JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Algebra 2 B 2009. Maanantai 30.3. klo. 10-12 MAD 380 Harjoitus 4(10)

Tehtävät 1.-5. ovat olennaisesti samoja kuin viime kerralla, koska niitä ei ehditty käsitellä

1. Määrää Galois'n ryhmät kuntalaajennuksille.

(a) $[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]$, missä $\alpha = \sqrt[5]{3} \in \mathbb{R}$.
(b) $[\mathbb{Q}(\beta):\mathbb{Q}]$, missä $\beta = \sqrt[7]{2} \in \mathbb{R}$.
(c) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}]$.
(d) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\gamma):\mathbb{Q}]$, missä $\gamma = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$.
(e) $[\mathbb{Q}(\delta):\mathbb{Q}]$, missä δ on polynomin $x^3 - 3x^2 + 3$ nollakohta.

2. Määrää Galois'n ryhmät edellisen tehtävän kuntalaajennuksien normaaleille sulkeumille, jotka ovat

(a) $[\mathbb{Q}(\alpha,\omega):\mathbb{Q}]$, missä $\alpha = \sqrt[5]{3} \in \mathbb{R}$ ja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$.
(b) $[\mathbb{Q}(\beta,\omega):\mathbb{Q}]$, missä $\beta = \sqrt[7]{2} \in \mathbb{R}$ ja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{7}}$.
(c) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}]$.
(d) $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\gamma,\omega):\mathbb{Q}]$, missä $\gamma = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ ja $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

3. Lemman 4.36 mukaan $\alpha(\mathbb{L}) \subset N$, kun $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset N \subset \mathbb{M}$ ovat toistensa alikuntia, $N:\mathbb{K}$ on äärellinen normaali kuntalaajennus ja $\alpha:\mathbb{L} \to \mathbb{M}$ on $\mathbb{K}$-monomorfismi. Keksitkö esimerkin, joka osoittaisi, että ilman mitään oletusta laajennuksen $N:\mathbb{K}$ luonteesta ei lemman johtopäätös $\alpha(\mathbb{L}) \subset N$ ole tosi.

4. Totta vai tarua?

(a) Jokainen $\mathbb{K}$-monomorfismi on $\mathbb{K}$-automorfismi.
(b) Jokaisella äärellisellä kuntalaajennuksella on normaali sulkeuma.
(c) Jos $K \subset \mathbb{L}$ ja $\sigma:\mathbb{L} \to \mathbb{L}$ on $\mathbb{K}$-automorfismi, niin rajoittuma $\sigma\big|_{\mathbb{K}}$ on $\mathbb{K}$:n $\mathbb{K}$-automorfismi.
(d) Kuntalaajennus, jonka Galois-ryhmän aste on 1, on normaali.
(e) Äärellisen normaalin kuntalaajennuksen Galois-ryhmä on äärellinen.
(f) Jokainen Galois-ryhmä on kommutatiivinen eli abelin ryhmä.
(g) Galois:n vastaavuus $* = (\dagger)^{-1}$ ei päde muille kuin normaaleille laajennuksille.
(h) $\mathbb{C}$:ssä n-asteisen normaalin kuntalaajennuksen Galois-ryhmän kertaluku on n.
(i) Äärellisen normaalin kuntalaajennuksen Galois-ryhmä on syklinen.

5. Määrää kuntalaajennuksen aste:

(a) $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}):\mathbb{Q}$ (vastaus: 8)
(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{6},\sqrt{10},\sqrt{15}):\mathbb{Q}$ (vastaus: 4)

6. Kuinka monta alkiota on ryhmässä $\Gamma(\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{7}):\mathbb{Q})$? Vihje: Lause 4.39.

7. Kuntalaajennuksen $(i, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}$ Galois-ryhmä on neliryhmä $G = \{I, R, S, T\}$, missä I on identtinen kuvaus, R vaihtaa i:n ja $-i$:n, S vaihtaa $\sqrt{5}$:n ja $-\sqrt{5}$:n ja $T = R \circ S$. Mitä aliryhmiä on? Ovatko normaaleja? Mitkä ovat vastaavat välikunnat? Onko Galois'n vastaavuus $* = (\dagger)^{-1}$ voimassa?

8. Totta vai tarua? (Koko ajan kuntalaajennukset $\subset \mathbb{C}$.)

(a) Jos $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ on äärellinen normaali kuntalaajennus, niin Galois'n ryhmän $\Gamma(\mathbb{L} : \mathbb{K})$ kertaluku on sama kuin $\mathbb{K}$-vektoriavaruuden $\mathbb{L}$ dimensio.
(b) Jos $\mathbb{M}$ on äärellisen normaalin kuntalaajennuksen välikunta, niin $\mathbb{M}^{\dagger *} = \mathbb{M}$.
(c) Jos $\mathbb{M}$ on äärellisen normaalin kuntalaajennuksen välikunta, niin $\mathbb{M}^{*\dagger} = \mathbb{M}$.
(d) Jos $\mathbb{M}$ on äärellisen normaalin kuntalaajennuksen $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ välikunta, niin $\Gamma(\mathbb{M} : \mathbb{K})$ on kuntalaajennuksen $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ Galois'n ryhmän alilryhmä.
(e) Jos $\mathbb{M}$ on äärellisen normaalin kuntalaajennuksen $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ välikunta, niin $\Gamma(\mathbb{L} : \mathbb{M})$ on kuntalaajennuksen $\mathbb{L} : \mathbb{K}$ Galois'n ryhmän tekijäyhmä.

9. Ratkaise kolmen alkion symmetrisessä ryhmässä S_3 yhtälö

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \circ x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$