JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO

MATEMATIIKAN JA
TILASTOTIETEEN LAITOS

Algebra 2 A / 2009 Maanantai klo 10-12 MAD 380 Harjoitus 1

1. Kompleksiluivuista ja niiden alikunnista

1. Todista *de Moivren kaava*

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

joko Eulerin tapaan induktiolla tai millä keinoin tahansa. (Sivujuoni: Mikä on yhteys kompleksiseen eksponenttifunktioon? Kuva!)

2. Määrää suppein $\mathbb{R}$:n alikunta, johon kuuluvat
a) kaikki rationaaliluvut
b) kaikki rationaaliluvut ja $\sqrt{2}$. (Tätä merkitään $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, huomaa pyöreät sulkeet.)

3. Määrää $\mathbb{Q}$-vektoriavaruudelle $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ kanta ja dimensio.

4. Määrää suppein $\mathbb{C}$:n alikunta, johon kuuluvat
a) kaikki reaaliluvut ja i
b) kaikki rationaaliluvut, $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{3}$. (Tätä merkitään $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.)

5. Onko olemassa kunta $\mathbb{K}$ s.e. $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{K} \subsetneq \mathbb{C}$?

2. Ryhmistä

6. Todista Cauchyn (Lagrangen!) lause, jonka mukaan äärellisen kommutatiivisen ryhmän G aliryhmän H alkioiden lukumäärä on koko ryhmän alkioiden lukumäärän tekijä. Vihje: ryhmä jakautuu yhtä suuriin ekvivalenssiluokkiin ekvivalenssissa $a \sim b \iff a - b \in H$. Lisäkysymys: Entä epäkommutatiivisen ryhmän tapaus? (Tähän palataan.)

3. Jaollisuudesta

7. Suorita jakokulmassa jakolaskut. Mikä jää jakojäännökseksi?
a) $137 : 5$.
b) $(2x^6 + 4x^5 - 99x^4 + x^3 - x^2 + 1) : (x^2 - 2)$.

4. Reaali- ja kompleksiluvuista

8. a) Oleta rationaaliluvut tunnetuiksi, määrittele reaaliluvut ja todista niiden perusominaisuudet. (Tämä tehtävä on hyvin laaja, eikä sitä käsitellä kokonaan. Täydellisyys on mielenkiintoisin kohta.)
b) Todista kompleksilukujen kuntaominaisuudet lähtemällä reaaliluvuista. (Tämä tehtävä on laaja, eikä sitä käsitellä ollenkaan.)
c) Mitä sanookaan algebran peruslause? Tunnetko yhtään todistusta sille?