Kompleksiluvuista[1]

1. Johdanto

Yhtälöllä $x^2 + 1 = 0$ ei ole ratkaisua reaalilukujen joukossa, koska jokaisen reaaliluvun toinen potenssi on positiivinen. Jotta tälle yhtälölle saataisiin ratkaisu, meidän täytyy laajentaa reaalilukujen joukkoa lisäämällä siihen uusi alkio (merkitään tätä toistaiseksi symbolilla $\sqrt{-1}$), joka ei ole reaaliluku. Suotavaa olisi, että 'luvulla' $\sqrt{-1}$ voitaisiin laskea kuten reaaliluvuilla: ainakin lukuun $\sqrt{-1}$ pitäisi voida lisätä reaalilukuja ja sitä täytyisi myös kertoa reaaliluvuilla. Näin ollen laajennetun lukualueemme tulee sisältää myös kaikki muotoa $a + b\sqrt{-1}$ olevat alkiot, missä $a, b \in \mathbb{R}$. Jos reaalilukujen laskusäännöt pysyvät edelleen voimassa, niin tätä muotoa olevien 'lukujen' summaksi saadaan

$$(a + b\sqrt{-1}) + (c + d\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{-1}$$

ja tuloksi

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{-1})(c + d\sqrt{-1}) &= ac + ad\sqrt{-1} + bc\sqrt{-1} + bd\sqrt{-1}\sqrt{-1} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\sqrt{-1},\end{aligned}$$

missä käytimme hyväksi tietoa $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$. Siispä näiden laskutoimitusten tulokset olisivat myös samaa muotoa olevia 'lukuja'.

Kun ajatelemme 'lukua' $a + b\sqrt{-1}$ reaalilukuparina $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, voimme asettaa edellisten havaintojen pohjalta täsmällisen määritelmän tälle laajennetulle lukualueelle:

Määritelmä 1.1. *Kompleksilukujen joukko* $\mathbb{C}$ on

$$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$$

varustettuna komponenteittaisella yhteenlaskulla

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

ja kertolaskulla, joka määritellään asettamalla

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Joukosta $\mathbb{C}$ käytetään myös nimitystä *kompleksitaso*.

Osoittautuu, että tämä laajennus on todellinen menestys: yhtälön $x^2 + 1 = 0$ lisäksi pystymme ratkaisemaan jokaisen toisen asteen yhtälön joukossa $\mathbb{C}$, ja itse asiassa *jokaisella* polynomiyhtälöllä on ratkaisu joukossa $\mathbb{C}$ (katso lukua 5).

[1]Lukualueiden luentomonisteen (Juha Lehrbäck ja Jouni Parkkonen) pohjalta koonnut JL. Viimeksi muokattu 15. marraskuuta 2011

2. Perusteita

Reaalilukujen laskutoimitusten perusominaisuudet ovat todella voimassa myös kompleksiluvuille:

Lause 2.1. (a) *Kompleksilukujen yhteenlasku ja kertolasku ovat assosiatiivisia:*

$$z + (w + v) = (z + w) + v$$
$$z(wv) = (zw)v$$

kaikilla $z, w, v \in \mathbb{C}$*;*

(b) *Kompleksilukujen yhteenlasku ja kertolasku ovat kommutatiivisia:*

$$z + w = w + z$$
$$zw = wz$$

kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$*;*

(c) *Kompleksilukujen kertolasku on distributiivinen yhteenlaskun suhteen:*

$$(z + w)v = zw + zv$$

kaikilla $z, w, v \in \mathbb{C}$*.*

(d) *Alkio* $0 = (0, 0)$ *on kompleksilukujen yhteenlaskun neutraalialkio ja alkio* $1 = (1, 0)$ *on kertolaskun neutraalialkio.*

(e) *Jokaisella kompleksiluvulla* z *on vastaluku* $-z = (-1, 0)z$ *(käänteisalkio yhteenlaskun suhteen).*

(f) *Jokaisella nollasta poikkeavalla kompleksiluvulla* $z = (x, y)$ *on käänteisluku*

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

(käänteisalkio kertolaskun suhteen).

Todistus. (a) Yhteenlasku seuraa suoraan reaalilukujen yhteenlaskun assosiatiivisuudesta, kertolasku vaatii hieman enemmän tarkastelua mutta lasku on suoraviivainen.

(b) Seuraavat suoraan reaalilukujen laskutoimitusten kommutatiivisuudesta.

(c) Suoraviivainen lasku määritelmien avulla.

(d) Kun $z = (x, y) \in C$ niin

$$z + 0 = (x, y) + (0, 0) = (x + 0, y + 0) = z$$

ja

$$z \cdot 1 = (x, y)(1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = z.$$

(e) Käyttämällä hyväksi distributiivisuutta ja (d)-kohtaa saadaan

$$z + (-z) = (1, 0)z + (-1, 0)z = \big((1, 0) + (-1, 0)\big)z = (0, 0)z = 0z = 0.$$

(f) Kun $z = (x, y) \neq (0, 0)$, niin

$$(x, y) \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \left(\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}, \frac{-xy}{x^2 + y^2} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0).$$

$\square$

Lauseesta 2.1 seuraa, että kompleksilukujen joukko varustettuna yhteen- ja kertolaskuilla on *kunta*; itse asiassa tämä on täsmälleen alkion $i = \sqrt{-1}$ virittämä reaalilukujen kunnan *kuntalaajennus* eli $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$ (vertaa Algebran kurssiin).

Kompleksiluvuille määritellään vähennys- ja jakolaskut aivan kuten reaaliluvuille: Kun $z, w \in \mathbb{C}$, niin $z - w = z + (-w)$, ja jos lisäksi $w \neq 0$, niin $z/w = z \cdot w^{-1}$.

Reaalilukujen joukko on luontevaa tulkita kompleksitason ”x-akseliksi”. Määritellään tätä varten kuvaus $j \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ asettamalla $j(x) = (x, 0)$.

Lemma 2.2. *Kuvaus j on injektio. Lisäksi*

$$j(x+y) = j(x) + j(y) \quad ja \quad j(xy) = j(x)j(y)$$

kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

Todistus. Helppo ja suoraviivainen lasku. $\square$

Joukkoa $j(\mathbb{R}) = \{z = (x, y) \in \mathbb{C} : y = 0\}$ kutsutaan *reaaliakseliksi* Nyt voimme samastaa reaalilukujen joukon kompleksitason reaaliakselin kanssa, ts. jos $x \in \mathbb{R}$, niin voimme kirjoittaa myös $x = (x, 0) \in \mathbb{C}$.

Kompleksilukua $i = (0, 1)$ kutsutaan *imaginaariyksiköksi* ja joukkoa

$$\{z = (x, y) \in \mathbb{C} : x = 0\} \ \big(= i\mathbb{R} \big)$$

imaginaariakseliksi. Huomaa, että $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, joten $i \in \mathbb{C}$ on todella yhtälön $x^2 + 1 = 0$ ratkaisu.

Jokainen kompleksiluku $z = (a, b)$ voidaan nyt esittää summana

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) = a + ib,$$

missä viimeisessä vaiheessa käytetään edellä tehtyä sopimusta, jonka mukaan kompleksiluku $(a, 0)$ samastetaan reaaliluvun a kanssa (vastaavasti luvulle b). Näillä merkinnöillä kompleksilukujen laskutoimitukset saavat muodot

$$\begin{aligned} (a+ib) + (c+id) &= (a+c) + i(b+d), \\ (a+ib)(c+id) &= (ac-bd) + i(ad+bc). \end{aligned}$$

Määritelmä 2.3. Kompleksiluvun $z = (a, b) = a + ib$ *reaaliosa* on $\mathrm{Re}(z) = a$ ja *imaginaariosa* on $\mathrm{Im}(z) = b$. Siispä $z = \mathrm{Re}(z) + i\,\mathrm{Im}(z)$.

Huomaa, että sekä reaali- että imaginaariosat ovat reaalilukuja!

3. Konjugaatti ja moduli

Määritelmä 3.1. Kun $z = a + ib \in \mathbb{C}$, niin lukua $\overline{z} = a - ib$ sanotaan luvun z *(kompleksi)konjugaatiksi* eli *liittoluvuksi*.

Kompleksikonjugaatilla on seuraavat laskennalliset ominaisuudet:

Lemma 3.2. (a) *Jos $z = x + iy \in \mathbb{C}$, niin $z\overline{z} = x^2 + y^2 \ \big(\in \mathbb{R} \big)$.*

(b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ *kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$.*

(c) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ *kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$.*

(d) *Kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee: $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$.*

Todistus. (a) $z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2+ixy-ixy = x^2+y^2$.

(b) Helppo lasku.

(c) Olkoon $z = a+ib$ ja $w = c+id$. Koska $z+w = a+c+i(b+c)$, niin

$$\overline{z+w} = a+c-i(b+c) = a-ib+c-id = \overline{z}+\overline{w}.$$

(d) Olkoon $z = x+iy$. Tällöin

$$\begin{aligned} z = \overline{z} &\iff x+iy = x-iy \iff iy = -iy \\ &\iff y = -y \iff y = 0 \iff z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Kompleksiluvuilla ei ole olemassa luonnollista järjestystä, joka toimisi samoin kuin reaalilukujen järjestys ‘ $>$ ‘. Reaaliluvun itseisarvoa vastaava käsite voidaan kuitenkin määritellä myös kompleksiluvuille:

Määritelmä 3.3. Kompleksiluvun $z = x+iy$ *moduli* (eli itseisarvo) on

$$|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|,$$

missä $\|\cdot\|$ on tason $\mathbb{R}^2$ *euklidinen normi* (vrt. lineaarialgebran ja euklidisten avaruuksien kursseihin).

Huomioita: (i) Jos $z \in \mathbb{R}$ (ts. $z = x + i\cdot 0$), niin

$$|z| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

(ii) $|z| = |\overline{z}|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

(iii) $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ ja $\mathrm{Im}(z) \leq |z|$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

(iv) $|zw| = |z||w|$ kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$.

Lemma 3.4. *Kompleksilukujen moduli toteuttaa kolmioepäyhtälön:*

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

kaikilla $z, w \in \mathbb{C}$.

Todistus. Olkoot $z, w \in \mathbb{C}$. Laskemalla on helppo todeta, että

$$z\overline{w} + \overline{z}w = 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq 2|z\overline{w}| = 2|z||w|,$$

missä käytimme hyväksi lemmaa edeltäviä huomioita (ii)–(iv). Siten

$$\begin{aligned} |z+x|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2, \end{aligned}$$

mistä väite seuraa. □

Modulin ja konjugaatin avulla kompleksiluvun $z \neq 0$ käänteisluvulle saadaan helppo esitys:

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

Esimerkki 3.5. Lasketaan mitä on kahden kompleksiluvun osamäärä z/w. Olkoon siis $z = a+ib$ ja $w = c+id \neq 0$. Tällöin

$$\frac{z}{w} = zw^{-1} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2} = \frac{(a+ib)(c-id)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\,.$$

4. Napakoordinaattiesitys

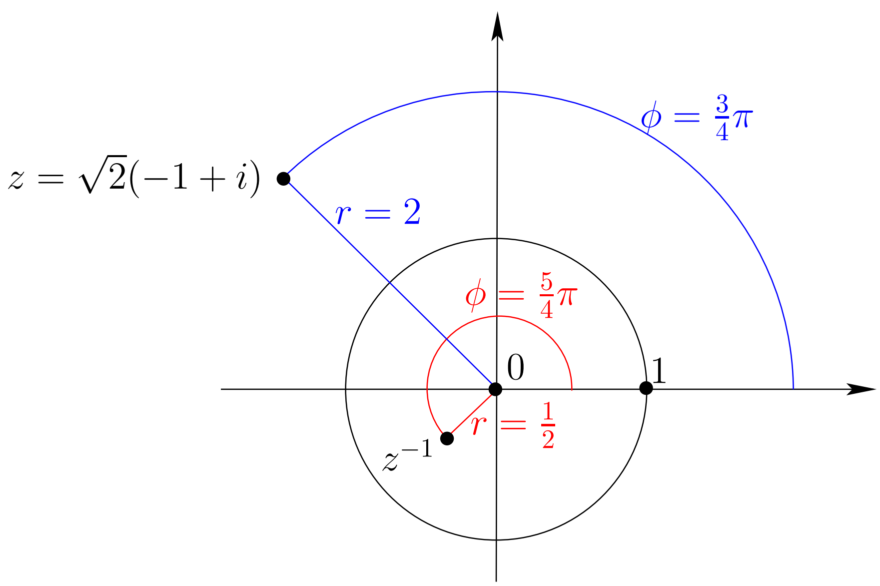
Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ja olkoon φ tason $\mathbb{R}^2$ vektorien $(1, 0)$ ja (x, y) välinen kulma vastapäivään (eli 'positiiviseen kiertosuuntaan'). Tällöin

$$x = \|(x, y)\| \cos\varphi = |z| \cos\varphi \quad \text{ja} \quad y = \|(x, y)\| \sin\varphi = |z| \sin\varphi,$$

joten voimme kirjoittaa

$$z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi). \tag{1}$$

Kaavan (1) toteuttavaa lukua φ kutsutaan kompleksiluvun z *argumentiksi* (merkitään usein $\varphi = \arg z$). Huomaa, että tämä φ ei ole yksikäsitteinen, vaan myös kaikki luvut $\varphi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ovat kompleksiluvun z moduleita. Paria $(|z|, \arg z)$ sanotaan kompleksiluvun z *napakoordinaattiesitykseksi*.



Kuva 1. Kompleksilukujen $z = \sqrt{2}(i - 1)$ ja $z^{-1} = -\frac{1+i}{2\sqrt{2}}$ napakoordinaatit ovat $(2, \frac{3}{4}\pi)$ ja $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\pi)$.

Napakoordinaattiesityksen ja trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavojen avulla saamme havainnollisen esityksen kompleksilukujen kertolaskulle:

Lemma 4.1. (a) *Olkoot* $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ *ja* $w = s(\cos\theta + i\sin\theta)$*. Tällöin*

$$zw = rs\big(\cos(\varphi + \theta) + i\sin(\varphi + \theta)\big).$$

(b) *Olkoot* $z_k = r_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k)$*,* $k = 1, 2, \ldots, n$*. Tällöin*

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \Big(\prod_{k=1}^{n} r_k\Big)\Big(\cos\Big(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\Big) + i\sin\Big(\sum_{k=1}^{n}\varphi_k\Big)\Big).$$

Todistus. (a) Sinin ja kosinin yhteenlaskukaavojen avulla saamme

$$\begin{aligned}
rs\big(&\cos(\varphi + \theta) + i\sin(\varphi + \theta)\big) \\
&= rs\big(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta + i(\sin\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\theta)\big) \\
&= rs\big((\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\theta + i\sin\theta)\big) \\
&= r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot s(\cos\theta + i\sin\theta) = zw.
\end{aligned}$$

(b) Seuraa (a)-kohdasta induktiolla. □

Kompleksilukujen tulo saadaan siis ”kertomalla modulit ja laskemalla argumentit yhteen”.

Esimerkki 4.2. (a) Olkoon $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}$. Koska $i = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)$, saadaan Lauseesta 4.1

$$iz = r\big(\cos(\varphi + \pi/2) + i\sin(\varphi + \pi/2)\big).$$

Siten luvulla i kertominen vastaa tasossa kiertoa kulman $\pi/2$ verran positiiviseen suuntaan.

(b) Erikoistapauksena Lauseen 4.1 (b)-kohdasta saadaan kuuluisa *de Moivren* kaava:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^k = \cos(k\varphi) + i\sin(k\varphi). \tag{2}$$

5. Polynomiyhtälöitä

Napakoordinaattiesitystä ja kertolaskusääntöä käyttäen on helppo tutkia kompleksilukujen *juuria*:

Määritelmä 5.1. Jos $z, w \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ ja $z^m = w$, niin z on luvun w *m:s juuri.*

Lemma 5.2. *Luvulla $1 \in \mathbb{C}$ on m kappaletta m:nsiä juuria; toisin sanoen, yhtälöllä $z^m = 1$ on m (kompleksista) ratkaisua.*

Todistus. Olkoon

$$\zeta_m = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}.$$

Tällöin de Moivren kaavan (2) nojalla

$$\zeta_m^m = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1,$$

joten ζ_m on luvun 1 eräs m:s juuri. Jos nyt $n \in \{1, 2 \ldots, m\}$, niin jälleen kaavaa (2) käyttäen saadaan

$$\zeta_m^n = \cos\frac{2\pi n}{m} + i\sin\frac{2\pi n}{m},$$

joten

$$(\zeta_m^n)^m = \cos\frac{2\pi nm}{m} + i\sin\frac{2\pi nm}{m} = 1.$$

Siispä kaikki luvut ζ_m^n (jotka ovat todella eri lukuja, kun $n \in \{1, 2 \ldots, m\}$) ovat luvun 1 m:nsiä juuria. □

Huomautus: $\zeta_m^m = 1 \in \mathbb{R}$ ja jos m on parillinen, niin

$$\zeta_m^{m/2} = \cos\tfrac{2\pi m/2}{m} + i\sin\tfrac{2\pi m/2}{m} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \in \mathbb{R}.$$

Nämä ovat ainoat reaaliset ratkaisut yhtälölle $z^m = 1$.

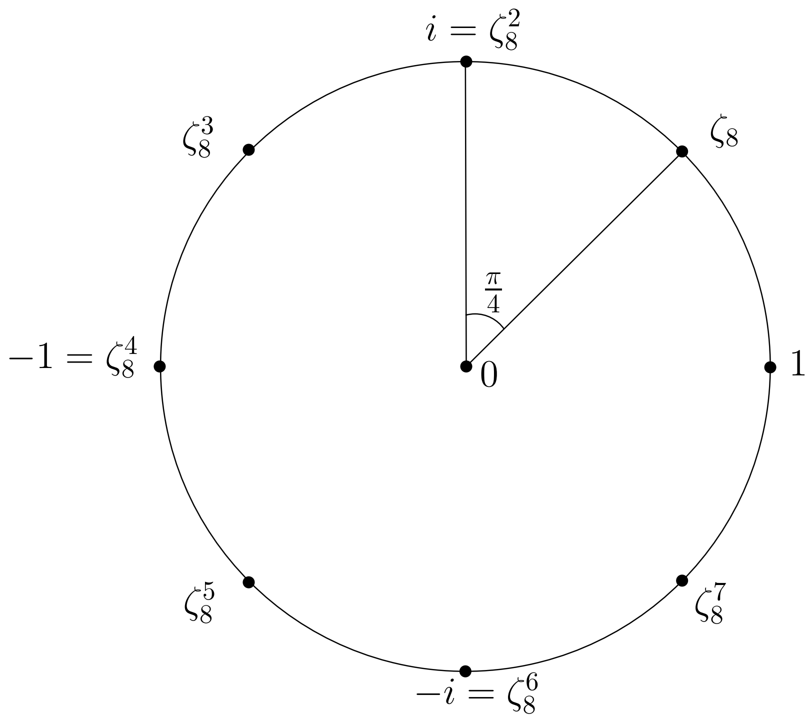
Lemman 5.2 ja napakoordinaattiesityksen avulla löydetään jokaisen nollasta poikkeavan kompleksiluvun juuret:

Lause 5.3. *Jokaisella kompleksiluvulla $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on m kappaletta m:nsiä juuria.*

Todistus. Kun $w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, niin luku

$$z = \sqrt[m]{r}\Big(\cos\frac{\varphi}{m} + i\sin\frac{\varphi}{m}\Big)$$

on luvun w yksi m:s juuri. Kaikki muut ovat muotoa $z\zeta_m^n$, $n \in \{1, \ldots, m\}$, missä ζ_m on ykkösen m:s juuri. Yksityiskohdat jätetään harjoitustehtäväksi. □



KUVA 2. Ykkösen kahdeksannet juuret.

Esimerkki 5.4. Luvun $2 \in \mathbb{C}$ kolmannet juuret ovat $\sqrt[3]{2}$,

$$\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\Big) = \sqrt[3]{2}\Big(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

ja

$$\sqrt[3]{2}\Big(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\Big) = -\sqrt[3]{2}\Big(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\Big).$$

HUOMAUTUS: Koska jokaisella kompleksiluvulla on useita juuria, täytyy positiivisille reaaliluvuille tunnettujen juurien laskusääntöjen kanssa olla varovainen kompleksilukujen joukossa. Esimerkiksi $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ kun $a, b \in \mathbb{R}_+$, mutta toisaalta

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1 \neq 1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)}\,. \qquad (!?)$$

Tällaisia ongelmia käsitellään tarkemmin kompleksianalyysin kurssilla.

Edellä on siis saatu ratkaistua muotoa $z^m + a_0 = 0$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $a_0 \in \mathbb{C}$, olevat yhtälöt. Tarkastellaan seuraavaksi vielä hieman muiden kompleksilukukertoimisten polynomiyhtälöiden ratkaisemista.

Aloitamme toisen asteen yhtälöistä. Jos $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, niin tunnetusti luvut

$$x_1 = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \quad \text{ja} \quad x_2 = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$$

ovat toisen asteen polynomiyhtälön

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

ratkaisut, kunhan $a_1^2 - 4a_2a_0 \geq 0$ eli kun luvulla $a_1^2 - 4a_2a_0 \in \mathbb{R}$ on reaalinen neliöjuuri.

Toisaalta Lauseen 5.3 nojalla jokaisella kompleksiluvulla on neliöjuuri, ja suoraan laskemalla voimmekin todeta, että jokaisella toisen asteen *kompleksilukukertoimisella* yhtälöllä on kaksi ratkaisua *kompleksilukujen* joukossa. Kirjataan tämä tulos seuraavassa muodossa:

Lause 5.5. *Yhtälön $z^2 + a_1 z + a_0 = 0$, missä $a_0, a_1 \in \mathbb{C}$, ratkaisuja ovat luvut*

$$z_1 = -\frac{a_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} \qquad \text{ja} \qquad z_2 = -\frac{a_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0}\,.$$

Todistus. Havaitsemme suoraan laskemalla, että

$$(z - z_1)(z - z_2) = z^2 + a_1 z + a_0,$$

mistä väite seuraa. □

Myös kolmannen ja neljännen asteen (kompleksikertoimisille) polynomiyhtälöille on olemassa ”ratkaisukaavat”; mainitsemme tässä vain kolmannen asteen yhtälön yleisen ratkaisun. Tätä varten merkitsemme

$$\zeta = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

($\zeta \in \mathbb{C}$ on siis (eräs) ykkösen kolmas juuri).

Lause 5.6 (”Cardanon kaavat”)**.** *Yhtälön*

$$z^3 + pz + q = 0, \qquad p, q \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

ratkaisuja ovat kompleksiluvut

$$z_1 = u_0 + v_0, \quad z_2 = \zeta u_0 + \zeta^2 v_0 \quad \text{ja} \quad z_3 = \zeta^2 u_0 + \zeta v_0,$$

missä

$$\begin{aligned} u_0 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\ v_0 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \end{aligned} \tag{4}$$

ja kuutiojuurten arvot on valittu siten, että $u_0 v_0 = -p/3$.

Huomautus. Kaikki kolmannen asteen kompleksikertoimiset yhtälöt saadaan muuttujanvaihdolla muotoon (3): Jos yhtälöön

$$w^3 + a_1 w^2 + a_2 w + a_3 = 0$$

sijoitetaan $w = z - a_1/3$, saadaan muotoa (3) oleva yhtälö, joka voidaan ratkaista Lauseen 5.6 avulla. Alkuperäisen yhtälön ratkaisut saadaan nyt lisäämällä näihin ratkaisuihin $-a_1/3$. Näin ollen kaikki kolmannen asteen yhtälöt voidaan ratkaista Lauseen 5.6 avulla.

Ratkaisukaava ei kuitenkaan ole kovin usein käyttökelpoinen; tätä valaisee seuraava esimerkki:

Esimerkki 5.7. Ratkaistaan yhtälö

$$z^3 + 3z + 4 = 0 \tag{5}$$

ratkaisukaavan avulla. Nyt yhtälö on muotoa (3), missä $p = 3$ ja $q = 4$. Sijoittamalla nämä kaavaan (4) saadaan

$$u = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} + \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}} \in \mathbb{R}$$

ja

$$v = \sqrt[3]{-\frac{4}{2} - \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{3}\right)^3}} = \sqrt[3]{-2 - \sqrt{5}} = -\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} \in \mathbb{R}.$$

Koska lisäksi $uv = -\sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}}\,\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = -1 = -p/3$, on

$$z_1 = u + v = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}}$$

yhtälön (5) eräs ratkaisu. Muita ratkaisuja ovat

$$z_2 = \zeta u + \zeta^2 v \quad \text{ja} \quad z_3 = \zeta^2 u + \zeta v.$$

Huom: Laskemalla voidaan todeta, että $z^3 + 3z + 4 = (z+1)(z^2 - z + 4)$, ja toisaalta $z^2 - z + 4 > 0$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$, joten $z = -1$ on yhtälön (5) ainoa *reaalinen* ratkaisu. Koska myös $z_1 = u + v \in \mathbb{R}$, niin täytyy olla

$$\sqrt[3]{-2 + \sqrt{5}} - \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} = -1 \qquad (\,!\,).$$

Huomautus. Kolmannen (ja myös neljännen) asteen yhtälöiden ratkaisukaavalla ei ole mutkikkuutensa vuoksi nykyisin juurikaan käytännöllistä merkitystä, sillä kaikkien polynomiyhtälöiden likimääräiset ratkaisut löytyvät tehokkaamin erilaisten numeeristen algoritmien avulla. Ratkaisukaavojen löytymisen teoreettiset seuraukset ovat kuitenkin olleet valtaisat. Itse asiassa juuri Cardanon kaavat antoivat alkusysäyksen kompleksilukujen käytölle, sillä usein käy niin, että polynomiyhtälön reaalisetkin juuret esiintyvät Cardanon kaavoissa muodossa, joka sisältää negatiivisten lukujen neliöjuuria.

Huomautus. Viidennen ja korkeamman asteen (kompleksi- tai reaalikertoimisille) polynomeille *ei ole olemassa* yleistä ratkaisualgoritmia. Korkeamman asteen yhtälöiden ratkeamattomuus todistetaan nykyisin yleensä käyttämällä ryhmäteoriaa, erityisesti niin sanottua *Galois'n teoriaa.* Näihin asioihin tutustutaan lähemmin Algebran (jatko)kursseilla.

Vaikka korkeamman asteen yhtälöille ei olekaan olemassa yleistä "ratkaisukaavaa", voidaan silti osoittaa, että *jokaisella* kompleksikertoimisella polynomiyhtälöllä *on* ratkaisu. Toisin sanoen, jokaisella joukon $\mathbb{C}$ (ja siten myös joukon $\mathbb{R}$) polynomilla on *kompleksinen* nollakohta:

Lause 5.8 (Algebran peruslause)**.** *Olkoon P kompleksikertoiminen polynomi (joka ei ole vakio). Tällöin on olemassa $z_0 \in \mathbb{C}$ siten, että $P(z_0) = 0$ eli z_0 on polynomin P nollakohta.*

Olkoon nyt P_n jokin n:nnen asteen polynomi. Algebran peruslauseen nojalla polynomilla P_n on nollakohta z_n. Tällöin P_n voidaan tunnetusti jakaa termillä $(z - z_n)$, ja tuloksena on $(n-1)$-asteinen polynomi P_{n-1}, ts. $P_n(z) = (z - z_n)P_{n-1}$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Nyt myös polynomilla P_{n-1} on kompleksinen nollakohta z_{n-1} (mikäli $n \geq 2$), ja löytyy $(n-2)$-asteinen polynomi P_{n-2} siten, että $P_n(z) = (z - z_n)(z - z_{n-1})P_{n-2}$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Näin jatkamalla saadaan Algebran peruslauseen vahvennus:

Lause 5.9. *Jokaisella n:nnen asteen kompleksikertoimisella polynomilla on (kertaluvut huomioiden) täsmälleen n kompleksista nollakohtaa.*

6. Kompleksinen derivointi ja eksponenttifunktio

Polynomifunktioiden lisäksi myös muita reaalilukujen alkeisfunktioita voidaan laajentaa kompleksilukujen funktioiksi. Tällöin osoittautuu, että esimerkikisi eksponenttifunktion ja trigonometristen funktioiden välillä on ehkä yllättävänkin läheinen yhteys. Kompleksinen eksponenttifunktio $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ voidaan nimittäin määritellä asettamalla kompleksiluvulle $z = x + iy$

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy} := e^x(\cos y + i \sin y). \tag{6}$$

Siten $|e^z| = e^x$ ja $\arg(e^z) = y$.

Kaavan (6) erikoistapausta $x = 0$ kutsutaan *Eulerin kaavaksi*. Huomaa, että kaavasta (6) seuraa, että exp on jaksollinen funktio, jaksona on $2\pi i$. Trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavojen avulla voidaan helposti osoittaa, että kaikille $z, w \in \mathbb{C}$ pätee $e^z e^w = e^{z+w}$.

Kompleksifunktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivaatta määritellään erotusosamäärän avulla aivan kuten reaalifunktioiden tapauksessa. Toisin sanoen, funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (tai funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$, missä $U \subset \mathbb{C}$ on avoin joukko) derivaatta pisteessä $z \in \mathbb{C}$ (tai $z \in U$) on

$$f'(z) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(z+\lambda) - f(z)}{\lambda} \qquad (\in \mathbb{C}), \tag{7}$$

jos oikean puolen raja-arvo on olemassa. Huomaa, että tässä siis $\lambda \in \mathbb{C}$, joten $\lambda \to 0$ tarkoittaa samaa kuin $|\lambda| \to 0$. Jos $U \subset \mathbb{C}$ on avoin joukko ja funktio $f\colon U \to \mathbb{C}$ on derivoituva jokaisessa pisteessä $z \in U$, niin sanotaan, että f on *analyyttinen* (joukossa U).

Kompleksinen derivointi noudattaa reaalisesta tapauksesta tuttuja peruslaskusääntöjä:

Lemma 6.1. *Olkoot $f, g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivoituvia pisteessä $z \in \mathbb{C}$ ja olkoon $\lambda \in \mathbb{C}$. Tällöin myös λf, $f + g$, fg ja f/g (mikäli $g(z) \neq 0$) ovat derivoituvia pisteessä z, ja*

(a) $(\lambda f)'(z) = \lambda f'(z)$

(b) $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

(c) $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

(d) $\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g'(z)^2}$.

Lemma 6.2. *Olkoon $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivoituva pisteessä $z \in \mathbb{C}$ ja olkoon $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ derivoituva pisteessä $f(z) \in \mathbb{C}$. Tällöin $g \circ f$ on derivoituvia pisteessä z ja $(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z)$.*

Lemmojen 6.1 ja 6.2 tulokset pätevät luonnollisesti myös silloin kun funktiot f ja g on määritelty (sopivissa) kompleksitason avoimissa osajoukoissa.

Kompleksisella eksponenttifunktiolla on sama erityisominaisuus kuin reaalisella eksponenttifunktiolla:

Lause 6.3. *Eksponenttifunktio $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$, on analyyttinen eli derivoituva kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Lisäksi $f'(z) = e^z$ $(= f(z))$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.*

Lisälukemista

Tero Kilpeläinen: *Kompleksianalyysi*, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto 2006. http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATS120.pdf

Juha Lehrbäck ja Jouni Parkkonen: *Lukualueet*, luentomoniste, Jyväskylän yliopisto 2010. http://www.math.jyu.fi/opiskelu/monisteet/MATA120.pdf

Olli Lehto: *Funktioteoria I-II*, Limes ry. 1985.