



1. Mitkä seuraavista ovat  $\mathbb{C}$ :n alirenkaita, mitkä suorastaan alikuntia?

- a)  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$
- b)  $\{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- c)  $\mathbb{Z}[\pi] = \{p(\pi) = a_n\pi^n + \dots + a_1\pi + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{Z}\}$
- d)  $\mathbb{Q}[\pi] = \{p(\pi) = a_n\pi^n + \dots + a_1\pi + a_0 \mid n \in \mathbb{N}, a_j \in \mathbb{Q}\}$
- e)  $\mathbb{Q}(\pi) = \left\{ \frac{p(\pi)}{q(\pi)} = \frac{a_n\pi^n + \dots + a_1\pi + a_0}{b_m\pi^m + \dots + b_1\pi + b_0} \mid n \in \mathbb{N}, a_j, b_k \in \mathbb{Q}, q \neq 0\text{-polynomi} \right\}$
- f)  $2\mathbb{Z} = \{2a \mid a \in \mathbb{Z}\}$
- g)  $\{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$
- h)  $f(\mathbb{K})$ , missä  $\mathbb{K}$  on kunta ja  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{C}$  rengashomomorfismi.

2. Onko kuvaus  $f : \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \rightarrow \mathbb{Q}(\sqrt{3}) : a + b\sqrt{2} \mapsto a + b\sqrt{3}$  rengashomomorfismi? Onko se isomorfismi?

3. Onko kuvaus  $f : \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \rightarrow \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}] : a + b\sqrt{2} \mapsto a + b\sqrt[3]{2}$  rengashomomorfismi? Onko se isomorfismi?

4. Jaa jakokulmassa  $\mathbb{Q}$ -polynomit  $g/f$ , määrää erityisesti jakojäännös:

- a)  $g = x^7 - x^3 + 5, \quad f = x^3 + 7$
- b)  $g = x^2 + 1, \quad f = x^2$
- c)  $g = 4x^3 - 17x^2 + x - 3, \quad f = 2x + 5$
- d)  $x^4 - 1, \quad f = x^2 + 1$
- e)  $x^4 - 1, \quad f = 3x^2 + 3t.$

5. (jatkoa) Määrää edellisten polynomiparien syt:t ja tarkasta, että sait todella kummankin tekijät.

6. (jatkoa) Lausu syt:t muodossa  $af + bg$ .

7. Mitkä seuraavista ovat jaottomia? Jaa muut alkutekijöiksi.

- a)  $x^4 + 1$  kunnassa  $\mathbb{R}$
- b)  $x^4 + 1$  kunnassa  $\mathbb{Q}$
- c)  $x^7 + 11x^3 - 33x + 22$  kunnassa  $\mathbb{Q}$
- d)  $x^3 + x^2 + x + 1$  kunnassa  $\mathbb{Q}$
- e)  $x^3 - 7x^2 + 3x + 3$  kunnassa  $\mathbb{Q}$

8. Mitkä seuraavista ovat jaottomia?

- a)  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  kunnassa  $\mathbb{Q}$  (Vihje: Sijoita  $x$ :n paikalle  $x + 1$  ja sovelta Eisensteinin ehtoa.)
- b)  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  kunnassa  $\mathbb{Q}$ .

9. \*. Mitkä seuraavista ovat tosia (missäkin  $\mathbb{K}$ )?
- a) Jokaisella asteen  $n$  polynomilla on  $n$  eri nollakohtaa.
  - b) Asteen  $n$  polynomilla on enintään  $n$  eri nollakohtaa.
  - c) Asteen  $n$  polynomilla on vähintään  $n$  eri nollakohtaa.
  - d) Jokainen asteen 1 polynomi on jaoton.
  - e) Jaoton  $\mathbb{Z}$ -polynomi on jaoton  $\mathbb{Q}$ -polynomi.
  - f) Jaoton  $\mathbb{Z}$ -polynomi on jaoton  $\mathbb{R}$ -polynomi.
  - g) Jaoton  $\mathbb{R}$ -polynomi on jaoton  $\mathbb{Q}$ -polynomi.