JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Algebra 2 A / 2009 Maanantai klo 10-12 MAD 380 Harjoitus 5

1. Keksi harppi- ja viivainkonstruktio säännölliselle 5-kulmiolle seuraavalla menetelmällä.

(1) Johda kaava $\cos 5\theta$:lle.
(2) Ratkaise tehtävä.

2. Osoita, että kulma θ voidaan jakaa kolmeen yhtä suureen osaan harpilla ja viivaimella, jos ja vain jos polynomi

$$4x^3 - 3x - \cos\theta$$

on jaollinen kunnassa $\mathbb{Q}(\cos\theta)$.

3. * Miksi yleisen kulman jako viidesosiksi harpilla ja viivaimella on mahdotonta?

4. n-ulotteista maailmaa asuttavat UFO-otukset kiinnostuvat geometriasta ja haluavat alkajaiseksi kahdentaa IOFLED:n oraakkelin kuutiomaisen alttarin. Onnistuuko työpiirrustuksen laadinta harppi- ja viivainkonsruktiolla?

5. Osoita, että

$$\sqrt[3]{-18+\sqrt{325}} + \sqrt[3]{-18-\sqrt{325}} = 3$$

a) laskemalla auki tai b) vetoamalla Cardanon kaavaan (jos mahdollista).

6. Laske $\prod_{j=1}^{n}(x-\alpha_j)$ niin monelle $n \in N$ kuin viitsit. Yleinen lause?

7. Osoita, että jos $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ on ykkösen kuutiojuuri, niin kuvaus $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \to \mathbb{C}$

$$a + b\sqrt[3]{2} + c(\sqrt[3]{2})^2 \mapsto a + \omega b\sqrt[3]{2} + \omega^2 c(\sqrt[3]{2})^2,$$

on injektiivinen kuntahomomorfismi ja siis isomorfismi kuvalleen.

8. Ratkaise $x^3 - 15x - 4 = 0$.

9. * (lisäpisteetön) Totta vai tarua?

(1) Mielivaltainen kulma voidaan jakaa kolmeen yhtä suureen osaan harpilla ja viivaimella mielivaltaisen tarkasti.
(2) Annetuista pisteistä konstruoituvan pisteen koordinaatit sijaitsevat $\mathbb{R}$:n alikunnassa, joka on astetta 2^n annettujen pisteiden koordinaattien virittämän kunnan suhteen.
(3) Kulmaa π ei voi jakaa kolmeen yhtä suureen osaan harpilla ja viivaimella.
(4) Janaa, jonka pituus on π, ei ei voi konstruoida harpilla ja viivaimella, kun on annettuna vain kokonaislukukoordinaattiset pisteet.
(5) Luku π on transkendenttinen kunnan $\mathbb{Q}$ suhteen.
(6) Luku π on transkendenttinen kunnan $\mathbb{A}$ suhteen.
(7) Luku π on transkendenttinen kunnan $\mathbb{R}$ suhteen.
(8) Jos pistetä $(0, \beta)$ ei voi konstruoida harpilla ja viivaimella pisteistä $(0, 0)$ ja $(0, 1)$, niin β on transkendenttinen.
(9) Cardanon kaava antaa kaikilla merkkien ja kompleksijuurten valinnoilla ratkaisun alkuperäiselle yhtälölle? Miksi?