossa sanotaan suorien "juoksevan aina yhtä kaukana toisistansa" ei esiinny Eukleideella lainkaan, vaan euklidisessa geometriassa tämä etäisyysominaisuus on yhdensuuntaisuusaksiooman avulla todistettava lause. Hyperbolisessa epäeuklidisessa geometriassa (jossa muut aksioomat ovat samat kuin euklidisessa mutta yhdensuuntaisuusaksiooma oletetaan vääräksi) yhdensuuntaisten suorien etäisyysominaisuus ei päde. Kummassakaan teoriassa se ei missään tapauksessa kuulu määritelmään.

(14) *Kuvio* on reunoin rajoitettu tila.

Eukleides on juuri ottanut käyttöön reuna-käsitteen ja määrittelee nyt sen avulla kaikenulotteiset rajoitetut kuviot, siis niin kappaleet kuin tasokuviotkin, mutta ei hyväksy "rajoittamattomia kuvioita", kuten puolitasoa tai kulman aukeamaa. Aschanilla on mielessä vain tasogeometria. Hän ilmoittaakin kommentissaan, mitä hän tarkoittaa *tasogeometrialla* ja *alkeisgeometrialla*, jonka hän rajaa opiksi seuraavissa kohdissa määriteltävistä kuvioista.

(15) *Ympyrä* on sellaisen viivan rajoittama kuvio, että kaikki janat samasta kuvion sisällä olevasta pisteestä reunaviivalle (eli ympyrän *kehälle*) ovat yhtä pitkät.
(16) Mainittu piste on ympyrän *keskipiste.*

Aschan on lisännyt määritelmään, että janat keskipisteestä kehälle ovat *säteitä* ja kehän osat ovat *kaaria.*

Käytän viivojen suuruudesta sanontaa ”janan pituus”. Aschan seuraa uskollisemmin Eukleidesta, joka puhuu vain ”suorien viivojen suuruudesta”, mikä on sikäli tyylikästä, että kaikenlaisille suureille yhteiset aksioomatkin puhuvat nimenomaan vain ”suuruudesta”.

(17) *Halkaisija* on suora viiva, joka kulkee keskipisteen kautta ja jonka päät ovat ympyrän kehällä. Halkaisija leikkaa ympyrän tasan kahtia.

Huomautus, jonka mukaan halkaisija leikkaa ympyrän tasan kahtia, on Eukleideen tekstistä ja sitä tarvitaan seuraavassa kohdassa perustelemaan puoliympyrän nimi. Eukleides ei todista tätä väitettä, jonka kerrotaan olevan yksi Thaleen muotoilemista viidestä vanhimmasta teoreemasta.[a] Aschan lisää Eukleideen määritelmän alkuun, että kaaren molempia päitä yhdistävää suoraa viivaa sanotaan *jänteeksi* ja määrittelee sitten halkaisijan ”keskinavatse” kulkevana jänteenä.

(18) *Puoliympyrä* on kuvio, jota rajoittavat ympyrän halkaisija ja puoli kehää.

(19) Ympyrän *lohko* eli *segmentti* on jänteen ja kaaren rajoittama tila.

Aschan korostaa, että jänteen kummallekin puolelle muodostuu segmentti, joka siis voi olla puoliympyrää suurempikin. Eukleideella yleisen segmentin määritelmä ei ole tässä paikassa, vaan vasta kolmannessa kirjassa, koska sitä tarvitaan vasta siellä. Aschankin kiinnittää huomiota siihen, että kolmannessa kirjassa palataan tutkimaan ympyrää ja erityisesti, että siellä määritellään ympyrän *leikkale* eli *sektori.*

(20) *Suoraviivaisia kuvioita* rajoittavat suorat viivat, joiden lukumäärän mukaan puhutaan *kolmikulmioista*, *nelikulmioista* tai *monikulmioista.*

[a]Muut neljä ovat tasakylkisen kolmion kantakulmien samuus, ristikulmalause, yhtenevyyslause KSK ja kehäkulmalause puoliympyrän tapauksessa.

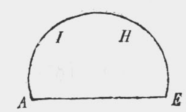
9

16. **Wäärää, ympyrätä rajoittawaa wiiwaa, sanotaan ympyrän kehäksi** (peripheri); **pistettä, josta ne yhtäpitkät wiiwat lankeawat kehään, keskipisteeksi** (centrum), **eli nawaksi; näitä yhtäpituisia suoria wiiwoja säteiksi** (radii), **ja suurempia eli pienempiä kehän palaisia kaarteiksi** (arcus).

17. **Kaarteen kahta loppupäätä yhdistäwää suoraa wiiwaa kutsutaan jänteeksi** (chorda). **Ympyrän halkasia** (diameter) **on jänne, joka juoksee keskinawatse molemmin puolin kehään. Se leikkaa ympyrän keskeltä kahtia.**

M. Ympyrä syntyy, jos suora wiiwa AI käännäksen paikkansa pitäwän päänsä ympäri, kunnes tulee entiselle kohdallensa josta läksi liikkumaan. Kuwassa näyttää AEHK ympyrän rajoituksen ja on sen kehä. Yhtäpitkät wiiwat AI, EI, HI, jotka keskipisteestä I lankeawat kehään, owat säteitä. AE, EH ja HKA owat kehän palaisia, eli kaarteita. AIH on keskinawatse kulkewa jänne, eli halkasia.

18. **Puoliympyrä on kuwio, rajoitettu halkasialta ja puolelta kehältä.**



19. **Ympyrän lohko** (segment) **on jänteeltä ja kaarteelta rajoitettu pinta.**

M. Myöskin puoliympyrä on ympyrän lohkoksi sanottawa. Mutoin woipi lohko olla puoliympyrää pienempi taikka suurempi, niinkuin kuwassa AEHI. — **Ympyrän leikkaleesta** (sektor) luetaan 3:ssa kirjassa.

20. **Suorawiiwaiset kuwiot owat ne, jotka rajoitetaan suorilta wiiwoilta.**

M. Rajoittawia wiiwoja kutsutaan myös **siwuiksi.** Kaikkia siwuja yhteensä kutsutaan kuwion **piiriksi** (perimeter). Suorawiiwaiset kuwiot jaetaan taikka siwujen taikka kulmien luwun jälkeen, josta syntywät seuraawaiset kahtalaiset nimitykset. Muuten on jokaisessa kuwiossa yhtä paljo kulmia kuin siwujakin.

10

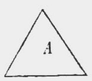
21. **Kolmisiwuisia kuwioita, eli kolmikulmia** (triangler), owat ne, jotka rajoitetaan kolmelta suoralta wiiwalta;

M. Kolmikulman merkki on △.

22. **Nelisiwuisia kuwioita, neliskulmia,** ne, jotka rajoitetaan neljältä suoralta wiiwalta;

23. **Monisiwuisia kuwioita, monikulmia,** ne, jotka rajoitetaan useammalta kuin neljältä suoralta wiiwalta.

M. Monisiwuisia kuwioita nimitetään myös erittäin **wiiskulmiksi, kuuskulmiksi** j. n. e. **Läwistäjäksi** (diagonal) kutsutaan nelisiwuisissa ja monisiwuisissa kuwioissa jokaista suoraa wiiwaa, joka yhdistää kaksi kulmaa kuwiossa. Kuwioita, joissa kaikki siwut owat yhtäpitkät, sanotaan **yhtäsiwuisiksi;** niitä, joissa kaikki kulmat owat yhdenkokoiset, sanotaan **yhtäkulmaisiksi,** ja niitä, joiden sekä kaikki siwut että kulmat owat yhdenkokoiset, **säännöllisiksi** (reguliera).

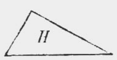


A

24. Siwuinsa suhteen on se kolmikulma **yhtäsiwuinen,** jossa kaikki kolme siwua owat yhtäpitkät. A.

E

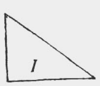
25. Se **yhtäkylkinen,** jossa ainoasti kaksi siwua owat yhtäpitkät. E.



H

26. Se **erisiwuinen,** jossa kaikki kolme siwua owat eripitkät. H.

M. Kolmikulmassa (ja muissakin kuwioissa) woipi minkä siwun hywänsä ottaa **asemaksi,** eli **kannaksi,** jonka päälle se ikäänkuin olisi perustettu. Ja näin nimitetäänkin usein siwua, jota tahdotaan toisista eroittaa. Yhtäpitkiä siwuja yhtäkylkisissä kolmikulmissa sanotaan tawallisesti **kyljiksi** ja kolmatta siwua **asemaksi.**



I

27. Kulmien puolesta on se kolmikulma **suorakulmainen,** jossa on suora kulma. I.

K

28. Se **tylsäkulmainen,** jossa on tylsä kulma. K.

Aschan määrittelee saman tien monikulmion *sivut*, jotka yhdessä muodostavat *piirin*. Lisäksi hän mainitsee, että sivuja ja kulmia on yhtä monta. Näin on syytä tehdä suomennettaessa, sillä kreikaksi esimerkiksi kolmikulmiot ovat Eukleideen määritelmään sopivasti nimeltään ”kolmisivuja” $\tau\rho\iota\pi\lambda\epsilon\upsilon\rho\alpha$. Eukleides pitää huolta siitä, että määritelmän monikulmiot ovat yleisiä, eikä esimerkiksi nelikulmiota sekoiteta neliöön. Seuraavat määritelmät sisältyvät Eukleideella edelliseen määritelmään (standardinumeroinnissa 19), mutta Aschan numeroi ne erikseen.

(21) Kolmisivuinen monikulmio on *kolmio.*
(22) Nelisivuinen monikulmio on *nelikulmio.*
(23) Samoin määritellään (useampisivuiset) monikulmiot.

Tässä kohdassa Aschan määrittelee erikseen *viisikulmion*, *kuusikulmion* jne. Lisäksi hän kirjoittaa, että monikulmion *lävistäjiä* ovat kulmapisteiden väliset janat, unohtaen sulkea pois sivut. Monikulmio, jonka sivut ovat yhtä suuria, on *tasasivuinen.* Monikulmio, jonka kulmat ovat yhtä suuria, on *tasakulmainen.* Monikulmio, joka on sekä tasasivuinen että tasakulmainen on *säännöllinen.*

Seuraavatkin määritelmät on paloiteltu ja numeroitu uudelleen. Hakasulkeissa standardinumerointi.

(24) Erikoistapauksena edellisistä on *tasasivuinen kolmio.* [20]
(25) Kolmio on *tasakylkinen*, jos siinä on (ainakin) kaksi yhtä pitkää sivua. [20]

Tasakylkisessä kolmiossa yhtä pitkät sivut ovat *kyljet*, kolmas sivu eli *kanta* on Aschanin kommentissa *”asema”*, mitä sanaa voi käyttää muustakin sivusta — etenkin yleisessä kolmiossa.

(26) Muuten kolmio on *erisivuinen.* [20]
(27) Kolmio on *suorakulmainen*, jos siinä on (ainakin yksi) suora kulma. [21]
(28) Kolmio on *tylppäkulmainen*, jos siinä on (ainakin yksi) tylppä kulma. [21]
(29) Kolmio on *teräväkulmainen*, jos siinä on pelkästään teräviä kulmia. [21]

(30) Tasasivuinen suorakulmainen (kaikki kulmat suoria!) nelikulmio on *neliö*. [22]

(31) *Suorakulmioksi* sanotaan muuta nelikulmiota, jossa kaikki kulmat ovat suoria kulmia. [22]

Nykyisin neliö yleensä lasketaan suorakulmioksi, mutta tässä ei.
Aschan sanoo tässä perusteluitta, että suorakulmiossa vastakkaiset sivut ovat parittain yhtä pitkät.

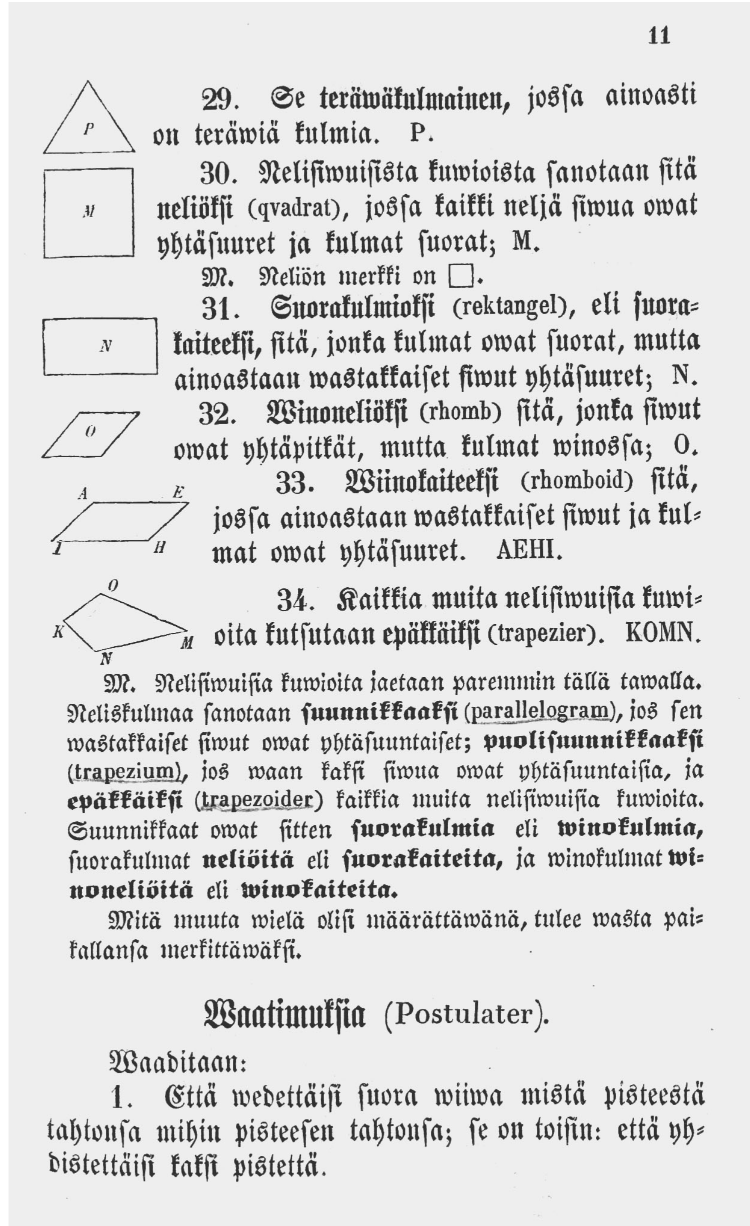
(32) *Vinoneliöksi* sanotaan nelikulmiota, jossa kaikki sivut ovat yhtä pitkiä, mutta eivät kaikki kulmat suoria. [22]

Vinoneliö on siis tämän mukaan tasasivuinen nelikulmio, mutta ei neliö.

(33) *Vinokaiteeksi* sanotaan nelikulmiota, jossa parittain vastakkaiset sivut ja vastakkaiset kulmat ovat yhtä suuret, mutta joka ei ole suorakulmio eikä vinoneliö. [22]

(34) *Trapetsoidiksi* eli *epäkkääksi* sanotaan kaikkia muita nelikulmiota. [22]

Aschanin sanat "vinokaide" ja "epäkäs" ovat jääneet pois yleisestä käytöstä. Tässä kirjassa ainakin vinokaidetta tarvitaan, koska Eukleides ei määritelmissä mainitse yleistä suunnikasta[a], vaan erottelee tässä suorakulmiot ja vinoneliöt vinokaiteista. Aschan sanoo paremmaksi luokitteluksi sitä, jossa on mukana suunnikas, ja määritteleekin kommentissaan *suunnikkaan* vaatimalla, että vastakkaiset sivut ovat parittain yhdensuuntaiset (!) ja *puolisuunnikkaan*, jossa on yksi pari yhdensuuntaisia sivuja. Tätä varten hänen on täytynyt poiketa Eukleideen järjestyksestä määrittelemällä yhdensuuntaisuus jo edellä. Suunnikkaan Aschan olisi kyllä voinut määritellä vaatimalla vastakkaisten sivujen olevan parittain yhtä pitkiä, mutta puolisuunnikkaan määrittely ilman yhdensuuntaisuuden käsitettä ei onnistuisi.
Puolisuunnikasta sanotaan toisinaan *trapetsiksi*, mikä on syytä erottaa täysin epäsäännöllisestä trapetsoidista. Aschanin "trapezier" on vaarallinen.


11

29. **Se teräwäkulmainen**, jossa ainoasti on teräwiä kulmia. P.

30. Nelisiwuisista kuwioista sanotaan sitä **neliöksi** (qvadrat), jossa kaikki neljä siwua owat yhtäsuuret ja kulmat suorat; M.

M. Neliön merkki on □.

31. **Suorakulmioksi** (rektangel), eli **suorakaiteeksi**, sitä, jonka kulmat owat suorat, mutta ainoastaan wastakkaiset siwut yhtäsuuret; N.

32. **Winoneliöksi** (rhomb) sitä, jonka siwut owat yhtäpitkät, mutta kulmat winossa; O.

33. **Wiinokaiteeksi** (rhomboid) sitä, jossa ainoastaan wastakkaiset siwut ja kulmat owat yhtäsuuret. AEHI.

34. **Kaikkia muita nelisiwuisia kuwioita kutsutaan epäkkäiksi** (trapezier). KOMN.

M. Nelisiwuisia kuwioita jaetaan paremmin tällä tawalla. Neliskulmaa sanotaan **suunnikkaaksi** (parallelogram), jos sen wastakkaiset siwut owat yhtäsuuntaiset; **puolisuunnikkaaksi** (trapezium), jos waan kaksi siwua owat yhtäsuuntaisia, ja **epäkkäiksi** (trapezoider) kaikkia muita nelisiwuisia kuwioita. Suunnikkaat owat sitten **suorakulmia** eli **winokulmia**, suorakulmat **neliöitä** eli **suorakaiteita**, ja winokulmat **winoneliöitä** eli **winokaiteita**.

Mitä muuta wielä olisi määrättäwänä, tulee wasta paikallansa merkittäwäksi.

Waatimuksia (Postulater).

Waaditaan:

1. Että wedettäisi suora wiiwa mistä pisteestä tahtonsa mihin pisteesen tahtonsa; se on toisin: että yhdistettäisi kaksi pistettä.

[a] Eukleides ottaa suunnikaskäsitteen käyttöön vasta, kun tarvitsee sitä kohdassa 1.34.

12

2. Että pitennettäisi tietty suora wiiwa yli rajapistettänsä.

3. Että piirrettäisi ympyrä, jonka keskipiste ja säde owat tietyssä.

M. Nähdään siis, ettei tässä waadita muuta, kuin mitä jokainen, wiiwaimen ja piirtosirkkelin awulla, helposti woipi suorittaa. Tahdomme kuitenkin kehoittaa oppilaita jo alusta alkaen totuttamaan itsensä wapaalla kädellä, koneita käyttämättä, näitä tekoja täyttämään. Kätewäisyys ja tarkka silmä on monessa kohdassa hyödyttäwä ja erinomattain tarpeellinen, jos edistymistä mittaustieteessä tarkoitetaan. Samasta syystä wielä muistutamme, että kaikki piirrokset tehtäköön, mitä mahdollisesti tarkat ja selwät; sillä silmien todistus opettaa enemmän kuin luulisimme tuntemaan sekä suuruuden itsenäisiä omaisuuksia, että sen arwoa werrattuna toiseen suuruuteen.

Selwiöitä (Axiomer).

1. Saman kanssa, eli yhtäsuurien kanssa, yhtäsuuret owat myöskin keskenänsä yhtäsuuret.

2. Jos yhdenkokoiset yhdistetään yhdenkokoisien kanssa, niin yhdistetyt suuruudet owat yhdenkokoiset.

3. Jos yhdenkokoiset otetaan yhdenkokoisista, niin jäännökset owat yhdenkokoiset.

4. Jos erikokoiset yhdistetään yhdenkokoisien kanssa, niin yhdistetyt suuruudet owat erikokoiset.

M. Nimittäin se on suurempi, johon suurempi laskettiin yhteen.

5. Jos yhdenkokoiset otetaan erikokoisista, niin jäännökset owat erikokoiset.

M. Nimittäin se on suurempi, joka jääpi suuremmasta.

6. Kahta kertaa suuremmat kuin yksi, eli yhdenkokoiset, owat keskenänsä yhdenkokoiset.

M. Myöskin ne, jotka owat kolme, neljä, j. n. e. kertaa suuremmat kuin yksi, eli yhdenkokoiset, owat yhtäsuuret; ylei-

1.3. Vaatimuksia eli postulaatteja. Aristoteleelta peräisin olevassa terminologiassa *postulaatit* ovat oikeastaan tieteenalakohtaisia aksioomia. Muut *aksioomat* ovat kaikille tieteille yhteisiä "yleisiä tosiasioita". Eukleideen jaottelu ei kuitenkaan seuraa tätä periaatetta, vaan geometrisia aksioomia on kummankin otsikon alla.

Vaaditaan

(1) että voidaan vetää suora viiva mistä pisteestä tahansa mihin pisteeseen tahansa.

Eukleides ei sano, mutta tarkoittaa, että on olemassa tasan yksi tällainen suora. Aschan ilmaisee yksikäsitteisyyden vasta aksioomassa (10).

(2) että janaa voi jatkaa kumpaankin suuntaan yli päätepisteidensä.

(3) että pisteen ympäri voidaan piirtää minkä tahansa toisen pisteen kautta kulkeva ympyrä.

Näissä Eukleideen postulaateissa on kuvattu viivaimen ja harpin käytön säännöt konstruktiotehtäviä varten. Eukleideella konstruktioiden tarkoitus ei ole käytännöllinen, kuten voisi luulla, vaan konstruktioiden avulla todistetaan tutkittavien objektien olevan olemassa. Esimerkiksi suoran kulman olemassaolo todistetaan konstruoimalla sellainen — määritelmähän sanoo vain, mitä suoralta kulmalta vaaditaan. Vertailun vuoksi voisi määritellä "viisiön" viisikulmioksi, jonka jokainen kulma olisi suora. Sellaisen konstruointi ei onnistu. Säännöllisen viisikulmion Eukleides konstruoi. Säännöllisen seitsenkulmion konstruktio on mahdoton tehtävä. Eukleides ei sitä tiennyt eikä ota kantaa moisen olemassaoloon.
Postulaatti (1) sanoo, että on mahdollista piirtää suora kahden pisteen kautta; sellainen suora on siis olemassa; pisteiden olemassaoloa Eukleides sentään pitää perusoletuksena, jota ei lausu ääneen. Postulaatissa (3) Aschan mainitsee "säteen", mutta ei kerro mitä sillä tarkoittaa. Olen yllä korjannut postulaatin Eukleideen ja Strömerin antamaan oikeaan muotoon. Seuraavat kaksi Eukleideen postulaattia eivät liity konstruktiotehtäviin vaan todistuksiin. Siksi ne toisinaan listataan aksioomina. Näin Aschankin menettelee numeroiden ne aksioomiksi (11) ja (12).

(4) että kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuria.

(5) että yhdensuuntaisuus- eli paralleeliaksiooma pätee.

1.4. Aksioomia eli selviöitä.

(1) Saman kanssa yhtä suuret ovat yhtä suuret.

Aschan lisää, että myös keskenään yhtä suurten kanssa yhtä suuret ovat yhtä suuret. Tämä seuraa kuitenkin edellisestä.

(2) Jos yhtä suuret yhdistetään yhtä suuriin, niin saadaan yhtä suuret.

Ei kerrota, mitä "yhdistäminen" on, vaan sanaa pidetään yleiskieleen kuuluvana. Vastaava pätee seuraavillekin aksioomille.

(3) Jos yhtä suuret poistetaan yhtä suurista, niin jäännökset ovat yhtä suuret.

Seuraavat neljä "aksioomaa" (4)–(7) eivät sano mitään uutta, mutta Aschan luettelee ne tradition mukaisesti.

(4) Jos eri suuret yhdistetään yhtä suuriin, niin saadaan eri suuret.

(5) Jos yhtä suuret poistetaan eri suurista, niin jäännökset ovat eri suuret, suuremmasta jää suurempi.

(6) Jos yhtä suuret kahdennetaan, niin saadaan yhtä suuret.

(7) Jos yhtä suuret puolitetaan, niin saadaan yhtä suuret.

(8) Kuviot, jotka voi siirtää päällekkäin niin, että peittävät tasan toisensa, ovat yhtä suuret.

Kuten Aschankin sanoo, on tässä kahdeksannessa aksioomassa kysymys *yhtenevistä* eli *yhteneväisistä* kuvioista. Aksiooma sanoo yhtenevien kuvioiden olevan yhtä suuria. Yhtenevyydelle on aikojen kuluessa esitetty monenlaisia määritelmiä. Yllä olevaan aksioomaan upotettu määritelmä on siitä huono, että "päällekkäin siirtäminen" on määrittelemätöntä. Myöhemmästä käytöstä, kuten lauseesta 1.9, näkee, että siirtämiseksi hyväksytään tässä myös kiertäminen ja jopa peilaus, määrittelemättömiä käsitteitä kyllä nämäkin. Aschan joutuu selittelemään, ja Eukleides karttaa siirtämiseen vetoamista, kun hän sen vain voi välttää.

Aksiooma sanoo, että siirrossa janan pituus säilyy, samoin esimerkiksi kulman suuruus ja kolmion ala. Toisistaan siirrolla saatavissa eli yhtenevissä kuvioissa, erityisesti kolmioissa kaikki vastinosat ovat siis yhtä suuret. Nykyisin Eukleideen "siirtoja" sanotaan tason *isometrioiksi* ja yleensä todistetaan, että kulman ja pinta-alan säilyminen seuraavat janan pituuksien eli pisteiden etäisyyksien säilymisestä. (Kulmien osalta tämä on oleellisesti yhtenevyyslause SSS eli 1.8).

13

sesti ne, jotka owat yhtä monta kertaa suuremmat kuin yksi, eli yhdenkokoiset, owat keskenänsä yhdenkokoiset.

7. Puolta pienemmät kuin yksi, eli yhdenkokoiset, owat keskenänsä yhdenkokoiset.

M. Kolmas-, neljäs- j. n. e. osaiset, yleisesti yhtä suuret osat yhdestä, eli yhdenkokoisista, owat keskenänsä yhdenkokoiset.

8. Ne, jotka päällekkäin pantuina peittäwät toinen toisensa, owat yhdenkokoiset ja kutsutaan yhteellisiksi (congruenta).

M. Myöskin takaperin käypi päättää, että yhteellisiä wiiwoja, kulmia, kuwioita, woidaan sowittaa päällekkäin niin, että ne kaikin puolin peittäwät toinen toisensa. Kuwioita, jotka muuten waan alallensa owat yhdenkokoiset, sanomme **yhtäpitäwiksi** (aequivalenta), eli paremmin asian mukaan **yhtäpintaisiksi. Mukaisiksi** kutsutaan niitä kuwioita, jotka rajoituksiensa puolesta owat toinen toisensa wertaiset, eli muotoiset, ehkei aina alallensa yhtäsuuret. **Yhteelliset** kuwiot siis owat yhtäpintaiset ja toinen toisensa mukaiset. Jos mukaisia kuwioita merkitään $\backsim$, niin yhteellisiä merkittäköön $\cong$.

9. Kokonainen on jokaista osaansa suurempi.

M. Kokonainen on niin suuri, kuin kaikki sen osat yhteensä; ja jokainen osa on pienempi kokonaista, johon se kuuluu, on yhtä samaa, ainoasti toisin sanottu.

10. Kaksi suoraa wiiwaa eiwät woi yli ympäri rajoittaa tilaa ja niinmuodoin tehdä kuwiota.

M. Tämä seuraa siitä, ettei kaksi suoraa wiiwaa woi leikata toinen toisensa useammassa kuin yhdessä pisteessä. Sillä jos niillä olisi kaksi yhteistä pistettä, niin wiiwat olisiwat jo tykkänään yhdessä, ettei yhtään tilaa jäisi niiden wälille.

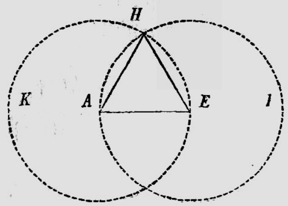
11. Kaikki suorat kulmat owat yhtäsuuret.

12. Tämä selwiö tutaan paraiten 17 esitelmän luettua ja tulee ensin 29:ssä esitelmässä käytettäwäksi.

14

1. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietylle, pituudellensa määrätylle suoralle wiiwalle wiiwataan yhtäsiwuinen kolmikulma?



Anomus. Olkoon AE pituudellensa määrätty suora wiiwa; sille wiiwattakoon yhtäsiwuinen kolmikulma.

Osoitus. Ota A keskipisteeksi ja wiiwaa ympyrän KHE, jonka kehä kulkee E pisteen kautta; ota sitten E keskipisteeksi ja tee ympyrän AHI pisteetse A. a) Pisteestä H, jossa ympyräin kehät leikkaawat toinen toisensa, wedä tietyn suoran wiiwan päihin A ja E suorat wiiwat HA, HE, e) niin syntywä kolmikulma AHE on yhtäsiwuinen.

a. 3 Waat.
e. 1 Waat.
h. 15 Määrit.
i. 1 Selwiö.
k. 23 Määrit.

Todistus. Sillä AE ja AH owat säteet samassa ympyrässä KHE ja niinmuodoin yhtäsuuret; h) samaten owat myös säteet EA ja EH toisessa ympyrässä AHI yhtäsuuret. Mutta koska molemmat wiiwat AH ja EH owat saman wiiwan AE:n pituiset, niin ne owat keskenänsäkin yhtäpitkät. i) Sentähden owat kaikki kolme siwua AH, HE, EA, yhtäpitkät, ja niinmuodoin yhtäsiwuinen k) kolmikulma AHE tehty tietylle wiiwalle AE.

2. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietystä pisteestä wedetään suora wiiwa tietyn suoran wiiwan pituiseksi?

Anomus. Olkoon A tietty piste ja EH tietty suora wiiwa; wedettäköön A:sta suora wiiwa EH:n pituiseksi.

Muistutuksessaan Aschan määrittelee tässä kohdassa alustavasti myös *"mukaiset"*, nykykielellä *yhdenmuotoiset* kuviot sanomalla, että ne ovat samanmuotoiset, mutta eivät välttämättä *samankokoiset*. Kuten Eukleides myös Aschan lykkää yhdenmuotoisuuden tarkan määritelmän kuudennen kirjan alkuun, koska siihen tarvitaan paljon teoriankehittelyä. Pitää ennen kaikkea luoda *suhteen* käsite, jonka avulla pystytään osoittamaan esimerkiksi, että kaikenkokoisia annetun kolmion kanssa yhdenmuotoisia kolmioita on olemassa. Asia ei ole itsestään selvä. Hyperbolisessa geometriassa erikokoisia yhdenmuotoisia kolmioita ei ole ollenkaan, ei liioin pallogeometriassa.
Seuraavat kaksi aksioomaa on antiikin ajoista liitetty Eukleideen luetteloon, mutta ei ole varmaa, ovatko ne alkuperäisiä.

(9) Kokonainen on osansa suurempi.

Aschan liittää muistutukseensa "Claviuksen aksiooman", joka sanoo, että kokonainen on osiensa summa.

(10) Kaksi suoraa viivaa eivät rajoita kuviota.

Tämä on tapa ilmaista ensimmäisen postulaatin yksikäsitteisyysosa, siis että kahden eri pisteen kautta kulkee vain yksi suora. Aschan huomaa tämän, mutta hänen muistutuksensa sanamuoto jättää pimentoon, että yksikäsitteisyys on aksiooma. Aschanin viimeiset kaksi aksioomaa ovat Eukleideen neljäs ja viides postulaatti:

(11) Kaikki suorat kulmat ovat yhtä suuret.
(12) Yhdensuuntaisuusaksiooma pätee. (Ks. lause 1.29)

Aksiooma (11) eli Eukleideen 4. postulaatti on tärkeä, koska se tekee mahdolliseksi käyttää suoraa kulmaa standardina, siis kulman yksikkönä. Näin tehdäänkin eikä asteita teoriassa tarvita. Yhdensuuntaisuusaksioomasta (12) eli Eukleideen 5. postulaatista mainittakoon tässä, että siitä Strömerin ruotsinnoksessa kerrotaan seuraavaa: *"Tätä lausetta ei varmaan voi myöntää todeksi ilman todistusta. On luultavaa, että Eukleides itse on sen todistanut, mutta Todistus on kadonnut. Clavius kertoo, sen olleen jossain arabialaisessa käsikirjoituksessa 28. lauseen jälkeen. Mutta koska Clavius ei itse ole nähnyt tuota käsikirjoitusta, on syytä epäluuloon, etenkin kun todistusta ei löydy arabialaisesta käsikirjoituksesta, jota säilytetään Uppsalan kirjastossa. Useimmissa editioissa lause on postulaattien joukossa. . . "*

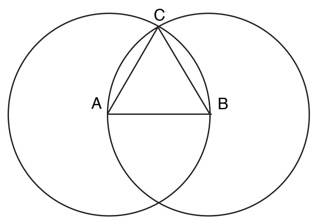
1.5. Lauseet ja tehtävät.

TEHTÄVÄ 1.1. *On konstruoitava tasasivuinen kolmio, jonka yhtenä sivuna on annettu jana.*

Tehdään konstruktio "viivoittimella ja harpilla" ja perustellaan, miksi se toimii. Näin todistetaan mainitun kolmion olemassaolo.

RATKAISU.

Tehtävän ratkaiseminen alkaa nimeämällä annetut objektit ja sanomalla, mitä halutaan. Tämän kohdan Aschan on otsikoinut "Anomus". Suomentamisen innossa hän on nimennyt pisteet ainoastaan suomenkielisin kirjaimin $A, E, H, I, K, \ldots$. Tottuneena tavallisiin aakkosiimme en halua noudattaa tätä tapaa.



Olkoon annettu jana AB. Tehtävänä on siis konstruoida tasasivuinen kolmio, jossa AB on sivu.

Seuraa konstruktio, jonka Aschan on otsikoinut "Osoitus".

Ota A keskipisteeksi ja piirrä ympyrä, jonka kehä kulkee toisen pisteen B kautta [Postulaatti 3]. Ota sitten B keskipisteeksi ja piirrä ympyrä, joka kulkee A:n kautta [Post. 3]. Yhdistä ympyröiden leikkauspiste C suorilla viivoilla pisteisiin A ja B [Post. 1].

Lopuksi Eukleides todistaa, että konstruktio antaa halutun kolmion, joka siis on olemassa.

AB ja AC ovat säteet samasta ympyrästä ja niinimuodoin yhtä suuret [Määr. 15]. Samoin ovat AB ja BC yhtä suuret [Määr. 15]. Koska AC ja BC ovat saman janan AB kanssa yhtä suuret ovat ne keskenäänkin yhtä suuret [Aks. 1]. Kaikki kolmion $\triangle ABC$ sivut ovat siis yhtä suuret, joten kolmio $\triangle ABC$ on tasasivuinen [Määr. 23]. On siis konstruoitu tasasivuinen kolmio, jossa AB on sivu, mitä tehtävässä vaadittiin.

15

Osoitus. Wedä A:sta wiiwan päähän H suora wiiwa AH, a) jolle piirrä yhtäsiwuinen kolmikulma AIH, e) ja pitennä sen siwut IH ja IA wiiwan AH:n toiselle puolelle. h) Ota H keskipisteeksi ja wiiwaa ympyrä E:n kautta; sitten ota I keskipisteeksi ja wiiwaa toinen ympyrä pisteen K kautta, jossa edellisen ympyrän kehä leikkaa wiiwan IK: i) niin on AM wedettäwä wiiwa.

a. 1 Waat.
e. 1 Esit.
h. 2 Waat.
i. 3 Waat.
k. 15 Määrit.
l. 3 Selwiö.
m. 1 Selwiö.

Todistus. Sillä säteet IM ja IK ympyrässä KM owat yhtäpitkät. k) Näistä jos otat yhtäsiwuisen kolmikulman IAH:n siwuwiiwat IA ja IH, niin jäännökset AM ja HK owat yhtäsuuret. l) Mutta HK ja HE owat, niinkuin säteet samassa ympyrässä EK, yhtäpitkät. k) Sentähden owat myös AM ja HE yhtäpitkät, m) ja siis suora wiiwa AM wedetty A:sta wiiwan EH:n pituiseksi.

3. Esitelmä. Tehtäwä.

Jos on kaksi eripituista suoraa wiiwaa, kuinka pitemmästä leikataan palanen lyhemmän pituiseksi?

Anomus. Olkoon AE ja H kaksi eripituista wiiwaa; suuremmasta AE leikattakoon pienemmän H:n pituinen osa.

Osoitus. Wedä A:sta suora wiiwa AI yhtä pitkäksi kuin H. a) Ota A keskipisteeksi ja piirrä ympyrä IKM pisteen

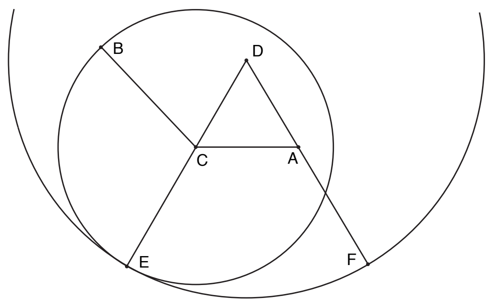
a. 2 Esit.
e. 3 Maat.

Nykymatemaatikon silmään pistää heti, että Eukleideella ei ole "jatkuvuus-" tai "täydellisyysaksioomaa", joka takaisi ympyröiden leikkauspisteen olemassaolon. Alkeissa ei itse asiassa ollenkaan ole kohtaa, jossa kerrottaisiin, millä ehdolla kahdella ympyrällä on yksi, kaksi tai ei yhtään yhteistä pistettä. (Vrt. 1.22)

Tehtävä 1.2. *On konstruoitava annetusta pisteestä alkava jana, joka on yhtä pitkä kuin annettu jana.*

Tehdään jälleen konstruktio ja todistetaan, että se toimii. Eukleides aloittaa taas "anomuksella".

Ratkaisu.



Olkoon annettu piste A ja annettu jana BC. Tehtävänä on konstruoida A:sta alkava jana, joka on yhtä pitkä kuin BC.
Vedä jana pisteestä A annetun janan päätepisteeseen C [Post. 1] ja konstruoi tasasivuinen kolmio $\triangle ACD$ [1.1]. Jatka janoja DA ja DC janan AC yli puolisuoriksi $\overrightarrow{DA}$ ja $\overrightarrow{DC}$. [Post. 2] Ota C keskipisteeksi ja piirrä ympyrä pisteen B kautta [Post. 3]. Sitten ota D keskipisteeksi ja piirrä toinen ympyrä sen pisteen E kautta, joka on puolisuoralla $\overrightarrow{DC}$ ja ensimmäisellä ympyrällä [Post. 3].

Etsitty piste F on oleva jälkimmäisen ympyrän ja puolisuoran $\overrightarrow{DA}$ leikkaus, toisin sanoen BC ja AF ovat yhtä suuret. Olen yllä käyttänyt Eukleideesta ja Aschanista poiketen sanaa *puolisuora* ja vastaavia merkintöjä toivoen sen helpottavan todistuksen lukemista; ainakin näin vältyin nimeämästä pari ylimääräistä pistettä.
Konstruktiossa on sellainen puute, että annettu piste A voi sijaita sillä tavalla suhteessa janaan BC, että pitääkin käyttää puolisuoria $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{BD}$ — tai jopa alkuperäisiä janoja. Tähän on kiinnitetty huomiota jo antiikin aikana ja Eukleides on itsekin huomannut asian. Hänen tyyliinsä kuuluu esittää tällaisen tapausjaottelun esiintyessä vain yhden, yleensä vaikeimman tapauksen mukainen todistus. Muiden tapausten käsittelyn hän jättää lukijalle.

Saman ympyrän säteinä DE ja DF ovat yhtä suuret [Määr. 15]. Kun näistä poistetaan tasasivuisen kolmion $\triangle CAD$ yhtä suuret sivut DC ja DA, niin jää yhtä suuret palat AF ja CE [Aks. 3].
Mutta myös CE ja CB ovat saman ympyrän säteinä yhtä suuret [Määr. 15]. Koska BC ja AF ovat saman kanssa yhtä suuret, ovat ne myös keskenään yhtä suuret [Aks. 1]. Siis on konstruoitu A:sta alkava jana AF, joka on yhtä pitkä kuin BC. Tätä tehtävässä vaadittiin.

Tehtävän 1.2 ratkaiseminen vaikuttaa ensi näkemältä tarpeettomalta, sanoohan aksiooma 3 suoraan, että pisteen A ympäri voidaan piirtää minkäsäteinen ympyrä tahansa. Mutta tämä tarkoittaa tarkkaan ottaen ainoastaan, että voidaan piirtää ympyrä, jolla on annettu keskipiste ja joka kulkee toisen annetun pisteen kautta. Eukleides ei esitä oletuksena mitään sellaista, minkä pystyy todistamaan, sillä hän pyrkii minimoimaan aksioomajärjestelmän. Konstruktio osoittaa, että säde voidaan siirtää uuteen paikkaan *olettamatta, että säde säilyy harpissa, kun se nostetaan irti keskipisteestä.* Jatkossa voi tehtävään 1.2 vedoten ajatella, että harpin saa siirtää. Siinä missä tehtävän 1.1 konstruktio sattuu palvelemaan myös vaikka puusepän käytännöllisiä tarpeita tehtävä 1.2 on pelkästään teoreettinen. Eukleideen kirjan valitseminen Jyväskylän lyseoon oppikirjaksi ei Aschanin aikana ollut sattuma, vaan sisälsi kannanoton teorian puolesta. Lukiossa oli tarkoitus kasvattaa suomenkielistä sivistyneistöä. Toisaalta on kyllä vaikea uskoa, että lapsen kannattaa aloittaa geometrian opiskelu näinkin syvällisellä pohdinnalla.

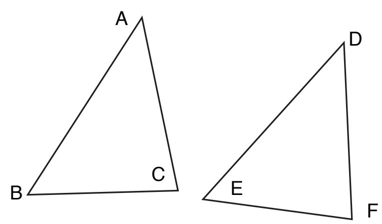
Tehtävä 1.3. *On annettu kaksi eripituista janaa. Pitemmästä on leikattava lyhemmän pituinen jana.*

Yksinkertainen konstruktio ja tarkastus perustuvat tehtävään 1.2. Eukleides pitää ilmeisenä, että janan H kanssa yhtä pitkä jana AK on lyhempi kuin jana AE, kun H on lyhempi kuin AE. Vastaava ominaisuus yhtäsuuruudelle olisi aksiooma 1.

”Leikkaaminen” viittaa siihen, että konstruktion piste K on janalla AE eli A:n ja E:n *välissä*. Ilmeisesti tämä johtuu siitä, että AK on lyhempi kuin jana AE. Tätä ei Eukleides selitä, eikä välissäolosta puhuta muuallakaan. Lähimmäs tällaisia tarkasteluja tulee varmaan aksiooma 8, joka sanoo, että kokonainen on suurempi kuin sen osa. Eukleides ei tässä vetoa siihenkään, ja onkin epäilty onko aksiooma 8 ollenkaan alkuperäinen, vaikka esiintyy kaikissa käsikirjoituksissa.

Lause 1.4. **(SKS)** *Jos kolmiossa ovat kaksi sivua erikseen yhtä suuret kuin kaksi sivua toisessa kolmiossa ja jos lisäksi mainittujen sivujen väliset kulmat ovat yhtä suuret kummassakin kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät. Erityisesti kolmannet sivut ovat yhtä pitkät ja kaikki vastinkulmat yhtä suuret.*

Aschan seuraa Eukleidesta tarkasti niin tämän lauseen muotoilussa kuin sen todistuksessakin. Eukleides kirjoittaa lauseidensa todistukset yhtä systemaattisesti kuin konstruktiotehtävätkin. Todistuksen rakenteen malliksi käy mikä tahansa niistä, erityisesti tämä ensimmäinen.



Todistus aloitetaan nimeämällä annetut objektit ja sanomalla, mitä halutaan todistaa. Nämä kohdat Aschan on otsikoinut ”Ehdotus” ja ”Wäitös”. Sana ”kanta” esiintyy tästä alkaen Eukleideellakin, vaikka sitä ei ole muodollisesti määritelty — Aschanillahan ”asema” on määritelty.

16

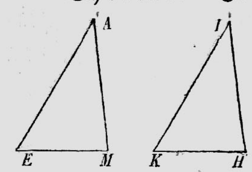
h. 15 Määrit. I kautta, e) jonka kehä leikkaa wiiwan AE
i. 1 Selwiö. pisteessä K; niin AK on H:n pituinen.

Todistus. Sillä säteet AK ja AI owat yhtäsuuret, h) AI on myös tehty H:n pituiseksi; sentähden owat AK ja H yhtäpitkät, i) ja osa AK siis leikattu AE:stä, joka on yhtäpitkä kuin lyhempi wiiwa H.

4. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kolmikulmassa kaksi siwua erikseen owat kahden siwun pituiset toisessa kolmikulmassa ja kulmat yhtäsuurten siwujen wälillä kummassakin kolmikulmassa owat yhdenkokoiset: niin owat myös molempien kolmikulmain asemat yhtäpitkät, kolmikulmat itse yhteelliset ja muutkin kulmat toinen toisensa kanssa yhdenkokoiset, nimittäin ne, jotka seisowat yhtäpitkiä siwuja wasten.

Ehdotus. Jos kolmikulmissa AEM ja IKH siwut AE ja IK keskenänsä ja siwut AM ja IH keskenänsä owat yhtäpitkät, ja wäliset kulmat A ja I yhdenkokoiset: **Wäitös.** niin asemat EM ja KH owat yhtäpitkät, kolmikulmat AEM ja IKH yhteelliset, ja kulmat E ja K keskenänsä, M ja H keskenänsä, jotka seisowat yhtäpitkiä siwuja wasten molemmissa kolmikulmissa, owat yhdenkokoiset.



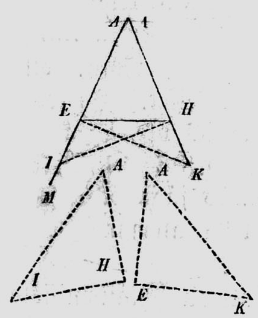
Todistus. Sillä jos kolmikulma AEM pannaan kolmikulman IKH:n päälle, että piste A tulee I:n päälle ja siwu AE pitkin IK:ta, niin piste E lankeaa pisteen K päälle, koska AE ja IK owat yhtäpitkät. Siwu AM asettuu myös pitkin IH:ta, koska kulmat A ja I owat yhdenkokoiset, ja piste M pisteen H päälle, koska AM ja

IH owat yhtäpitkät. Kuin nyt piste E on pisteessä K ja M pisteessä H, niin asema EM täytyy langeta aseman KH:n päälle, muutoin saattaisi kaksi suoraa wiiwaa toinen toisensa wälille tehdä kuwion, joka on mahdotonta. a) Sentähden on asema EM aseman KH:n pituinen. Kolmikulmat AEM ja IKH owat siis kaikin puolin yhteelliset, e) ja myös kulmat E ja K keskenänsä ja M ja N keskenänsä yhdenkokoiset, jotka molemmissa kolmikulmissa seisowat yhtäsuuria siwuja wasten.

a. 10 Selwiö.
e. 8 Selwiö.

5. Esitelmä. Wäittämä.

Yhtäkylkisessä kolmikulmassa owat aseman wiereiset kulmat kolmikulman sisäpuolella yhdenkokoiset; ja jos yhdenpituiset siwut pitennetään, owat myös ulkopuoliset kulmat aseman luona yhdenkokoiset.



Ehdotus. Jos siwut AE ja AH kolmikulmassa EAH owat yhtäpitkät ja pitennetään asemasta ulospäin a) niinkuin EM ja HK: Wäitös. niin kulmat AEH ja AHE keskenänsä aseman wieressä kolmikulman sisäpuolella ja kulmat MEH ja KHE keskenänsä ulkopuolella owat yhdenkokoiset.

Todistus. Ota wiiwalle EM piste I missä tahansa, tee AK wiiwan AI:n pituiseksi, e) ja wedä suorat wiiwat IH ja EK. h) Näin syntyy kaksi osittain päälletysten olewaa kolmikulmaa AIH ja AKE, jotka, paremmin wielä käsittääksemme, mitä tässä esitellään, myös owat erikseen kuwattuna.

a. 2 Waat.
e. 3 Esit.
h. 1 Waat.
i 4 Esit.
k. 3 Selw.

Koska nyt siwut AE ja AH, ja myös siwut AI ja

Olkoot annetut kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$, ja olkoot sivut AB ja DE yhtä pitkät ja myös sivut AC ja DF keskenään yhtä pitkät ja olkoot kulmat $\measuredangle BAC$ ja $\measuredangle EDF$ yhtä suuret. Väitän, että kannat BC ja EF ovat yhtä suuret, kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ ovat yhtenevät ja loput kulmat ovat parittain yhtä suuret, nimittäin yhtä suurien sivujen puoleiset, toisin sanoen $\measuredangle ABC$ on yhtä suuri kuin $\measuredangle DEF$ ja $\measuredangle ACB$ on yhtä suuri kuin $\measuredangle DFE$.

Lopuksi esitetään varsinainen päättely, jonka Aschan otsikoi modernisti sanalla "Todistus".

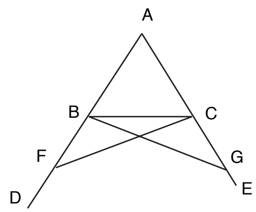
Jos kolmio $\triangle ABC$ siirretään kolmion $\triangle DEF$ päälle siten, että piste A tulee pisteen D päälle ja puolisuora $\overrightarrow{AB}$ puolisuoralle $\overrightarrow{DE}$, niin piste B osuu pisteen E päälle, koska AB ja DE ovat yhtä pitkät. Suora viiva AC asettuu myös suoran viivan DF suuntaan, koska kulmat BAC ja EDF ovat yhtä suuret. Edelleen C osuu pisteeseen F, koska sivut AC ja DF ovat yhtä pitkät. Kanta BC ja siirretty EF ovat siis samat ja yhtä pitkät. Kolmiot ovat siis kaikin puolin yhtenevät, joten vastinkulmatkin ovat samat.

Kanta BC ja siirretty EF ovat samat, koska kaksi pistettä määrää suoran (ja janan), mikä on ilmaistu aksioomassa 9, johon Eukleides vetoaa.
Eukleideen todistus lauseelle 1.4 on epämääräinen, koska se käyttää aksioomassa 8 mainittua kuvion siirtämisen periaatetta. Jo 1500-luvulla on kirjoitettu kritiikkiä, jonka mukaan siirtoperiaate olisi hylättävä mm. sen takia, että sen salliminen tässä ja kieltäminen muualla on epäjohdonmukaista. Esimerkiksi tehtävä 1.2 ratkeaisi helposti, jos sallisimme, että jana vain yksinkertaisesti "siirretään" haluttuun kohtaan.
On pedagogisesti onnetonta, että juuri kirjan alussa on epäselviä kohtia. Siisti ratkaisu lauseen 1.4 todistamisen ongelmiin olisi ottaa se aksioomaksi. Näin menetellään mm. David Hilbertin aksioomajärjestelmässä 1900-luvun alkupuolelta.

Lause 1.5. **(Thaleen kantakulmalause eli Pappuksen lause)** *Tasakylkisessä kolmiossa ovat kannan viereiset kulmat,* kantakulmat, *yhtä suuret. Samoin ovat niiden ulkopuoliset kulmat yhtä suuret.*

Aschanin käännös seuraa uskollisesti Eukleideen alkuperäistä SKS-lauseeseen 1.4 perustuvaa todistusta. Hieman nykyaikaistettuna, mutta muodon säilyttäen Eukleideen todistus etenee seuraavalla tavalla.

TODISTUS. Olkoon annettuna tasakylkinen kolmio $\triangle ABC$, jossa sivut AB ja AC ovat yhtä suuret ja olkoot BD ja CE janojen AB ja AC suoraviivaiset jatkeet [Post. 2]. Väitän, että *sisäkulmat* $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle ACB$ keskenään ja *ulkokulmat* $\measuredangle CBD$ ja $\measuredangle BCE$ keskenään ovat yhtä suuret.



Valitaan BD:ltä mielivaltainen piste F. On olemassa piste G puolisuoralla $\overrightarrow{AE}$ siten, että AG ja AF ovat yhtä pitkät [1.3]. Oletuksen mukaan sivut AB ja AC ovat keskenään yhtä pitkät, konstruktion mukaan sivut AF ja AG ovat keskenään yhtä pitkät, ja kulmat $\measuredangle FAC$ ja $\measuredangle GAB$ ovat peräti samat. Siksi kolmiot $\triangle AFC$ ja $\triangle AGB$ ovat SKS-lauseen 1.4 mukaan yhtenevät ja erityisesti kannat FC ja GB ovat yhtä pitkät ja vastinkulmat $\measuredangle ACF$ ja $\measuredangle ABG$ sekä $\measuredangle AFC$ ja $\measuredangle AGB$ keskenään yhtä suuret [1.4]. Ja koska koko AF ja koko AG on tehty yhtä suuriksi, ja niissä AB ja AC ovat yhtä suuret, ovat jäännöspalat BF ja CG nekin yhtä pitkät [Aks. 3]. Kolmiot $\triangle BFC$ ja $\triangle CGB$ ovat siis SKS-lauseen 1.4 nojalla yhtenevät ja erityisesti kulmat $\measuredangle FBC$ ja $\measuredangle GCB$ yhtä suuret [1.4]. Tätä väitettiin. Sisäkulmat syntyvät vähentämällä näistä keskenään yhtä suuriksi todetuista kulmista kulmat $\measuredangle CBG$ ja $\measuredangle BCG$, nekin samojen yhtenevien kolmioiden vastinkulmina yhtä suuret [Aks. 3]. $\square$

Aschan nimeää muuten epähuomiossa "K":ksi kaksi eri pistettä, ensin "ehdotuksessa" Eukleideen E:n rooliin ja sitten "todistuksessa" G:n rooliin. Kaiken kaikkiaan Aschanin tekstissä kuitenkin on hämmästyttävän vähän painovirheitä.

Jo antiikin aikana keksittiin helpompi ja ajatukseltaan hienostunut todistus tasakylkisen kolmion sisäkulmien yhtäsuuruudelle. Mitään lisäkuviota ei tarvita. Riittää huomata, että kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle ACB$ ovat SKS-lauseen 1.4 mukaan yhtenevät.

18

AK owat yhdenpituiset; niin on kaksi siwua AI ja AH kolmikulmassa AIH erikseen kahden siwun AK:n ja AE:n pituiset kolmikulmassa AEK; wälinen kulma A on yhteinen molemmissa. Sentähden owat asemat IH ja EK yhdenpituiset, ja kulmat AHI ja AEK keskenänsä, HIA ja EKA keskenänsä, jotka seisowat yhdenpituisia siwuja wasten, owat yhdenkokoiset. i)

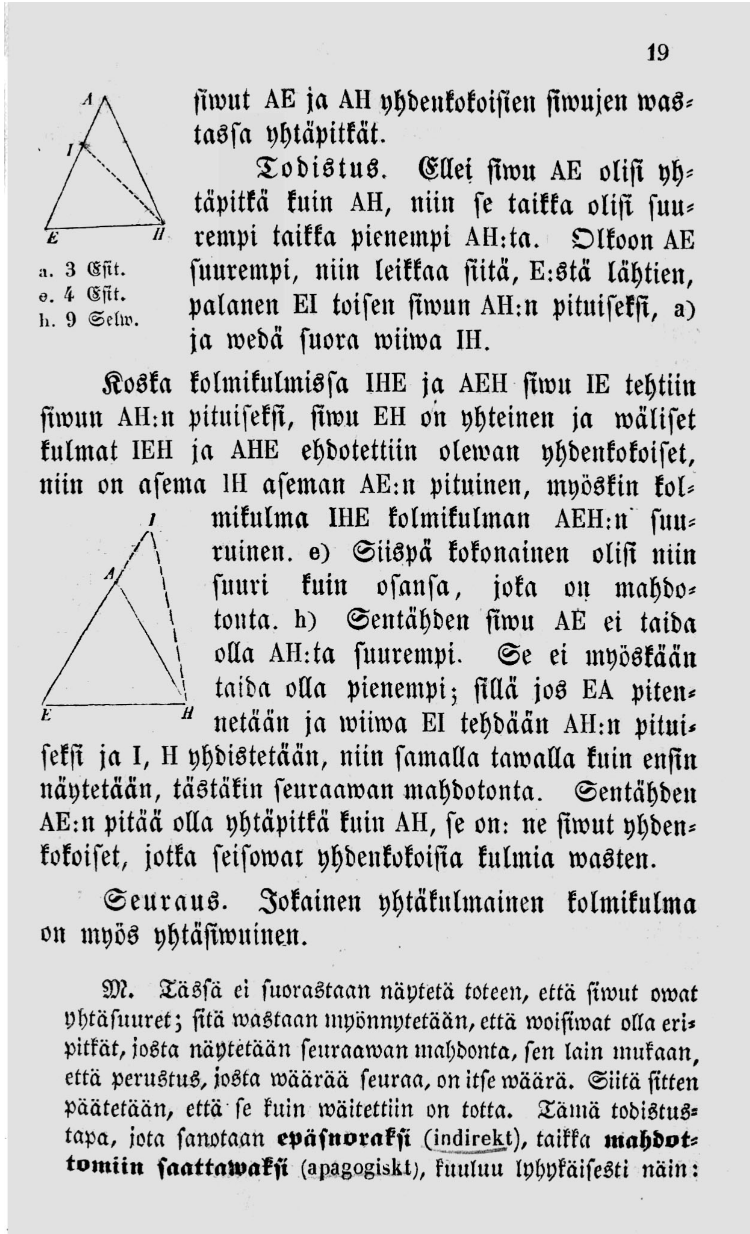
Taas koska wiiwat AI ja AK owat tehty yhtäsuuriksi ja AE ehdotettiin AH:n pituiseksi, niin jäännös-wiiwat EI ja HK owat yhdenpituiset. k) Mutta siwut IH ja EK ja kulmat EIH ja HKE näytettiin myös olewan yhtäsuuret. Siis owat kaksi siwua EI ja IH ynnä wälinen kulma EIH kolmikulmassa EIH, jokainen erikseen, yhtäsuuret kuin siwut HK ja KE ynnä wälinen kulma HKE kolmikulmassa HEK. Sentähden owat kolmikulmat EIH ja HEK yhteelliset ja kulmat IEH ja KEH keskenänsä. IHE ja KEH keskenänsä yhdenkokoiset. i) Mutta IEH ja KHE owat ulkopuoliset kulmat aseman wieressä, jotka siis, niinkuin wäitettiin, owat yhdenkokoiset. Ja koska kokonaiset kulmat AHI ja AEK näytettiin olewan keskenänsä yhdenkokoiset, ja myös osakulmat IHE ja KEH keskenänsä yhdenkokoiset; niin owat myös jäännös-kulmat AEH ja AHE, se on kulmat sisäpuolella aseman luona, keskenänsä yhtäsuuret. k).

Seuraus. Kaikki kolme kulmaa yhtäsiwuisissa kolmikulmissa owat yhdenkokoiset.

6. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kolmikulmassa kaksi kulmaa owat yhdenkokoiset, niin myös wasten seisowat siwut owat yhtäsuuret.

Ehdotus. Jos kulmat AHE ja AEH owat yhdenkokoiset kolmikulmassa AEH; Wäitös. niin owat myös



19

siwut AE ja AH yhdenkokoisien siwujen wastassa yhtäpitkät.

Todistus. Ellei siwu AE olisi yhtäpitkä kuin AH, niin se taikka olisi suurempi taikka pienempi AH:ta. Olkoon AE suurempi, niin leikkaa siitä, E:stä lähtien, palanen EI toisen siwun AH:n pituiseksi, a) ja wedä suora wiiwa IH.

a. 3 Esit.
e. 4 Esit.
h. 9 Selw.

Koska kolmikulmissa IHE ja AEH siwu IE tehtiin siwun AH:n pituiseksi, siwu EH on yhteinen ja wäliset kulmat IEH ja AHE ehdotettiin olewan yhdenkokoiset, niin on asema IH aseman AE:n pituinen, myöskin kolmikulma IHE kolmikulman AEH:n suuruinen. e) Siispä kokonainen olisi niin suuri kuin osansa, joka on mahdotonta. h) Sentähden siwu AE ei taida olla AH:ta suurempi. Se ei myöskään taida olla pienempi; sillä jos EA pitennetään ja wiiwa EI tehdään AH:n pituiseksi ja I, H yhdistetään, niin samalla tawalla kuin ensin näytetään, tästäkin seuraawan mahdotonta. Sentähden AE:n pitää olla yhtäpitkä kuin AH, se on: ne siwut yhdenkokoiset, jotka seisowat yhdenkokoisia kulmia wasten.

Seuraus. Jokainen yhtäkulmainen kolmikulma on myös yhtäsiwuinen.

M. Tässä ei suorastaan näytetä toteen, että siwut owat yhtäsuuret; sitä wastaan myönnytetään, että woisiwat olla eripitkät, josta näytetään seuraawan mahdonta, sen lain mukaan, että perustus, josta wäärää seuraa, on itse wäärä. Siitä sitten päätetään, että se kuin wäitettiin on totta. Tämä todistustapa, jota sanotaan **epäsnoraksi** (indirekt), taikka **mahdottomiin saattawaksi** (apagogiskt), kuuluu lyhykäisesti näin:

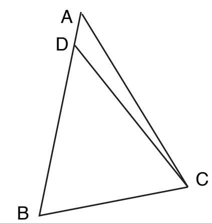
Seuraus. *Tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat yhtä suuret.*

Seuraus ei esiinny alkuperäisissä käsikirjoituksissa, mutta kylläkin Strömerillä.

Lause 1.6. **(Thaleen käänteinen kantakulmalause)** *Edellisen käänteislausekin pätee: Jos kolmion kaksi kulmaa ovat yhtä suuret, niin kolmio on tasakylkinen ja kulmat ovat sen kantakulmat.*

Aschanin todistus on sama kuin Eukleideella, mutta hän on hieman turhaan käsitellyt symmetrisen tilanteen molemmat tapaukset.

Todistus.



Olkoot kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle ACB$ yhtä suuret. Väite on, että sivut AB ja AC ovat yhtä pitkät. Jos sivut AB ja AC olisivat eri suuret, niin toinen olisi suurempi, toinen pienempi. Jos vaikkapa AB on suurempi kuten kuvassa, niin valitaan siltä apupiste D siten, että BD ja AC ovat yhtä pitkät [1.3]. SKS-säännön 1.4 mukaan kolmiot $\triangle DBC$ ja $\triangle ACB$ ovat yhtenevät, sillä kulmat $\measuredangle DBC = \measuredangle ABC$ ja $\measuredangle ACB$ oletettiin yhtä suuriksi, sivut DB ja AC konstruoitiin yhtä pitkiksi ja sivut BC ja CB ovat sama. Yhtenevät kolmiot ovat yhtä suuret. Mutta tässä toinen on toisen osa, siis pienempi [Aks. 9]. Tämä on ristiriitaista, siis mahdotonta. Olettamuksemme sivujen erisuuruudesta on väärä! □

Aschan kiinnittää muistutuksessaan huomiota siihen, että tässä on ensimmäinen *epäsuora todistus* ja selittää asiaa oppilailleen.

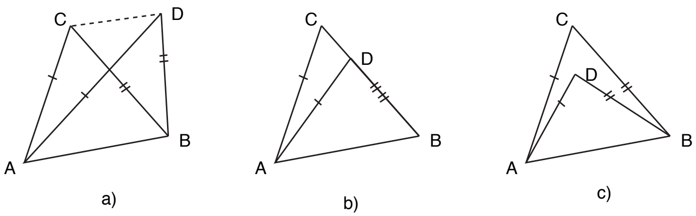
Lause 1.7. *Piste määräytyy etäisyydestään kahdesta kiinteästä pisteestä ja siitä, kummalla puolella niitä yhdistävää suoraa se sijaitsee.*

Tämä kohta on ensi sijassa valmistelua seuraavalle lauseelle, joka on SSS-yhtenevyyskriteeri. Samalla tulee todistetuksi, että kohdan

1.1 konstruktio antaa vain kaksi ratkaisua, mikä on sikäli tärkeää, että Eukleides aina todistaa, että hänen määrittelemänsä objektit ovat olemassa ja erottaa, milloin määritelty objekti on yksikäsitteinen ja milloin taas määritelmä tuottaa yleisemmän käsitteen.[a] Lauseen 1.1. konstruktio antaa vain kaksi tulosta siksi, että tarkasteltavana on nimenomaan tasogeometria — avaruudessahan tulokseksi tulisi kahden pallon leikkauksena ympyrä. Eukleides korostaa siis tässä, että suora jakaa tason kahteen puoleen, mutta ei erikseen kehittele tälle asialle teoriaa. David Hilbert on sata vuotta sitten täydentänyt aksioomia tältä osin, mutta täydentelyn tarve ei merkitse Eukleideen tehneen varsinaisia virheitä.

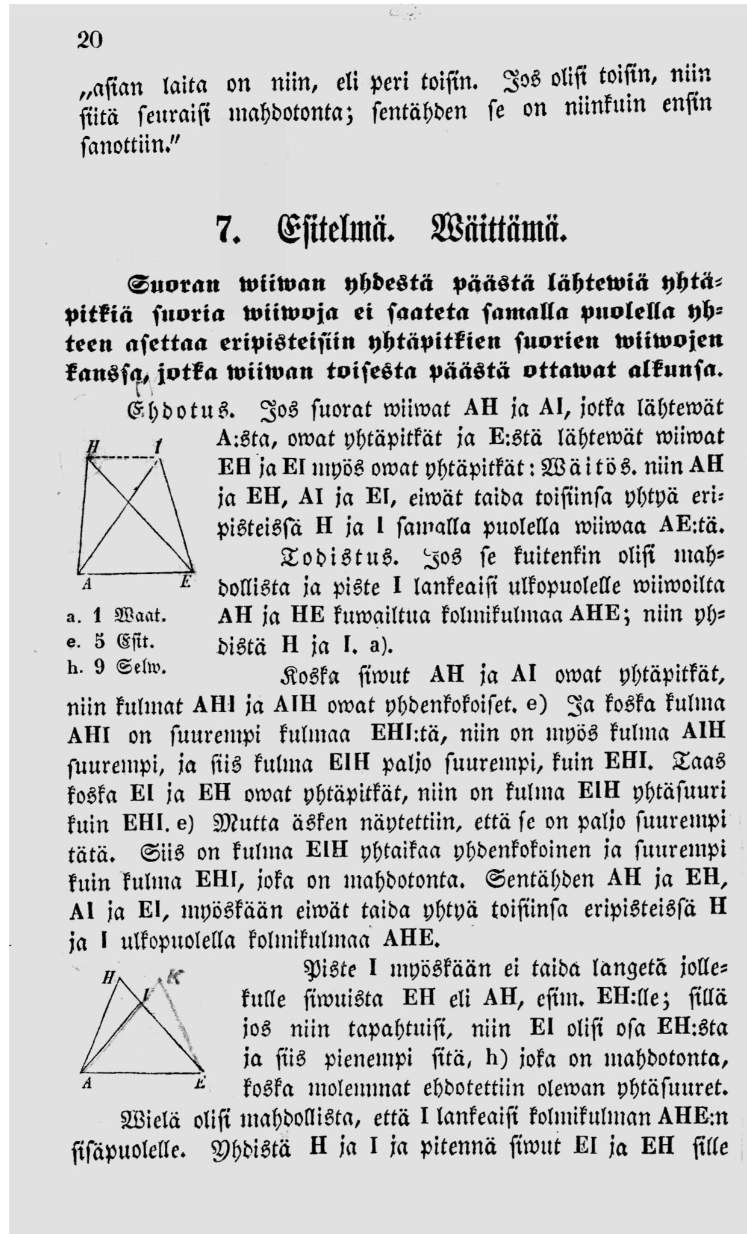
Tässä lauseessa korostuu lisäksi sellainen käytännöllisesti ja teoreettisesti tärkeä asia, että kolmioista koostuva rakennelma — vaikkapa Eiffel-tornin kaltainen — on jäykkä.

Todistus.



Oletetaan, että A ja B ovat eri pisteitä ja janat AC ja AD ovat keskenään yhtä pitkät ja myös janat BC ja BD ovat keskenään yhtä pitkät. Väitetään, että C ja D ovat joko sama piste tai eri puolilla suoraa AB. Jos ne kuitenkin olisivat eri pisteitä ja samalla puolella, niin piste D olisi joko kolmion $\triangle ABC$ ulkopuolella, reunalla tai sisällä, kuten kuvioon on hahmoteltu. Ensimmäisessä tapauksessa piirretään apuviiva DC (Kuva a)). Koska kolmio $\triangle CAD$ on tasakylkinen, niin lauseen 1.5 mukaan kantakulmat $\measuredangle ADC$ ja $\measuredangle ACD$ ovat yhtä suuret. Vastaavasti ovat $\measuredangle BDC$ ja $\measuredangle BCD$ keskenään yhtä suuret. Mutta $\measuredangle BCD$ on osa kulmaa $\measuredangle ACD$ ja siis pienempi [Aks. 9]. Samoin $\measuredangle ADC$ on osa kulmaa $\measuredangle BDC$ ja siis pienempi [Aks. 9]. Yhdistelemällä nämä tiedot huomaa aksiooman 1 avulla, että kulma $\measuredangle ACB$ on sekä pienempi että suurempi kuin $\measuredangle BCD$, mikä on mahdotonta. Samaan tyyliin päätellään, että kuvion c) tilanne on

[a]Aristoteles luokittelee määritelmät oleellisesti tämän perusteella.



20

„asian laita on niin, eli peri toisin. Jos olisi toisin, niin siitä seuraisi mahdotonta; sentähden se on niinkuin ensin sanottiin."

7. Esitelmä. Wäittämä.

Suoran wiiwan yhdestä päästä lähtewiä yhtäpitkiä suoria wiiwoja ei saateta samalla puolella yhteen asettaa eripisteisiin yhtäpitkien suorien wiiwojen kanssa, jotka wiiwan toisesta päästä ottawat alkunsa.

Ehdotus. Jos suorat wiiwat AH ja AI, jotka lähtewät A:sta, owat yhtäpitkät ja E:stä lähtewät wiiwat EH ja EI myös owat yhtäpitkät: Wäitös. niin AH ja EH, AI ja EI, eiwät taida toisiinsa yhtyä eripisteissä H ja I samalla puolella wiiwaa AE:tä.

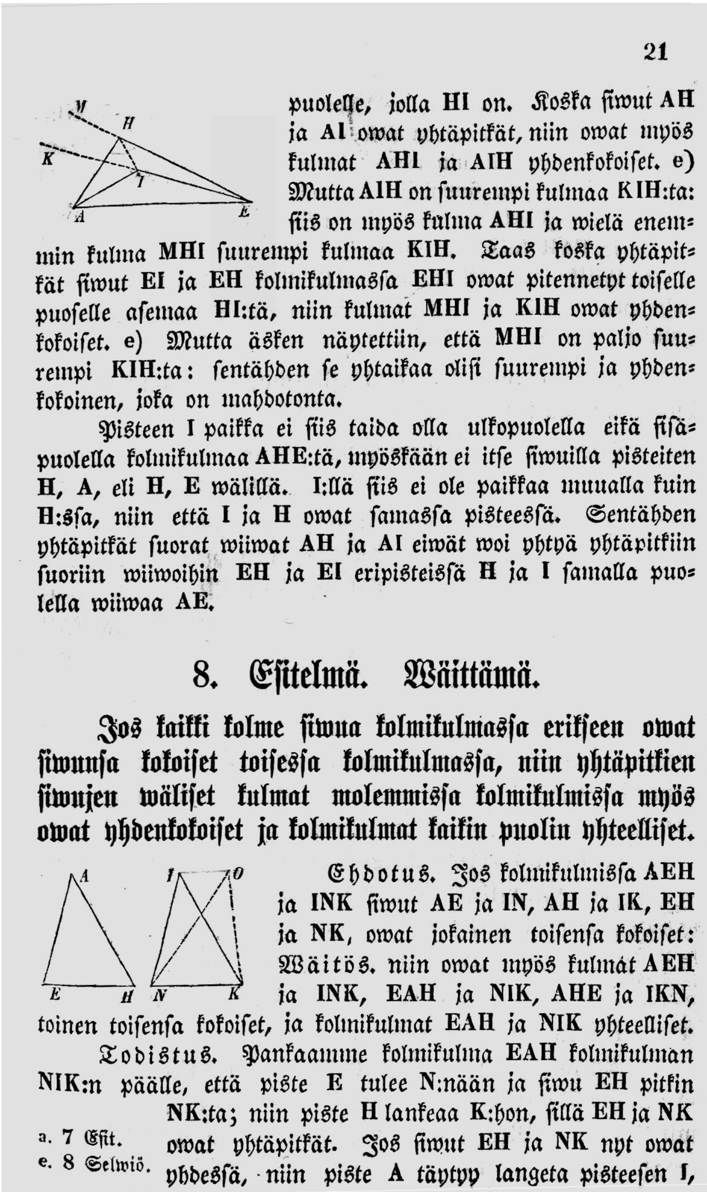
Todistus. Jos se kuitenkin olisi mahdollista ja piste I lankeaisi ulkopuolelle wiiwoilta AH ja HE kuwailtua kolmikulmaa AHE; niin yhdistä H ja I. a).

a. 1 Waat.
e. 5 Esit.
h. 9 Selw.

Koska siwut AH ja AI owat yhtäpitkät, niin kulmat AHI ja AIH owat yhdenkokoiset. e) Ja koska kulma AHI on suurempi kulmaa EHI:tä, niin on myös kulma AIH suurempi, ja siis kulma EIH paljo suurempi, kuin EHI. Taas koska EI ja EH owat yhtäpitkät, niin on kulma EIH yhtäsuuri kuin EHI. e) Mutta äsken näytettiin, että se on paljo suurempi tätä. Siis on kulma EIH yhtaikaa yhdenkokoinen ja suurempi kuin kulma EHI, joka on mahdotonta. Sentähden AH ja EH, AI ja EI, myöskään eiwät taida yhtyä toisiinsa eripisteissä H ja I ulkopuolella kolmikulmaa AHE.

Piste I myöskään ei taida langetä jollekulle siwuista EH eli AH, esim. EH:lle; sillä jos niin tapahtuisi, niin EI olisi osa EH:sta ja siis pienempi sitä, h) joka on mahdotonta, koska molemmat ehdotettiin olewan yhtäsuuret.

Wielä olisi mahdollista, että I lankeaisi kolmikulman AHE:n sisäpuolelle. Yhdistä H ja I ja pitennä siwut EI ja EH sille



puolelle, jolla HI on. Koska siwut AH ja AI owat yhtäpitkät, niin owat myös kulmat AHI ja AIH yhdenkokoiset. e) Mutta AIH on suurempi kulmaa KIH:ta: siis on myös kulma AHI ja wielä enemmin kulma MHI suurempi kulmaa KIH. Taas koska yhtäpitkät siwut EI ja EH kolmikulmassa EHI owat pitennetyt toiselle puoselle asemaa HI:tä, niin kulmat MHI ja KIH owat yhdenkokoiset. e) Mutta äsken näytettiin, että MHI on paljo suurempi KIH:ta: sentähden se yhtaikaa olisi suurempi ja yhdenkokoinen, joka on mahdotonta.

Pisteen I paikka ei siis taida olla ulkopuolella eikä sisäpuolella kolmikulmaa AHE:tä, myöskään ei itse siwuilla pisteiten H, A, eli H, E wälillä. I:llä siis ei ole paikkaa muualla kuin H:ssa, niin että I ja H owat samassa pisteessä. Sentähden yhtäpitkät suorat wiiwat AH ja AI eiwät woi yhtyä yhtäpitkiin suoriin wiiwoihin EH ja EI eripisteissä H ja I samalla puolella wiiwaa AE.

8. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kaikki kolme siwua kolmikulmassa erikseen owat siwunsa kokoiset toisessa kolmikulmassa, niin yhtäpitkien siwujen wäliset kulmat molemmissa kolmikulmissa myös owat yhdenkokoiset ja kolmikulmat kaikin puolin yhteelliset.

Ehdotus. Jos kolmikulmissa AEH ja INK siwut AE ja IN, AH ja IK, EH ja NK, owat jokainen toisensa kokoiset: Wäitös. niin owat myös kulmat AEH ja INK, EAH ja NIK, AHE ja IKN, toinen toisensa kokoiset, ja kolmikulmat EAH ja NIK yhteelliset.

Todistus. Pankaamme kolmikulma EAH kolmikulman NIK:n päälle, että piste E tulee N:nään ja siwu EH pitkin NK:ta; niin piste H lankeaa K:hon, sillä EH ja NK owat yhtäpitkät. Jos siwut EH ja NK nyt owat yhdessä, niin piste A täytyy langeta pisteesen I,

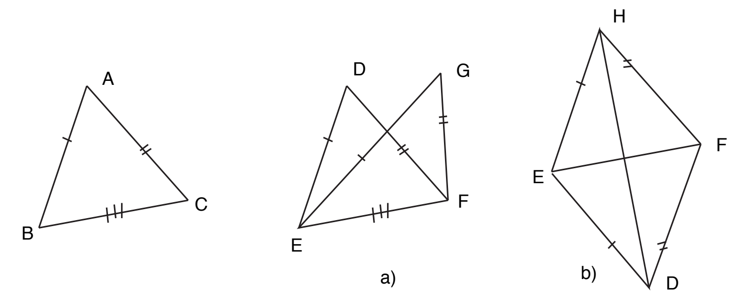
a. 7 Esit.
e. 8 Selwiö.

mahdoton. Kuvion b) tilanne on mahdoton, koska BD ei voi olla yhtä pitkän janan BC osa. Samalla tavalla päätellään, että kuvioiden b) ja c) tilanteet ovat mahdottomia.

Aschanin käännös on jälleen tarkka, jopa sana "paljo" on alkutekstissä. Eukleides tosin käsittelee vain yhden tapauksen, kuten minäkin yllä, mutta kahden päätapauksen käsittely on sekin vanhaa perua ja esiintyy Strömerin ruotsinnoksessa.

Lause 1.8. **(SSS)** *Jos kahdella kolmiolla on yhtä suuret sivut, kolmiot ovat yhtenevät.*

Todistus.



Oletetaan, että kolmioista $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ sivut AB ja DE, BC ja EF sekä CA ja FD ovat parittain yhtä suuret. Väitetään, että kulmat $\measuredangle BAC$ ja $\measuredangle EDF$ ovat yhtä suuret, jolloin koko väite seuraa SKS-kriteeristä 1.4.
Jos kolmio $\triangle ABC$ siirretään kolmion $\triangle DEF$ päälle siten, että piste B tulee pisteeseen E ja sivu BC tulee puolisuoralle $\overrightarrow{EF}$, niin piste C osuu pisteeseen F, sillä BC ja EF ovat yhtä pitkät.
Piste A kuvautukoon siirrossa (oikeammin isometriassa, ks. aksiooman 8 selitykset) pisteeseen G, jonka voimme valita olevan samalla puolella kantaa EF kuin D (kuva a). *Koska etäisyydet ja puoleisuus säilyvät siirrossa, niin* GE on yhtä pitkä kuin AB ja siis oletuksen ja siirron isometrisuuden nojalla yhtä pitkä kuin DE; samoin GF on yhtä suuri kuin HF ja G ja D ovat samalla puolella EF:ää. Pisteet D ja G eivät siis voi olla eri pisteitä [1.7]. Kolmiot ovat yhtenevät ja siis kaikki vastinosat keskenään yhtä suuret [Aks. 8]. □

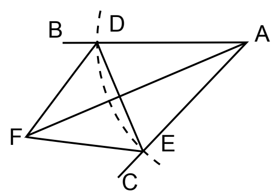
Aksiooman 8 ”siirroiksi” on tässä todistuksessa hyväksyttävä myös suunnistuksen kääntävät kuvaukset, kuten peilaus. Muuten piste G kuvautuisi välttämättä sille kannan EF puolelle, jolla kiertosuunnista A, B, C ja G, E, F tulee samat.

Toisin kuin Strömerin ruotsinnos Aschanin käännös sisältää toisenkin todistuksen, joka on peräisin Bysantista ja välttää lauseen 1.7 käytön, mutta ei siirtoaksioomaa 8, jota käytetään kuten yllä. Lisäksi Aschan esittää seuraavan kauniin seurauslauseen jättäen sen todistamisen lukijalle.

SEURAUS. *Jos tasakylkisen kolmion kärjestä vedetään viiva, joka jakaa kannan tasan kahtia, niin se myös jakaa kärkikulman kahteen yhtä suureen osaan ja on kohtisuorassa kantaa vastaan.*

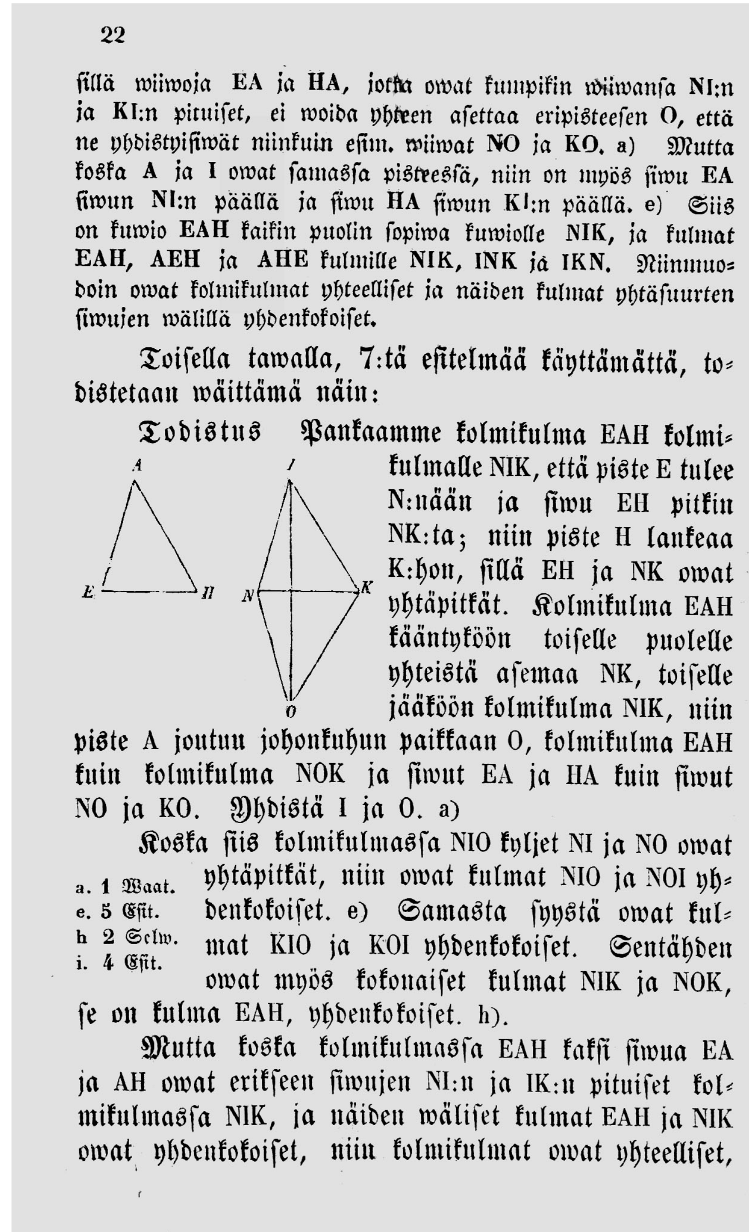
TEHTÄVÄ 1.9. *Annettu suoraviivainen kulma on puolitettava.*

RATKAISU. Olkoon annettu kulma $\measuredangle BAC$. Tehtävänä on jakaa se kahteen yhtä suureen osaan.



Valitaan mielivaltainen piste D kyljeltä AB. Olkoon E kyljellä AC siten, että AE ja AD ovat yhtä pitkät [1.3]. Konstruoidaan janalle DE [Post. 1] tasasivuinen kolmio $\triangle DEF$ [1.1]. Yhdistetään A ja F. Todistetaan, että AF jakaa kulman BAC kahteen yhtä suureen osaan eli että kulmat $\measuredangle DAF$ ja $\measuredangle EAF$ ovat yhtä suuret. Koska AE ja AD ovat yhtä pitkät ja myös FE ja FD ovat yhtä pitkät ja AF on yhteinen kolmioille $\triangle EAF$ ja $\triangle DAF$, nämä kolmiot ovat SKS-säännön 1.4 mukaan yhtenevät ja siis vastinkulmat $\measuredangle DAF$ ja $\measuredangle EAF$ ovat yhtä suuret. □

Eukleides tekee ilmeisesti em. konstruktion hieman toisin kuin yleensä on tapana välttääkseen jo esitetyn konstruktion toistamisen.
Aschan esittää ilman yksityiskohtaisia todistuksia kaksi ”seurausta” lauseelle 1.9:



22

sillä wiiwoja EA ja HA, jotka owat kumpikin wiiwansa NI:n ja KI:n pituiset, ei woida yhteen asettaa eripisteesen O, että ne yhdistyisiwät niinkuin esim. wiiwat NO ja KO. a) Mutta koska A ja I owat samassa pisteessä, niin on myös siwu EA siwun NI:n päällä ja siwu HA siwun KI:n päällä. e) Siis on kuwio EAH kaikin puolin sopiwa kuwiolle NIK, ja kulmat EAH, AEH ja AHE kulmille NIK, INK ja IKN. Niinmuodoin owat kolmikulmat yhteelliset ja näiden kulmat yhtäsuurten siwujen wälillä yhdenkokoiset.

Toisella tawalla, 7:tä esitelmää käyttämättä, todistetaan wäittämä näin:

Todistus Pankaamme kolmikulma EAH kolmikulmalle NIK, että piste E tulee N:nään ja siwu EH pitkin NK:ta; niin piste H lankeaa K:hon, sillä EH ja NK owat yhtäpitkät. Kolmikulma EAH kääntyköön toiselle puolelle yhteistä asemaa NK, toiselle jääköön kolmikulma NIK, niin piste A joutun johonkuhun paikkaan O, kolmikulma EAH kuin kolmikulma NOK ja siwut EA ja HA kuin siwut NO ja KO. Yhdistä I ja O. a)

Koska siis kolmikulmassa NIO kyljet NI ja NO owat yhtäpitkät, niin owat kulmat NIO ja NOI yhdenkokoiset. e) Samasta syystä owat kulmat KIO ja KOI yhdenkokoiset. Sentähden owat myös kokonaiset kulmat NIK ja NOK, se on kulma EAH, yhdenkokoiset. h).

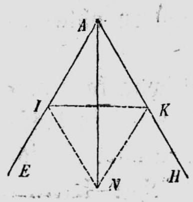
a. 1 Waat.
e. 5 Esit.
h 2 Selw.
i. 4 Esit.

Mutta koska kolmikulmassa EAH kaksi siwua EA ja AH owat erikseen siwujen NI:n ja IK:n pituiset kolmikulmassa NIK, ja näiden wäliset kulmat EAH ja NIK owat yhdenkokoiset, niin kolmikulmat owat yhteelliset, ja kulmat AEH ja INK, AHE ja IKN, jotka seisowat yhtäsuuria siwuja wasten, owat yhdenkokoiset. i).

Seuraus. Jos yhtäkylkisen kolmikulman kärestä wedetään suora wiiwa, joka leikkaa aseman keskeltä kahtia; niin se myös jakaa kulman yhtäpitkien siwujen wälillä kahteen yhtäsuureen osaan ja on kohtisuorassa asemaa wasten.

9. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tiettyä suorawiiwaista kulmaa leikataan kahteen yhtäsuureen osaan?



Anomus. Kulma EAH on keskeltä kahtia leikattawa.

Osoitus. Ota wiiwalle AE joku piste I ja tee AK wiiwan AI:n pituiseksi. a) Wedä suora wiiwa IK, jolle piirrä yhtäsiwuinen kolmikulma INK. e) Yhdistä A ja N; niin kulma EAH leikataan keskeltä kahtia suoralta wiiwalta AN.

a. 3 Esit.
e. 1 Esit.
h. 8 Esit.

Todistus. Kolmikulmassa AIN owat kaikki kolme siwua erikseen siwujen kokoiset toisessa kolmikulmassa AKN, nimittäin AI ja AK, IN ja KN yhtäsuuret, ja AN yhteinen siwu. Sentähden owat myös kulmat IAN ja KAN yhdenkokoiset, h) ja kulma EAH niinmuodoin leikattu kahteen yhtäsuureen osaan.

1 Seuraus. Jos kulman puoliskot jaetaan kahteen yhtäsuureen osaan, ja nämä taas keskeltä kahtia j. n. e., niin koko kulma sillä tawalla tulee leikatuksi 4:jään, 8:aan j. n. e. yhtäsuureen osaan. Mutta kuinka moneen yhtäsuureen osaan hywänsä ei woida kulmaa jakaa ainoasti suoran wiiwan ja ympyrän awulla.

Seuraus 1. *Kulman voi jakaa tasan myös 4, 8, jne. osaan.*

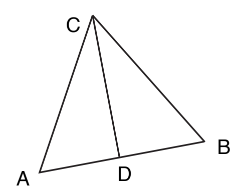
Seuraus 2. *Jos tasakylkisen kolmion yhtä suurien kylkien välinen kulma puolitetaan, niin kulman jakava suora leikkaa myös kannan kahteen yhtä suureen osaan ja on sen normaali.*

Seuraukseen 1 Aschan liittää, että kulman jakaminen mielivaltaisen moneen osaan ei ole mahdollista harppi-viivoitinkonstruktiolla. Hän ei esitä tälle vähäpätöiseltä vaikuttavalle huomautukselleen mitään perustelua eikä erikseen korosta, että jo mielivaltaisen kulman kolmijako oli klassinen probleema ja että se on mahdoton tehtävä, vaikka tästä syvällisestä keksinnöstä juuri on kysymys.
"Seuraus" 2 ei seuraa siitä, että kulman puolittaminen on mahdollista [1.9], vaan SKS-lauseesta 1.4. Se on siis väärässä paikassa.

Tehtävä 1.10. *Annettu jana on puolitettava.*

Ratkaisu. Olkoon annettu jana AB. Tehtävänä on jakaa se kahteen yhtä suureen osaan. Konstruoidaan janalle AB kummallekin puolelle tasasivuinen kolmio [1.1]. Olkoot ne $\triangle ABC$ ja $\triangle ABD$. Leikatkoot AB ja CD pisteessä E.
Osoitetaan, että AE ja EB ovat yhtä suuret. Kolmiot $\triangle ACD$ ja $\triangle BCD$ ovat SSS-lauseen [1.8] mukaan yhtenevät, erityisesti vastinkulmat $\measuredangle ACD$ ja $\measuredangle BCD$ ovat yhtä suuret. Siis SKS-lauseen 1.4 mukaan kolmiot $\triangle ACE$ ja $\triangle BCE$ ovat yhtenevät, erityisesti sivut AE ja EB ovat yhtä suuret. □

Yllä oleva Aschanin esittämä konstruktio on peräisin Apollonioksella (n. 245-170 e. Kr.). En tiedä, mistä Aschan on sen löytänyt. Strömer esittää Eukleideen alkuperäisen todistuksen, joka perustuu edellisen lauseen käyttöön, ei sen todistuksen toistoon. Näin:



Konstruoidaan janalle AB tasasivuinen kolmio $\triangle ABC$ [1.1]. Konstruoidaan kulman $\measuredangle ACB$ puolittaja [1.9]. Olkoon D puolittajan ja AB:n leikkauspiste. AD ja DB ovat yhtä suuret, koska kolmiot $\triangle ACD$ ja $\triangle BCD$ ovat SKS-lauseen 1.4 mukaan yhtenevät.

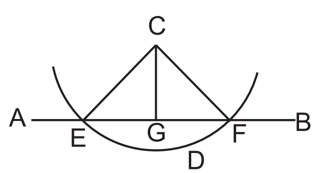
Tehtävä 1.11. *Annetulla suoralla olevan pisteen kautta on konstruoitava normaali.*

Ratkaisu. Olkoon C suoralla AB. Tehtävänä on konstruoida suora, joka kulkee C:n kautta ja on AB:n normaali.
Valitaan suoralta AB jokin C:stä eroava piste D ja sen jälkeen jatketaan janaa DC pisteen C yli janan CD pituuden verran pisteeseen E [1.3]. Muodostetaan tasasivuinen kolmio $\triangle DEF$ [1.1].
Osoitetaan, että C:n kautta kulkeva suora CF on AB:n normaali eli, että *vieruskulmat* $\measuredangle DCF$ ja $\measuredangle ECF$ ovat yhtä suuret [Määr. 10]. Kolmiot $\triangle DCF$ ja $\triangle ECF$ ovat SSS-lauseen 1.8 mukaan yhtenevät, erityisesti kulmat $\measuredangle DCF$ ja $\measuredangle ECF$ ovat yhtä suuret. □

Tehtävän 1.11 konstruktiolla on tietenkin käytännöllinen merkityksensä, mutta Eukleideen teorian kannalta oleellista on, että se ratkaisee kysymyksen suoran kulman olemassaolosta. Olemassaolon ohella kiintoisaa on yksikäsitteisyys. Aschan huomauttaakin muistutuksessaan, että suorien kulmien yhtäsuuruusaksiooman [Aks. 11 eli Eukleideen Post. 4] mukaan on olemassa korkeintaan yksi tehtävän 1.11 ehdot täyttävä suora.

Tehtävä 1.12. *Annetun suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta on konstruoitava normaali suoralle.*

Ratkaisu. Olkoon AB suora ja olkoon C sille kuulumaton piste. On konstruoitava suora, joka kulkee C:n kautta ja leikkaa AB:n suorakulmaisesti.



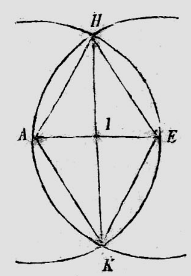
Valitaan jokin piste D, joka on eri puolella suoraa AB kuin piste C. On olemassa C-keskinen ympyrä, joka kulkee pisteen D kautta [Post. 3]. Ympyrä leikkaa suoran AB kahdessa pisteessä — olkoot

24

2 Seuraus. Jos yhtäpitkien siwujen wälillä olewa kulma yhtäkylkisessä kolmikulmassa leikataan keskeltä kahtia, niin suora wiiwa, joka jakaa kulman, leikkaa myös aseman kahteen yhtäsuureen osaan ja on kohtisuorassa sitä wasten.

10. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka pituudellensa määrätty suora wiiwa leikataan kahteen yhtäsuureen osaan?



Anomus. Tietty suora wiiwa AE jaettakoon kahteen yhtäsuureen osaan.

Osoitus. Wiiwaa kaksi ympyrätä KEH ja KAH, niinkuin 1:ssä näytelmässä tehtiin, ja yhdistä pisteet H ja K, jossa kehät leikkaawat toinen toisensa, niin suora wiiwa HK jakaa wiiwan AE keskeltä kahtia.

a. 1 Esit.
e. 8 Esit.
h. 4 Esit.

Todistus. Wedä suorat wiiwat AH, HE, AK, EK, niin AHE ja AKE owat yhtäsiwuiset kolmikulmat. a) Mutta koska siwut AH ja HE owat yhtäpitkät, HK on yhteinen ja siwut AK ja KE myös yhtäsuuret, niin kolmikulmat AHK ja EHK owat yhteelliset, ja kulmat AHK ja EHK yhdenkokoiset. e) Kolmikulmissa AHI ja EHI owat siis siwut AH ja HE yhtäsuuret, HI on yhteinen ja wäliset kulmat AHI ja EHI näytettiin myös olewan yhdenkokoiset. Sentähden owat asemat AI ja EI yhdenpituiset, h) ja wiiwa AE niinmuodoin leikattu kahteen yhtäsuureen osaan.

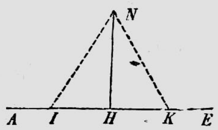
25

M. Ei ole tarpeellista wiiwata ympyräitä säteillä, jotka owat koko wiiwan AE:n pituiset; kuin waan säteet owat yhtäpitkät ja suuremmat puolta wiiwaa, että kehät leikkaawat toinen toisensa, niin esitelmä on warsin samalla tawalla tehtäwä ja toteennäytettäwä, kuin edellisessä nähtiin.

Seuraus. Suora wiiwa HK, joka yhdistää kehien leikkauspisteet, on kohtisuorassa wiiwaa AE:tä wasten.

11. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka kohtisuora wiiwa wedetään tiettyä suoraa wiiwaa wasten wiiwalla olewasta tietystä pisteestä?



Anomus. Olkoon AE tietty suora wiiwa ja H tietty piste sen päällä; wedettäköön H:sta kohtisuora wiiwa AE:tä wasten.

a. 3 Esit.
e. 1 Esit.
h. 8 Esit.
i. 10 Määrit.

Osoitus. Ota joku toinen piste I wiiwalle AE ja leikkaa HK toiselle puolelle yhtäpitkäksi kuin HI. a) Wiiwaa IK:lle yhtäsiwuinen kolmikulma INK, e) ja yhdistä HN; niin on NH anottu kohtisuora wiiwa.

Todistus. Koska kaikki kolme siwua kolmikulmassa IHN owat erikseen yhtäsuuret siwujen kanssa kolmikulmassa KHN, nimittäin HI ja HK, IN ja KN keskenänsä yhtäsuuret ja NH yhteinen molemmissa; niin owat kulmat IHN ja KHN yhdenkokoiset, h) ja molemmat suorat kulmat. i) HN on sentähden wiiwa, wedetty H:sta kohtisuorasti AEtä wasten. i).

M. Ettei samasta pisteestä wiiwan päällä saateta wetää useampia suoria wiiwoja kuin yksi, jotka olisiwat kohtisuorassa tiettyä wiiwaa wasten, seuraa jo 11:sta selwiöstä.

ne E ja F. Olkoon G janan EF keskipiste [1.10]. Väitetään, että CG on AB:n normaali. FG ja GE ovat yhtä pitkät. CG on yhteinen kolmioille $\triangle CGE$ ja $\triangle CGF$, joiden kannatkin, nimittäin CE ja CF, ovat yhtä pitkät [Määr. 15]. SSS-yhtenevyyslauseen 1.8 nojalla kolmiot $\triangle CGE$ ja $\triangle CGF$ ovat yhtenevät, joten erityisesti kulmat $\measuredangle CGE$ ja $\measuredangle CGF$ ovat yhtä suuret. Mutta ne ovat vieruskulmat, joten ne ovat määritelmän 1.10 mukaan suoria kulmia, toisin sanoen CG on AB:n normaali. $\square$

Aschanin todistus on jälleen sama kuin Eukleideen esittämä eikä Aschan kommentoi sitä mitenkään. Mutta tässä todistuksessa on tietenkin samantapainen sanaton jatkuvuusoletus kuin tehtävän 1.1 ratkaisussa: pidetään selvänä, että ympyrä, jonka keskipiste ja jokin kehäpiste ovat eri puolilla suoraa AB, leikkaa suoraa — vieläpä kahdesti.

Euklidisen geometrian historiassa tärkein tutkimuskohde on epäilemättä ollut kysymys, onko yhdensuuntaisuusaksiooma [Aks. 12 eli Post. 5] riippumaton muista aksioomista vai voiko sen todistaa. Yhdensuuntaisuusaksiooma on yhtäpitävä sellaisen väitteen kanssa, että annetun suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta on olemassa tasan yksi yhdensuuntainen suoralle. Käyttämällä edellisiä lauseita 1.12 ja 1.11 voi konstruoida ainakin yhden tuollaisen yhdensuuntaisen [1.31], joten yhdensuuntaisuusaksiooman sisällöksi jää sen yksikäsitteisyys, *Playfairin aksiooma*.

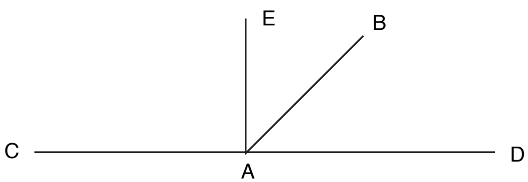
Lauseen 1.12 sisältö on, että annetun suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta on olemassa normaali suoralle. Analogia yhdensuuntaisuusaksiooman kanssa tekee mielenkiintoiseksi kysymyksen, onko tuo normaali yksikäsitteinen vai voisiko niitä olla useampia. Vastaus on, että normaali todella on yksikäsitteinen, mutta Eukleides ei todista sitä vielä tässä vaan vasta kohdassa 1.17 (Seuraus 4). Heti tähän paikkaan sopivaa todistusta kehiteltiin kyllä jo antiikin aikana, mutta sellainen on ilmeisesti keksitty vasta myöhemmin. Mielenkiintoista on kuitenkin, että normaalin yksikäsitteisyys todistetaan ilman yhdensuuntaisuusaksiooman käyttöä. Tämähän merkitsee sitä, että normaali on yksikäsitteinen euklidisen geometrian lisäksi myös hyperbolisessa geometriassa, jossa Playfairin aksiooma ei päde. Sen sijaan pallogeometriassa, jossa suorien roolissa ovat isoympyrät, voi saman pisteen kautta kulkevia normaaleja olla paljonkin — esimerkiksi kaikki pohjoisnavan kautta kulkevat isoympyrät ovat päiväntasaajan normaaleja.

Lause 1.13. **(Vieruskulmalause)** *Vieruskulmat voivat molemmat olla suoria kulmia ja jos eivät ole, niin ne muodostavat joka tapauksessa yhteensä yhtä paljon kuin kaksi suoraa kulmaa.*

Muistettakoon, että jo aksioomia asetettaessa on käynyt selväksi, että *"kulmilla yhteensä"* tarkoitetaan vierekkäin asettamalla syntyvää kuviota, ei lukujen yhteenlaskemista. Itse asiassa euklidisessa geometriassa ei ole ollenkaan puhetta luvuista jonkun "suureen mittana". Luonnollisia lukuja esiintyy kyllä puhuttaessa esimerkiksi annetun janan jatkamisesta vaikkapa viisinkertaiseksi tai konstruoitaessa säännöllinen viisikulmio. Vaikka Aschan käyttää tästä välittämättä mittalukuja monessa kohdin muistutuksissaan, hän yleensä kääntää Eukleidestaan tarkasti. Esimerkiksi seuraavassa todistuksessa ei esiinny kulma-asteiden summia.

Palautamme samalla mieleen, että määritelmän [Määr. 8] mukaan kulmaksi ei kelpaa nollakulma eikä *oikokulma* (180°), saati sitä suurempi. Kulmien "summaa" ei siis ole olemassa kulmana, jos se "ylittäisi oikokulman". Tästä aiheutuu mutkikkuutta seuraavaan todistukseen.

Todistus. Tehtävän 1.11 mukaan tutkittavaan pisteeseen A voidaan piirtää normaali suoralle BC.

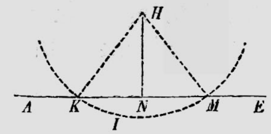


Olkoon A suoralla CD ja B sen ulkopuolella, jolloin muodostuu vieruskulmat $\measuredangle CAB$ ja $\measuredangle BAD$. Jos ne ovat yhtä suuret, niin ne ovat määritelmän 10 mukaan suoria kulmia. Muuten piirretään normaali AE suoran CD pisteeseen A [1.11], jolloin kulmat $\measuredangle CAE$ ja $\measuredangle EAD$ ovat suoria. Kulma $\measuredangle EAD$ on sama kuin kulmat $\measuredangle EAB$ ja $\measuredangle BAD$ yhteensä. Lisätään kulma $\measuredangle CAE$, jolloin suorat kulmat $\measuredangle CAE$ ja $\measuredangle EAD$ yhteensä ovat yhtä paljon kuin kolme kulmaa $\measuredangle CAE$, $\measuredangle EAB$ ja $\measuredangle BAD$ yhteensä [Aks. 2]. Vastaavasti $\measuredangle CAE$ ja $\measuredangle EAB$ ovat yhdessä kulma $\measuredangle CAB$, josta lisäämällä kumpaankin puoleen $\measuredangle BAD$

26

12. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka kohtisuora wiiwa wedetään tiettyä ääretöntä suoraa wiiwaa wasten tietystä pisteestä wiiwan ulkopuolella?



Anomus. Äärettömää suoraa wiiwaa AE:tä wasten wedettäköön kohtisuora wiiwa pisteestä H ulkopuolella wiiwaa.

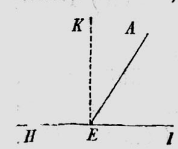
Osoitus. Ota myöskin toiselle puolelle AE:tä joku piste I. Wiiwaa ympyrä, jonka keskipiste on H:ssa ja kehä menee pisteen I läpi. Ympyrän kehä leikkaa AE:n kahdessa pisteessä K ja M, kerran laskeissaan toisen noustessaan. Näiden wälinen wiiwa KM jaettakoon keskeltä kahtia pisteessä N, a) ja HN yhdistettäköön; niin on HN kohtisuorassa AE:tä wasten.

a. 10 Esit.
e. 15 Määrit.
h. 8 Esit.
k. 10 Määrit.

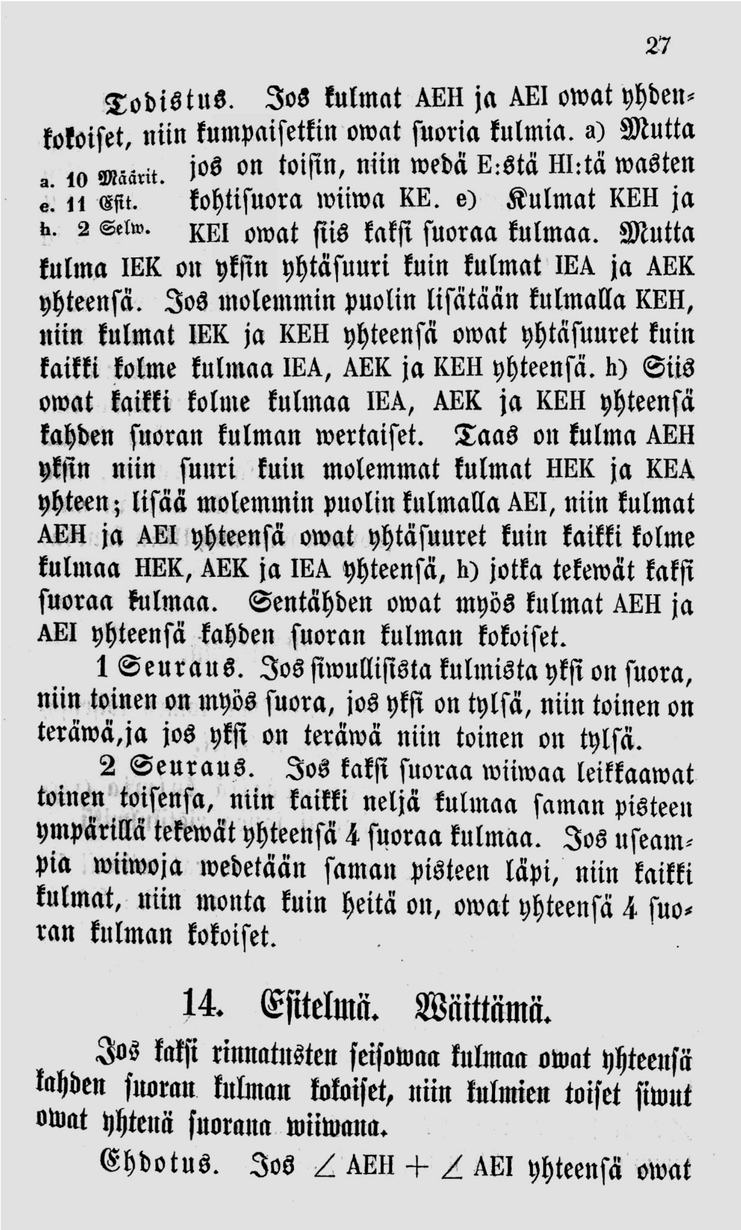
Todistus. Wedä HK ja HM. Kolmikulmassa HKN owat siwut siwuinsa pituiset toisessa kolmikulmassa HMN, nimittäin HK ja HM, e) KN ja MN owat yhtäsuuret ja HN on yhteinen. Sentähden owat kulmat HNK ja HNM yhdenkokoiset, h) molemmat suorat ja HN siis seisowa kohtisuorassa AE:tä wasten. k)

13. Esitelmä. Wäittämä.

Jos suora wiiwa seisoo toisen suoran wiiwan päällä ja tekee kummallekin puolellensa kulman, niin siwulliset kulmat owat yhteensä kahden suoran kulman kokoiset.



Ehdotus. Jos AE kummallekin puolellensa wiiwaa HI:tä wasten tekee kulmia AEH ja AEI; Wäitös. niin kulmat AEH + AEI owat kahden suoran kulman kokoiset.



Todistus. Jos kulmat AEH ja AEI owat yhdenkokoiset, niin kumpaisetkin owat suoria kulmia. a) Mutta jos on toisin, niin wedä E:stä HI:tä wasten kohtisuora wiiwa KE. e) Kulmat KEH ja KEI owat siis kaksi suoraa kulmaa. Mutta kulma IEK on yksin yhtäsuuri kuin kulmat IEA ja AEK yhteensä. Jos molemmin puolin lisätään kulmalla KEH, niin kulmat IEK ja KEH yhteensä owat yhtäsuuret kuin kaikki kolme kulmaa IEA, AEK ja KEH yhteensä. h) Siis owat kaikki kolme kulmaa IEA, AEK ja KEH yhteensä kahden suoran kulman wertaiset. Taas on kulma AEH yksin niin suuri kuin molemmat kulmat HEK ja KEA yhteen; lisää molemmin puolin kulmalla AEI, niin kulmat AEH ja AEI yhteensä owat yhtäsuuret kuin kaikki kolme kulmaa HEK, AEK ja IEA yhteensä, h) jotka tekewät kaksi suoraa kulmaa. Sentähden owat myös kulmat AEH ja AEI yhteensä kahden suoran kulman kokoiset.

a. 10 Määrit.
e. 11 Esit.
h. 2 Selw.

1 **Seuraus.** Jos siwullisista kulmista yksi on suora, niin toinen on myös suora, jos yksi on tylsä, niin toinen on teräwä, ja jos yksi on teräwä niin toinen on tylsä.

2 **Seuraus.** Jos kaksi suoraa wiiwaa leikkaawat toinen toisensa, niin kaikki neljä kulmaa saman pisteen ympärillä tekewät yhteensä 4 suoraa kulmaa. Jos useampia wiiwoja wedetään saman pisteen läpi, niin kaikki kulmat, niin monta kuin heitä on, owat yhteensä 4 suoran kulman kokoiset.

14. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kaksi rinnatusten seisowaa kulmaa owat yhteensä kahden suoran kulman kokoiset, niin kulmien toiset siwut owat yhtenä suorana wiiwana.

Ehdotus. Jos $\angle$ AEH + $\angle$ AEI yhteensä owat

saadaan, että kolme kulmaa $\measuredangle CAE$, $\measuredangle EAB$ ja $\measuredangle BAD$ ovat yhteensä yhtä paljon kuin kulmat $\measuredangle CAB$ ja $\measuredangle BAD$ [Aks. 2]. Mutta olemme todistaneet, että myös $\measuredangle CAE$ ja $\measuredangle EAD$ ovat yhteensä yhtä paljon kuin nämä kolme kulmaa. Aksiooman 1 nojalla siis vieruskulmat $\measuredangle CAB$ ja $\measuredangle BAD$ ovat yhteensä yhtä paljon kuin kaksi suoraa kulmaa $\measuredangle CAE$ ja $\measuredangle EAD$. □

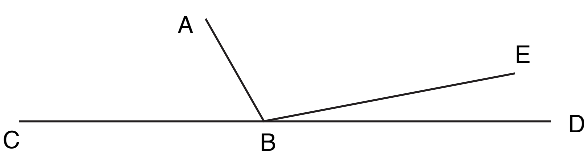
Aschan esittää taas todistuksitta kaksi omaa käytännönläheistä seurauslausetta. Ne eivät liene peräisin Eukleideelta, mutta ainakin jälkimmäinen esiintyy jo varhaisissa käsikirjoituksissa. Perinteisesti ne on yleensä esitetty vasta seurauksina ristikulmalauseesta 1.15.

Seuraus 1. *Jos vieruskulmista toinen on suora, niin toinenkin on suora, jos toinen on tylppä, niin toinen on terävä ja jos toinen on terävä, niin toinen on tylppä.*

Seuraus 2. *Jos kaksi suoraa leikkaavat toisensa, niin muodostuvat neljä kulmaa ovat yhteensä neljä suoraa kulmaa ja jos saman pisteen kautta kulkee useampia suoria, niin muodostuvat kulmat ovat silloinkin yhteensä neljä suoraa kulmaa.*

Lause 1.14. **(Käänteinen vieruskulmalause)** *Jos kaksi vierekkäistä kulmaa muodostavat saman kuin kaksi suoraa kulmaa, niin reunimmaiset sivut muodostavat suoran viivan.*

Todistus. Käytämme edellistä lausetta epäsuorassa todistuksessa seuraavaan tapaan:



Oletamme, että C ja D ovat eri puolilla suoraa AB ja kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle ABD$ muodostavat yhteensä kaksi suoraa kulmaa. Väitämme, että pisteet C, B ja D sisältyvät johonkin suoraan.
Jos ne eivät sisälly mihinkään suoraan, niin valitaan janan CB jatkolta piste E, jolloin C, B ja E ovat samalla suoralla. Edellisen lauseen 1.13 mukaan kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle ABE$ muodostavat yhteensä

kaksi suoraa kulmaa, kuten oletuksen mukaan myös kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle ABD$, siis kumpikin pari yhteensä yhtä paljon [Post. 4 ja Aks. 1]. Vähennetään kummastakin parista $\measuredangle ABC$. Yhtä suurista sama vähentämällä saatavat jäännökset, siis kulmat $\measuredangle ABE$ ja $\measuredangle ABD$ ovat aksiooman (3) mukaan yhtä suuret. Mutta toinen on toisen osa, joten tilanne on aksiooman (9) mukaan mahdoton. Todistus on valmis! □

LAUSE 1.15. **(Ristikulmalause)** *Kahden suoran leikkauspisteen luona vastakkaiset kulmat eli* ristikulmat *ovat yhtä suuret.*

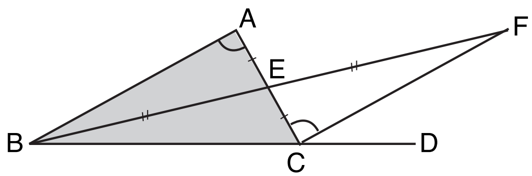
TODISTUS. Ristikulmalause seuraa vieruskulmalauseesta 1.13 ja aksioomista (1) ja (3). □

SEURAUS. *Jos ristikulmista yksi on suora, ovat kolme muutakin suorien leikkauspisteeseen syntynyttä kulmaa suoria kulmia ja suorat siis toistensa normaaleja.*

Seurauslause esiintyy Strömerillä, mutta ei ole peräisin Eukleideelta.

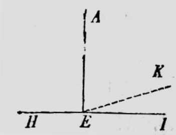
LAUSE 1.16. **(Ulkokulmaepäyhtälö)** *Kolmion* $\triangle(ABC)$ ulkokulma *kohdassa C on suurempi kuin kumpikaan* sisäkulmista *kohdissa A ja B.*

TODISTUS.



Olkoon kolmion $\triangle ABC$ sivu BC jatkettu pisteeseen D. Väitetään, että kulma $\measuredangle ACD$ on suurempi kuin kumpikaan kulmista $\measuredangle CBA$ ja $\measuredangle BAC$.
Konstruoidaan apukuvio: E on janan AC keskipiste [1.10]. F on suoralla BE yhtä kaukana E:stä kuin B [1.3].

28



kaksi suoraa kulmaa: Wäitös. niin HE ja EI owat yhtenä suorana wiiwana.

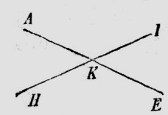
Todistus. Elleiwät HE ja EI olisi yhtenä wiiwana, niin olkoot HE ja EK yhtenä wiiwana. Siis owat kulmat AEH ja AEK yhteensä kaksi suoraa kulmaa; a) mutta kulmat AEH ja AEI ehdotettiin olewan kaksi suoraa kulmaa: sentähden owat kulmat HEA ja AEK yhteensä niin suuret kuin HEA ja AEI yhteensä. e) Jos yhteinen kulma HEA otetaan pois molemmin puolin, niin jääpä kulma AEI on yhtäsuuri kuin jääpä kulma AEK, h) se on: kokonainen olisi osansa suuruinen, joka on mahdotonta. i) Sentähden ei EK, eikä mikään muu wiiwa, saata olla yhtenä suorana wiiwana HE:n kanssa, paitsi ainoastansa EI.

a. 13 Esit.
e. 1 Selw.
h. 3 Selw.
i. 9 Selw.

15. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kaksi suoraa wiiwaa leikkaawat toinen toisensa, niin wastapäiset kulmat owat yhdenkokoiset.

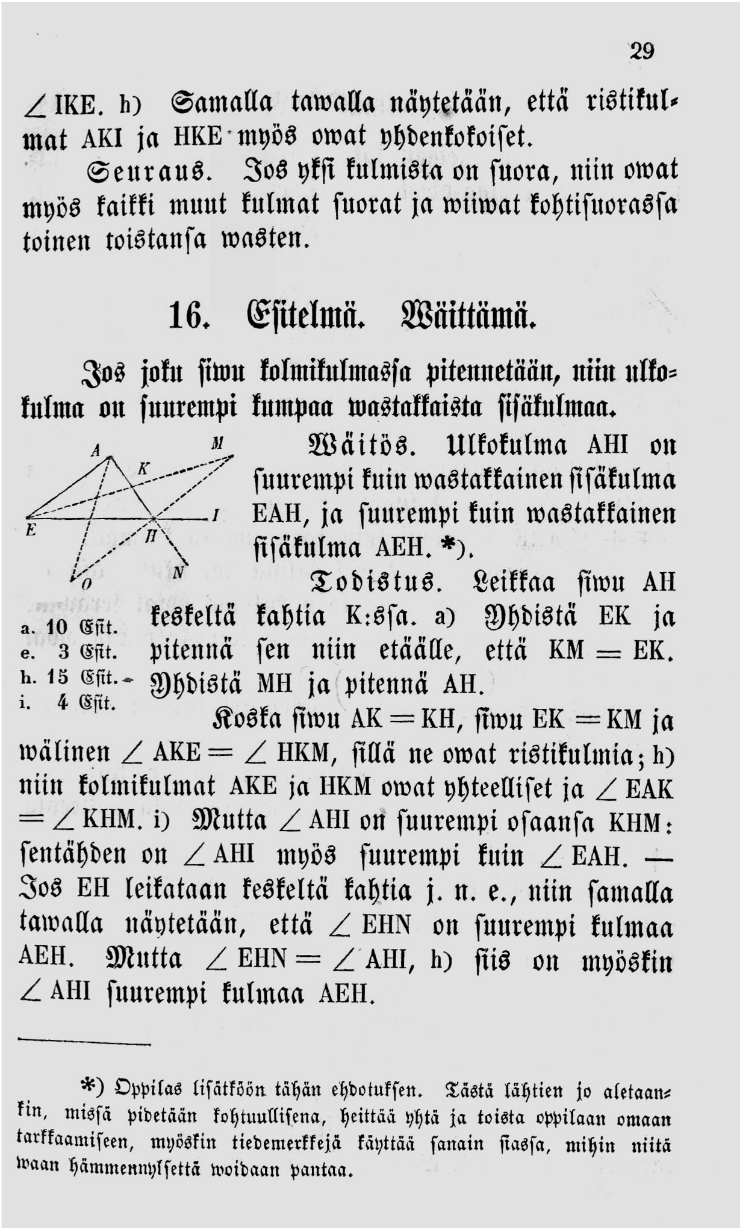
Määritys. Näitä wastapäisiä kulmia (vertikal-anglar) taidettaisi sopiwasti sanoa **ristikulmiksi.**



Ehdotus. Jos suorat wiiwat HI ja AE leikkaawat toinen toisensa: Wäitös. niin ristikulmat owat yhdenkokoiset, $\angle AKH = \angle IKE$ ja $\angle AKI = \angle HKE$.

Todistus. Sillä $\angle AKH + \angle AKI$ owat kaksi suoraa kulmaa, a) ja $\angle AKI + \angle IKE$ myös kaksi suoraa kulmaa. a) Sentähden on $\angle AKH + \angle AKI = \angle AKI + \angle IKE$. e) Ota pois molemmin puolin yhteinen $\angle AKI$, niin on jääpä $\angle AKH =$

a. 13 Esit.
e. 1 Selw.
h. 3 Selw.



29

∠ IKE. h) Samalla tawalla näytetään, että ristikulmat AKI ja HKE myös owat yhdenkokoiset.

Seuraus. Jos yksi kulmista on suora, niin owat myös kaikki muut kulmat suorat ja wiiwat kohtisuorassa toinen toistansa wasten.

16. Esitelmä. Wäittämä.

Jos joku siwu kolmikulmassa pitennetään, niin ulkokulma on suurempi kumpaa wastakkaista sisäkulmaa.

Wäitös. Ulkokulma AHI on suurempi kuin wastakkainen sisäkulma EAH, ja suurempi kuin wastakkainen sisäkulma AEH. *).

Todistus. Leikkaa siwu AH keskeltä kahtia K:ssa. a) Yhdistä EK ja pitennä sen niin etäälle, että KM = EK. Yhdistä MH ja pitennä AH.

a. 10 Esit.
e. 3 Esit.
h. 15 Esit.
i. 4 Esit.

Koska siwu AK = KH, siwu EK = KM ja wälinen ∠ AKE = ∠ HKM, sillä ne owat ristikulmia; h) niin kolmikulmat AKE ja HKM owat yhteelliset ja ∠ EAK = ∠ KHM. i) Mutta ∠ AHI on suurempi osaansa KHM: sentähden on ∠ AHI myös suurempi kuin ∠ EAH. — Jos EH leikataan keskeltä kahtia j. n. e., niin samalla tawalla näytetään, että ∠ EHN on suurempi kulmaa AEH. Mutta ∠ EHN = ∠ AHI, h) siis on myöskin ∠ AHI suurempi kulmaa AEH.

*) Oppilas lisätköön tähän ehdotuksen. Tästä lähtien jo aletaankin, missä pidetään kohtuullisena, heittää yhtä ja toista oppilaan omaan tarkkaamiseen, myöskin tiedemerkkejä käyttää sanain siassa, mihin niitä waan hämmennyksettä woidaan pantaa.

Konstruktion mukaan AE on yhtä suuri kuin EC ja BE on yhtä suuri kuin EF. Ristikulmina $\measuredangle AEB$ ja $\measuredangle CEF$ ovat yhtä suuret [1.15], joten SKS-säännön 1.4 mukaan kolmiot $\triangle AEB$ ja $\triangle CEF$ ovat yhtenevät ja erityisesti kulmat $\measuredangle BAE$ ja $\triangle FCE$ ovat yhtä suuret. Mutta $\measuredangle ACD$ sisältää kulman $\measuredangle FCE$ ja on siis aksiooman [Aks. 9] nojalla suurempi kuin $\measuredangle ACF$ ja siis myös suurempi kuin BAE eli $\measuredangle BAC$ [Aks. 1]. Vastaavalla tavalla todistetaan, että $\measuredangle ACF > \measuredangle CBA$. □

Aschan alkaa tästä eteenpäin käyttää alussa määrittelemiään symboleja $=, >, <, \ldots$, "kun niitä vain hämmennyksettä voidaan pantaa". Teemme samoin.

LAUSE 1.17. *Kolmiossa* kahden *kulman summa on aina alle kaksi suoraa kulmaa.*

TODISTUS. Edellisessä todistuksessa havaittiin, että $\measuredangle BAC = \measuredangle ECF$ ja $\measuredangle ECF < \measuredangle ECD$, joten $\measuredangle BCA + \measuredangle BAC = \measuredangle BCA + \measuredangle ECF < \measuredangle BCA + \measuredangle ECD =$ kaksi suoraa kulmaa [1.13]. □

SEURAUS 1. *Jos yksi kulma kolmiossa on tylppä tai suora, niin toiset ovat teräviä.*

SEURAUS 2. *Tasasivuisen kolmion kulmat ovat teräviä.*

SEURAUS 3. *Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat teräviä.*

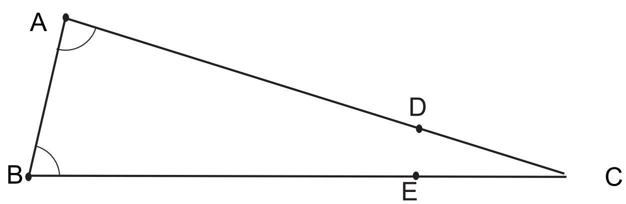
SEURAUS 4. *Suoraa vasten voidaan piirtää vain yksi normaali sen ulkopuolisesta pisteestä. (Toisin sanoen kolmiossa ei voi olla kahta suoraa kulmaa.)*

Lauseen 1.12 konstruktio antaa suoralle yhden normaalin sen ulkopuolisesta pisteestä. Tässä todistettiin, että muita ei ole, vaan normaali on yksikäsitteinen.

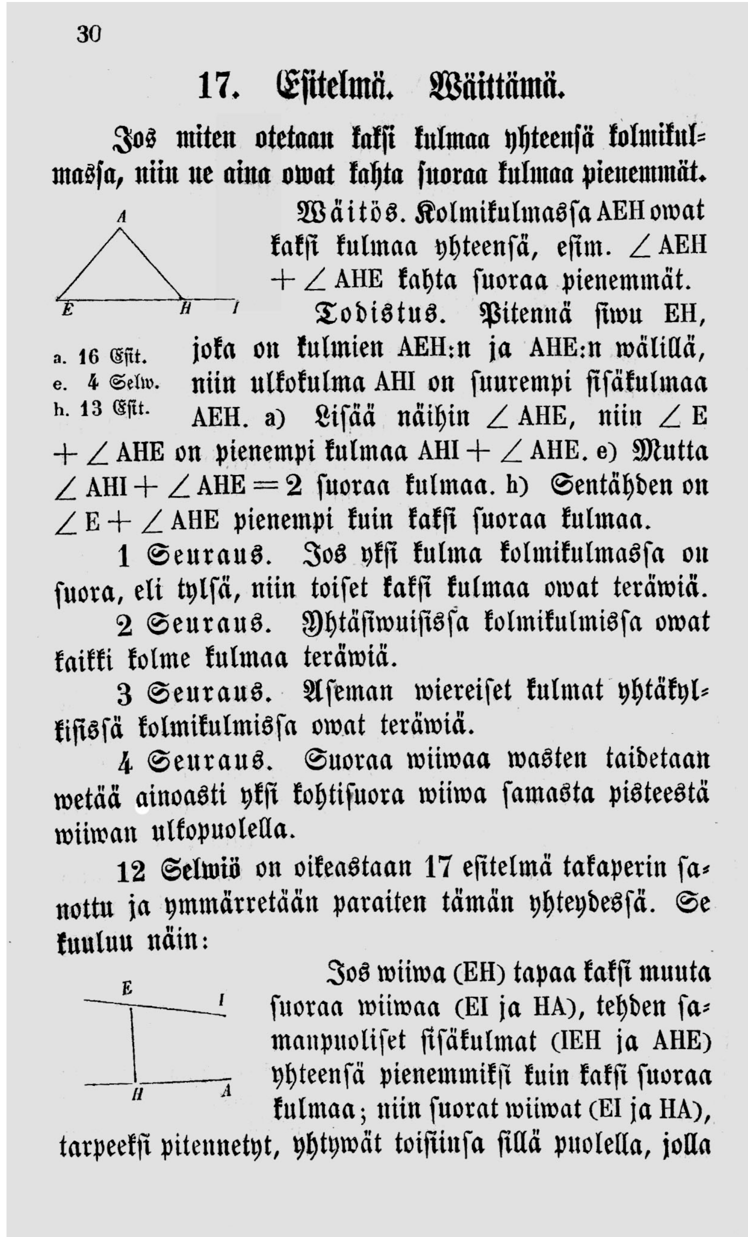
Aschan on kiinnittänyt huomiota siihen, että Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooma on oikeastaan käänteistulos lauseelle 1.17. Aksioomahan sanoo suurin piirtein, että "jos kahden sisäkulman summa on alle kaksi suoraa kulmaa, niin muodostuu kolmio". Siksi Aschan on valinnut tekstissään juuri tämän kohdan yhdensuuntaisuusaksiooman esittämiseen — Eukleideellahan 1. kirjan aksioomat ovat kaikki jo alussa.

Yhdensuuntaisuusaksioomaa ei toisaalta käytetä vielä seuraavan lauseen todistuksessa vaan vasta käänteisessä vuorokulmalauseessa 1.29. Teemme silti kuten Aschan; esitämme yhdensuuntaisuusaksiooman tässä. Aschanin käännös on uskollinen alkutekstille. Emme toista sitä, vaan lausumme aksiooman asian nykyaikaisemmin.
Aschan ei korosta yhdensuuntaisuusaksiooman mullistavaa merkitystä, vaan esittää sen aika lailla vähin äänin. Voisi ajatella, että syynä vähättelyyn on, ettei ehkä 1800-luvulla ajateltu muiden kuin filosofien ja matemaatikoiden koskaan joutuvan tekemisiin yhdensuuntaisuusaksiooman todistusyritysten, niihin kohdistuvien epäilyjen ja viime kädessä epäeuklidisen geometrian kanssa. Strömerin ruotsinnoksessa Eukleideen viides postulaatti esitetään toisaalta aksioomana, toisaalta todistetaan lähtien vaihtoehtoisesta ”vaikeuksitta todeksi myönnettävästä” aksioomasta, jonka mukaan suora, joka leikkaa toisen kahdesta yhdensuuntaisesta myös leikkaa toisen. On hyvä muista, että Strömer eli 1700-luvulla, jolloin epäeuklidista geometriaa ei ollut olemassa ja geometrian aksioomia pidettiin tosina.

Aksiooma 12 (yhdensuuntaisuusaksiooma eli Eukleideen viides postulaatti)



Jos suora viiva AB leikkaa kahta muuta suoraa AD ja BE pisteissä A ja B siten, että D ja E ovat samalla puolella AB:tä ja kulmat ∠BAD ja ∠ABE ovat yhteensä (aidosti!) alle kaksi suoraa kulmaa, niin suorat AD ja BE leikkaavat toisensa ja leikkauspiste C on samalla puolella AB:tä kuin D ja E.



30

17. Esitelmä. Wäittämä.

Jos miten otetaan kaksi kulmaa yhteensä kolmikulmassa, niin ne aina owat kahta suoraa kulmaa pienemmät.

A
E H I

Wäitös. Kolmikulmassa AEH owat kaksi kulmaa yhteensä, esim. ∠ AEH + ∠ AHE kahta suoraa pienemmät.

Todistus. Pitennä siwu EH, joka on kulmien AEH:n ja AHE:n wälillä, niin ulkokulma AHI on suurempi sisäkulmaa AEH. a) Lisää näihin ∠ AHE, niin ∠ E + ∠ AHE on pienempi kulmaa AHI + ∠ AHE. e) Mutta ∠ AHI + ∠ AHE = 2 suoraa kulmaa. h) Sentähden on ∠ E + ∠ AHE pienempi kuin kaksi suoraa kulmaa.

a. 16 Esit.
e. 4 Selw.
h. 13 Esit.

1 Seuraus. Jos yksi kulma kolmikulmassa on suora, eli tylsä, niin toiset kaksi kulmaa owat teräwiä.

2 Seuraus. Yhtäsiwuisissa kolmikulmissa owat kaikki kolme kulmaa teräwiä.

3 Seuraus. Aseman wiereiset kulmat yhtäkylkisissä kolmikulmissa owat teräwiä.

4 Seuraus. Suoraa wiiwaa wasten taidetaan wetää ainoasti yksi kohtisuora wiiwa samasta pisteestä wiiwan ulkopuolella.

12 Selwiö on oikeastaan 17 esitelmä takaperin sanottu ja ymmärretään paraiten tämän yhteydessä. Se kuuluu näin:

E I
H A

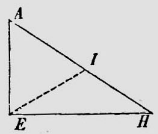
Jos wiiwa (EH) tapaa kaksi muuta suoraa wiiwaa (EI ja HA), tehden samanpuoliset sisäkulmat (IEH ja AHE) yhteensä pienemmiksi kuin kaksi suoraa kulmaa; niin suorat wiiwat (EI ja HA), tarpeeksi pitennetyt, yhtywät toisiinsa sillä puolella, jolla

31

nämä kulmat seisowat, jotka yhteensä owat pienemmät kuin kaksi suoraa kulmaa.

18. Esitelmä. Wäittämä.

Jokaisessa kolmikulmassa on se kulma suurempi, joka wastaa suurempata siwua.



Jos on siwu AH > siwua AE; niin ∠ AEH on suurempi ∠ AHE:tä.

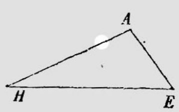
Leikkaa AH:sta palainen AI = AE, a) ja yhdistä EI.

Ulkokulma AIE on nyt suurempi wastakkaista sisäkulmaa IHE, eli AHE. e) Mutta ∠ AIE = ∠ AEI, koska siwu AE = AI. h) Sentähden on myöskin ∠ AEI > ∠ AHE:tä, ja sitä enemmin ∠ AEH > ∠ AHE. i)

a. 3 Esit.
e. 16 Esit.
h. 5 Esit.
i. 9 Selw.

19. Esitelmä. Wäittämä.

Jokaisessa kolmikulmassa on se siwu suurempi, joka wastaa suurempata kulmaa.



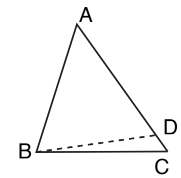
Olkoon kolmikulmassa AEH kulma E suurempi kulmaa H; niin on siwu AH > siwua AE.

Ellei AH olisi suurempi kuin AE, niin se joko olisi yhtäsuuri kuin AE, eli pienempi sitä. Mutta jos AH olisi = AE, niin ∠ E = ∠ H, a) jota toisin ehdotettiin; sentähden AH ei ole = AE. Jos taas AH olisi < AE, niin olisi ∠ E pienempi kuin ∠ H, e) jota myös toisin ehdotettiin; siispä siwu AH ei ole < siwua AE. Ja koska siwu AH ei ole yhtäsuuri, eikä pienempikään kuin siwu AE; niin AH täytyy olla suurempi AE:tä.

a. 5 Esit.
e. 18 Esit.

Lause 1.18. *Kolmiossa on suurempaa sivua vastassa suurempi kulma.*

Todistus. Todistus perustuu lauseeseen [1.16]:



Jos $AC > AB$, niin leikataan AC:sta palanen, jolla $AD = AB$ [1.3]. Kolmion $\triangle BCD$ sisäkulma $\measuredangle DCB$ on pienempi kuin ulkokulma $\measuredangle ADB$ [1.16]. Thaleen kantakulmalauseen 1.5 mukaan $\measuredangle ADB$ on yhtä suuri kuin tasakylkisen kolmion $\triangle ABD$ toinen kantakulma $\measuredangle ABD$, joka on kulman $\measuredangle ABC$ osa ja siis sitä pienempi [Aks. 9]. Siis $\measuredangle DCB$ on pienempi kuin $\measuredangle ABC$. □

Lause 1.19. *Kolmiossa on suurempaa kulmaa vastassa suurempi sivu.*

Lause 19 sanoo saman asian kuin lause 18 — lauseethan ovat selvästikin loogisesti ekvivalentit. Tämän on ensimmäisenä sanonut julki vasta De Morgan 1847 [Formal Logic, s. 25]. Aikojen kuluessa on lauseelle 1.19 keksitty monenlaisia todistuksia, erityisesti myös suora todistus, mutta Aschan on omaksunut Eukleideen epäsuoran todistuksen. Oma versiomme on minimalistinen:

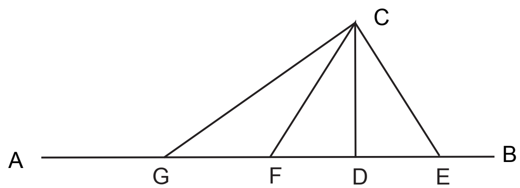
Todistus. Seuraa lauseesta 1.18. □

Seuraus 1. *Annettua pistettä C lähin kohta D suoralla AB löytyy tunnetulla* projektiolla *eli piirtämällä normaali pisteestä tuolle suoralle. Lähin kohta D on siis yksikäsitteinen. Jos suoralla AB piste F on lähempänä pistettä D kuin piste G, niin $CF < CG$.*

Seuraus 2. *Suoralla ja ympyrällä on* korkeintaan kaksi yhteistä pistettä.

Seuraukset 1 ja 2 on liitetty Eukleideen tekstiin joskus myöhemmin. Aschan ei todista niitä, mutta luettelee seurauksen 1 todistukseen tarvittavat lauseet. Esitän oman todistuksen ensimmäiselle. Jälkimmäinenhän saadaan sitten helposti.

Todistus.



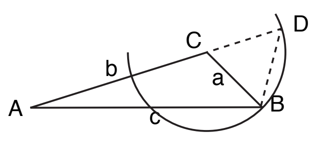
Lauseen 1.12 mukaan on olemassa mainittu normaali ja siis myös leikkauspiste D. Jos E on jokin muu suoran AB piste, niin kolmiossa $\triangle EDC$ on $\measuredangle DEC < \measuredangle EDC$, koska $\measuredangle EDC$ on suora ja kolmion kahden kulman summa on alle kaksi suoraa kulmaa [1.17]. Edellisen lauseen 1.19 nojalla on siis $EC > DC$. Jos oletuksen mukaisesti piste F on lähempänä pistettä D kuin piste G, ja samalla puolella D:tä, niin ovat edellä sanotun mukaisesti $\measuredangle CGD$ ja $\measuredangle CFD$ teräviä ja erityisesti siis $\measuredangle CFG$ terävän kulman vieruskulmana tylppä [1.13]. Kolmiossa $\triangle CGF$ on siis $\measuredangle G$ terävä ja $\measuredangle F$ tylppä. Siksi edellinen lause soveltuu jälleen ja $CF < CG$. Lopuksi huomataan, että kun pisteet E ja F ovat eri puolilla D:tä, mutta yhtä kaukana, niin kolmiot $\triangle EDC$ ja $\triangle FDC$ ovat SKS-säännön 1.4 mukaan yhtenevät ja siis $CE = CF$, joten $CE < CG$. □

Aschan määrittelee seurauksen 1 yhteydessä luonnollisella tavalla *pisteen etäisyyden* eli "wälimatkan" *suorasta*. Tässä hän on luultavasti ajatellut oppilaidensa käytännön tarpeita ja siksi tulkinnut, että etäisyys on luku.

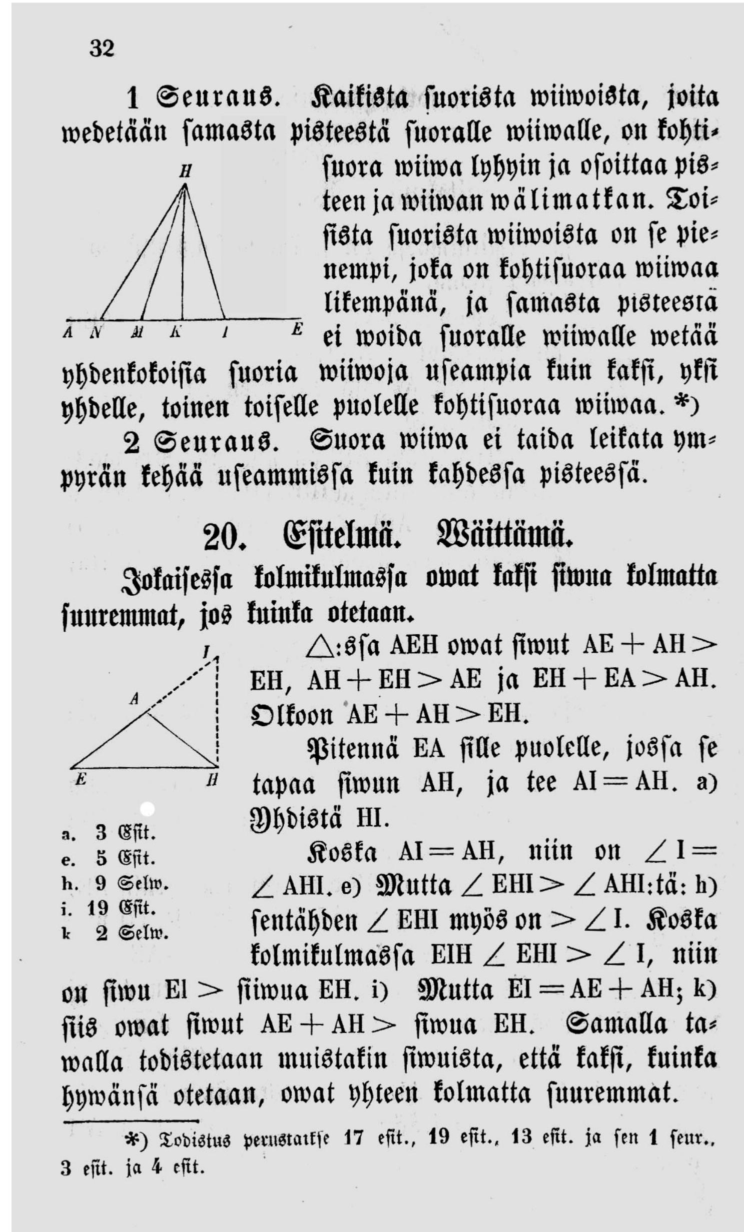
Lause 1.20. **(Kolmioepäyhtälö)** *Kolmion sivu on pienempi kuin kahden muun summa.*

Janojen summa on klassisessa geometriassa jana, joka syntyy siirtämällä ne peräkkäin toistensa jatkoksi. Janojen siirtämisestä puolestaan puhuttiin jo Alkeiden ensimmäisissä konstruktiotehtävissä.

Todistus.



Jatketaan tutkittavan kolmion $\triangle ABC$ sivu $b = AC$ pisteen C yli


32

1 Seuraus. Kaikista suorista wiiwoista, joita wedetään samasta pisteestä suoralle wiiwalle, on kohtisuora wiiwa lyhyin ja osoittaa pisteen ja wiiwan wälimatkan. Toisista suorista wiiwoista on se pienempi, joka on kohtisuoraa wiiwaa likempänä, ja samasta pisteestä ei woida suoralle wiiwalle wetää yhdenkokoisia suoria wiiwoja useampia kuin kaksi, yksi yhdelle, toinen toiselle puolelle kohtisuoraa wiiwaa. *)

2 Seuraus. Suora wiiwa ei taida leikata ympyrän kehää useammissa kuin kahdessa pisteessä.

20. Esitelmä. Wäittämä.

Jokaisessa kolmikulmassa owat kaksi siwua kolmatta suuremmat, jos kuinka otetaan.

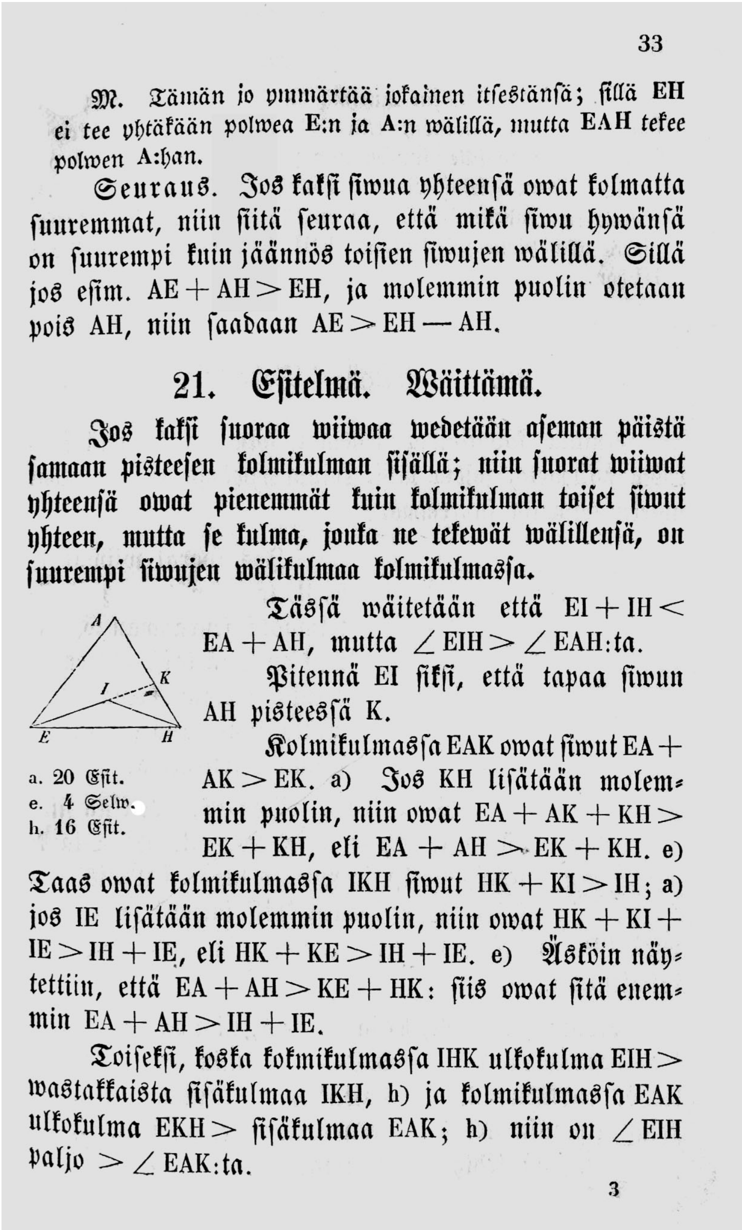
△:ssa AEH owat siwut AE + AH > EH, AH + EH > AE ja EH + EA > AH. Olkoon AE + AH > EH.

Pitennä EA sille puolelle, jossa se tapaa siwun AH, ja tee AI = AH. a) Yhdistä HI.

Koska AI = AH, niin on ∠ I = ∠ AHI. e) Mutta ∠ EHI > ∠ AHI:tä: h) sentähden ∠ EHI myös on > ∠ I. Koska kolmikulmassa EIH ∠ EHI > ∠ I, niin on siwu EI > siiwua EH. i) Mutta EI = AE + AH; k) siis owat siwut AE + AH > siwua EH. Samalla tawalla todistetaan muistakin siwuista, että kaksi, kuinka hywänsä otetaan, owat yhteen kolmatta suuremmat.

a. 3 Esit.
e. 5 Esit.
h. 9 Selw.
i. 19 Esit.
k 2 Selw.

*) Todistus perustaikse 17 esit., 19 esit., 13 esit. ja sen 1 seur., 3 esit. ja 4 esit.



M. Tämän jo ymmärtää jokainen itsestänsä; sillä EH ei tee yhtäkään polwea E:n ja A:n wälillä, mutta EAH tekee polwen A:han.

Seuraus. Jos kaksi siwua yhteensä owat kolmatta suuremmat, niin siitä seuraa, että mikä siwu hywänsä on suurempi kuin jäännös toisien siwujen wälillä. Sillä jos esim. AE + AH > EH, ja molemmin puolin otetaan pois AH, niin saadaan AE > EH — AH.

21. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kaksi suoraa wiiwaa wedetään aseman päistä samaan pisteesen kolmikulman sisällä; niin suorat wiiwat yhteensä owat pienemmät kuin kolmikulman toiset siwut yhteen, mutta se kulma, jonka ne tekewät wälillensä, on suurempi siwujen wälikulmaa kolmikulmassa.

a. 20 Esit.
e. 4 Selw.
h. 16 Esit.

Tässä wäitetään että EI + IH < EA + AH, mutta ∠ EIH > ∠ EAH:ta.

Pitennä EI siksi, että tapaa siwun AH pisteessä K.

Kolmikulmassa EAK owat siwut EA + AK > EK. a) Jos KH lisätään molemmin puolin, niin owat EA + AK + KH > EK + KH, eli EA + AH > EK + KH. e) Taas owat kolmikulmassa IKH siwut HK + KI > IH; a) jos IE lisätään molemmin puolin, niin owat HK + KI + IE > IH + IE, eli HK + KE > IH + IE. e) Äsköin näytettiin, että EA + AH > KE + HK: siis owat sitä enemmin EA + AH > IH + IE.

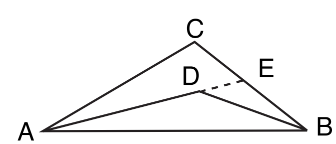
Toiseksi, koska kokmikulmassa IHK ulkokulma EIH > wastakkaista sisäkulmaa IKH, h) ja kolmikulmassa EAK ulkokulma EKH > sisäkulmaa EAK; h) niin on ∠ EIH paljo > ∠ EAK:ta.

pituuden $a = CB$ verran pisteeseen D. Tasakylkisen kolmion $\triangle BCD$ kantakulmat ovat yhtä suuret, joten kolmion $\triangle ABD$ kulma D on pienempi kuin kulma B, ja siis lauseen 1.19 nojalla sivu AB eli c on lyhempi kuin AD, joka on $b + a$. $\square$

Aschan kiinnittää huomiota siihen, että kolmioepäyhtälö on sama asia kuin *toinen kolmioepäyhtälö*, jonka mukaan kolmiossa jokainen sivu on suurempi kuin kahden muun erotus.
Kolmioepäyhtälöön liittyy myös Aschanin muistutus, jossa hän korostaa tuloksen "itsestäänselvyyttä" vetoamalla aikaisemmin esittämäänsä periaatteeseen, jonka mukaan jana on lyhin tie pisteestä toiseen. Mitään tällaista ei tietenkään kuulu Eukleideen systemaattiseen esitykseen, mutta jo epikurolaisten filosofien tiedetään moittineen aikansa matematiikoita siitä, että nämä olivat todistavinaan asian, joka on selviö paitsi ihmiselle jopa aasillekin, joka kyllä kulkee rehunsa luo suoraan eikä kulman kautta.
Kolmioepäyhtälö on Eukleideen järjestelmässä tärkeä lause, mutta vielä tärkeämpi se on nykymatematiikan näkökulmasta, sanoohan se, että euklidisen ja itse asiassa myös epäeuklidisen geometrian tasopinta on *metrinen avaruus* ja siihen voi siis standardimenetelmin ottaa käyttöön jatkuvuuden käsitteen. Todistamalla, että suorat ja ympyrät ovat jatkuvia käyriä voi sitten nykymenetelmin tarkastaa, että ympyrä todella leikkaa suoraa, jos suoran lähin piste on lähempänä ympyrän keskipistettä kuin ympyrän kehä. Vastaava pätee kahdelle ympyrälle. Pelkkä kolmioepäyhtälö ei tosin riitä tällaisen todistuksen pohjaksi - tarvitaan myös *täydellisyysaksiooma*.

Lause 1.21. *Olkoon D kolmion $\triangle ABC$ sisällä. Tällöin janat AD ja DB ovat yhteensä vähemmän kuin sivut AC ja CB. Lisäksi kulma $\measuredangle ADB$ on suurempi kuin $\measuredangle ACB$.*

Todistus.



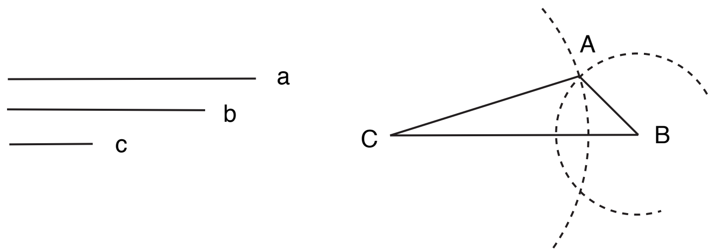
Sivua AD voidaan jatkaa, kunnes se leikkaa sivun BC jossain pisteessä E.
Kolmioepäyhtälö takaa, että AE on lyhempi kuin AC ja CE yhteensä. Samoin EB on lyhempi kuin DE ja EB yhteensä.

Kulmien vertailua koskeva väite havaitaan todeksi käyttämällä ulkokulmaepäyhtälöä ensin kolmion $\triangle ACE$ sisäkulmaan $\measuredangle C$ ja ulkokulmaan $\measuredangle AEB$ ja sen jälkeen kolmion $\triangle DBE$ sisäkulmaan $\measuredangle DEB = \measuredangle AEB$ ja ulkokulmaan $\measuredangle ACB$. □

Aschan muistuttaa tämänkin tuloksen ”itsestäänselvyydestä’, tällä kertaa pelkästään havaintoon vetoamalla. On vaikeaa nähdä tällaisen muistutuksen esittämiselle muita syitä kuin pedagoginen virhearvio.

Tehtävä 1.22. **(Kolmion konstruktioehto)** *Kolmioepäyhtälöt toteuttavista kolmesta janasta voi koota kolmion.*

Ratkaisu.



Olkoon annettuna kolme janaa a, b ja c, jotka toteuttavat kolmioepäyhtälön ehdon. Tehtävänä on siis konstruoida kolmio, jossa BC on yhtä pitkä kuin a, CA on yhtä pitkä kuin b ja AB on yhtä pitkä kuin c. Ohje on seuraava: Piirrä pisteestä D alkaen suora ja leikkaa siitä peräkkäin janat DC, CB ja BE, jotka ovat yhtä suuret kuin janat a, b ja c [1.3]. Piirrä ympyrä, jonka keskipiste on C ja joka kulkee D:n kautta ja toinen ympyrä, jonka keskipiste on B ja joka kulkee E:n kautta [Post. 3]. Yhdistä B ja C ympyröiden leikkauspisteeseen A.

Todistetaan, että konstruktio antaa halutunlaisen kolmion, jollainen siis on olemassa.

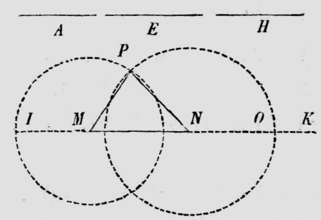
Ympyrän määritelmän mukaan janat DC ja CA ovat yhtä suuret, mutta $DC = b$, joten $CA = b$ [Aks. 1]. Vastaavasti $BA = c$ ja suoraan konstruktion mukaan $CB = a$. □

34

M. Myös tämäkin esitelmä melkein on itseselwä; sillä sen ymmärtää jokainen, että EA ja AH yhteensä tekewät E:n ja H:n wälille suuremman polwen kuin EI ja IH yhteensä. Mutta kuta pitempi polwi, sitä jyrkempi käännös. Sentähden kulma EAH, joka on käännöksen paikalla A:ssa, pitää olla pienempi kulmaa EIH, joka on käännös EI:stä IH:hon.

22. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka kolmikulma tehdään kolmesta tietystä suorasta wiiwasta, joista kaksi, kuinka hywänsä otetaan, owat yhteen kolmatta suuremmat?

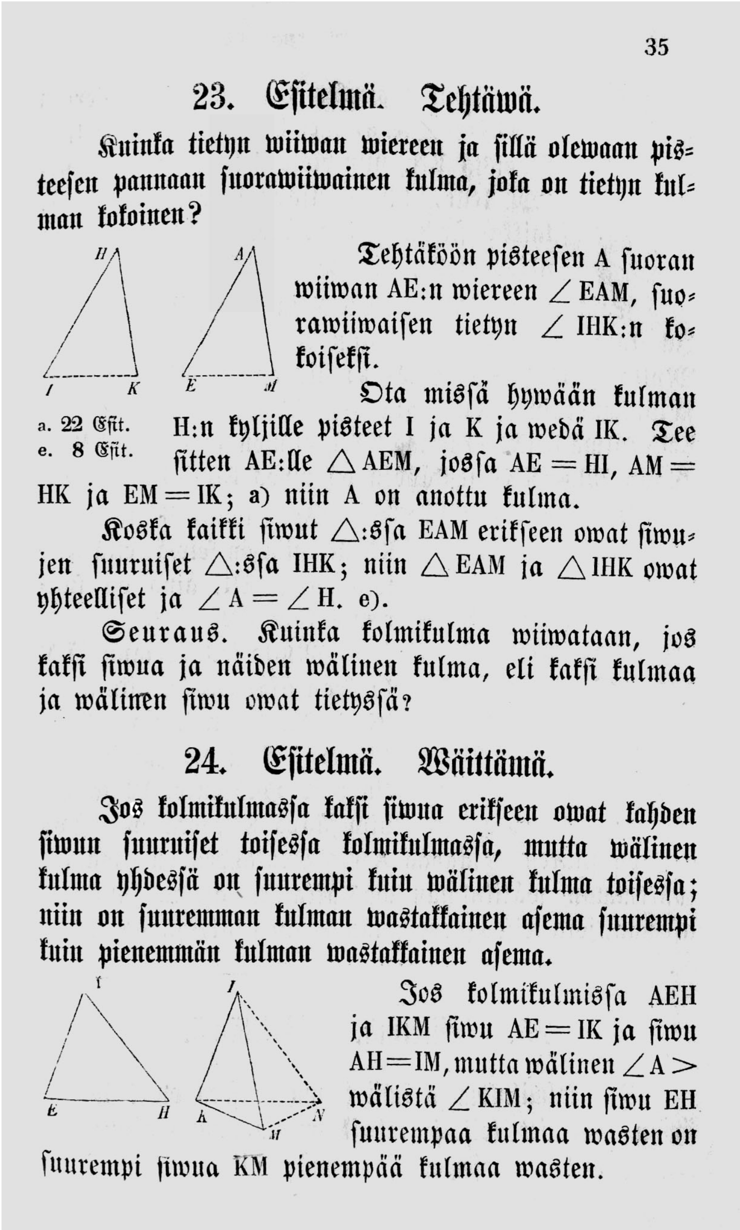


Jos suorat wiiwat A, E, H, täyttäwät 20:stä esitelmästä seuraawan waatimuksen, että kaksi yhteensä, kuinka otetaan, owat kolmatta suuremmat; niin tee heistä kolmikulma.

a. 3 Esit.
e. 3 Waat.
h. 15 Määrit.
i. 1 Selw.

Wedä suora wiiwa IK. Leikkaa siitä IM = A, MN = E ja NO = H. a) Ota M keskipisteeksi ja wiiwaa ympyrä IP pisteetse I. e) Ota sitten N keskipisteeksi ja tee ympyrä OP. e) Yhdistä MP ja PN; niin MPN on anottu kolmikulma.

Koska MP = MI, h) ja MI = A, niin on MP = A. i) Ja koska NP = NO, h) ja NO = H, niin on NP = H. i) Myös on MN = E. Siis owat kaikki siwut MP, MN, NP, kolmikulmassa MPN erikseen yhtäsuuret kuin A, E, H: ja siis näistä tehty kolmikulma.



35

23. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietyn wiiwan wiereen ja sillä olewaan pisteesen pannaan suorawiiwainen kulma, joka on tietyn kulman kokoinen?

Tehtäköön pisteesen A suoran wiiwan AE:n wiereen ∠EAM, suorawiiwaisen tietyn ∠IHK:n kokoiseksi.

Ota missä hywään kulman H:n kyljille pisteet I ja K ja wedä IK. Tee sitten AE:lle △AEM, jossa AE = HI, AM = HK ja EM = IK; a) niin A on anottu kulma.

a. 22 Esit.
e. 8 Esit.

Koska kaikki siwut △:ssa EAM erikseen owat siwujen suuruiset △:ssa IHK; niin △EAM ja △IHK owat yhteelliset ja ∠A = ∠H. e).

Seuraus. Kuinka kolmikulma wiiwataan, jos kaksi siwua ja näiden wälinen kulma, eli kaksi kulmaa ja wälinen siwu owat tietyssä?

24. Esitelmä. Wäittämä.

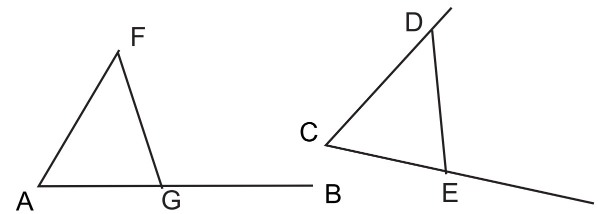
Jos kolmikulmassa kaksi siwua erikseen owat kahden siwun suuruiset toisessa kolmikulmassa, mutta wälinen kulma yhdessä on suurempi kuin wälinen kulma toisessa; niin on suuremman kulman wastakkainen asema suurempi kuin pienemmän kulman wastakkainen asema.

Jos kolmikulmissa AEH ja IKM siwu AE = IK ja siwu AH = IM, mutta wälinen ∠A > wälistä ∠KIM; niin siwu EH suurempaa kulmaa wasten on suurempi siwua KM pienempää kulmaa wasten.

Jo varhaisissa Eukleides-käsikirjoituksissa, kuten Prokluksen editiossa vuodelta 450 on huomattu, että Eukleides ei perustele, miksi yllä olevan konstruktion ympyrät leikkaavat toisensa jossain pisteessä A. Asiaa voi parantaa huomaamalla, että kolmioepäyhtälön ehdosta seuraa, että jälkimmäinen ympyrä leikkaa suoraa DE pisteen E lisäksi myös toisessa pisteessä, joka on janalla CB ja itse asiassa ensimmäisen ympyrän sisällä. Piste E puolestaan on sen ulkopuolella. Jos hyväksytään jatkuvuusperiaate, jonka mukaan ympyrä leikkaa toista, mikäli sillä on piste sekä toisen sisä- että ulkopuolella, niin todistus on oleellisesti valmis.

TEHTÄVÄ 1.23. *Kulma on siirrettävä haluttuun kärkeen siten, että kylkenä on siitä alkava annettu puolisuora.*

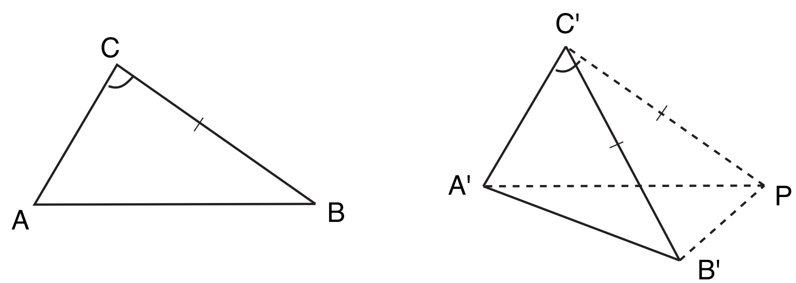
RATKAISU.



Olkoon annettuna suora AB ja kulma DCE. Pitää konstruoida sellainen piste F, että $\measuredangle BAF = \measuredangle ECD$.
Valitaan suoralta AB piste G siten, että $AG = CE$ [1.3]. Sitten — menetellen kuten edellisessä tehtävässä — konstruoidaan kolmio $\triangle AGF$, jossa $AG = CE$ ja $GF = ED$ [1.22]. SSS-lauseen 1.8 mukaan kolmiot $\triangle AGF$ ja $\triangle CED$ ovat yhtenevät, joten myös $\measuredangle GAF = \measuredangle ECD$. Tämä onkin väite, sillä kulma $\measuredangle GAF$ on sama kuin $\measuredangle BAF$. $\square$

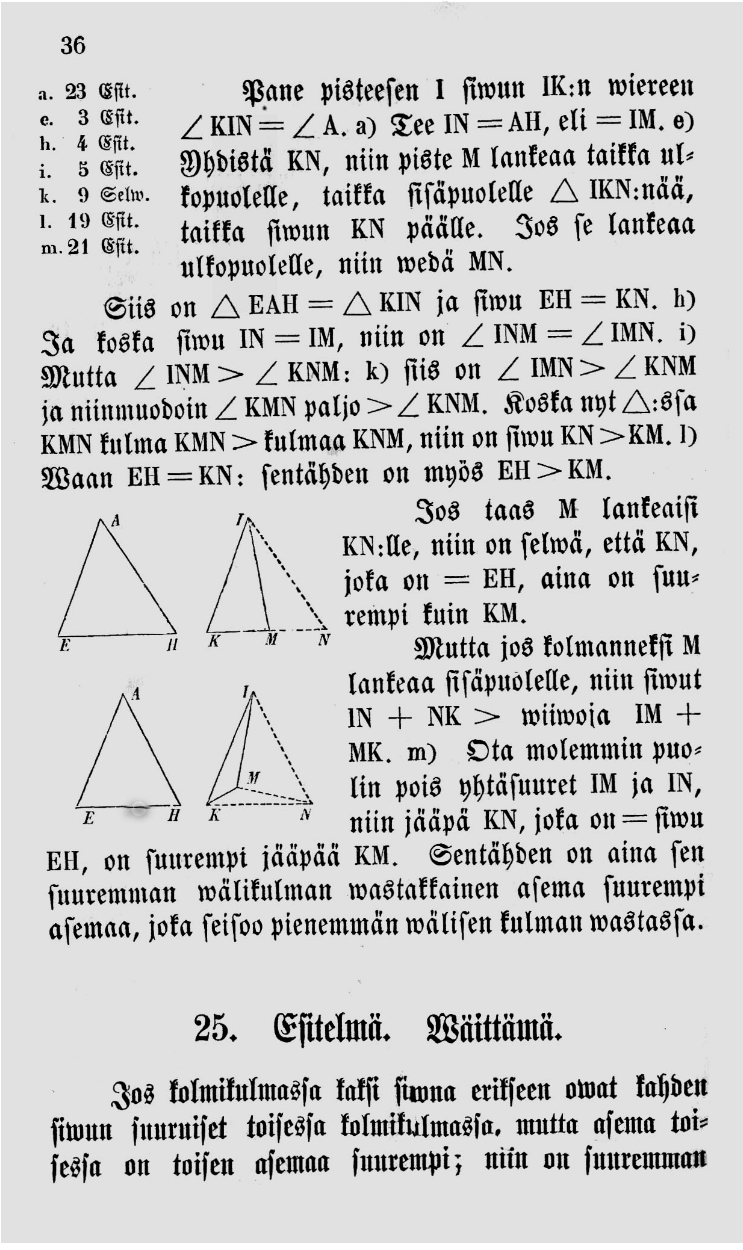
Aschan esittää seurauksena, että kolmion voi konstruoida, kun on annettuna joko kaksi sivua ja niiden välinen kulma tai kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu.
Eukleides ja Aschan jättävät kumpikin huomiotta, että kulma voidaan siirtää kummallekin puolelle puolisuoraa. Seuraavan lauseen todistuksessa on valittava oikein.

Lause 1.24. *Olkoon kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kaksi sivua parittain yhtä suuret, siis esim. $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ ja $BC = B'C'$, mutta niiden väliset kulmat eri suuret, siis esim. $\measuredangle ACB > \measuredangle A'C'B'$. Tällöin suuremman kulman vastainen sivu on suurempi kuin pienemmän kulman vastainen sivu, siis $AB > A'B'$.*



Todistus. Siirretään kulma $\measuredangle ACB$ kärkeen C' siten, että yhtenä kylkenä on siitä alkava puolisuora $\overrightarrow{C'A'}$ ja vapaa kylki on samalla puolella kuin piste B' [1.23]. Leikataan vapaasta kyljestä janan CB mittainen pala, jolloin löytyy apupiste P siten, että $C'P = C'B'$ ja $\measuredangle ACB = \measuredangle A'C'P$ [1.3]. Nyt kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'PC'$ ovat SKS-säännön 1.4 nojalla yhtenevät. Todistus viimeistellään lauseita 1.19, 1.21 ja 1.23 käytellen eri tavoin riippuen siitä, onko B' samalla vai eri puolella suoraa AP kuin piste C', tai ehkä tuolla suoralla. Jos B' ja C' esimerkiksi ovat eri puolilla, kuten kuvassa, niin $\measuredangle C'PB' > \measuredangle A'PB'$ ja siis kolmion $\triangle B'C'P$ tasakylkisyyden vuoksi $\measuredangle C'B'P > \measuredangle A'PB'$ [1.5]. Niinmuodoin $\measuredangle A'B'P > \measuredangle A'PB'$ eli kolmiosta $\triangle A'B'P$ kulma $\measuredangle A'B'P$ on suurempi kuin kulma $\measuredangle APB'$ [Aks. 9]. Lauseen 1.19 mukaan siis $A'P > A'B'$. Mutta $AB = A'P$, ja siis $AB > A'B'$, kuten väitettiin. Muut tapaukset käsitellään samalla idealla. □

Toisin kuin vanhimmat Eukleides-käsikirjoitukset (ja minä) Aschan esittää koko todistuksen kaikissa tapauksissa. Tapaukset eroavat toisistaan hiukan; erityisesti kannattaa huomata, että kolmannessa tapauksessa käytetään lauseen 1.19 sijasta lausetta 1.21.



36

a. 23 Esit.
e. 3 Esit.
h. 4 Esit.
i. 5 Esit.
k. 9 Selw.
l. 19 Esit.
m. 21 Esit.

Pane pisteesen I siwun IK:n wiereen ∠ KIN = ∠ A. a) Tee IN = AH, eli = IM. e) Yhdistä KN, niin piste M lankeaa taikka ulkopuolelle, taikka sisäpuolelle △ IKN:nää, taikka siwun KN päälle. Jos se lankeaa ulkopuolelle, niin wedä MN.

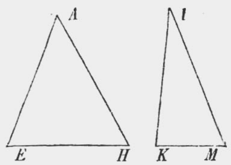
Siis on △ EAH = △ KIN ja siwu EH = KN. h) Ja koska siwu IN = IM, niin on ∠ INM = ∠ IMN. i) Mutta ∠ INM > ∠ KNM: k) siis on ∠ IMN > ∠ KNM ja niinmuodoin ∠ KMN paljo > ∠ KNM. Koska nyt △:ssa KMN kulma KMN > kulmaa KNM, niin on siwu KN > KM. l) Waan EH = KN: sentähden on myös EH > KM.

Jos taas M lankeaisi KN:lle, niin on selwä, että KN, joka on = EH, aina on suurempi kuin KM.

Mutta jos kolmanneksi M lankeaa sisäpuolelle, niin siwut IN + NK > wiiwoja IM + MK. m) Ota molemmin puolin pois yhtäsuuret IM ja IN, niin jääpä KN, joka on = siwu EH, on suurempi jääpää KM. Sentähden on aina sen suuremman wälikulman wastakkainen asema suurempi asemaa, joka seisoo pienemmän wälisen kulman wastassa.

25. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kolmikulmassa kaksi siwua erikseen owat kahden siwun suuruiset toisessa kolmikulmassa, mutta asema toisessa on toisen asemaa suurempi; niin on suuremman aseman wastakkainen kulma isompi pienemmän aseman wastakkaista kulmaa.



Jos AE = IK ja AH = IM, mutta EH > KM; niin on ∠ A > ∠ I.

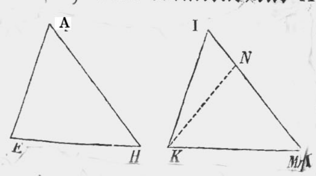
Ellei ∠ A ole > ∠ I, niin ∠ A on yhtäsuuri kuin I, taikka pienempi sitä. Jos ∠ A olisi = ∠ I, niin olisi myös asema EH = KM, a) jota toisin ehdotettiin: sentähden ∠ A ei ole = ∠ I. Jos taas ∠ A olisi < ∠ I, niin olisi myös asema EH < KM, e) jota myös toisin ehdotettiin: siis ∠ A ei ole pienempikään kulmaa I. Koska ∠ A siis ei taida olla yhtäsuuri, eikä pienempikään kuin ∠ I, niin ∠ A pitää olla suurempi kulmaa I.

a. 4 Esit.
e. 24 Esit.

26. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kaksi kulmaa kolmikulmassa erikseen owat kahden kulman kokoiset toisessa kolmikulmassa ja yksi siwu yhdessä on siwunsa suuruinen toisessa kolmikulmassa, yhtäsuuret siwut olkoot joko tiettyjen kulmien wälissä, eli yhdenkokoisien siwujen wastassa; niin kolmikulmat owat yhteelliset, ja muutkin siwut ja kulma yhdessä siwuinsa ja kulmansa suuruiset toisessa kolmikulmassa.

Jos ∠ E = ∠ IKM, ∠ H = ∠ M ja ensin siwu EH = siwu KM, jotka owat tiettyjen kulmien wälissä; niin kolmikulmat AEH ja IKM owat kaikin puolin yhteelliset: siis myöskin siwu AE = IK, AH = IM ja ∠ A = ∠ KIM.



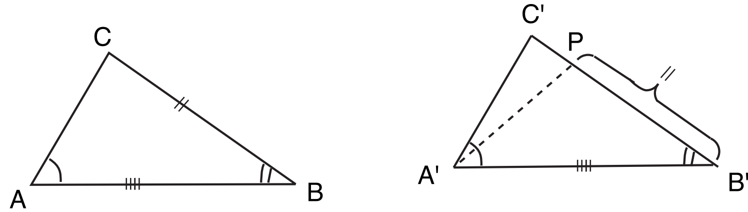
Ellei siwu AH olisi = IM, niin toinen niistä olisi isompi. Olkoon IM > AH. Leikkaa MN = AH, a) ja yhdistä KN.

Lause 1.25. **(Käänteinen tulos lauseelle 1.24)** *Olkoon kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ kaksi sivua parittain yhtä suuret, siis esim. $AC = A'C'$ ja $BC = B'C'$, mutta kolmannet sivut eri suuret, siis esim. $AB > A'B'$. Tällöin tuon sivun vastaiset kulmat ovat eri suuret samoin päin kuin kulmatkin, siis $\measuredangle ACB > \measuredangle A'C'B'$.*

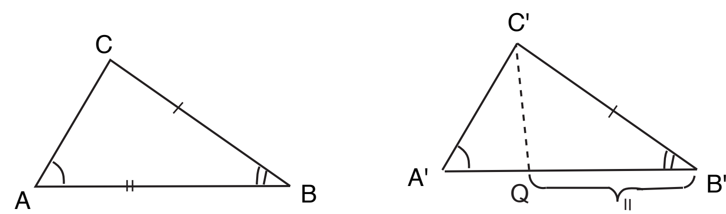
Todistus. Lause 1.25 on loogisesti yhtäpitävä lauseiden 1.4 ja 1.24 konjunktion ”1.4 ja 1.24” kanssa, siis jo todistettu. □

Lause 1.26. **(KSK ja KKS)** *Kaksi kolmiota ovat yhtenevät, jos niissä on yksi yhteinen sivu ja kaksi yhtä suurta kulmaa siten, että joko (KSK) sivu on kummassakin kolmiossa mainittujen kulmien välissä tai (KKS) sivu on kummassakin kolmiossa yhtä suuren kulman vastapäinen.*

Todistus. Tarkastellaan aluksi tilannetta KSK, jossa yhteinen sivu on yhteisten kulmien välissä.



Elleivät CB ja $C'B'$ ole yhtä pitkät, on toinen niistä pitempi. Olkoon se esimerkiksi $C'B'$. Valitaan C':n ja B':n välistä piste P siten, että $PB' = CB$. Tällöin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'P$ ovat SKS-lauseen 1.4 mukaan yhtenevät, joten $\measuredangle CAB = \measuredangle PA'B'$ eli $\measuredangle C'A'B' = \measuredangle PA'B'$, mikä on mahdotonta, koska jälkimmäinen on osa edellistä [Aks. 9]. Ristiriita todistaa, että CB ja $C'B'$ ovat yhtä pitkät.
Tarkastellaan nyt tilannetta KKS, jossa yhteinen sivu ei ole yhteisten kulmien välissä, vaan esimerkiksi A-kulmaa vastassa.



Jos $AB = A'B'$, niin kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhtenevät SKS-lauseen 1.4 nojalla, joten riittää tutkia tapaus, jossa $AB \neq A'B'$, esimerkiksi $AB > A'B'$, kuten kuvassa. Siinä tapauksessa leikataan sivusta $A'B'$ janan AB pituinen pala $B'Q$ [1.3], jolloin SKS-lauseen 1.4 nojalla kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle QB'C'$ ovat yhtenevät, erityisesti $\measuredangle CAB = \measuredangle C'QB'$. Mutta oletettiin, että $\measuredangle CAB = \measuredangle C'A'B'$, joten $\measuredangle C'QB' = \measuredangle C'A'B'$, mikä on kolmiossa $\triangle C'A'Q$ ulkokulmalauseen 1.16 vastaista, siis mahdotonta. □

Olisi houkuttelevaa tyytyä todistamaan lauseesta 1.26 vain toinen puoli, esimerkiksi KSK, ja vedota sitten siihen, että kolmion kulmien summa on aina sama, joten kaikki kulmat tunnetaan, kun kaksi niistä on annettu. Kolmion kulmasummaa ei kuitenkaan ole vielä tässä vaiheessa johdettu, eikä Eukleides sitä halua vielä tehdäkään, sillä kulmasummalause perustuu yhdensuuntaisuusaksioomaan, jota ei vielä ole käytetty kertaakaan. Eukleideen lauseiden järjestys on valittu siten, että todistetaan ensin ne, jotka eivät edellytä yhdensuuntaisuusaksiooman voimassaoloa. Näiden lauseiden muodostamaa kokonaisuutta sanotaan *neutraaliksi geometriaksi*, koska se sisältyy niin euklidiseen kuin epäeuklidiseenkin geometriaan. Lauseen 26 voisi tietenkin todistaa samaan tapaan kuin SKS-lauseen 1.4, siis "kolmiota siirtämällä" ja aksioomaan 8 vedoten. Näin Eukleides ei tee, koska käytössä on parempi todistus. (Vrt. lauseen 1.3 todistuksen kommentteihin.)
Lause 26 on ilmeisesti jo kauan ennen Eukleidesta ollut egyptiläisten pyramidinrakentajien tiedossa ainakin suorakulmaiselle kolmiolle, ja kreikkalaisista matemaatikoista jo varhaisimman, Thaleen, kerrotaan todistaneen sen.
Eukleidesta myöhemmissä geometriankirjoissa on tässä kohdassa usein luettelo kolmioiden yhtenevyyslauseista. Yleensä mukana on myös tapaus SSK, jossa yhtä suuria ovat kaksi sivua ja toisen vastainen kulma. Tällöin tosin tarvitaan lisäehto, esimerkiksi sellainen, että toisten yhtä suurien sivujen vastaiset kulmat ovat molemmissa kolmioissa terävät, molemmissa tylpät tai molemmissa suorat. Aschan seuraa Eukleidesta eikä esitä lainkaan SSK-sääntöä. Sen sijaan hän esittää lauseen 1.26 seurauksen, jonka mukaan tasakylkisen kolmion kärjestä kannalle piirretty *korkeusjana* jakaa sekä kannan että kärkikulman tasan kahtia.

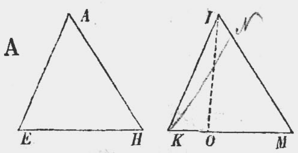
38

a. 3 Esit.
e. 4 Esit.
h. 9 Selw.
i. 16 Esit.

Koska EH = KM ja AH = MN, ja ∠ H = ∠ M; niin △ AEH ja △ NKM owat yhteelliset: e) siis ∠ E = ∠ NKM. Mutta ∠ E otettiin = ∠ IKM: sentähden on ∠ NKM = ∠ IKM, osa kokonaisensa kanssa, joka on mahdotonta. h) Siis siwu IM ei ole > siwua AH, waan molemmat owat yhtäsuuret. Ja koska siwu EH = KM, siwu AH = IM ja wälinen ∠ H = ∠ M; niin on myös △ AEH kaikin puolin yhteellinen △:n IKM:n kanssa. e).

Olkoon toiseksi siwut AH = IM, jotka seisowat yhdenkokoisia kulmia wasten; niin △ AEH ja △ IKM owat kaikin puolin yhteelliset, ja siis siwu EH = KM.

A



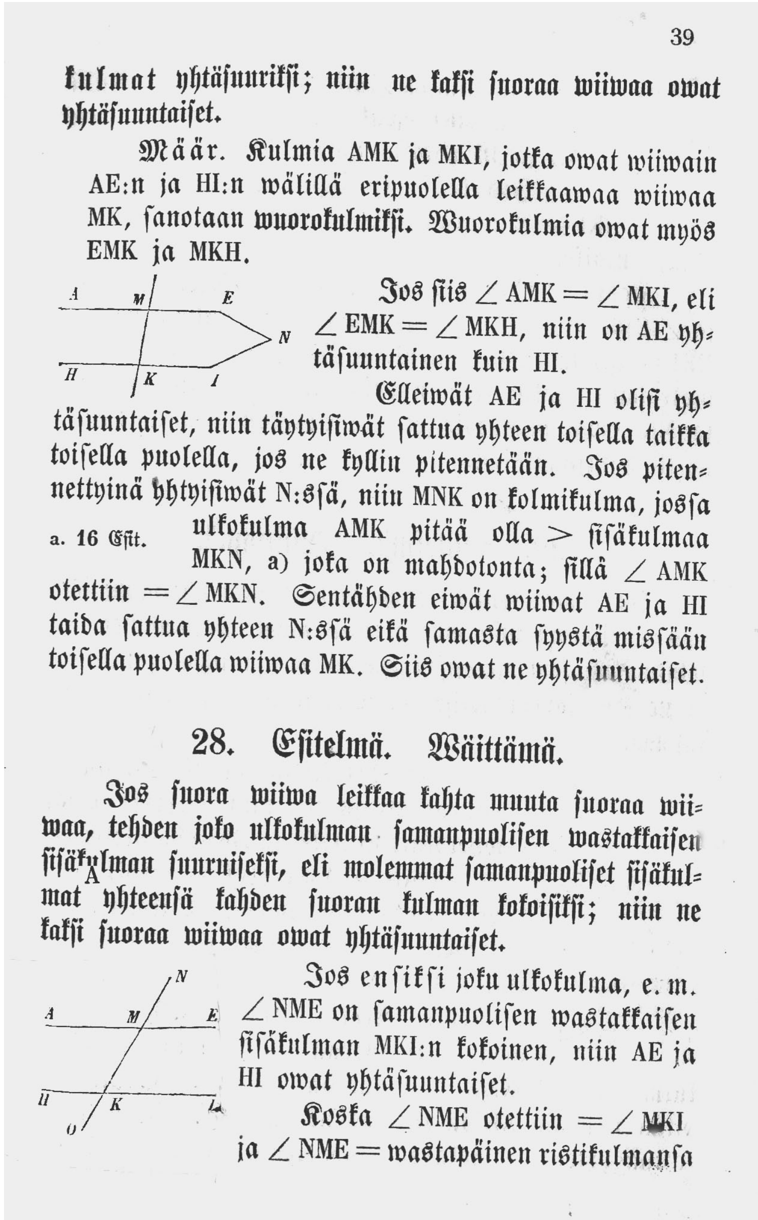
Ellei nyt siwu EH olisi = KM, niin yksi niistä olisi suurempi. Olkoon KM > EH. Tee OM = EH, a) ja wedä IO.

Tässäkin todistetaan, niinkuin ensimäisessä tapauksessa, että △ AEH ja △ IOM owat kaikin puolin yhteelliset ja ∠ E = ∠ IOM. Mutta ∠ E otettiin = ∠ IKM: sentähden olisi ∠ IOM = ∠ IKM: ulkokulma olisi wastakkaisen sisäkulman kokoinen, joka on mahdotonta. i) Niinmuodoin siwut EH ja KM eiwät ole erisuuret, waan yhtäsuuret. Sitten näytetään samalla tawalla kuin ensin, että myös △ AEH ja △ IKM owat kaikin puolin yhteelliset.

Seuraus. Jos yhtäkylkisen kolmikulman kärestä kohtisuora wiiwa wedetään asemaa wasten, niin se leikkaa sekä aseman että kulman keskeltä kahtia.

27. Esitelmä. Wäittämä.

Jos suora wiiwa leikkaa kahta muuta suoraa wiiwaa samalla tasapinnalla, tehden niin sanotut wuoro-


39

kulmat yhtäsuuriksi; niin ne kaksi suoraa wiiwaa owat yhtäsuuntaiset.

Määr. Kulmia AMK ja MKI, jotka owat wiiwain AE:n ja HI:n wälillä eripuolella leikkaawaa wiiwaa MK, sanotaan **wuorokulmiksi.** Wuorokulmia owat myös EMK ja MKH.

Jos siis ∠ AMK = ∠ MKI, eli ∠ EMK = ∠ MKH, niin on AE yhtäsuuntainen kuin HI.

Elleiwät AE ja HI olisi yhtäsuuntaiset, niin täytyisiwät sattua yhteen toisella taikka toisella puolella, jos ne kyllin pitennetään. Jos pitennettyinä yhtyisiwät N:ssä, niin MNK on kolmikulma, jossa ulkokulma AMK pitää olla > sisäkulmaa MKN, a) joka on mahdotonta; sillä ∠ AMK otettiin = ∠ MKN. Sentähden eiwät wiiwat AE ja HI taida sattua yhteen N:ssä eikä samasta syystä missään toisella puolella wiiwaa MK. Siis owat ne yhtäsuuntaiset.

a. 16 Esit.

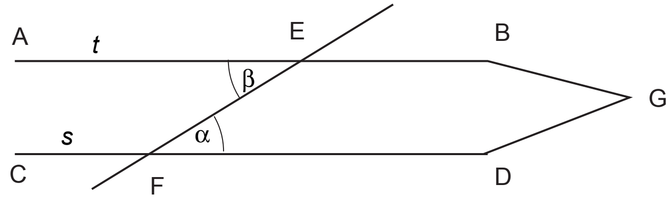
28. Esitelmä. Wäittämä.

Jos suora wiiwa leikkaa kahta muuta suoraa wiiwaa, tehden joko ulkokulman samanpuolisen wastakkaisen sisäkulman suuruiseksi, eli molemmat samanpuoliset sisäkulmat yhteensä kahden suoran kulman kokoisiksi; niin ne kaksi suoraa wiiwaa owat yhtäsuuntaiset.

Jos ensiksi joku ulkokulma, e. m. ∠ NME on samanpuolisen wastakkaisen sisäkulman MKI:n kokoinen, niin AE ja HI owat yhtäsuuntaiset.

Koska ∠ NME otettiin = ∠ MKI ja ∠ NME = wastapäinen ristikulmansa

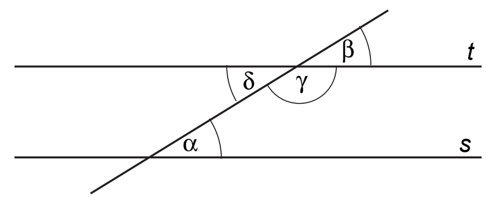
Lause 1.27. **(Vuorokulmalause)** *Jos oheisessa kuviossa* vuorokulmat $\alpha = \measuredangle EFD$ *ja* $\beta = \measuredangle AEF$ *ovat yhtä suuret, niin suorat* $s = CD$ *ja* $t = AB$ *ovat yhdensuuntaiset,* $s \parallel t$.



Todistus. Jos ei $s \parallel t$, niin yhdensuuntaisuuden määritelmän 13 mukaan on olemassa niiden leikkauspiste G, joka on jommalla kummalla puolella leikkaavaa suoraa FE, esimerkiksi samalla puolella kuin D, kuten kuvassa. Tällöin syntyy kolmio $\triangle EGF$, jossa ulkokulma $\measuredangle AEF$ on yhtä suuri kuin sisäkulma $\measuredangle EFG$, mikä on vastoin ulkokulmalausetta 1.16 ja siis mahdotonta. Siis $s \parallel t$. □

Itse asiassa vuorokulmalause 1.27 ja ulkokulmalause 1.16 ovat loogisesti yhtäpitävät samaan tapaan kuin mm. lauseet 1.18 ja 1.19 keskenään, joten uusi todistus on tarpeeton.

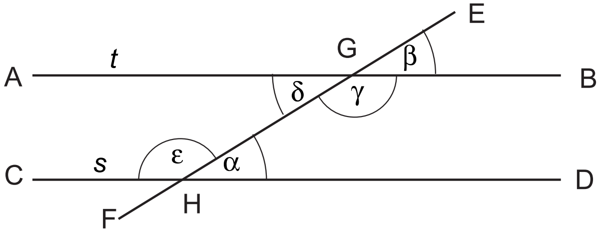
Lause 1.28. **(Vuorokulmalauseen toisia muotoja)**
a) Jos kuvassa kulmien α *ja* γ *summa on kaksi suoraa kulmaa, niin suorat* s *ja* t *ovat yhdensuuntaiset.*
b) Jos kuvassa kulmat α *ja* δ *ovat yhtä suuret, niin suorat* s *ja* t *ovat yhdensuuntaiset.*



Todistus. Lause seuraa edellisestä yhdistettynä ristikulmalauseeseen 1.15 ja vieruskulmalauseeseen 1.13. □

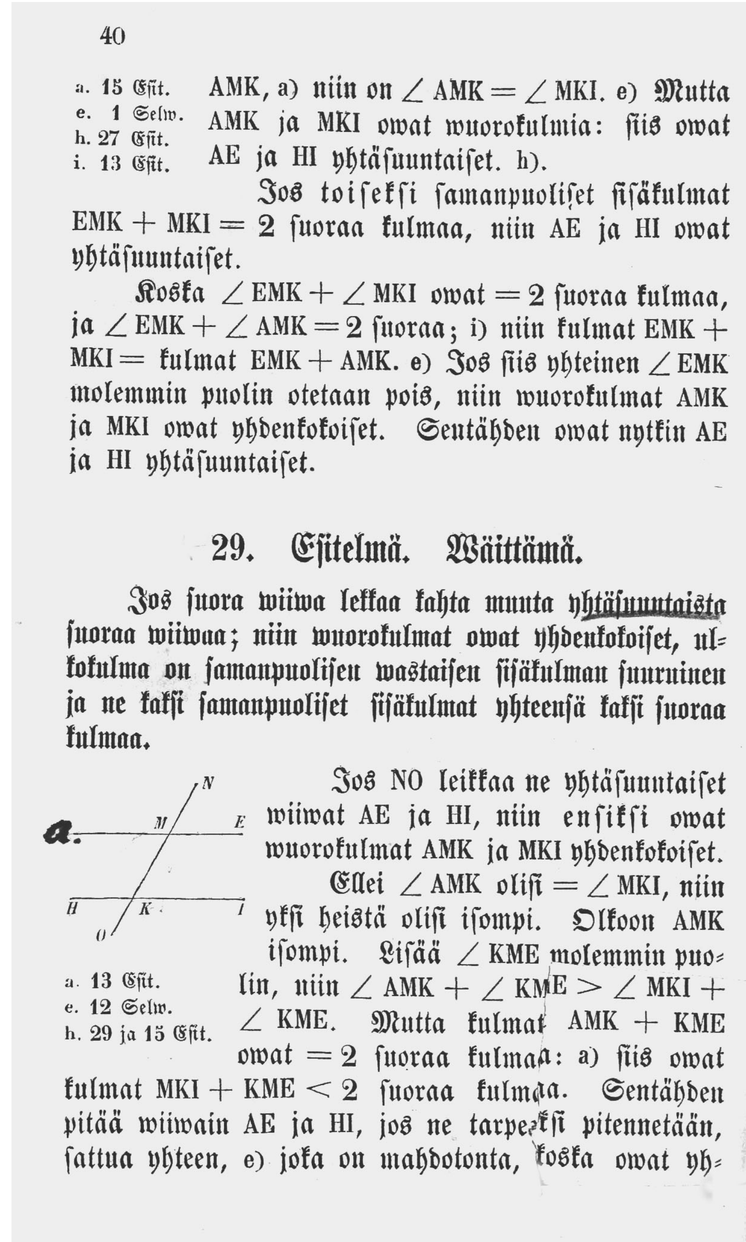
Vuorokulmalauseesta alkaa Eukleideen 1. kirjan toinen jakso, jossa käsitellään yhdensuuntaisuutta — alkuosassahan pääkohteena olivat kolmiot. Molemmat asiakokonaisuudet yhdistetään 1. kirjan kolmannessa osassa, jossa tutkitaan kolmioiden kokoa eli pinta-alaa suunnikkaiden avulla, selvitetään milloin kaksi kolmiota ovat yhtä suuria olematta välttämättä yhteneviä ja todistetaan lopuksi Pythagoraan lause.
Useiden aikaisempien lauseiden käänteinen muoto oli helppo seuraus alkuperäisestä lauseesta, mutta vuorokulmalauseen osalta asia on toisin. Käänteinen vuorokulmalause 1.29 on itse asiassa riippumaton kaikesta tähän mennessä todistetusta ja sisällöltään periaatteessa sama asia kuin yhdensuuntaisuusaksiooma 12 eli Eukleideen 5. postulaatti, joka on esitelty lauseen 1.17 yhteydessä.

Lause 1.29. **(Käänteinen vuorokulmalause)**



Jos $s \parallel t$, *niin* $\alpha = \beta$, $\alpha = \delta$ *ja* α *ja* γ *ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa.*

Vieruskulmalauseen 1.13 ja ristikulmalauseen 1.15 nojalla riittää tietenkin todistaa, että α ja γ ovat yhteensä tasan kaksi suoraa kulmaa. Eukleideen yhdensuuntaisuusaksiooman mukaan s ja t leikkaisivat toisensa, jos α ja γ olisivat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa. Toisaalta α ja γ eivät ole yhteensä myöskään enemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, sillä silloin niiden vieruskulmat δ ja ϵ olisivat yhteensä alle kaksi suoraa kulmaa, jolloin s ja t leikkaisivat toisensa kuitenkin.
Koska yhdensuuntaisuusaksiooma eri muodoissaan on asia, joka erottaa euklidisen geometrian epäeuklidisesta, korostamme sitä esittämällä käänteisen vuorokulmalauseen alkuperäisen todistuksen nykysuomeksi, vaikka Aschanin käännöskin on hyvä.


40

a. 15 Esit.
e. 1 Selw.
h. 27 Esit.
i. 13 Esit.

AMK, a) niin on ∠ AMK = ∠ MKI. e) Mutta AMK ja MKI owat wuorokulmia: siis owat AE ja HI yhtäsuuntaiset. h).

Jos toiseksi samanpuoliset sisäkulmat EMK + MKI = 2 suoraa kulmaa, niin AE ja HI owat yhtäsuuntaiset.

Koska ∠ EMK + ∠ MKI owat = 2 suoraa kulmaa, ja ∠ EMK + ∠ AMK = 2 suoraa; i) niin kulmat EMK + MKI = kulmat EMK + AMK. e) Jos siis yhteinen ∠ EMK molemmin puolin otetaan pois, niin wuorokulmat AMK ja MKI owat yhdenkokoiset. Sentähden owat nytkin AE ja HI yhtäsuuntaiset.

29. Esitelmä. Wäittämä.

Jos suora wiiwa leikkaa kahta muuta yhtäsuuntaista suoraa wiiwaa; niin wuorokulmat owat yhdenkokoiset, ulkokulma on samanpuolisen wastaisen sisäkulman suuruinen ja ne kaksi samanpuoliset sisäkulmat yhteensä kaksi suoraa kulmaa.

a. 13 Esit.
e. 12 Selw.
h. 29 ja 15 Esit.

Jos NO leikkaa ne yhtäsuuntaiset wiiwat AE ja HI, niin ensiksi owat wuorokulmat AMK ja MKI yhdenkokoiset.

Ellei ∠ AMK olisi = ∠ MKI, niin yksi heistä olisi isompi. Olkoon AMK isompi. Lisää ∠ KME molemmin puolin, niin ∠ AMK + ∠ KME > ∠ MKI + ∠ KME. Mutta kulmat AMK + KME owat = 2 suoraa kulmaa: a) siis owat kulmat MKI + KME < 2 suoraa kulmaa. Sentähden pitää wiiwain AE ja HI, jos ne tarpeeksi pitennetään, sattua yhteen, e) joka on mahdotonta, koska owat yh-

41

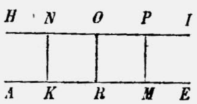
täsuuntaiset. Niinmuodoin ∠ AMK ei saata olla > ∠ MKI, waan molemmat owat yhtäsuuret.

Toiseksi on ulkokulma NME = sisäkulma MKI; sillä molemmat owat ∠ AMK:n kokoiset. h).

Kolmanneksi owat samanpuoliset sisäkulmat EMK + MKI = 2 suoraa kulmaa.

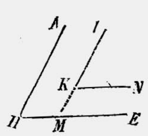
Sillä koska ∠ AMK = ∠ MKI, niin jos lisäät molemmin puolin ∠ EMK, owat ∠ AMK + ∠ EMK = ∠ MKI + ∠ EMK. Mutta AMK + EMK = 2 suoraa kulmaa, a) siis owat myös MKI + EMK = 2 suoraa kulmaa.

1 Seuraus. Jos ulkokulmista, sisäkulmista, eli wuorokulmista waan yksi on suora, niin owat myös kaikki muutkin suoria. Niinmuodoin suora wiiwa yhtaikaa on kohtisuorassa molempia yhtäsuuntaisia wiiwoja wasten.



2 Seuraus. Jos useampi wiiwoja (NK, OR, PM) wedetään yhtäsuuntaisten wiiwain (AE, HI) wälille kohtisuorin toisesta toiseen, niin kohtisuorat wiiwat, yhtäsuuntaisten keskellä, owat 1) yhtäsuuntaiset ja 2) yhtäpitkät. Myös owat yhtäsuuntaisten palaiset (NO ja KR, OP ja RM), kohtisuorain wiiwain wälillä, yhtäpitkät. *).

3 Seuraus. Saman pisteen kautta ei woida wetää useampia kuin yksi suora wiiwa tietyn suoran wiiwan kanssa yhtäsuntaiseksi.



4 Seuraus. Kaksi kulmaa (AEH ja IKN), joiden kyljet owat yhtäsuuntaiset, owat keskenänsä yhdenkokoiset. — Sillä jos pitennät IK:n, kunnes leikkaa kyljen HE, niin ∠ IKN = ∠ KMH = ∠ AEH. Sentähden on myös ∠ IKN = ∠ AEH.

*) Todistetaan 28 ja 26 esitelmäin perusteille.

Todistus. Leikatkoon suora EF yhdensuuntaisia suoria AB ja CD. Väitetään, että vuorokulmat $\measuredangle AGH$ ja $\measuredangle GHD$ ovat yhtä suuret, kulmat $\measuredangle EGB$ ja $\measuredangle GHD$ ovat keskenään yhtä suuret ja *samanpuoliset sisäkulmat* $\measuredangle BGH$ ja $\measuredangle GHD$ ovat yhteensä yhtä paljon kuin kaksi suoraa kulmaa.

Näin on, sillä jos kulmat $\measuredangle AGH$ ja $\measuredangle GHD$ ovat erisuuret, niin toinen niistä on suurempi. Olkoon $\measuredangle AGH$ suurempi. Lisätään kumpaankin sama kulma $\measuredangle BGH$ (ja huomataan, että) kulmat $\measuredangle AGH$ ja $\measuredangle BGH$ ovat yhteensä enemmän kuin kulmat $\measuredangle BGH$ ja $\measuredangle GHD$. Mutta $\measuredangle AGH$ ja $\measuredangle BGH$ ovat (vieruskulmia ja siis) yhteensä kaksi suoraa kulmaa [1.13], joten $\measuredangle BGH$ ja $\measuredangle GHD$ ovat yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa. Näin ollen suorat AB ja CD kohtaavat yhdensuuntaisuusaksiooman nojalla toisensa; mutta ne eivät voi kohdata toisiaan, koska ne on oletettu yhdensuuntaisiksi. Siksi kulmat $\measuredangle AGH$ ja $\measuredangle GHD$ eivät olekaan erisuuret vaan yhtä suuret.

Nyt kulmat AGH ja EGB ovat (ristikulmina) yhtä suuret [1.15], joten kulma $\measuredangle EGB$ on yhtä suuri kuin $\measuredangle GHD$ [Aks. 1]. Lisätään kumpaankin kulma $\measuredangle BGH$ (jolloin huomataan, että) kulmat $\measuredangle EGB$ ja $\measuredangle BGH$ ovat yhtä suuria kuin kulmat $\measuredangle BGH$ ja $\measuredangle GHD$. Mutta $\measuredangle EGB$ ja $\measuredangle BGH$ ovat (vieruskulmia ja siis) yhteensä kaksi suoraa kulmaa [1.13]. Siksi $\measuredangle BGH$ ja $\measuredangle GHD$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa. □

Aschan esittää vuorokulmalauseelle ja käänteiselle vuorokulmalauseelle neljä seurauslausetta, joita ei ole Eukleideella.

Seuraus 1. *Jos suora leikkaa toisen kahdesta yhdensuuntaisesta suorakulmaisesti, niin se leikkaa toisenkin suorakulmaisesti.*

Seuraus 2. *Jos kahdelle yhdensuuntaiselle piirretään kummallekin normaali, niin normaalit ovat keskenään yhdensuuntaiset ja niistä alkuperäisten suorien väliin jäävät osat ovat yhtä pitkät. Tässä mielessä kaksi yhdensuuntaista suoraa ovat kaikista kohdista yhtä kaukana toisistaan.*

Aschan väittää virheellisesti, että tämä kohta olisi seuraus vuorokulmalauseesta 1.28 eikä lauseesta 1.29. Lisäksi hän on tuskin huomannut esittävänsä tässä lauseena asian, jonka on Eukleideesta poiketen sisällyttänyt yhdensuuntaisuuden määritelmään. Vastaavia loogisia virheitä on valitettavasti nykyisissäkin oppikirjoissa.

Seuraus 3. *Annetun suoran ulkopuolisen pisteen kautta kulkee enintään yksi annetun kanssa yhdensuuntainen suora.*

Tämä on yhdensuuntaisuusaksiooman tunnetuin esitystapa, *Playfairin aksiooma*.

Seuraus 4. *Kaksi kulmaa, joiden kyljet ovat yhdensuuntaiset, ovat yhtä suuret.*

Sanomatta jää, että kyseessä voi olla myös annetun vieruskulma.

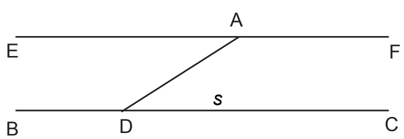
Lause 1.30. *Saman suoran kanssa yhdensuuntaiset suorat ovat keskenäänkin yhdensuuntaiset*

Todistus. Väite seuraa vuorokulmalauseesta 1.27 ja sen käänteisestä lauseesta 1.29. □

Sisällöltään lause 1.30 on sama kuin Playfairin aksiooma, sillä se, että eri suorat s ja r ovat molemmat suoran s suuntaisia, mutta leikkaavat toisensa jossain pisteessä P, on sama asia kuin että pisteen P kautta kulkee kaksi suoralle s yhdensuuntaista suoraa, nimittäin t ja r. Lause 1.30 kieltää näistä asiantiloista toisen ja Playfairin aksiooma toisen.

Tehtävä 1.31. *On piirrettävä annetun pisteen kautta annetun suoran kanssa yhdensuuntainen suora.*

Ratkaisu. Olkoon A annettu piste ja $s = BC$ annettu suora. Tehtävänä on löytää A:n kautta kulkeva BC:n suuntainen suora. Valitaan suoralta BC mielivaltainen piste D. Siirretään kulma $\angle ADC$ kärkeen A siten, että sivuna on siitä alkava puolisuora $\overrightarrow{AD}$ ja vapaa

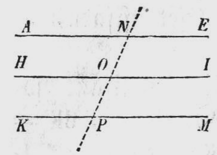


kylki $\overrightarrow{AE}$ on samalla puolella kuin piste B [1.23]. Jatketaan $\overrightarrow{AE}$ pis-

42

30. Esitelmä. Wäittämä.

Saman wiiwan kanssa yhtäsuuntaiset wiiwat owat keskenänsäkin yhtäsuuntaiset.



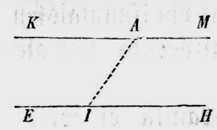
Jos wiiwat AE ja KM juoksewat samaa suuntaa kuin wiiwa HI, niin ne owat keskenänsä yhtäsuuntaiset.

Wedä suora wiiwa NP, joka leikkaa kaikki kolme wiiwaa AE, HI ja KM. Koska nyt AE ja HI owat yhtäsuuntaiset, niin wuorokulmat ANO ja NOI owat yhdenkokoiset; ja koska HI ja KM owat yhtäsuuntaiset, niin ulkokulma NOI = samanpuolinen sisäkulma OPM. a) Siis on ∠ ANO = ∠ OPM, ja näiden ollessa wuorokulmia, owat niinmuodoin wiiwat AE ja KM yhtäsuuntaiset. e)

a. 29 Esit.
e. 27 Esit.

31. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietystä pisteestä wedetään suora wiiwa tietyn suoran wiiwan kanssa yhtäsuuntaiseksi?



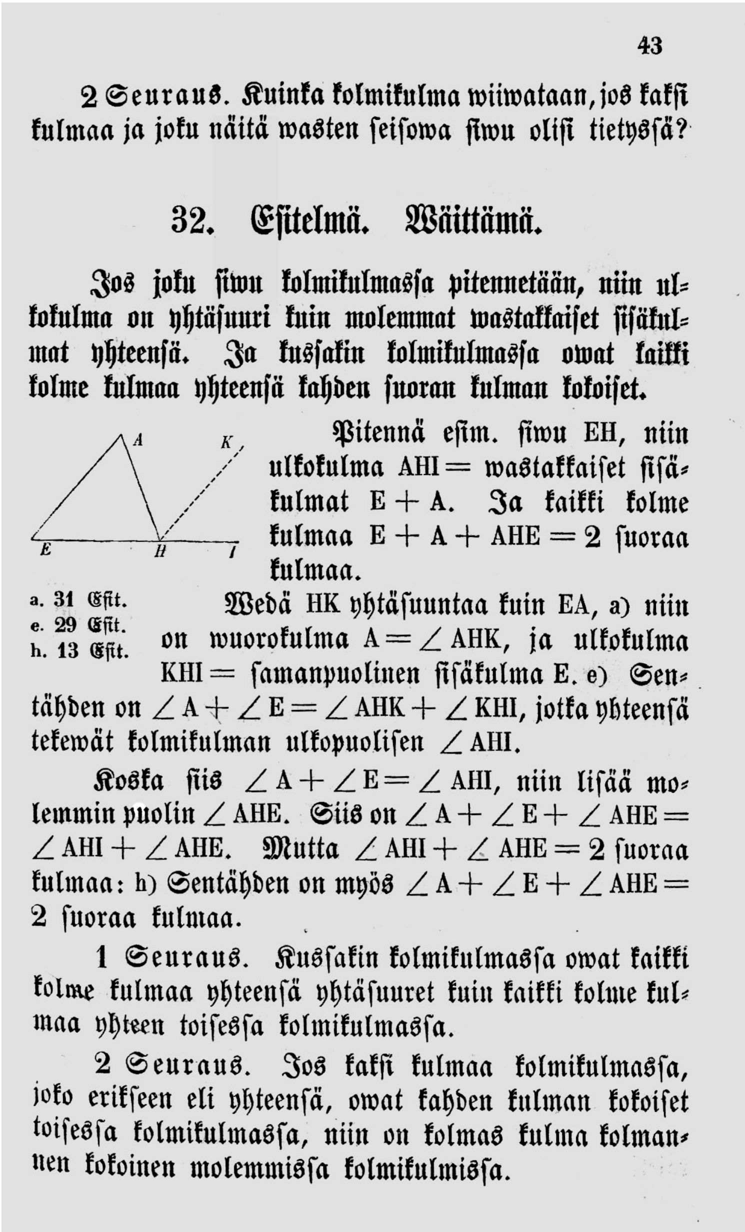
A:sta wedettäköön suora wiiwa yhtäsuuntaa kuin EH.

Wedä tietystä pisteestä A suora wiiwa AI mihin hywänsä tietylle wiiwalle EH. Pane pisteesen A wiiwan AI:n wiereen ∠ IAK = ∠ AIH, a) ja pitennä KA, niin KM ja EH owat yhtäsuuntaiset.

a. 23 Esit.
e. 27 Esit.

Sillä wuorokulmat AIH ja IAK owat tehty yhdenkokoisiksi. e).

1 Seuraus. Kuinka suora wiiwa wedetään tietylle suoralle wiiwalle tietystä pisteestä wiiwan ulkopuolella, että kulma wiiwain wälillä on tietyn suorawiiwaisen kulman suuruinen?



43

2 Seuraus. Kuinka kolmikulma wiiwataan, jos kaksi kulmaa ja joku näitä wasten seisowa siwu olisi tietyssä?

32. Esitelmä. Wäittämä.

Jos joku siwu kolmikulmassa pitennetään, niin ulkokulma on yhtäsuuri kuin molemmat wastakkaiset sisäkulmat yhteensä. Ja kussakin kolmikulmassa owat kaikki kolme kulmaa yhteensä kahden suoran kulman kokoiset.

Pitennä esim. siwu EH, niin ulkokulma AHI = wastakkaiset sisäkulmat E + A. Ja kaikki kolme kulmaa E + A + AHE = 2 suoraa kulmaa.

a. 31 Esit.
e. 29 Esit.
h. 13 Esit.

Wedä HK yhtäsuuntaa kuin EA, a) niin on wuorokulma A = ∠ AHK, ja ulkokulma KHI = samanpuolinen sisäkulma E. e) Sentähden on ∠ A + ∠ E = ∠ AHK + ∠ KHI, jotka yhteensä tekewät kolmikulman ulkopuolisen ∠ AHI.

Koska siis ∠ A + ∠ E = ∠ AHI, niin lisää molemmin puolin ∠ AHE. Siis on ∠ A + ∠ E + ∠ AHE = ∠ AHI + ∠ AHE. Mutta ∠ AHI + ∠ AHE = 2 suoraa kulmaa: h) Sentähden on myös ∠ A + ∠ E + ∠ AHE = 2 suoraa kulmaa.

1 Seuraus. Kussakin kolmikulmassa owat kaikki kolme kulmaa yhteensä yhtäsuuret kuin kaikki kolme kulmaa yhteen toisessa kolmikulmassa.

2 Seuraus. Jos kaksi kulmaa kolmikulmassa, joko erikseen eli yhteensä, owat kahden kulman kokoiset toisessa kolmikulmassa, niin on kolmas kulma kolmannen kokoinen molemmissa kolmikulmissa.

teen A yli suoraksi EF. Nyt vuorokulmat $\measuredangle EAD$ ja $\measuredangle ADC$ ovat yhtä suuret, joten vuorokulmalauseen 1.27 nojalla suorat BC ja EF ovat yhdensuuntaiset. □

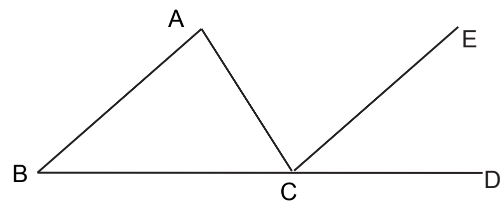
Konstruktio ja todistus olisi voitu tehdä jo kohdassa 1.27, jossa on vuorokulmalause, siis ilman yhdensuuntaisuusaksioomaa. Lause esitetään vasta tässä siitä syystä, että vasta nyt tiedetään käänteisen vuorokulmalauseen perusteella, että ratkaisu on yksikäsitteinen. Playfairin aksiooma sanoo tämän eksplisiittisesti.

Aschan esittää seuraavat Eukleideelta löytymättömät tehtävät:

Seuraus 1. *Annetun suoran ulkopuolisen pisteen kautta voi konstruoida suoran, joka leikkaa annetun suoran annetussa kulmassa.*

Seuraus 2. *(KKS-konstruktio) Kolmio voidaan konstruoida, kun tunnetaan kaksi kulmaa ja toisen vastainen sivu; tämähän seuraa edellisestä seurauksesta.*

Lause 1.32. **(Kulmasummalause)** *Kolmion ulkokulma on yhtä suuri kuin kahden muun kärjen sisäkulmat yhteensä ja kolmion kaikkien sisäkulmien summa on kaksi suoraa kulmaa.*



Todistus. Tarkastellaan kolmion $\triangle ABC$ ulkokulmaa $\measuredangle ACD$. Konstruoidaan pisteen C kautta yhdensuuntainen suoralle AB [1.31]. Käänteisen vuorokulmalauseen 1.29 mukaan vuorokulmat $\measuredangle BAC$ ja $\measuredangle ACE$ ovat yhtä suuret. Käänteinen vuorokulmalause sanoo myös, että kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle ECD$ ovat keskenään yhtä suuret. Kulmien $\measuredangle ACE$ ja $\measuredangle ECD$ summa $\measuredangle ACD$ on siis yhtä suuri kuin kulmat $\measuredangle BAC$ ja $\measuredangle ABC$ yhteensä, eli ulkokulma kärjessä C on yhtä suuri kuin sisäkulmat $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ yhteensä, kuten väitettiin. Kulmasummaa koskeva väite seuraa tästä ja siitä, että vieruskulmien $\measuredangle BCA$ ja $\measuredangle ACE$ summa on kaksi suoraa kulmaa [1.13]. □

Kolmion kulmasumma on ollut käytännössä tiedossa kauan ennen Eukleidesta, mahdollisesti jo muinaisessa Egyptissä. Eukleideen todistusta tunnetumpi on Pythagoraan todistus, joka yleensä esitetään geometrian oppikirjoissa ja jossa apuviivana on yhden sivun suuntainen, vastakkaisen kärjen kautta kulkeva suora. Aikojen kuluessa on koetettu keksiä yhdensuuntaisuuden teoriasta kokonaan riippumattomia todistuksia, mutta sellaista ei voi olla olemassa, sillä yhdensuuntaisuusaksiooma on todistettavissa, jos kolmion kulmasumma oletetaan tunnetuksi. Itse asiassa vähempikin riittää: 1800-luvun alussa todistettiin, että jos edes yhden kolmion kulmasumma on vähintään 180 astetta, niin yhdensuuntaisuusaksiooma on voimassa.

Aschanin Eukleides-versiossa kulmasummalause korostuu ansionsa mukaisesti, sillä siitä esitetään peräti yhdeksän tärkeää seurausta. Todistuksia ei ole, eikä mikään korollaareista taaskaan esiinny vanhimmissa Eukleides-käsikirjoituksissa, vaikka ne ovat tietenkin olleet tunnettuja. Viisi ensimmäistä ovat Strömerin ruotsinnoksesta. Seuraus 6 liittyy yhteen geometrian historian kuuluisimmista ongelmista: miten voisi jakaa *mielivaltaisen* kulman kolmeen yhtä suureen osaan harpilla ja viivoittimella. Seuraus 8 puolestaan liittyy kuvioon, jonka avulla kulmasummalauseen väite on luultavasti alun perin keksitty suorakulmaisen kolmion tapauksessa. Tässä pisteet B, C ja D ovat samalla A-keskisellä ympyränkehällä ja tilanne on sama kuin Thaleen lauseessa, jonka mukaan puoliympyrään liittyvä kehäkulma on suora. Seurauksen 7 kuviota taas käytetään koulukirjoissa toisinaan Pythagoraan lauseen todistamiseen. Sellainen todistus perustuu kolmioiden yhdenmuotoisuuteen — aiheeseen, jota Eukleides käsittelee vasta Alkeiden 6. kirjassa.

Seuraus 1. *Kaikissa kolmioissa on sama kulmien summa.*

Seuraus 2. *Jos kaksi kulmaa kahdessa kolmiossa ovat yhtä suuret, on kolmaskin.*

Seuraus 3. *Suorakulmaisessa kolmiossa terävien kulmien summa on suora kulma.*

Seuraus 4. *Jos tasakylkisessä kolmiossa kylkien välinen kulma on suora kulma, niin kantakulmat ovat kumpikin puolet suorasta kulmasta (eli 45°).*

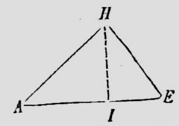
44

3 Seuraus. Jos yksi kulma kolmikulmassa on suora, niin tekewät toiset kaksi kulmaa yhteensä suoran kulman.

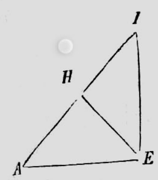
4 Seuraus. Jos yhtäkylkisissä kolmikulmissa kylkien wälinen kulma on suora, niin kumpainen aseman wiereisistä kulmista on puoli suoraa kulmaa, se on 45°.

5 Seuraus. Jokainen kulma yhtäsiwuisissa kolmikulmissa on kolmas osa kahdesta suorasta kulmasta, eli $\frac{2}{3}$ osaa yhdestä suorasta kulmasta, se on 60°.

6 Seuraus. Kuinka suora kulma leikataan kolmeen yhtäsuureen osaan.



7 Seuraus. Jos △:ssa AHE suoran kulman kärestä H wedetään kohtisuora wiiwa HI wastakkaiselle siwulle AE, niin suora kulma tältä leikataan kahteen osaan AHI ja IHE, jotka owat winokulmain kokoiset kolmikulmassa, kumpikin osa nimittäin sen kulman kokoinen, joka on toisella puolella kohtisuoraa wiiwaa: ∠ AHI = ∠ AEH ja ∠ IHE = ∠ HAE.



8 Seuraus. Jos tasakylkisen kolmikulman AHE:n yksi kylki pitennetään kärestä eteenpäin, että HI = HE, ja IE yhdistetään, niin ∠ AEI on suora ja IE ⊥ AE.

a. 5 Esit.
e. 2 Selw.
h. 10 Määrit.

Sillä ∠ A = ∠ AEH ja ∠ I = ∠ HEI: a) siis on ∠ A + ∠ I = AEH + ∠ HEI, se on = ∠ AEI. e) Mutta kaikki kolme kulmaa A + I + AEI = 2 suoraa kulmaa: sentähden on ∠ AEI = suora kulma ja IE ⊥ AE. h).

9 Seuraus. Monisiwuisissa kuwioissa tekewät kaikki kulmat yhteen kaksi kertaa niin monta suoraa

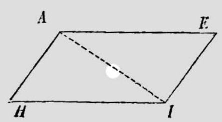
kulmaa, kuin on siwuja kuwiossa, wähennetty 4:llä suoralla kulmalla. 8-kulmassa owat esim. kaikki kulmat yhteensä 16 — 4 = 12 suoraa kulmaa.

Sillä jos otat jonkun pisteen kuwiossa ja wedät suoria wiiwoja joka kulman kärkeen, niin kuwio jaetaan näiltä niin moneen kolmikulmaan, kuin on siwuja kuwiossa. Näiden yhdistetyt kulmat tekewät 2 kertaa niin monta suoraa kulmaa, kuin on kolmikulmia. Mutta ne kulmat, jotka seisowat pisteen ympäri kuwiossa ja tekewät yhteen 4 suoraa kulmaa, a) eiwät ole kuwion kulmia ja pitää siis otettaman kulmien pääluwusta.

a. 2 Seur. 13 Esit.

33. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kaksi suoraa wiiwaa owat yhtäsuuntaiset ja yhtäsuuret, niin owat myös suorat wiiwat, jotka samalla puolella yhdistäwät näiden päät, yhtäsuuntaiset ja yhtäsuuret.



Jos wiiwat AE ja HI owat yhtäsuuntaiset ja yhtäsuuret; niin owat myöskin wiiwat AH ja EI, jotka samalla puolella yhdistäwät näiden päät, yhtäsuuntaiset ja yhtäsuuret.

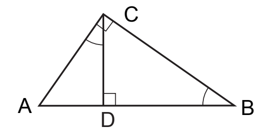
a. 29 Esit.
e. 4 Esit.
h. 27 Esit.

Wedä AI. Koska AE ja HI owat yhtäsuuntaiset, niin owat wuorokulmat EAI ja AIH yhdenkokoiset. a) Nyt on siwu AE = HI, siwu AI on yhteinen ja wälinen ∠ EAI = ∠ AIH. Sentähden kolmikulmat EAI ja AIH owat yhteelliset, siwu AH = EI ja ∠ AIE = ∠ IAH. e) Mutta kulmat AIE ja IAH owat wuorokulmia: siis owat AH ja EI yhtäsuuntaiset. h) Niinmuodoin on AH yhtäsuuntainen ja yhtäsuuri kuin EI.

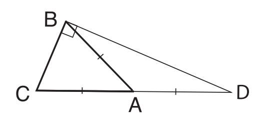
SEURAUS 5. *Tasasivuisen kolmion kulmat ovat kukin $\frac{2}{3}$ suorasta kulmasta (eli $60°$).*

SEURAUS 6. *Suora kulma osataan jakaa harpilla ja viivoittimella kolmeen yhtä suureen osaan.*

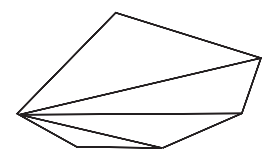
SEURAUS 7. *Jos suorakulmaisessa kolmiossa piirretään normaali suorasta kulmasta sen vastakkaiselle sivulle, niin syntyvissä kahdessa osakolmiossa on yhtä suuret kulmat kuin alkuperäisessä.*



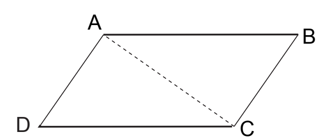
SEURAUS 8. *Jos tasakylkisen kolmion $\triangle(ABC)$ kylki jatketaan kärjen A yli oman pituutensa verran kohtaan D, niin $\triangle(CBD)$ on suorakulmainen sillä tavalla, että $CD \perp BD$.*



SEURAUS 9. *n-kulmion kulmien summa on $(n-2)$ kertaa kaksi suoraa kulmaa.*



LAUSE 1.33. *Jos kaksi janaa ovat yhdensuuntaiset (eli yhdensuuntaisilla suorilla) ja yhtä suuret, niin ovat myös niiden samanpuolisia päätepisteitä yhdistävät janat yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät.*

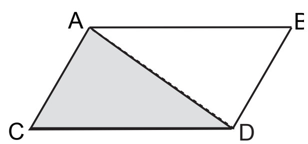


Todistus. Olkoot janat AB ja CD yhdensuuntaiset ja yhtä pitkät ja B ja D eri puolella suoraa AC. Osoitetaan, että $AD \parallel BC$ ja $AD = BC$.
Käänteisen vuorokulmalauseen 1.29 nojalla $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD$, oletettiin $AB = CD$ ja tietenkin on $AC = AC$. Siksi kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle CDA$ ovat SKS-lauseen 1.4 mukaan yhtenevät ja siis $AD = BC$ ja lisäksi $\measuredangle ACD = \measuredangle BAC$, josta vuorokulmalauseen 1.27 mukaan seuraa $AD \parallel BC$. □

Aschan on kirjan alussa määritellyt *suunnikkaan* nelikulmioksi, jolla on kaksi paria yhdensuuntaisia sivuja. Hän muistuttaa tässä kohdassa, että nyt on todistettu, että nelikulmio, jolla on yksi pari yhdensuuntaisia ja yhtä pitkiä sivuja, on suunnikas.

Lause 1.34. *Suunnikkaassa vastakkaiset sivut ja kulmat ovat yhtä suuret ja lävistäjä jakaa suunnikkaan kahteen yhtenevään osaan.*

Todistus.



Suunnikas on määritelty nelikulmioksi, jossa vastakkaiset sivut ovat yhdensuuntaisia. Olkoon AC suunnikkaan $\square ABCD$ lävistäjä. Oletuksesta $AB \parallel CD$ seuraa käänteisen vuorokulmalauseen 1.29 nojalla, että $\measuredangle BAC = \measuredangle ACD$. Vastaavasti myös $\measuredangle BCA = \measuredangle DAC$. Mutta tietenkin $AD = DA$, joten kolmiot $\triangle ACD$ ja $\triangle CAB$ ovat KSK-lauseen 1.26 mukaan yhtenevät, erityisesti $AB = CD$, $AD = BC$ ja $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA$. Väite $\measuredangle DAB = \measuredangle BCD$ voidaan todistaa joko vastaavasti tai huomauttamalla Eukleideen tapaan, että nämä kulmat muodostuvat kahdesta osasta, jotka kolmioiden yhtenevyyden takia ovat parittain yhtä suuret [Aks. 2]. □

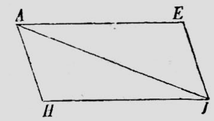
Aschan esittää lopuksi pedagogisesti hyvin perustellun muistututuksen: Edellinen lause pätee kääntäenkin: "perivastoin on nelikulmio suunnikas, kunhan sen vastakkaiset sivut tai vastakkaiset kulmat ovat parittain yhtä suuret".

46

M. Tämä tahtoo toisten sanoa, että nelisiwuinen kuwio, jossa on kaksi yhtäsuuntaista ja yhtäsuurta siwua, on suunnikas.

34. Esitelmä. Wäittämä.

Suunnikkaassa owat wastakkaiset siwut ja kulmat yhdenkokoiset, ja läwistäjä jakaa sen keskeltä kahtia.



Suunnikkaassa AEIH, jonka läpi AI juoksee, on siwu AE = HI, AH = EI, ∠ EAH = ∠ EIH ja ∠ AEI = ∠ AHI; myöskin on △ AEI = △ AHI.

a. 29 Esit.
e. 26 Esit.
h. 2 Selw.

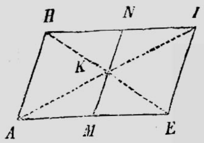
Koska siwut AE ja HI owat yhtäsuuntaiset, niin wuorokulmat EAI ja AIH owat yhdenkokoiset, a) ja koska siwut AH ja EI owat yhtäsuuntaiset, niin HAI ja AIE owat keskenänsä yhdenkokoiset wuorokulmat. a) Siis owat kaksi kulmaa EAI ja AIE △:ssa AEI kulmainsa AIH ja HAI kokoiset toisessa △:ssa AHI, siwu AI on yhteinen, jonka tähden △ EAI on = △ HAI, siwu AE = HI, siwu EI = AH ja ∠ AEI = ∠ AHI. e) Myöskin kokonainen ∠ HAE = kokonainen ∠ HIE, koska ne osittain owat toinen toisensa kanssa yhtäsuuret, h) ∠ HAI = ∠ AIE ja ∠ EAI = ∠ AIH.

M. Periwastoin saatetaan päättää, että nelisiwuinen kuwio on suunnikas, jos sen wastakkaiset kulmat, eli siwut, owat yhdenkokoiset.

1 Seuraus. Jos yksi kulma suunnikkaassa on suora, niin owat kaikki kulmat suoria ja suunnikas suorakulmio.

2 Seuraus. Suunnikkaan kaksi läwistäjää jakaawat toinen toisensa keskeltä kahtia.

3 Seuraus. Jos läwistäjän keskitse wedetään suora wiwa miten hywänsä suunnikkaassa, niin suun-



nikas tältä jaetaan niin, että osakuwiot owat yhteelliset.

Sillä $\triangle$ NKI $\cong$ $\triangle$ AKM, $\triangle$ IKE $\cong$ $\triangle$ AKH ja $\triangle$ MKE $\cong$ $\triangle$ HKN.

4 Seuraus. Suorakulmaisen suunnikkaan läwistäjät owat yhtäsuuret, winokulmaisen erisuuret. Ja päin wastoin on suunnikas suorakulmainen, eli winokulmainen, sen jälkeen kuin läwistäjät owat yhtäsuuret eli erisuuret.

Sillä siwut HI ja IE $\triangle$:ssa HIE (katso edell. kuwaa) owat erikseen yhtäsuuret siwujen AE:n ja EI:n kanssa $\triangle$:ssa AEI. Jos nyt $\angle$ HIE ja $\angle$ AEI owat suorat ja siis yhtäsuuret, niin on siwu HE = AI. a) Mutta jos $\angle$ HIE on teräwä ja siis $\angle$ AEI tylsä, niin siwu HE $<$ siwua AI. e) Toisenpuolinen wäitös todistetaan 25 esitelmän perusteelle.

a. 4 Esit.
e. 24 Esit.

5 Seuraus. Yhtäsiwuisen suunnikkaan läwistäjät owat kohtisuorassa toinen toistansa wasten ja leikkaawat keskeltä kahtia kulmat, joiden läpi menewät. Erisiwuisen suunnikkaan läwistäjät owat wastattain winossa ja tekewät ainoasti wuorokulmat yhtäsuuriksi. Edellisessä owat kaikki molemmilta läwistäjiltä synnytetyt kolmikulmat yhteelliset, jälkimäisessä ainoasti wastakkaiset.

6 Seuraus. Suunnikkaat owat, niinkuin kolmikulmatkin, yhteelliset, jos kaksi siwua ja wälinen kulma, eli kaksi siwua ja yhdistäwä läwistäjä owat yhdenkokoiset.

7 Seuraus. Neliöt owat yhdenkokoiset, joiden siwut owat yhtäsuuret. Ja päin wastoin owat yhtäsuurissa neliöissä myös siwut yhdenkokoiset.

Edellistä woidaan helposti toteen näyttää. Että myös jälkimäisessä wäitöksessä on totuus, näytetään seuraawalla tawalla.

Aschanin käännöksessä seuraa jälleen pitkä rivi omia korollaareja, joista vain numerot 4 ja 7 on todistettu. Seuraus 7 vaatii erityistä huomiota, onhan tämä ensimmäinen kerta, kun Aschan mainitsee jonkin kuvion, tässä neliön, kaksiulotteinen suuruus eli *pinta-ala*. Todistus on alla nykysuomeksi. Kannattaa huomata, että Aschanin kirjaan painettu kuvio, sama kuin Strömerin laitoksessa, on mittasuhteiltaan harhaanjohtava vaikka ei virheellinen.

SEURAUS 1. *Jos suunnikkaassa on yksikin suora kulma, niin se on suorakulmio.*

SEURAUS 2. *Suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.*

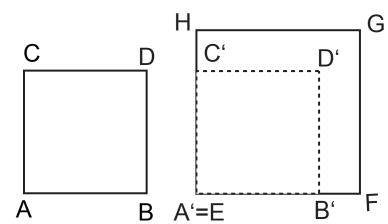
SEURAUS 3. *Jos lävistäjän keskipisteen kautta vedetään suora viiva missä hyvänsä suunnassa, niin se jakaa suunnikkaan kahdeksi yhteneväksi monikulmioksi.*

SEURAUS 4. *Suorakulmion lävistäjät ovat yhtä pitkät. Muun suunnikkaan lävistäjät ovat eripitkät.*

SEURAUS 5. *Vinoneliön lävistäjät ovat suorassa kulmassa toisiaan vasten ja puolittavat vinoneliön kulmat.*

SEURAUS 6. **(Suunnikkaiden SKS-lause)** *Suunnikkaat ovat yhtenevät, jos niissä on samoja kaksi sivua ja niiden välinen kulma.*

SEURAUS 7. *a) Neliöt ovat yhtä suuret, jos niissä on yhtä suuret sivut.*
b) Yhtä suurissa neliöissä on yhtä pitkät sivut.



TODISTUS. a) Seurauksen 6 mukaan neliöt ovat suorastaan yhtenevät ja siis aksiooman 8 nojalla yhtä suuret, jos niillä on yhtä suuret sivut. b) Olkoon neliössä $\square ABCD$ pienempi sivu kuin neliössä $\square EFGH$. Osoitetaan, että neliö $\square ABCD$ on pienempi kuin neliö $\square EFGH$. Leikataan janalta EF janan AB pituinen osajana EB' [1.3]. Merkitään $E = A'$ ja konstruoidaan neliö $\square A'B'C'D'$ samalle puolelle suoraa EF, jolla neliö $\square EFGH$ on. Koska neliöllä $\square A'B'C'D'$ on yhtä pitkä sivu kuin neliöllä $\square ABCD$, nämä neliöt ovat seurauksen 6 nojalla yhtenevät ja siis yhtä suuret. Mutta neliö $\square A'B'C'D'$ on annetun neliön $\square EFGH$ osa, siis sitä pienempi. Siis myös $\square ABCD$ on pienempi kuin $\square EFGH$. $\square$

Lause 1.35. *Jos kahdella suunnikkaalla on yhteinen sivu ja sen vastaiset sivut ovat samalla suoralla, niin suunnikkaat ovat yhtä suuret.*

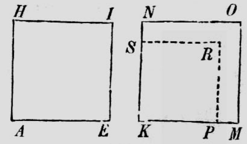
Tässä Eukleides itse ensimmäisen kerran puhuu tasokuvion suuruudesta eli pinta-alasta. Aikaisemmin esiintyneillä *suureilla*, siis janan pituudella ja kulmalla ovat yhtenevyys ja yhtäsuuruus sama asia, mutta tässä tarkasteltavat suunnikkaat eivät ole yhteneviä, vaan muuten vain yhtä suuria.

Todistuksessa tulee käsiteltäväksi eri tapauksia. Eukleides-käsikirjoituksissa (ja alla) todistetaan vain hankalin, mutta Aschan noudattaa myöhempää traditiota käsitellen kaikki.

Todistuksen ideana on paloitella tukittavat yhteneviin osiin. Näin saadaankin suunnikkaan alaa ja siten myös sen puolikkaan eli kolmion kokoa koskevat tulokset johdettua. Saattaisi kuvitella, että vastaavalla tavalla voisi johtaa myös kolmiulotteisen eli avaruusgeometrian kaavoja, vaikkapa pyramidin tilavuuden. Tässä ei kuitenkaan ole onnistuttu, vaan 1900-luvulla on päinvastoin voitu todistaa, että ei ole olemassa mitään paloittelu- ja kokoamistapaa, jolla yleisen nelisivuisen pyramidin tilavuuskaava voitaisiin johtaa. Avaruusgeometria on siis tässä suhteessa oleellisesti erilaista kuin tasogeometria.

Todistus. Olkoot $\square ABCD$ ja $\square EBCF$ suunnikkaita, joilla on sama *kanta* BC ja joilla AD ja EF ovat samalla (kannan suuntaisella) suoralla. Osoitetaan, että ne ovat yhtä suuret. Lauseen 1.34 mukaan sekä AD että EF ovat yhtä pitkiä kuin BC ja siis myös keskenään yhtä pitkiä. Tästä seuraa, että myös $AE = DE$, sillä ne saadaan AD:stä ja EF:stä lisäämällä niihin jana DE. (Kuvan tapaus a)).

48

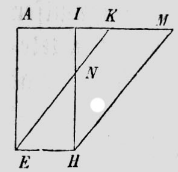


Ellei siwu AE olisi = siwu KM, niin yksi heistä olisi suurempi. Olkoon KM > AE ja niinmuodoin myös KN > kuin AH. Tee KP = KS = AE ja kuwaa P:stä ja S:stä suunnikkaan SP, joka syntyy neliöksi. Neliö AEIH on siis = neliö KPRS, koska siwut AE ja KP owat yhtäsuuret. Mutta AEIH = KMON, sentähden on myös KPRS = KMON, osa kokonaisen kanssa, joka on mahdotonta. Siispä KM ei saata olla > AE, waan pitää olla = AE.

35. Esitelmä. Wäittämä.

Suunnikkaat samalla asemalla ja samain yhtäsuuntaisten wiiwain wälillä owat yhtäpintaiset.

Jos suunnikkaat AEHI ja KEHM samalla asemalla EH owat samain yhtäsuuntaisten wiiwain EH:n ja AM:n wälillä; niin AEHI = KEHM. *).



Tässä woipi ensin tapahtua, että kulma K on ulkopuolella kulmaa I:tä.

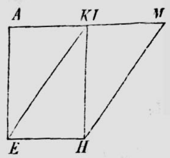
Koska AH on suunnikas, niin on AI = EH; a) ja koska myös EM on suunnikas, niin EH = KM. a) Siis on AI = MK. e) Jos IK lisätään molemmin puolin, niin on AK = IM. h) Mutta myös AE = IH, a) ja wälinen ∠A = ∠HIM. i) Sentähden owat kolmikulmat AEK ja IHM yhteelliset. k) Jos yhteinen △INK otetaan molemmin puolin pois, niin on jääpä epäkäs

a. 34 Esit.
e. 1 Selw.
h. 2 Selw.
i. 29 Esit.
k. 4 Esit.
l. 3 Selw.

*) Suunnikkata kuin nimität, niin luettelet kaikki neljä kirjainta kuwion ympärillä, eli ainoasti ne kaksi, jotka seisowat wastakkaisten kulmain kärjissä. Niinmuodoin sanot AEHI, eli waan AH.

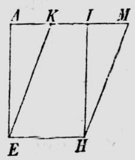
49

AENI = epäkäs KNHM. l) Ja jos sitten △ NEH lisätään molemmin puolin, niin suunnikas AEHI = suunnikas KEHM.



Toiseksi taitawat K ja I langeta päällekkäin.

Silloin sen kohta näkee, että suunnikas AH on kaksi kertaa niin suuri kuin △ KEH, a) ja suunnikas EM myöskin kaksi kertaa niin suuri kuin △ KEH; a) josta seuraa, että suunnikas AH = suunnikas EM.



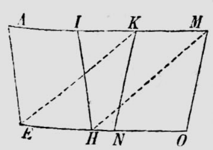
Kolmanneksi K taitaa langeta sisäpuolella I:tä.

Niinkuin ensimäisessä tapauksessa todistetaan tässäkin, että △ AEK = △ IHM. Jos sitten lisätään molemmin puolin epäkkäällä KEHI, niin on suunnikas AH = suunnikas EM.

M. Koska suunnikkaat owat yhtäsuuntaisten wiiwain wälillä, niin niiden korkeus on sama kuin wiiwain wäli toinen toisestansa. Sentähden woidaan myös sanoa, että suunnikkaat samalla asemalla ja korkeudella owat yhtäpintaiset. Tämä muistutus koskee yhtä hywin myös tulewiin esitelmiin.

36. Esitelmä. Wäittämä.

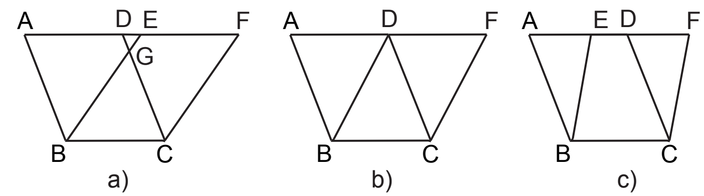
Suunnikkaat yhtäsuurilla asemilla ja samain yhtäsuuntaisten wiiwain wälillä owat yhtäpintaiset.



Jos asema EH = NO, ja EO ja AM owat yhtäsuuntaiset; niin on suunnikas AH = suunnikas KO.

Yhdistä EK ja HM. Koska EH otettiin = NO, ja NO = KM; a) niin EH = KM. e) Mutta EH ja KM owat yhtäsuuntaiset: sentähden owat EK ja HM myös

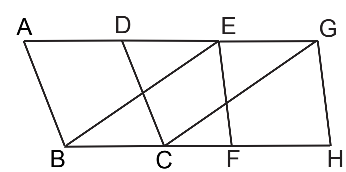
a. 34 Esit.
e. 1 Selw.



Toisaalta myös $AB = DC$ ja lisäksi yhdensuuntaisiin suoriin liittyvät vuorokulmat $\measuredangle EAB$ ja $\measuredangle FDC$ ovat yhtä suuret [1.29]. Siksi kolmiot $\triangle EAB$ ja $\triangle FDC$ ovat SKS-lauseen 1.4 mukaan yhtenevät ja siis yhtä suuret. Poistamalla kummastakin sama kolmio $\triangle DEG$ saadaan yhtä suuret puolisuunnikkaat $\square ABGD$ ja $\square FCGE$. Lisäämällä näihin kumpaankin yhtä suureen kuvioon kolmio $\triangle BCG$ saadaan suunnikkaat $\square ABCD$ ja $\square EBCF$, jotka siis ovat yhtä suuret. □

Lause 1.36. *Suunnikkaat ovat yhtä suuret, jos niillä on pari vastakkaisia sivuja samalla suoraparilla ja nämä ovat kummassakin yhtä pitkiä.*

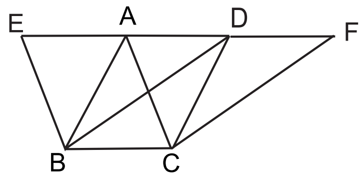
Todistus. Olkoot suunnikkaissa $\square ABCD$ ja $\square EFGH$ sivut AD ja EG samalla suoralla ja BC ja FH keskenään samalla suoralla ja yhtä pitkät. Osoitetaan, että suunnikkaat ovat yhtä suuret. Oletusten ja lauseen 1.34 mukaan $AD = BC = FH = EG$ ja $BC \parallel EG$, joten nelikulmio $\square EBCH$ on lauseen 1.33 nojalla suunnikas. Koska suunnikkailla $\square EBCH$ ja $\square ABCD$ on sama *kanta* BC ja sen vastaiset sivut ovat samalla suoralla AD, suunnikkaat ovat lauseen 1.35 mukaan yhtä suuret. Samoin perustein ovat $\square EBCH$ ja $\square EFGH$ yhtä suuret, mistä väite seuraa.



□

Lause 1.37. *Kolmiot, joiden kanta on sama ja joiden kolmas kulma on samalla kannan suuntaisella suoralla, ovat yhtä suuret.*

Todistus.



Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DBC$ kolmioita siten, että $AD \parallel BC$. Olkoon E sivun AC suuntaisen, pisteen B kautta piirretyn suoran ja suoran AD leikkauspiste ja olkoon F sivun BD suuntaisen, pisteen C kautta piirretyn suoran ja suoran AD leikkauspiste [1.31]. Lauseen 1.35 mukaan suunnikkaat $\square EBCA$ ja $\square DBCF$ ovat yhtä suuret. Lauseen 1.34 mukaan kolmio $\triangle ABC$ on puolet suunnikkaasta $\square EBCA$ ja kolmio $\triangle DBC$ on puolet suunnikkaasta $\square DBCF$. Siksi ne ovat yhtä suuret [Aks. 7]. $\square$

Eukleides on luonnollisesti ollut tietoinen kolmion alan lausekkeesta: puoli kertaa kanta kertaa korkeus. Tulosta ei Alkeissa muotoilla näin, sillä esitettävä geometria on riippumaton luvuilla laskemisesta eikä pituuden yksiköitä tai mittalukuja esiinny. Kolmion alan tunnetun kaavan $\frac{1}{2}ah$ voisi kuitenkin ilmaista muodostamalla suorakulmion, jolla on sama kanta kuin kolmiolla ja puolet sen korkeudesta. Eukleides ei kiirehdi. Itse asiassa hänellä on mielessä laajempi tavoite: muodostetaan *neliö*, jolla on sama ala kuin tutkittavalla kolmiolla. Neliöitähän voi luontevasti pitää tasokuvioiden suuruuden eli pinta-alan standardivertailukohteina. Tähän traditioon liittyy kysymys minkä tahansa tasokuvion, erityisesti *ympyrän neliöimisestä.*

Jo tähän mennessä esitetyillä suunnikkaan ja kolmion aloja koskevilla lauseilla on tietty pedagogis-yleissivistävä merkitys, johon kiinnitettiin huomiota jo antiikin aikana. Niistähän käy ilmi, että monikulmion, erityisesti jo kolmion, ympärysmittaa voi kasvattaa kuinka suureksi tahansa ilman että kolmion pinta-alaa tarvitsee suurentaa — siirretään vain kärkeä kauas pitkin kannan suuntaista suoraa. Isäntä, joka kehuu tiluksiensa olevan niin suuret, että niiden ympäri kävelemiseen kuluu koko päivä, ei siis ole sanonut mitään maidensa laajuudesta.

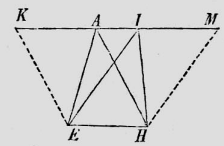
50

h. 33 Esit.
i. 35 Esit.

yhtäsuuntaiset, h) ja niinmuodoin KEHM suunnikas. Nyt on suunnikas AH = EM, i) samaten suunnikas KO = EM. i) Sentähden on suunnikas AH = KO. e).

37. Esitelmä. Wäittämä.

Kolmikulmat samalla asemalla ja samain yhtäsuuntaisten wiiwain wälillä owat yhtäpintaiset.

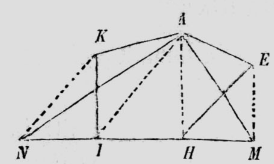


Jos EH ja AI owat yhtäsuuntaiset, niin samalla asemalla EH seisowat kolmikulmat AEH ja IEH owat yhdenkokoiset.

a. 31 Esit.
e. 35 Esit.
h. 34 Esit.
i. 7 Selw.

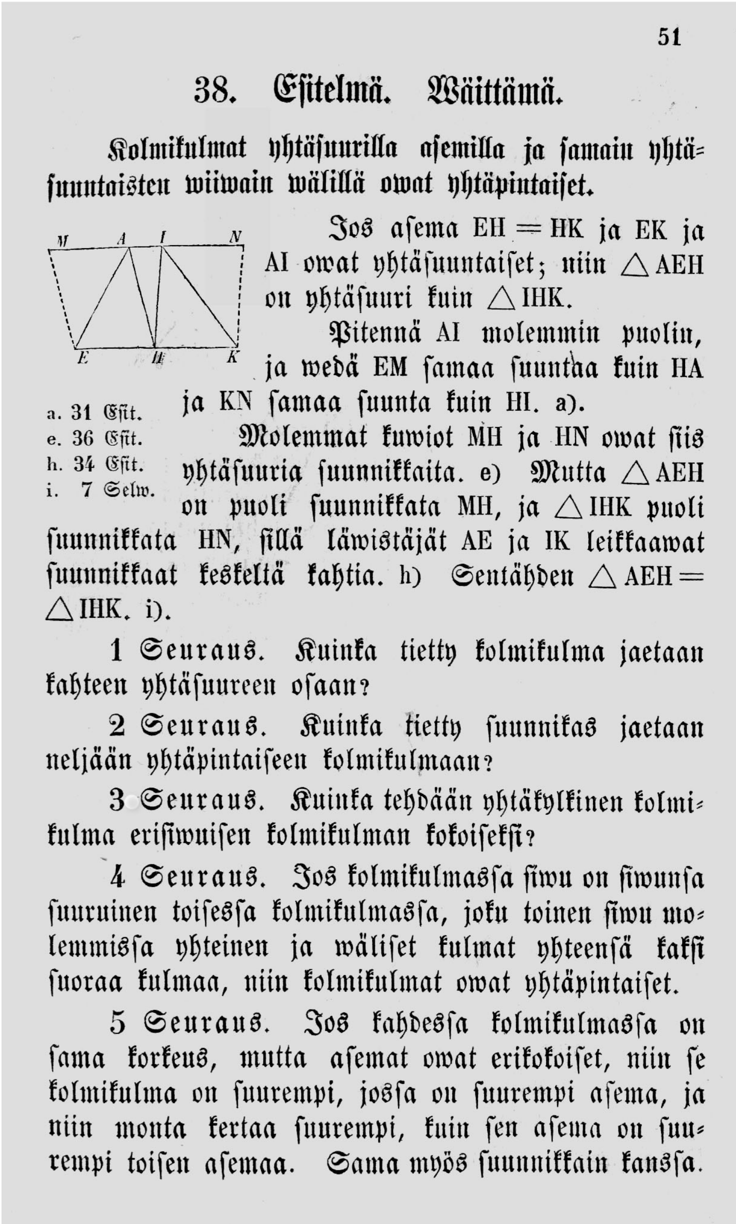
Pitennä AI molemmin puolin, ja wedä EK samaa suuntaa kuin AH ja HM samaa suuntaa kuin EI. a).

Siis owat HK ja EM yhtäsuuret suunniikkaat. e) Mutta △ AEH on puoli suunnikkata HK ja △ IEH puoli suunnikkata EM, sillä läwistäjät AE ja IH leikkaawat suunnikkaat keskeltä kahtia. h) Sentähden △ AEH = △ EHI. i).



Seuraus. Kuinka kolmikulma tehdään tietyn suorasiwuisen monikulman suuruiseksi?

Olkoon AEHIK tietty suorasiwuinen monikulma. Pitennä siwu IH molemmin puolin, yhdistä AH ja AI ja wedä E:stä ja K:sta wiiwat EM ja KN yhtäsuuntaisiksi wiiwain AH:n ja AI:n kanssa. Yhdistä AN ja AM, niin △ AEH = △ AHM ja △ AKI = △ ANI; niinmuodoin △ ANM = monikulma AEHIK.



38. Esitelmä. Wäittämä.

Kolmikulmat yhtäsuurilla asemilla ja samain yhtäsuuntaisten wiiwain wälillä owat yhtäpintaiset.

Jos asema EH = HK ja EK ja AI owat yhtäsuuntaiset; niin △AEH on yhtäsuuri kuin △IHK.

Pitennä AI molemmin puolin, ja wedä EM samaa suuntaa kuin HA ja KN samaa suunta kuin HI. a).

a. 31 Esit.
e. 36 Esit.
h. 34 Esit.
i. 7 Selw.

Molemmat kuwiot MH ja HN owat siis yhtäsuuria suunnikkaita. e) Mutta △AEH on puoli suunnikkata MH, ja △IHK puoli suunnikkata HN, sillä läwistäjät AE ja IK leikkaawat suunnikkaat keskeltä kahtia. h) Sentähden △AEH = △IHK. i).

1 Seuraus. Kuinka tietty kolmikulma jaetaan kahteen yhtäsuureen osaan?

2 Seuraus. Kuinka tietty suunnikas jaetaan neljään yhtäpintaiseen kolmikulmaan?

3 Seuraus. Kuinka tehdään yhtäkylkinen kolmikulma erisiwuisen kolmikulman kokoiseksi?

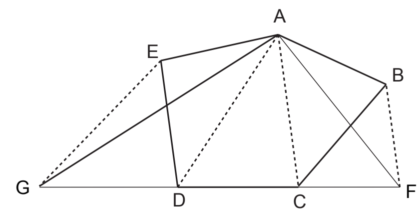
4 Seuraus. Jos kolmikulmassa siwu on siwunsa suuruinen toisessa kolmikulmassa, joku toinen siwu molemmissa yhteinen ja wäliset kulmat yhteensä kaksi suoraa kulmaa, niin kolmikulmat owat yhtäpintaiset.

5 Seuraus. Jos kahdessa kolmikulmassa on sama korkeus, mutta asemat owat erikokoiset, niin se kolmikulma on suurempi, jossa on suurempi asema, ja niin monta kertaa suurempi, kuin sen asema on suurempi toisen asemaa. Sama myös suunnikkain kanssa.

Aschanin kirjassa on tässä kohdassa seuraava korollaari, jonka todistus hahmotellaan konveksin viisikulmion tapauksessa. Kyseessä on pikemminkin harjoitustehtävä kuin teoreema, joka kyllä sopisi osaksi Eukleideen yllä kuvailtua "neliöimisohjelmaa". Eukleides käsittelee monikulmiota kohdassa 1.45.

Seuraus. *Monikulmiosta pystyy harpilla ja viivoittimella tekemään kolmion, joka on yhtä suuri.*

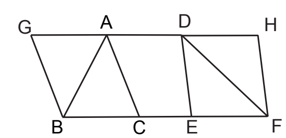
Ratkaisu.



Viisikulmiosta $ABCDE$ poistetaan kulma kerrallaan seuraavalla menettelyllä. Aluksi siirretään kärkeä B halkaisijan AC suuntaisesti, kunnes se on sivulla DC kohdassa F. Sitten toistetaan menettely esim. siirtämällä E halkaisijan AG suuntaisesti kohtaan G. Lauseen 1.37 mukaan ala ei muutu näissä siirroissa, joten on saatu alkuperäisen viisikulmion kokoinen kolmio $\triangle AGF$. □

Lause 1.38. *Kolmiot, joiden kannat ovat yhtä pitkät ja samalla suoralla ja joiden kolmas piste on samalla kannan suuntaisella suoralla, ovat yhtä suuret.*

Todistus. Olkoot $\triangle ABC$ ja $\triangle DEF$ kolmioita siten, että kannat BC ja EF ovat yhtä pitkät ja samalla suoralla ja $AD \parallel BC$.



Olkoon G sivun AC suuntaisen, pisteen B kautta piirretyn suoran ja suoran AD leikkauspiste ja olkoon H sivun BE suuntaisen, pisteen F kautta piirretyn suoran ja suoran AD leikkauspiste [1.31].

Lauseen 1.36 mukaan suunnikkaat $\square EBCA$ ja $\square DBCF$ ovat yhtä suuret. Lauseen 1.34 mukaan kolmio $\triangle ABC$ on puolet suunnikkaasta $\square EBCA$ ja kolmio $\triangle DBC$ on puolet suunnikkaasta $\square DBCF$. Siksi ne ovat yhtä suuret [Aks. 7]. $\square$

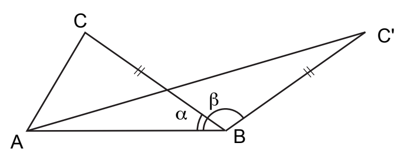
Aschanin kirjassa on pieni puute: kuviossa kolmioiden kannat on piirretty ja myös ajateltu suoraan toistensa jatkoksi.
Esitettävät seuraukset ovat jälleen harjoitustehtävän luontoisia. Seurauksessa 5 on kuitenkin oltava tarkkana ja olen selvyyden vuoksi lisännyt tehtävään pari välivaihetta samalla kun olen nykysuomentanut sen.

Seuraus 1. *Kolmion voi jakaa harpilla ja viivoittimella kahdeksi yhtä suureksi osaksi.*

Seuraus 2. *Suunnikkaan voi jakaa harpilla ja viivoittimella neljäksi yhtä suureksi kolmioksi.*

Seuraus 3. *Harpilla ja viivoittimella pystyy tekemään tasakylkisen kolmion, joka on yhtä suuri kuin annettu kolmio.*

Seuraus 4. *Jos kahdella kolmiolla on yksi yhteinen sivu ja lisäksi yhtä pitkä sivu ja jos eri kolmioissa yhteisen ja yhtä pitkän sivun väliin jäävien kulmien summa on kaksi suoraa kulmaa, niin kolmiot ovat yhtä suuret.*



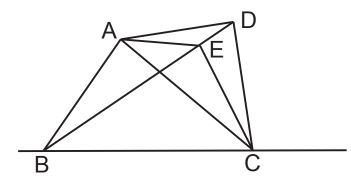
Seuraus 5. *Jos kahdella kolmiolla on sama korkeus, mutta eripitkä kanta, niin isompaa kantaa vastaa isompi kolmio. Jos isompi kanta on kaksi kertaa pienemmän kannan kokoinen, niin isompi kolmio on kaksi kertaa pienemmän kolmion kokoinen. Vastaava pätee, kun isompi kanta on n kertaa pienemmän kokoinen. Vastaavat lauseet pätevät suunnikkaille. (n on tässä luonnollinen luku.)*

Taitava lukija onnistuu melko helposti osoittamaan, että n voi edellä olla mikä *rationaaliluku* tahansa. Kokonaan eri ongelma on näyttää, että seuraus 5 pätee mille tahansa suhdeluvulle n, siis irrationaalisellekin. Sellaisenaan seuraus 5 vain vihjaisee, että kolmion ala on *verrannollinen* kannan pituuteen. Suhteen vastatessa irrationaalilukua sanomme, että kannat ovat *yhteismitattomat*. Kreikkalaisen matematiikan suursaavutus oli yhteismitattoman suhteen tarkka määrittely ja käsittelytaito. Eukleides omistaa verrannollisuuden teorialle viidennen kirjansa ja todistaa luvussa 6 ensimmäisenä teoreemana seurauksen 5 väitteen tapauksessa, jossa kantojen sallitaan olevan yhteismitattomat.

Seuraus 6. *Jos useammalla kolmiolla on sama korkeus, niin ne yhteensä ovat yhtä suuret kuin kolmio, jolla on sama korkeus ja kantanaan jana, joka on yhtä pitkä kuin annettujen kolmioiden kannat yhteensä.*

Lause 1.39. *Jos kahdella yhtä suurella kolmiolla on yhteinen kanta, niin niiden kärjet ovat samalla kannan suuntaisella suoralla tai eri puolilla kantaa.*

Todistus.



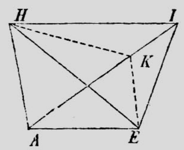
Olkoot kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle DBC$ yhtä suuret ja A ja D samalla puolella suoraa BC. Osoitetaan, että $AD \parallel BC$. Piirretään pisteen A kautta BC:n suuntainen suora [1.31]. Jos ei ole $AD \parallel BC$, niin piirretty BC:n suuntainen suora ei ole sama kuin AD, vaan leikkaa suoran BD jossain pisteessä E, joka ei ole D. Kolmiot $\triangle ABC$ ja $\triangle EBC$ ovat lauseen 1.37 nojalla yhtä suuret, sillä $AE \parallel BC$. Oletettiin, että $\triangle ABC$ ja $\triangle DBC$ ovat yhtä suuret, joten $\triangle EBC$ ja $\triangle DBC$ ovat yhtä suuret. Mutta tämä on mahdotonta, koska toinen on toisen osa. Siis $AD \parallel BC$. $\square$

52

6 Seuraus. Jos useamilla kolmikulmilla on sama korkeus, niin kaikki yhteensä owat yhtäsuuret kolmikulman kanssa, jolla on kolmikulmien korkeus ja jonka asema on niin suuri kuin kaikki kolmikulmien asemat yhteensä. Sama myös suunnikkain kanssa.

39. Esitelmä. Wäittämä.

Yhdenkokoiset kolmikulmat, jotka seisowat samalla asemalla, samalla puolella, owat samain yhtäsuuntaisten wiiwain wälillä.



Jos △ AEH = △ AEI samalla asemalla AE ja samalla puolella; niin wiiwat AE ja HI, joiden wälillä kolmikulmat seisowat, owat yhtäsuuntaiset.

a. 31 Esit.
e. 37 Esit.
h. 9 Selw.

Ellei HI olisi yhtäsuuntainen AE:n kanssa, niin wedä H:sta suora wiiwa HK samaa suuntaa kuin AE, a) kunnes tapaa siwun AI. Yhdistä KE.

△ AEH on siis = △ AEK. e) Mutta △ AEH ehdotettiin = △ AEI. Niinmuodoin olisi △ AEK = △ AEI, osa kokonaisensa kanssa, joka on mahdotonta. h) Sentähden wiiwat AE ja HK eiwät saata olla yhtäsuuntaiset. Samalla tawalla näytetään, ettei mikään muu H:sta wedetty wiiwa, kuin HI, saata olla AE:n kanssa yhtäsuuntainen.

40. Esitelmä. Wäittämä.

Yhdenkokoiset kolmikulmat, jotka seisowat yhtäsuurilla asemilla, samalla puolella ja wiiwalla, owat samain yhtäsuuntaisten wiiwain wälillä.

Jos △ AEH = △ KIM yhtäsuurilla asemilla AE ja KI ja samalla wiiwalla AI samalla puolella; niin wii-

Kirjoittamani todistus eroaa jonkin verran alkuperäisestä, mm. viimeinen lause "Siis $AD \parallel BC$" korvaa pitemmän perustelun. Aschan kääntää Eukleidesta sanatarkasti ja huomaamme hänen olettavan, että E on janalla BD eli B:n ja D:n välissä, jolloin nimenomaan $\triangle EBC$ on $\triangle DBC$:n osa. Vaihtoehto, jossa E on janan BD jatkeella D:n takana, kuitataan todistuksen lopussa hieman hämärällä päättelyllä: "Sentähden suorat AE ja BC eivät voi olla yhdensuuntaiset. Samalla tavalla näytetään, että ei mikään muu A:n kautta kulkeva suora kuin AD voi olla BC:n suuntainen." Säilyneissä Eukleides-käsikirjoituksissa on näillä paikkeilla muutenkin puutteita tai virheitä, mm. seuraava lause on ilmeisesti lisätty jälkeenpäin. Sen todistus on olennaisesti sama kuin lauseella 1.39.

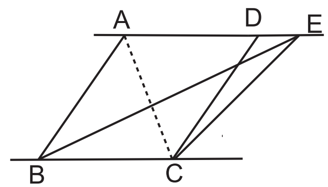
Lause 1.40. *Jos yhtä suurilla kolmioilla on yhtä pitkä kanta, kannat ovat samalla suoralla ja kolmiot samalla puolella yhteistä kantasuoraansa, niin kärjet ovat samalla kannan suuntaisella suoralla.*

Aschanin käännös ilmaisee kahden edellisen lauseen asiantilan sanomalla, että "kolmiot ovat yhdensuuntaisten välissä". Samaa tarkoittaisi tässä yhteydessä, että kolmiot ovat yhtä korkeat.
Lause 1.40 on todennäköisesti antiikin aikana lisätty Eukleideen tekstiin siksi, että tuntui johdonmukaiselta esittää käänteistulos myös yleisemmälle lauseelle 1.38, kun kerran käänteistulos on johdettu edelliselle lauseelle 1.37. Aschan on varmaan ajatellut samoin, sillä hän on liittänyt tähän kohtaan oman muistutuksen, jonka mukaan myös suunnikkaan kokoa koskeville lauseille ovat voimassa vastaavat osittaiset käänteislauseet. Lisäksi hän huomauttaa siitä, että osittaiset käänteislauseet voisi muodostaa toisinkin, nimittäin todistamalla, että yhtä korkeiden samankokoisten kolmioiden tai suunnikkaiden kannat ovat yhtä pitkät. Eukleides itse jättää tässäkin samantapaiset tapaukset käsittelemättä.

Lause 1.41. *Jos suunnikkaalla ja kolmiolla on yhteinen kanta ja niiden muut kulmat ovat samalla suoralla, niin suunnikas on kaksi kertaa niin suuri kuin kolmio.*

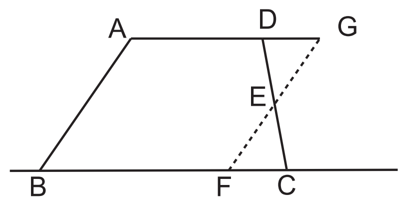
Todistus. Olkoon kolmion $\triangle BCE$ kärki E suunnikkaan $\square ABCD$ sivun AD määräämällä suoralla. Tällöin kolmiot $\triangle BCE$ ja $\triangle BCA$

ovat yhtä suuret, koska niillä on sama kanta BC ja $AE \parallel BC$ [1.37].



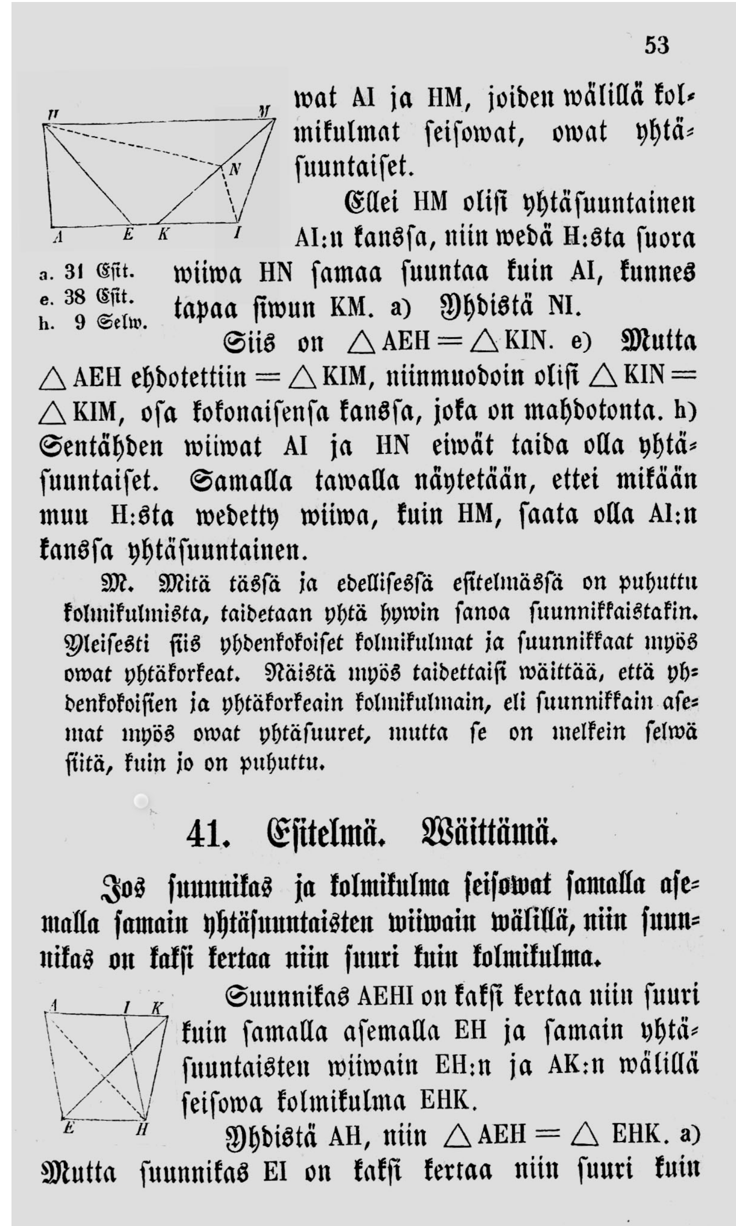
Mutta suunnikas $\square ABCD$ on kaksi kertaa niin suuri kuin kolmio $\triangle BCA$, sillä AB on sen lävistäjä [1.34]. $\square$

Kuten Aschan muistuttaa edellinen lause ei ole yleisin mahdollinen — riittäisihän olettaa, että kolmiolla ja suunnikkaalla on yhtä pitkä kanta ja korkeus. Oikeastaan 1.41 ei edes tuo mitään varsinaisesti uutta, vaan on kertausluontoinen. Mutta tästä alkaa teoreemojen ketju, joka tähtää mm. "kolmion neliöimiseen", siis annetun kolmion kokoisen neliön konstruktioon. Tämä linja hämärtyy hieman, koska Aschan esittää tässä kohdassa pienen harjoitukseksi sopivan lisäyksen määräämällä puolisuunnikkaan alan. Ratkaisu on sinänsä elegantti:



Määrätään puolisuunnikkaan $\square ABCD$ toisen kyljen CD keskipiste E [1.10] ja piirretään sen kautta yhdensuuntainen sivulle AB [1.31]. Nyt käänteinen vuorokulmalause osoittaa, että kolmiot $\triangle EDG$ ja $\triangle ECF$ ovat KSK-lauseen 1.26 nojalla yhtenevät ja siis yhtä suuret, mistä seuraa, että puolisuunnikas $\square ABCD$ on yhtä suuri kuin suunnikas $\square ABFG$.

Tehtävä 1.42. *Tehtävänä on piirtää annettuun kulmaan suunnikas, joka on annetun kolmion kokoinen.*



53

wat AI ja HM, joiden wälillä kolmikulmat seisowat, owat yhtäsuuntaiset.

Ellei HM olisi yhtäsuuntainen AI:n kanssa, niin wedä H:sta suora wiiwa HN samaa suuntaa kuin AI, kunnes tapaa siwun KM. a) Yhdistä NI.

a. 31 Esit.
e. 38 Esit.
h. 9 Selw.

Siis on △ AEH = △ KIN. e) Mutta △ AEH ehdotettiin = △ KIM, niinmuodoin olisi △ KIN = △ KIM, osa kokonaisensa kanssa, joka on mahdotonta. h) Sentähden wiiwat AI ja HN eiwät taida olla yhtäsuuntaiset. Samalla tawalla näytetään, ettei mikään muu H:sta wedetty wiiwa, kuin HM, saata olla AI:n kanssa yhtäsuuntainen.

M. Mitä tässä ja edellisessä esitelmässä on puhuttu kolmikulmista, taidetaan yhtä hywin sanoa suunnikkaistakin. Yleisesti siis yhdenkokoiset kolmikulmat ja suunnikkaat myös owat yhtäkorkeat. Näistä myös taidettaisi wäittää, että yhdenkokoisien ja yhtäkorkeain kolmikulmain, eli suunnikkain asemat myös owat yhtäsuuret, mutta se on melkein selwä siitä, kuin jo on puhuttu.

41. Esitelmä. Wäittämä.

Jos suunnikas ja kolmikulma seisowat samalla asemalla samain yhtäsuuntaisten wiiwain wälillä, niin suunnikas on kaksi kertaa niin suuri kuin kolmikulma.

Suunnikas AEHI on kaksi kertaa niin suuri kuin samalla asemalla EH ja samain yhtäsuuntaisten wiiwain EH:n ja AK:n wälillä seisowa kolmikulma EHK.

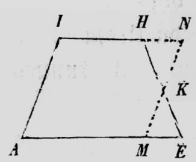
Yhdistä AH, niin △ AEH = △ EHK. a) Mutta suunnikas EI on kaksi kertaa niin suuri kuin

54

a. 37 Esit.
e. 34 Esit.

$\triangle$ AEH: e) sentähden se myös on kaksi kertaa niin suuri kuin $\triangle$ EHK.

M. Samaten jos suunnikkaalla ja kolmikulmalla on yhtäsuuret asemat.



Lisäys. Puolisuunnikas (AEIH) on suunnikkaan kokoinen, jolla on sama korkeus kuin puolisuunnikkaalla ja asemana yhtäsuuntaisten siwujen keskeinen wiiwa puolisuunnikkaassa.

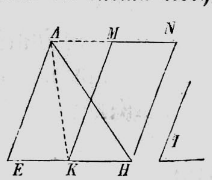
Leikkaa HE keskeltä kahtia ja wedä NM pisteen K:n läpi samaa suuntaa kuin siwu AI. Pitennä IH, niin suunnikas AMNI = puolisuunnikas AEHI.

a. 29 Esit.
e. 15 Esit.
h. 26 Esit.
i. 2 Selw.

Koska wuorokulma HNK = $\angle$ KME, a) wastapäinen $\angle$ HKN = $\angle$ MKE, e) ja siwu HK = KE; niin $\triangle$ HKN $\cong$ $\triangle$ KME ja siwu HN = ME. h) Lisää molempiin kuwio AMKHI, niin suunnikas AMNI = puolisuunnikas AEHI. i) Suunnikas AMNI seisooki samain yhtäsuuntaisten wiiwain AE:n ja IN:n wälillä, ja sen asema AM = NI on yhtäsuuntaisten siwujen AE:n ja IH:n keskeinen wiiwa; sillä AE + IH = 2 kertaa AM, koska ME = HN.

42. Esitelmä. Wäittämä.

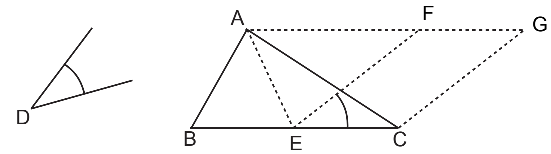
Kuinka tietyn kolmikulman kokoinen suunnikas tehdään, jolla on kulma tietyn suorawiiwaisen kulman suuruinen.



Olkoon AEH tietty kolmikulma ja I tietty kulma; kuinka tehdään suunnikas $\triangle$ AEH:n kokoiseksi, ja jolla on kulma = $\angle$ I.

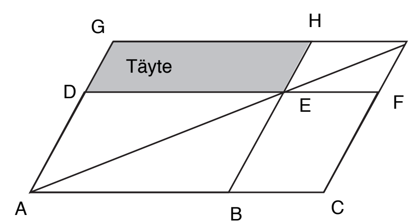
Leikkaa asema EH keskeltä kahtia K:ssa. a) Pane pisteesen K wiiwan KH:n wiereen

Ratkaisu.



Olkoon annettu kolmio $\triangle ABC$ ja kulma $\measuredangle D$. Puolitetaan kolmion kanta BC keskipisteellä E [1.10]. Kopioidaan kulma $\measuredangle D$ pisteeseen E siten, että toinen kylki on $\overrightarrow{EC}$ ja toinen kylki on samalla puolella kuin A [1.23]. Piirretään sivulle BC yhdensuuntainen pisteen A kautta [1.31]; olkoon F piste, jossa se leikkaa em. kulman vapaan kyljen. Piirretään kyljelle EF yhdensuuntainen pisteen C kautta [1.31]; olkoon G piste, jossa se leikkaa suoran AF. $\square FECG$ on määritelmän mukaan suunnikas ja lauseen 1.41 mukaan kaksi kertaa niin suuri kuin kolmio $\triangle AEC$, joka puolestaan on lauseen 1.38 perusteella puolet kolmiosta $\triangle ABC$, koska E puolittaa kannan BC. Koska sekä kolmio $\triangle ABC$ että suunnikas $\square FECG$ ovat kaksi kertaa niin suuria kuin kolmio $\triangle AEC$ ne ovat keskenään yhtä suuret, kuten piti. Lisäksi kulma $\measuredangle CEF$ on yhtä suuri kuin annettu kulma $\measuredangle D$, kuten myös vaadittiin. $\square$

Lause 1.43. *Suunnikkaassa kummatkin* täytteet *suunnikkaille lävistäjän ympärillä ovat yhtä suuret.*



Todistus. Lauseen 1.34 mukaan lävistäjä jakaa suunnikkaan tasan kahtia. Sovelletaan tätä kaikkiin kolmeen halkaistuun suunnikkaaseen ja huomataan, että kumpikin täyte syntyy vähentämällä alkuperäisen suunnikkaan puoliskosta molempien pienempien suunnikkaiden puoliskot. $\square$

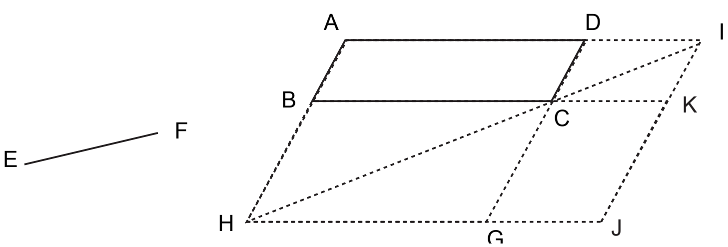
"Täyte" on Aschanin suomennus sanalle "komplementti". Harmi, ettei se ole vakiintunut suomenkieleen. Eukleides ei nähtävästi ole kokenut tarvetta esittää määritelmää tälle käsitteelle vaan on mieltänyt sen sivistyneeseen yleiskieleen kuuluvaksi.

Todistus oli helppo, mutta lause 1.43 on Alkeissa aivan keskeinen. Sen avulla voi nimittäin muuttaa suunnikkaan — erityisesti suorakulmion — sivun pituutta siten, että ala säilyy. Tämä on avain 2. kirjan *geometriseen algebraan*, jossa kertolaskua edustaa a- ja b- sivuisen suorakulmion muodostaminen annetuista janoista a ja b. Suorakulmion ab neliöinti vastaa silloin neliöjuuren $\sqrt{ab}$ määräämistä. Samassa mielessä jakolasku on konstruktiotehtävä, jossa on annettuna suorakulmio S ja jana a ja on löydettävä toinen jana b niin, että suorakulmio ab on yhtä suuri kuin S. Tulojen yhteenlaskussa on taas annettuna kaksi suorakulmiota ja on löydettävä uusi suorakulmio, joka on yhtä suuri kuin annetut yhteensä. Jakolaskuongelman ratkaisu sisältyy tehtävään 1.44 ja tulojen yhteenlaskuongelma ratkeaa tehtävän 1.45 menetelmällä. Palaamme käsittelemään "geometrista algebraa" toisen kirjan alussa.

Tehtävä 1.44. *Tehtävänä on piirtää annetun kolmion kokoinen suunnikas, jolla on annetun janan pituinen sivu ja annettu kulma.*

Ratkaisu. Konstruktio 1.42 antaa annetun kolmion kokoisen suunnikkaan, jolla on annettu kulmakin, mutta ei välttämättä haluttua sivua. Konstruktiotehtäväksi jää suunnikkaan korjaaminen niin, että sille saadaan haluttu sivukin, mutta kulma ja koko säilyvät. Edellinen lause tarjoaa tähän nerokkaan ratkaisun:

Olkoon $\square ABCD$ suunnikas ja EF jana. On konstruoitava $\square ABCD$:n kokoinen suunnikas, jolla on kulma $\measuredangle ABC$ ja sivu EF.



55

a. 10 Esit.
e. 23 Esit.
h. 31 Esit.
i. 38 Esit.
k. 41 Esit.
l. 6 Selw.

∠MKH = ∠I. e) Wedä A:sta wiiwa AN samaa suuntaa kuin EH ja H:sta toinen wiiwa HN samaa suuntaa kuin KM; h) niin suunnikas KN = △AEH.

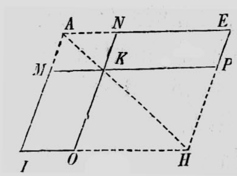
Yhdistä AK. Koska EK = KH, niin △AEK = △AKH, i) ja siis △AEH kaksi kertaa niin suuri kuin △AKH. Mutta suunnikas KN on myös kaksi kertaa niin suuri kuin △AKH. k) Sentähden on suunnikas KN = △AEH. l) Sillä on myös ∠MKH yhtäsuuri kuin ∠I.

M. Suunnikkaalla siis on asemana kolmikulman puoli asemaa ja korkeutena kolmikulman täysi korkeus. Tästä nähdään myös, miten suunnikkaan kokoinen kolmikulma on tehtäwä.

43. Esitelmä. Wäittämä.

Jokaisessa suunnikkaassa owat täytteet suunnikkaille läwistäjän yhpärillä yhdenkokoiset.

Määrit. Jos suunnikkaan läwistäjälle AH otetaan joku piste K ja suorat wiiwat MP ja NO wedetään siitä siwujen kanssa samaa suuntaa; niin kuwio jaetaan neljään suunnikaasen, joista kaksi MN ja OP **seisowat läwistäjän ympärillä** ja toiset kaksi IK ja KE owat näiden **täytteitä.**



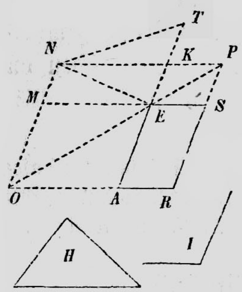
Esitelmässä wäitetään, että täyte IK = KE.

Sillä △AIH = △AEH. a) Ja koska △HOK = △HPK, a) ja △AMK on yhtäsuuri kuin △ANK; a) niin △HOK + △AMK = △HPK + △ANK. e) Jos nämä molemmin puolin otetaan yhtäsuurista kolmikulmista AIH ja AEH, niin jääpä täyte IK = jääpä täyte KE. h).

a 34 Esit.
e. 2 Selw.
h. 3 Selw.

44. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietylle suoralle wiiwalle piirretään tietyn kolmikulman kokoinen suunnikas, jolla on kulma tietyn suorawiiwaisen kulman suuruinen.



Olkoon AE tietty suora wiiwa, H tietty kolmikulma ja I tietty kulma. Kuinka AE:lle piirretään suunnikas, joka on $= \triangle$ H, että sillä on kulma $= \angle$ I?

Pitennä AE ja tee $\triangle$ NET $=$ $\triangle$ H. a) Tee pisteeseen E wiiwan EK:n wiereen $\angle$ MEK $= \angle$ I. e) Leikkaa ET keskeltä kahtia K:ssa. Wedä K:sta ja N:stä yhtäsuuntaiset wiiwat ME:n ja KE:n kanssa, niin suunnikas MK $= \triangle$ NET $= \triangle$ H. h) Pitennä NM ja wedä A:sta AO yhtäsuuntaa kuin EM, eli KN, i) ja yhdistä OE.

a. 22 Esit.
e. 23 Esit.
h. 42 Esit.
i. 31 Esit.
k. 29 Esit.
l. 12 Selw.
m. 43 Esit.

Koska wiiwat NK ja OA owat yhtäsuuntaiset, niin on $\angle$ KNO $+ \angle$ AON $= 2$ suoraa kulmaa; k) siis on $\angle$ KNO $+ \angle$ EON < 2 suoraa kulmaa, ja NK ja OE satuttawat toinen toisensa, jos ne kyllin pitennetään. l) Pitennä heitä siis, kunnes tapaawat toinen toisensa P:ssä. Wedä PR samaa suuntaa kuin KA, eli NO, ja pitennä ME ja OA, knnes yhtywät wiiwaan PR; niin AS on anottu suunnikas.

Koska ORPN on suunnikas, jonka läwistäjä on OP, niin täyte MK $=$ täyte AS. m) Mutta MK tehtiin $= \triangle$ H: siis on suunnikas AS $= \triangle$ H. Ja koska $\angle$ AES $= \angle$ MEK, ja $\angle$ MEK $= \angle$ I, niin on suunnikkaassa AS $\angle$ AES yhtäsuuri kuin $\angle$ I.

Jatketaan sivua DC annetun janan verran pisteeseen G [1.3]. Piirretään G:n kautta yhdensuuntainen sivulle AD [1.31]; leikatkoon se sivun AB jatkon pisteessä H. Suorat HC ja AD leikkaavat toisensa jossain pisteessä I, sillä ne eivät ole yhdensuuntaiset. (Kolmion $\triangle CHB$ sisäkulmat $\measuredangle CHB$ ja $\measuredangle CBH$ ovat yhteensä alle kaksi suoraa kulmaa ja käänteisen vuorokulmalauseen 1.29 mukaan $\measuredangle IAH = \measuredangle CBH$, joten $\measuredangle IAH + \measuredangle CHB$ on alle kaksi suoraa kulmaa ja voidaan soveltaa yhdensuuntaisuusaksioomaa [Aks. 12].)

Piirtämällä annetun suunnikkaan sivujen suuntaiset suorat pisteisiin H ja I ja lisäämällä niiden leikkauspiste J ja vielä IJ:n ja BC:n leikkauspiste K saadaan suunnikas $\square AHJI$, jonka lävistäjän pisteeseen C liittyvät täytteet ovat annettu suunnikas $ABCD$ ja $\square CGJK$. Jälkimmäisellä on konstruktiossa vaaditut ominaisuudet, sillä $\square ABCD$ ja $\square CGJK$ ovat yhtä suuret lauseen 1.43 nojalla, $\measuredangle JGC = \measuredangle KCD = \measuredangle ABC$ käänteisen vuorokulmalauseen 1.31 nojalla ja $CG = EF$ konstruktion nojalla. $\square$

Toisin kuin Eukleides (ja minä) Aschan toistaa todistuksensa aluksi lauseen 1.42 konstruktion — ilmeisesti saadakseen esitettyä koko ratkaisun yhtenäisesti.

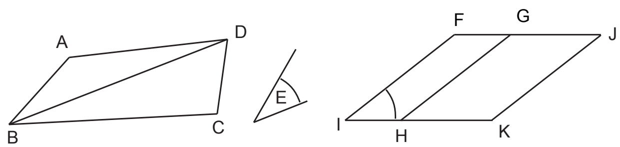
Oman todistusversioni sulkeisiin merkitty kohta, jossa perustelen miksi HC ja AD leikkaavat toisensa, on lähellä Aschanin Eukleideelta kääntämää perustelua, jossa päätellään, että $\measuredangle CHA < \measuredangle GHA$ ja siis $\measuredangle CHA + \measuredangle DAH < \measuredangle GHA + \measuredangle DAH$, joka on kaksi suoraa kulmaa. Kummassakin muodossaan päättely on ihmeen mutkikas. Asiahan on niin, että jos olisi $HC \parallel AD$, niin HC olisi C:n kautta kulkeva AD:n suuntainen, siis yhdensuuntaisuusaksiooman nojalla sama suora kuin BC, jolloin H olisi sama kuin B ja vastaavasti myös G olisi C, mikä on mahdotonta. Eukleides on ehkä halunnut arvioida kulmia voidakseen käyttää yhdensuuntaisuusaksioomaa siinä muodossa, jonka on itse sille valinnut.

Tehtävä 1.45. *Piirrä annetun monikulmion kokoinen suunnikas, jolla on annettu kulma.*

Aschan esittää tehtävälle kaksi ratkaisua, joista ensimmäinen on lyhyt, mutta perustuu lauseen 1.37 seuraukseen, jota ei ole Eukleideella. Jälkimmäinen, Eukleideen ratkaisu, perustuu edellisiin konstruktioihin, antaa pinta-alojen systemaattisen yhteenlaskun edellisen lauseen mielessä ja sopii siis tekstin tähän kohtaan.

Ratkaisu. (Aschan) Muunnetaan monikulmio ensin samankokoiseksi kolmioksi, kuten lauseen 1.37 seurauksessa. Kolmion muuntaminen edelleen halutunlaiseksi suunnikkaaksi tapahtuu kuten tehtävässä 1.42. □

Ratkaisu. (Eukleides) Jaetaan annettu monikulmio kolmioiksi $\triangle_1, \ldots, \triangle_n$. (Kuvassa on $n = 2$, $\triangle_1 = \triangle ABD$ ja $\triangle_2 = \triangle CBD$. Eukleides käsittelee vain tämän perustapauksen.) Lauseen 1.42 mukaan on konstruoitavissa $\triangle_1$:n kokoinen suunnikas $\square FGHI$, jossa lisäksi $\measuredangle HIF$ on annetun kulman $\measuredangle E$ suuruinen. Konstruktio 1.44 antaa suunnikkaan $\square GHKJ$, joka on $\triangle_2$:n kokoinen ja jossa $\measuredangle KHG = \measuredangle HIF$. Osoitetaan, että $\square FIKJ$ on suunnikas, joka on yhtä suuri kuin $\triangle_1$ ja $\triangle_2$ yhteensä. Ainakin I, H ja K ovat samalla suoralla, sillä käänteisen vuorokulmalauseen 1.29 nojalla $\measuredangle HIF$ ja $\measuredangle IHG$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa, joten myös $\measuredangle GHK$ ja $\measuredangle IHG$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa [1.14]. Vastaavalla tavalla näytetään, että myös F, G ja J ovat samalla suoralla. Siis $\measuredangle KIF = \measuredangle HIF = \measuredangle E$. Suorat $IK = IH$ ja $FJ = FG$ ovat yhdensuuntaiset, koska $\square IHFG$ on suunnikas. Suorat IF ja KJ ovat yhdensuuntaiset, koska kumpikin on HG:n suuntainen. $\square FIKJ$ on yhtä suuri kuin osansa, suunnikkaat $\square FIHG$ ja $\square GHKJ$ yhteensä, mutta nämä ovat kolmioiden $\triangle_1$ ja $\triangle_2$ kokoiset, joten $\square FIKJ$ on yhtä suuri kuin $\triangle_1$ ja $\triangle_2$ yhteensä.
Vastaavalla tavalla lisätään saatuun suunnikkaaseen kolmioiden $\triangle_3, \ldots, \triangle_n$ kokoiset jatko-osat.



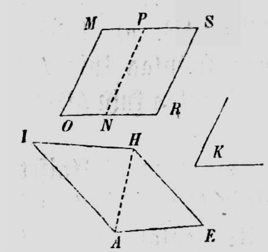
□

Lause 1.45 antaa erityisesti menetelmän muuntaa mikä tahansa monikulmio samankokoiseksi suorakulmioksi, vieläpä standardileveäksi siinä mielessä, että yhden sivun pituus on annetun standardijanan mittainen (siis "ykkönen", jos asia kuitenkin haluttaisiin ilmaista luvuin ja mitoin). Tämän jälkeen monikulmioiden (pinta-alojen) yhteenlasku on yhtä leveiden suorakulmioiden asettelemista peräkkäin, siis olennaisesti samaa kuin pituuksien yhteenlasku.

57

45. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tehdään suorasiwuisen monikulman suuruinen suunnikas, jolla on tietyn suorawiiwaisen kulman kokoinen kulma.



Olkoon AEHI suorawiiwainen monikulma ja K tietty kulma; tehtäköön suunnikas AEHI:n kokoiseksi, jolla on $\angle O = \angle K$.

Tee ensin kolmikulma = kuwio AEHI, a) ja wiiwaa sitten kolmikulman kokoinen suunnikas, jolla on kulma = $\angle K$; e) niin suunnikas on tehty, jota anottiin.

a. Seur. 37 Esit.
e. 42 Esit.
h. 44 Esit.
i. 29 Esit.
k. 14 Esit.

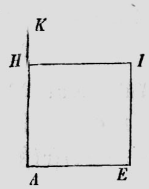
Euklideksen tawalla tehtäwä suoritetaan seuraawasti.

Ja'a kuwio AEHI kolmikulmiin. Tee suunnikas MN = $\triangle$ AEH, jolla on $\angle O = \angle K$. e) Kuwaa PN:lle toinen suunnikas PR = $\triangle$ AIH, jotta $\angle PNR = \angle O$, eli = $\angle K$. h).

Koska $\angle PNR = \angle O$, niin $\angle PNR + \angle PNO = \angle O + \angle PNO$. Mutta $\angle O + \angle PNO = 2$ suoraa kulmaa: i) sentähden on $\angle PNR + \angle PNO = 2$ suoraa kulmaa, ja ON ja NR yhtenä wiiwana. k) Taas koska $\angle PNR = \angle MPN$, i) niin $\angle PNR + \angle NPS = \angle MPN + \angle NPS$. Mutta $\angle PNR + \angle NPS =$ kaksi suoraa kulmaa: i) sentähden on $\angle MPN + \angle NPS =$ kaksi suoraa kulmaa, ja MP ja PS yhtenä wiiwana. k) — Koska siis MS ja OR owat yhtäsuuntaiset, ja MO ja SR myös yhtäsuuntaiset, sillä molemmat juoksewat samaa suunta kuin wiiwa PN; niin ORSM on suunnikas ja = kuwio AEHI, koska OP tehtiin = $\triangle$ AEH ja NS = $\triangle$ AHI. Suunnikaalla ORSM on myös $\angle O = \angle K$.

46. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietylle suoralle wiiwalle piirretään neliö?



Olkoon AE suora wiiwa; sille piirrettäköön neliö.

Wedä A:sta kohtisuora wiiwa AE:tä wasten, a) ja tee AH = AE. e) Wedä H:sta wiiwa HI samaa suuntaa kuin AE ja E:stä wiiwa EI samaa suuntaa kuin AH; h) niin AEIH on neliö.

a. 11 Esit.
e. 3 Esit.
h. 31 Esit.
i. 34 Esit.
k. 29 Esit.

Suunnikkaassa AI owat wastakkaiset siwut yhtäsuuret, nimittäin AE = HI ja AH = EI. i) Mutta AE = AH: sentähden owat kaikki siwut AE, EI, HI, AH yhtäsuuret, ja AI yhtäsiwuinen suunnikas. Taas koska AE ja HI owat yhtäsuuntaiset, niin on $\angle$ A + $\angle$ AHI = 2 suoraa kulmaa. k) Mutta $\angle$ A on suora kulma: sentähden on $\angle$ AHI suora ja wastakkaiset kulmat E ja I myös suoria. i) Siis on suunnikas AI yhtäsiwuinen ja suorakulmainen, se on neliö.

47. Esitelmä. Wäittämä. *)

Jos yksi kulma kolmikulmassa on suora; niin neliö suoran kulman wastakkaisella siwulla on yhtäsuuri kuin neliöt yhteensä siwuilla, jotka reunailewat suoraa kulmaa.

Määritys. Siwuja suorakulmaisessa kolmikulmassa nimitämme lyhykäisesti (suoran kulman) wastak-

*) Tämä on melkein kaikkein kuuluisin keksintö mittaustieteessä ja nimitetään tawallisesti keksijänsä nimen jälkeen theorema pythagoricum, se on Pytagoran wäittämä.

Mainitsimme edellä, että pinta-alojen vertailun voisi toisaalta tehdä myös käyttämättä mitään standardijanaa, nimittäin "neliöimällä" vertailtavat alat. Tätä ongelmaa emme ole vielä ratkaisseet, mutta jos neliöintiä aletaan käyttää, niin silloin olisi pystyttävä mahdollisimman helposti konstruoimaan neliö, joka on yhtä suuri kuin kaksi annettua neliötä yhteensä. Tähän tarjoaakin keinon *Pythagoraan lause*, joka johdetaan ensimmäisen kirjan päätteeksi.
Tehtävällä 1.45 on luonnollinen käänteisongelma: miten konstruoidaan annetun monikulmion muotoinen, annetun suorakulmion kokoinen monikulmio. Tämän ongelman asettaminen edellyttää yhdenmuotoisuuden käsitteen käyttöönottoa ja ratkaisussa tarvitaan suhteiden käsittelyä, siis Eukleideen viidennen kirjan sisältöä.

TEHTÄVÄ 1.46. *On konstruoitava neliö, jolla on annettu sivu.*

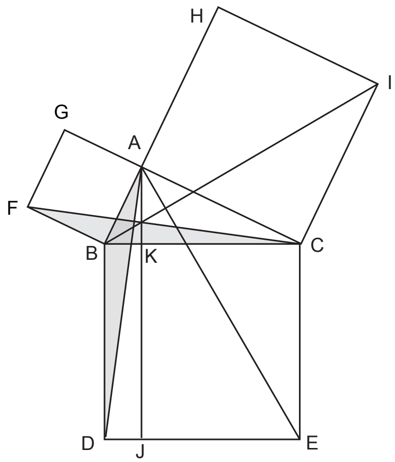
RATKAISU. Olkoon AB jana. Konstruoidaan neliö $\square ABCD$. Piirretään aluksi normaali janalle AB pisteeseen A [1.11], sitten leikataan siitä AB:n mittainen osa AD [1.3]. Piirretään pisteeseen B yhdensuuntainen AD:lle ja pisteeseen D yhdensuuntainen AB:lle [1.31] ja nimetään niiden leikkauspiste C:ksi. (Leikkaamisen varmistamisessa on takana yhdensuuntaisuusaksiooma.)
Osoitetaan, että $\square ABCD$ on neliö. Ainakin se on suunnikas, koska vastakkaiset sivut konstruoitiin yhdensuuntaisiksi. Koska $AD = AB$ ja suunnikkaan vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät [1.34], kaikki neljä sivua ovat yhtä pitkät. Kulma $\measuredangle A$ on konstruktion mukaan suora ja käänteisen vuorokulmalauseen 1.29 nojalla $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa, joten myös $\measuredangle B$ on suora; samoin perustein $\measuredangle C$ ja $\measuredangle D$ ovat suoria kulmia. $\square$

Sanomme, että edellisessä tehtävässä 1.46 konstruoitu neliö on *sivun AB neliö.*

LAUSE 1.47. **(Pythagoraan lause)** *Suorakulmaisessa kolmiossa on suoran kulman vastaisen sivun neliö yhtä suuri kuin kahden muun sivun neliöt yhteensä.*

MÄÄRITELMÄ. Suoran kulman vastaista sivua sanotaan *hypotenuusaksi* ja viereisiä sivuja *kateeteiksi* .

Todistus.



Olkoon ABC kolmio, jossa kulma $\measuredangle A$ on suora. Osoitetaan, että hypotenuusan BC neliö $\square BCDE$ on yhtä suuri kuin kateettien AB ja AC neliöt $\square ABFG$ ja $\square ACIH$ yhteensä.

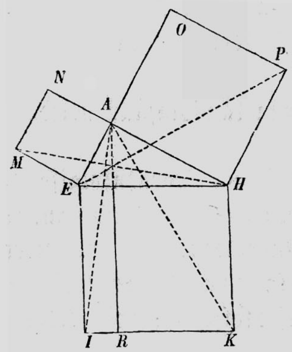
Ainakin tutkittavat neliöt ovat olemassa [1.46]. Leikatkoon pisteestä A suoralle BD tai CE piirretty yhdensuuntainen suoran DE pisteessä J [1.31].

Pisteet A, C ja G ovat lauseen 1.14 mukaan samalla suoralla, sillä kulmat CAB ja BAG ovat suoria, joten niiden summa on kaksi suoraa kulmaa. Samoin ovat B, A ja H samalla suoralla.

$\measuredangle DBA = \measuredangle CBF$, koska kumpikin saadaan kulmasta $\measuredangle CBA$ lisäämällä siihen suora kulma [Aks. 11 ja Aks. 2]. $DB = CB$ ja $BA = BF$, koska neliön sivut ovat yhtä pitkiä. Siksi kolmiot $\triangle DBA$ ja $\triangle CBF$ ovat SKS-lauseen 1.4 mukaan yhtenevät, erityisesti yhtä suuret. Koska $DB \parallel AJ$, on kolmio $\triangle DBA$ lauseen 1.41 nojalla puolet suunnikkaasta $\square DBKJ$. Samoin on kolmio $\triangle CBF$ puolet suunnikkaasta $\square BAGF$, joka on kateetin AB neliö. Siksi kateetin AB neliö on yhtä suuri kuin suunnikas $\square DBKJ$, joka on hypotenuusan BC neliöön sisältyvä suorakulmio. Vastaavalla tavalla todistetaan, että toisen kateetin neliö $\square ACIH$ on yhtä suuri kuin suorakulmio $\square JECK$. Hypotenuusan neliö $\square DECB$ on yhtä suuri kuin suorakulmiot $\square DBKJ$ ja $\square JECK$ yhteensä eli neliöt $\square BAGF$ ja $\square ACIH$ yhteensä. $\square$

59

kaisekси ja wiereisiksi siwuiksi. Wastaisen siwun muukalainen nimitys on hypothenusa ja wiereisien nimitys katheter.



Jos siis kolmikulmassa AEH ∠ EAH on suora; niin neliö EH:lla = neliöt yhteensä AE:llä ja AH:lla.

Wiiwaa kolmikulman siwuille neliöt EK, EN ja AP. a) Wedä A:sta wiiwa AR samaa suuntaa kuin EI eli HK, e) ja yhdistä AI, MH, AK ja EP.

Koska ∠ EAH ja ∠ EAN owat kaksi suoraa kulmaa, niin on HA ja AN yhtenä wiiwana. h) Samoin näytetään, että EA ja AO owat yhtenä wiiwana. Nyt on ∠ IEH = ∠ MEA; i) ja jos lisätään molemmin puolin ∠ AEH, niin on ∠ IEA = ∠ MEH. k) Mutta siwu ME = AE ja siwu IE = EH: sentähden on △ IEA ≅ △ MEH. l) Mutta □ EN on kaksi kertaa niin suuri kuin △ MEH, m) ja suorakulmio ER on kaksi kertaa niin suuri kuin △ IEA. m) Sentähden on suorakulmio ER = □ EN. n) Samalla tawalla todistetaan, että suorakulmio RH = □ AP. Siis on koko □ EK = □ EN + □ AP.

a. 46 Esit.
e. 31 Esit.
h. 14 Esit.
i. 11 Selw.
k. 2 Selw.
l. 4 Esit.
m. 41 Esit.
n. 6 Selw.

1 Seuraus. Kuinka wiiwataan neliö kahden tietyn neliön suuruiseksi?

2 Seuraus. Wiereiselle siwulle tehty neliö on yhtäsuuri kuin neliö wastaisella siwulla, wähennetty neliöllä, joka tehdään toiselle wiereiselle siwulle.

60

3 Seuraus. Kuinka wiiwataan neliö, joka on yhtäsuuri kuin jäännös tietystä neliöstä, wähennetty toisella tietyllä neliöllä?

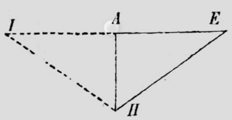
4 Seuraus. Jos neliön läwistäjälle wiiwataan neliö, niin se on kaksi kertaa suurempi kuin itse neliö.

5 Seuraus. Neliö puolella läwistäjällä neliössä on puoli neliöä.

6 Seuraus. Jos kaksi siwua suorakulmaisessa kolmikulmassa erikseen owat yhtäsuuret siwuinsa kanssa toisessa suorakulmaisessa kolmikulmassa, ja yhtäsuuret siwut molemmissa kolmikulmissa owat toinen toisensa ja kulmien suhteen samassa järjestyksessä; niin kolmikulmat owat yhteelliset.

48. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kolmikulmassa neliö, wiiwattu yhdelle siwulle, on yhtäsuuri kuin molemmat neliöt yhteen toisilla siwuilla; niin näiden wälinen kulma on suora.



Olkoon kolmikulmassa AEH neliö, kuwattu siwulle EH, yhtäsuuri kuin neliöt yhteensä AE:llä ja AH:lla; niin ∠ HAE on suora kulma.

a. 11 Esit.
e. 3 Esit.
h. 7 Seur.
34 Esit.
i. 47 Esit.
k. 8 Esit.

Wedä AI ⊥ AH:ta wasten. a) Tee AI = AE, e) ja wedä IH. Koska AI = AE, niin □ AI:llä = □ AE:llä. h) Lisää molemmin puolin AH:lle tehdyllä neliöllä, niin □ AI:llä + □ AH:lla = □ AE:llä + □ AH:lla. Mutta □ IH:lla = □ AI:llä + □ AH:lla, i) ja □ EH:lla ehdotettiin = □ AE:llä + □ AH:lla. Sentähden on □ IH:lla = □ EH, ja niinmuodoin siwu IH = siwu EH. h) Koska

Esitettyä todistusta pidetään Eukleideen tähän tarkoitukseen itse keksimänä. Toisin kuin vanhemmissa todistuksissa tässä ei tarvita yhdenmuotoisuuden käsitettä, joka voidaankin määritellä vasta 6. kirjassa.
Aschan korostaa Pythagoraan lauseen merkitystä alaviitteellä, jossa julistaa sen nimen "theorema pythagoricum eli Pythagoran wäittämä". Lisäksi hän luettelee seurauslauseita, jotka esittelevät lauseen erikoistapauksia ja käyttöä.

Seuraus 1. *Osataan piirtää neliö, joka on yhtä suuri kuin kaksi annettua neliötä yhteensä.*

Tämä oli yksi tavoitteista!

Seuraus 2. *Kateetin neliö on hypotenuusan neliön ja toisen kateetin neliön erotus.*

Seuraus 3. *Osataan piirtää neliö, joka on yhtä suuri kuin kahden annetun neliön erotus.*

Seuraus 4. *Neliön lävistäjälle piirretty neliö on kaksi kertaa niin suuri kuin alkuperäinen.*

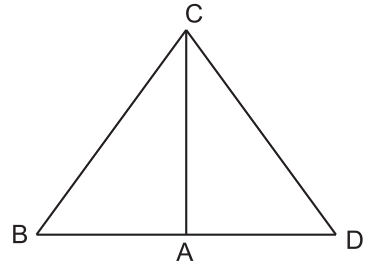
Jos jokin jana on valittu yksiköksi, niin osataan siis konstruoida lukua $\sqrt{2}$ vastaava jana. Pituuksien suhteena $\sqrt{2}$ siis "esiintyy geometriassa". Tällä on merkitystä, sillä koska $\sqrt{2}$ ei ole rationaaliluku, neliön sivu ja lävistäjä ovat yhteismitattomat. On siis olemassa ja voidaan konstruoida yhteismitattomia janoja. Tämä on syynä sille, että viidennen kirjan mutkikas suhdeoppi on tarpeellinen.

Seuraus 5. *Neliön lävistäjän puolikkaan neliö on puolet alkuperäisestä neliöstä.*

Seuraus 6. *Suoralle kulmalle pätee yhtenevyyden SSK-sääntö: Jos kahdessa suorakulmaisessa kolmiossa on yhtä pitkä hypotenuusa ja toinen kateetti, niin kolmiot ovat yhtenevät, sillä kolmas sivu määräytyy Pythagoraan lauseesta. (Sama pätee SKS-säännön nojalla, jos kolmioilla on yhtä pitkät kateetit.)*

Lause 1.48. **(Käänteinen Pythagoraan lause)** *Jos kolmiossa yhden sivun neliö on yhtä suuri kuin molempien muiden sivujen neliöt yhteensä, niin ensin mainitun sivun vastainen kulma on suora kulma.*

Todistus.

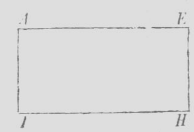


Olkoon kolmiossa $\triangle ABC$ sivun BC neliö yhtä suuri kuin kahden muun sivun neliöt yhteensä. Osoitetaan, että $\measuredangle BAC$ on suora kulma. Piirretään sivulle CA normaali kohtaan A [1.11] ja leikataan siitä AB:n mittainen jana AD sille puolelle suoraa AC, jolla B ei ole [1.3]. Koska $AD = AC$, niin molempien neliötkin ovat yhtä suuret. Lisätään kumpaankin AC:n neliö, jolloin saadaan yhtä suuret. Koska syntyvä kolmio $\triangle ACD$ on suorakulmainen, on CD:n neliö Pythagoraan lauseen 1.47 mukaan yhtä suuri kuin AC:n ja AD:n neliöt yhteensä. Mutta $AD = AB$ ja CB:n neliö on oletuksen mukaan yhtä suuri kuin AC:n ja AB:n neliöt yhteensä, joten CB:n ja CD:n neliöt ovat yhtä suuret. Siis $CD = CB$. Kolmioilla $\triangle ABC$ ja $\triangle ADC$ on siis yhtä pitkät sivut — onhan AC yhteinen — joten SSS-lauseen 1.8 mukaan ne ovat yhtenevät. Kulma $\measuredangle BAC$ on siis yhtä suuri kuin vieruskulmansa $\measuredangle DAC$ eli suora kulma. □

nyt siwu AI = AE, AH on yhteinen ja IH = EH, niin on $\triangle$ IAH $\cong$ $\triangle$ EAH ja $\angle$ IAH = $\angle$ EAH. k) Mutta $\angle$ IAH on suora kulma: siis on myöskin $\angle$ HAE suora kulma.

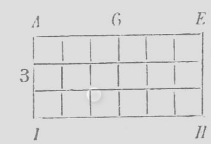
Toinen Kirja.

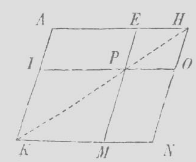
Määrityksiä.



1. **Jokainen suorakulmainen suunnikas, eli suorakulmio**, sisälletään suorilta wiiwoilta, jotka kuwiossa reunailewat saman suoran kulman.

M. Tämä on niin ymmärrettäwä, että suorakulmion pinta-ala löydetään, jos yhden siwun pituusmäärä kerrotaan toisen siwun pituusmäärällä, joka on suorapystyisenä ensimäistä wasten. Esim. jos siwu AE = 6 peukaloa ja AI = 3 peukaloa ja kuwio jaetaan peukaloneliöihin, niin niitä löytyy kuwiossa 6 × 3 = 18 kappaletta. Sentautta merkitäänkin mitannollisesti suorakulmio, jonka siwut saman kulman ympärillä owat a ja h, kertomerkillä a × h. Neliön, eli yhtäsiwuisen suorakulmion, pinta-ala on siis = a × a (eli niinkuin tawallisemmin kirjoitetaan = a²), jos a on sen siwu.





2. **Mutkio** (gnomon) on suunnikkaissa toinen niistä kuwioista, jotka seisowat läwistäjän ympärillä, ynnä molemmat täytteet. Mutkioita owat kuwiot KAEPON ja AHNMPI.

Tässä on vain ensimmäinen kirja. Jos haluat muutkin, ota yhteyttä Lauri.V.Kahanpaa@jyu.fi