JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Algebra 2 B 2009. Maanantai 23.3. klo. 10-12 MAD 380 Harjoitus 3(9)

1. Olkoon $\mathbb{K}$-polynomin P aste n. Osoita, että P:n hajoituskunnan Σ aste $[\Sigma : \mathbb{K}]$ on kertoman $n!$ tekijä. Vihje: induktio. Tarkastele ensin tapausta, jossa P on jaoton. Yleisessä tilantessa huomaa, että $(a+b)!$ on aina jaollinen $a!b!$:lla.

2. Olkoon $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$ äärellinen kuntalaajennus. Osoita, että jokainen $\mathbb{K}$-monomorfismi $\mathbb{L} \to \mathbb{L}$ on automorfismi. (Miksi äärellisyysehto on tarpeen?)

3. Muodosta seuraavien kuntalaajennusten normaali sulkeuma:

(a) $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, missä $\alpha = \sqrt[5]{3} \in \mathbb{R}$.
(b) $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$, missä $\beta = \sqrt[7]{2} \in \mathbb{R}$.
(c) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$.

4. Muodosta seuraavien kuntalaajennusten normaali sulkeuma:

(d) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \gamma) : \mathbb{Q}]$, missä $\gamma = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$.
(e) $[\mathbb{Q}(\delta) : \mathbb{Q}]$, missä δ on polynomin $x^3 - 3x^2 + 3$ nollakohta.

5. Määrää Galois'n ryhmät tehtävän 3 kuntalaajennuksille.

6. Määrää Galois'n ryhmät tehtävän 4 kuntalaajennuksille.

7. Määrää Galois'n ryhmät tehtävän 3 kuntalaajennuksien normaaleille sulkeumille.

8. Määrää Galois'n ryhmät tehtävän 4 kuntalaajennuksien normaaleille sulkeumille.

9. * Lemman 4.36 mukaan $\alpha(\mathbb{L}) \subset N$, kun $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset N \subset \mathbb{M}$ ovat toistensa alikuntia, $N : \mathbb{K}$ on äärellisen algebrallisen kuntalaajennuksen $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ normaali sulkeuma ja $\alpha : \mathbb{L} \to \mathbb{M}$ on $\mathbb{K}$-monomorfismi.

Totea, että tässä riittäisi olettaa, että $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ on normaali kuntalaajennus, ei siis välttämättä laajennuksen $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ normaali sulkeuma. (Keksitkö esimerkin, joka osoittaisi, että ilman mitään oletusta laajennuksen $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ luonteesta ei pärjätä.)

10. * Totta vai tarua?

(a) Jokaineen $\mathbb{K}$-monomorfismi on $\mathbb{K}$-automorfismi.
(b) Jokaisella äärellisellä kuntalaajennuksella on normaali sulkeuma.
(c) Jos $K \subset \mathbb{L}$ ja $\sigma : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ on $\mathbb{K}$-automorfismi, niin rajoittuma $\sigma\big|_{\mathbb{K}}$ on $\mathbb{K}$:n $\mathbb{K}$-automorfismi.
(d) Kuntalaajennus ,jonka Galois-ryhmän aste on 1, on normaali.
(e) Äärellisen normaalin kuntalaajennuksen Galois-ryhmä on äärellinen.
(f) Jokainen Galois-ryhmä on kommutatiivinen eli abelin ryhmä.
(g) Galiis:n vastaavuus ei päde muille kuin normaaleille laajennuksille.
(h) $\mathbb{C}$:ssä n-asteisen normaalin kuntalaajennuksen Galois-ryhmän kertaluku on n.
(i) Äärellisen normaalin kuntalaajennuksen Galois-ryhmä on syklinen.