JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Algebra 2 B, 2009 Maanantai 16.3.09 klo 10-12 MAD 380 Harjoitus 2(8)

1. Totta vai tarua?

(a) Jokaisella $\mathbb{Q}$-polynomilla on *hajoituskunta*, jossa se hajoaa ensimmäisen asteen tekijöiksi asti.
(b) Polynomin hajoituskunta on yksikäsitteinen. (Tässä on hieman tulkinnan varaa. Mitä tarkoitetaan?)
(c) Jokainen äärellinen kuntalaajennus on normaali.
(d) $\mathbb{Q}(\sqrt{19}) : \mathbb{Q})$ on normaali kuntalaajennus.
(e) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{19}) : \mathbb{Q})$ on normaali kuntalaajennus.
(f) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{19}) : \mathbb{Q}(\sqrt{19})$ on normaali kuntalaajennus.
(g) Normaalin kuntalaajennuksen normaali kuntalaajennus on normaali kuntalaajennus.

2. Olkoon $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{7}} \in \mathbb{C}$. Osoita, että luvuilla ζ, ζ^2, ζ^3 ja $\ldots \zeta^6$ on sama minimaalipolynomi ($\mathbb{Q}$:n suhteen).

3. (jatkoa) Määrää Galois:n ryhmä $\Gamma(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})$ tutkimalla ζ:n mahdollisia kuvia. (Edellisen tehtävän tulosta ei ole pakko käyttää, mutta jos käytät, muista lause 2.8.)

4. (jatkoa) Määrää kiintopistekunta $\{\alpha_1, \alpha_6\}^\dagger$, missä $\alpha_1 = Id_{\mathbb{Q}(\zeta)}$ ja $\alpha_6(\zeta) = \zeta^6$.

5. (jatkoa tehtävälle 3) Määrää kiintopistekunta $\Gamma(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q})^\dagger$.

6. (jatkoa) Lauseen 4.26 mukaan $[\mathbb{K} : \mathbb{K}_0] = \#G$, kun G on kunnan $\mathbb{K}$ automorfismiryhmän $\{\alpha : \mathbb{K} \to \mathbb{K} \mid \alpha \text{ on automorfismi } \}$ äärellinen aliryhmä ja $\mathbb{K}_0 = G^\dagger$ sen kiintopistekunta.

Totea tämä suoraan kuntalaajennukselle $\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}$. Mistä kiikastaa, että asteeksi ei tule 7?

7. Määrää kaikki monomorfismit $\mathbb{Q} \to \mathbb{C}$.

8. Totta vai tarua?

(a) Jos $S \subset T$ ja T on äärellinen joukko, niin $T = S$ jos ja vain jos $\#T = \#S$.
(b) Sama pätee äärettömille joukoille — ainakin numeroituville.
(c) On olemassa vain yksi monomorfismi $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$.
(d) Jos $\mathbb{L}$ ja $\mathbb{K}$ ovat $\mathbb{C}$:n alikuntia, niin on olemassa ainakin yksi monomorfismi $\mathbb{L} \to \mathbb{K}$.
(e) Kunnan $\mathbb{K}$ automorfismit α ja β ovat joko samoja tai $\mathbb{K}$-lineaariseti riippumattomia.
(f) $\mathbb{K}$-lineaarisesti riippumattomat automorfismit α ja $\beta : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ ovat eri kuvauksia.

KÄÄNNÄ

9. *. (uudelleen) Mitkä seuraavista kuntalaajennuksista ovat normaaleja?

(a) $\mathbb{Q}(\pi) : \mathbb{Q}$
(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{-5}) : \mathbb{Q}$
(c) $\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}$, missä $\alpha = \sqrt[7]{5}) \in \mathbb{R}$
(d) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}, \alpha) : \mathbb{Q}$, missä $\alpha = \sqrt[7]{5}) \in \mathbb{R}$
(e) $\mathbb{R}(\sqrt{-7}) : \mathbb{R}$

Osoita, että jokainen 2-asteinen kuntalaajennus on normaali. (Tässä on puhe $\mathbb{C}$:n alikunnista, siis lukukunnista.)