Kompleksianalyysi 1

Tero Kilpeläinen

Luentomuistiinpanoja keväälle 2015
6. maaliskuuta 2015

Alkusanat

Seuraavilla sivuilla on luentomuistiinpanoja Kompleksianalyysi 1 -kurssille. Nämä on muokattu kompleksianalyysin luentomonisteestani sopimaan nykyiseen, 30 tunnin luentosarjaan. Toivoakseni kirjoitus helpottaa omien luentomuistiinpanojen tekemistä ja oppimista.

Kurssin alussa käsitellään lyhyesti kompleksitasoa ja sen perusfunktioita. Kurssin pääkohteeseen, analyyttiseen funktioon tutustutaan luvussa 2. Kurssia seuratessa on hyödyllistä tarkkailla analogioita toisaalta analyyttisen funktion ja yhden muuttujan reaalifunktion teorioiden sekä toisaalta kompleksisen derivoinnin ja tason reaalisen differentiaalilaskennan välillä.

Kurssin toisessa osassa käsitellään kompleksista intergrointia ja redisylaskentaa yleisemmissä alueissa, analyyttisten funktioiden potenssisarjaesityksiä, konformikuvauksia sekä kompleksianalyysin sovelluksia.

Einstein's advice to a junior high school correspondent:

”Do not worry about your difficulties in mathematics.
I can assure you mine are still greater.”

Sisältö

1. Kompleksiluvut ja kompleksitaso

1.1. Yleistä kompleksiluvuista

Esimerkki. (Johdatteleva esimerkki) Olkoon

$$R = R(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \in \mathbf{R}.$$

Tällöin

$$R\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad R\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}$$

joten R kiertää tasoa $\mathbf{R}^2$ kulman φ verran vastapäivään.

Kiertomatriisi $R(\varphi)$ voidaan samastaa suuntavektorin $e = (e_1, e_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $|e| = 1$ kanssa, sillä

$$R = \begin{bmatrix} e_1 & -e_2 \\ e_2 & e_1 \end{bmatrix}.$$

Mielivaltaista vektoria $z = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $z \neq 0$, vastaa yksikkösuuntavektori

$$e = \frac{z}{|z|} = (\cos\varphi, \sin\varphi),$$

missä $|z|$ on vektorin z euklidinen pituus ja φ on vektorin $(1, 0)$ ja z:n välinen kulma φ vastapäivään. Siten voidaan ajatella, että vektoria z vastaa matriisi

$$|z|R = |z|\begin{bmatrix} \frac{x}{|z|} & -\frac{y}{|z|} \\ \frac{y}{|z|} & \frac{x}{|z|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Vektorin $w = (u, v) \in \mathbf{R}^2$ kertominen tällä matriisilla (eli "kertolasku" zw) on siis venytys luvulla $|z|$ yhdistettynä kiertoon kulman φ verran vastapäivään. Saamme

$$zw \sim |z|Rw = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xu - yv \\ yu + xv \end{bmatrix}.$$

Näin todellakin saadaan "hyvä" kertolasku $\mathbf{R}^2$:n vektorien välille.

1.1. Määritelmä. *Kompleksilukujen kunta* $\mathbf{C}$ koostuu kaikista pareista $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, joille määritellään yhteen- ja kertolasku seuraavasti:
Olkoon $z = (x, y) \in \mathbf{C}$ ja $w = (u, v) \in \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u, y + v) \\ z\,w &= (xu - yv, xv + yu)\,. \end{aligned}$$

1.2. Huomautus. Kunnan $\mathbf{C}$ *nolla-alkio* on

$$0 = (0, 0)$$

ja *ykkösalkio* on

$$1 = (1, 0),$$

ts.

$$\begin{aligned} z + 0 = 0 + z = z \\ z \cdot 0 = 0 \cdot z = 0\,. \end{aligned}$$

Jos $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$, niin pisteen z *käänteisalkio* z^{-1} on sellainen kunnan $\mathbf{C}$ alkio, jolle

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

Näin $\mathbf{C}$ todella toteuttaa (tarkista!) kunta-aksioomat: Kaikilla $z_1, z_2, z_3 \in C$

i) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ ja $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (kommutatiivisuus)

ii) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ ja $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2)z_3$ (assosiatiivisuus)

iii) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (distributiivisuus)

iv) $z_1 + 0 = z_1$ ja $z_1 \cdot 1 = z_1$ (neutraalialkiot)

v) on olemassa vasta-alkio $-z_1 = (-x_1, -y_1)$ (jolle $z_1 + (-z_1) = 0$) ja käänteisalkio z_2^{-1}, jos $z_2 \neq 0$, (jolle $z_2 z_2^{-1} = 1$).

1.3. Huomautus. On helppo nähdä, että $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$. Edelleen käytetään tavanomaista merkintää:

$$\frac{z}{w} := zw^{-1}\,.$$

1.4. Huomautus. Olkoot $z = (x, y)$, $w = (u, v) \in \mathbf{C}$. Tällöin $z = w \Leftrightarrow x = u$ ja $y = v$.

1.5. Määritelmä. Olkoon $z = (x, y) \in \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} x &=: Re(z) = \text{ pisteen } z \textit{ reaaliosa} \\ y &=: Im(z) = \text{ pisteen } z \textit{ imaginaariosa.} \end{aligned}$$

1.6. Huomautus. Samastamalla reaaliluku[1] a luvuksi $(a, 0)$ voidaan tulkita, että $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

1.7. Määritelmä. $i := (0, 1) \in \mathbf{C}$ on *imaginääriyksikkö.*

1.8. Huomautus.

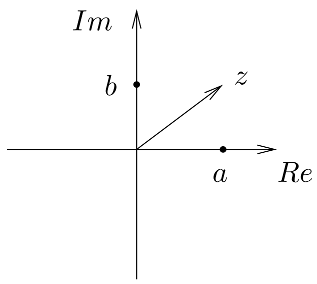
$$\begin{aligned} i^2 &:= i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0-1,\, 0+0) = (-1,0) = -1. \\ i^3 &:= i \cdot i \cdot i = i \cdot i^2 = -1(0,1) = (0,-1) = -i. \\ i^4 &:= i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1 = (1,0). \\ i^5 &:= i \cdot i^4 = i \text{ jne.} \end{aligned}$$

1.9. Lause. *Jos $z \in \mathbf{C}$, niin on olemassa yksikäsitteiset $a, b \in \mathbf{R}$, joille*

$$z = a + ib\,.$$

Erityisesti,

$$a = Re(z) \quad \text{ja} \quad b = Im(z)\,.$$



[1] **Varoitus:** Kompleksilukujen välillä ei ole järjestysrelaatiota. Jos jatkossa kirjoitetaan esimerkiksi $a \leq b$, niin merkintä pitää sisällään sopimuksen, että $a, b \in \mathbf{R}$.

TODISTUS: $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = Re(z) + iIm(z)$.

Jos $(a_1, b_1) = a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 = (a_2, b_2)$, niin $a_1 = a_2$ ja $b_1 = b_2$. □

1.10. Huomautus. Kompleksilukujen algebra palautuu tavalliseen reaalilukujen algebraan Lauseen 1.9 avulla: kompleksiluvut ovat muotoa $z = a + bi$, missä $a, b \in \mathbf{R}$ ja i on imaginaariyksikkö. Kompleksilukujen laskutoimituksissa toimitaan binomeilla $(a + bi)$ laskemisen tapaan, kunhan muistetaan sääntä $i^2 = -1$ ja kaikki termit, joissa i on tekijänä erotetaan niistä, joissa sitä ei ole. Esim

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bic + bidi = +bdi^2 = (ac - bd) + i(ad + bc)\,.$$

Esimerkki.

$$(1 + 4i) + (-2 - i) = -1 + 3i\,.$$
$$(2 - 6i)(1 + i) = 2 + 6 + i(-6 + 2) = 8 - 4i\,.$$
$$\frac{2 + 5i}{3 - 4i} = (2 + 5i)(3 - 4i)^{-1} = ?$$

Nyt

$$\begin{aligned}(3 - 4i)^{-1} &= (3 + 4i)(3 + 4i)^{-1}(3 - 4i)^{-1} \\ &= (3 + 4i)\left(\underbrace{(3 + 4i)(3 - 4i)}_{=9+16}\right)^{-1} \\ &= \frac{3}{25} + \frac{4}{25}i\end{aligned}$$

Siten

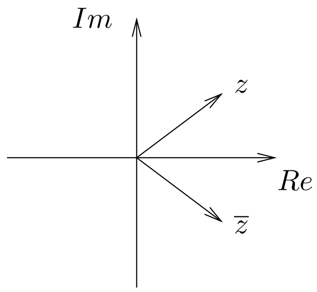
$$\frac{2 + 5i}{3 - 4i} = (2 + 5i)(\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i) = -\frac{14}{25} + \frac{23}{25}i\,.$$

1.11. Määritelmä. Luvun $z = x + iy \in \mathbf{C}$ *kompleksikonjugaatti* (tai *liittoluku*) on kompleksiluku

$$\bar{z} := x - iy = (x, -y)$$

ts.

$$Re(z) = Re(\bar{z}) \quad \text{ja} \quad Im(z) = -Im(\bar{z})\,.$$



Luvut z ja $\bar{z}$ ovat toistensa peilikuvia reaaliakselin suhteen.

1.12. Määritelmä. Luvun $z = x + iy \in \mathbf{C}$ *moduli* tai *itseisarvo* (*pituus, normi*) on

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$

(mikä on vektorin $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ tavallinen euklidinen pituus).

1.13. Lemma. *Olkoot $z, w \in \mathbf{C}$. Tällöin*

i) $\overline{\overline{z}} = z$.

ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad , \quad \overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$.

iii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

iv) $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1} \quad , \quad$ *jos* $z \neq 0$.

v) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad , \quad Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

vi) $|zw| = |z||w|$.

vii) $|z| = |\bar{z}| \quad , \quad |z|^2 = z\bar{z}$.

viii) $|Re(z)| \leq |z| \quad , \quad |Im(z)| \leq |z|$.

ix) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad , \quad$ *jos* $z \neq 0$.

x) $|z + w|^2 = |z|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |w|^2$.

xi) $|z + w| \leq |z| + |w| \quad$ *ja* $\quad \big||z| - |w|\big| \leq |z + w|$.

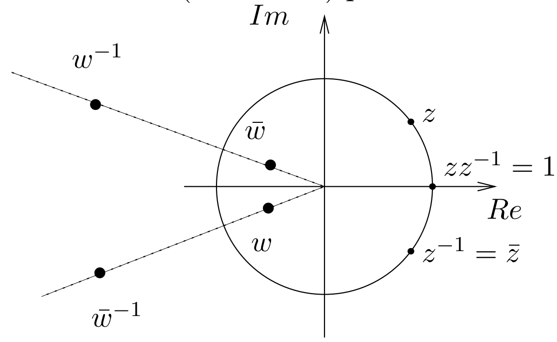
Todistus: Todistetaan kolmioepäyhtälö: $|z+w| \le |z|+|w|$. Muut HT.

Nyt

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar z + \bar w)\\ &= z\bar z + z\bar w + \bar z w + w\bar w\\ &= |z|^2 + 2\frac{z\bar w + \overline{(z\bar w)}}{2} + |w|^2\\ &= |z|^2 + 2Re(z\bar w) + |w|^2\\ &\le |z|^2 + 2|Re(z\bar w)| + |w|^2\\ &\le |z|^2 + 2|z\bar w| + |w|^2\\ &= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2.\end{aligned}$$

□

1.14. Huomautus. Lemman 1.13 kohdan ix) mukaan kompleksiluvun $w \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ käänteisluku w^{-1} on w:n kompleksikonjugaatin $\bar w$ suuntaisella (reaalisella) puolisuoralla ja pituudeltaan w:n pituuden käänteisluku:



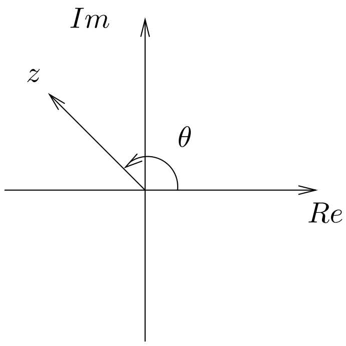
$$|w^{-1}| = \frac{|\bar w|}{|w|^2} = \frac{|w|}{|w|^2} = \frac{1}{|w|}.$$

Erityisesti, jos $|z| = 1$, niin

$$z^{-1} = \frac{\bar z}{|z|^2} = \bar z.$$

1.15. Lemma (napakoordinaatit). *Olkoon $z \in \mathbf{C}$. Tällöin on olemassa $\theta \in \mathbf{R}$, jolle*

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$



TODISTUS: Voidaan olettaa, että $z = x + iy \neq 0$. Olkoon θ yhtälöparin

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

ratkaisu. Tällöin

$$|z|(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy = z.$$

□

1.16. Huomautus. Lemman 1.15 antama esitys on pisteen $(x, y) \in \mathbf{R}$ *napakoordinaattiesitys*, ts.

$$\begin{cases} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\sin\theta\,. \end{cases}$$

1.17. Määritelmä. Kompleksiluvun $z \neq 0$ *argumentti* $\arg(z)$ on reaaliluku θ, jolle

$$\begin{cases} x = |z|\cos\theta \\ y = |z|\sin\theta \end{cases} \quad \text{ja}$$

ts.[2]

$$\arg(z) = \arccos\frac{x}{|z|} = \arcsin\frac{y}{|z|}\,.$$

[2]Huomaa, että $\arg(z)$:n määritelmässä valitaan ne arcussinin ja arcuskosinin haarat, joille pätee yhtäsuuruus $\arccos\frac{x}{|z|} = \arcsin\frac{y}{|z|}$.

1.18. Huomautus. Kompleksiluvun $z \neq 0$ argumentti $\arg(z)$ on luvun 2π monikertoja vaille yksikäsitteinen. Se on se kulma (radiaaneissa), jonka vektori z muodostaa positiivisen reaaliakselin kanssa niin, että positiiviset luvut vastaavat vastapäivään kiertoa (2π:n lisäys kiertää aina kerran koko kierroksen) ja negatiiviset luvut myötäpäivään kiertoa. Yleensä valitaan ns. *argumentin päähaara* $\mathrm{Arg}(z)$, joka on se luvuista $\arg(z)$, jolle

$$\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi].$$

1.19. Huomautus. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Olkoon $\theta_j \in \arg(z_j)$, $j = 1, 2$, ts.

$$z_j = |z_j|(\cos\theta_j + i\sin\theta_j).$$

Tällöin

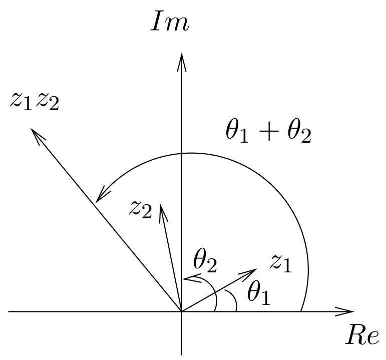
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2| \left(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right) \\ &= |z_1||z_2| \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right), \end{aligned}$$

mikä seuraa helposti trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoista (HT). Siis kompleksilukujen kertolaskussa niiden argumentit lasketaan yhteen ja pituudet kerrotaan keskenään.

Edellisestä yhtälöstä seuraa, että voidaan tehdä seuraava tulkinta:

$$\arg(z_1 z_2) \,''{=}''\, \arg z_1 + \arg z_2\,,$$

missä on tosin muistettava, ettei arg ole yksikäsitteisesti määrätty.



Kertolaskun geometrinen tulkinta

Induktiolla saadaan *de Moivren kaavat*:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad , \quad \theta \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}\,.$$

1.20. Lause. *Olkoon $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$ ja $n = 1, 2, 3, \ldots$. Tällöin yhtälöllä*

$$w^n = z$$

on täsmälleen n eri ratkaisua $w \in \mathbf{C}$. Lisäksi, $w^n = z$, jos ja vain, jos

$$w = w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n})\right)$$

jollakin $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Todistus: Olkoon $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Jos $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ sellainen, että $w^n = z$, saadaan de Moivren kaavasta, että

$$|w|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = (|w|(\cos\phi + i\sin\phi))^n = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

josta edelleen

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \sin(n\phi) = \sin\theta \end{cases}.$$

Osoita harjoitustehtävänä, että tästä seuraa

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\phi = \theta + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

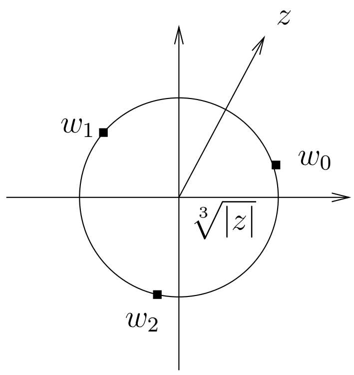
Tällöin

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Kun $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, niin saadaan eri ratkaisut

$$w = w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n})\right).$$

Muut k:n arvot antavat jonkin näistä pisteistä. On myös helppo havaita, että kyseiset kompleksiluvut $w = w_k$ toteuttavat yhtälön $w^n = z$. □



Luvun z n. juuret ovat $\sqrt[n]{|z|}$-säteisen origokeskisen ympyrän kehällä tasaisesti siroteltuna niin että kunkin argumentti n:llä kerrottuna antaa z:n argumentin.

1.21. Määritelmä. Olkoot $n = 1, 2, 3, \ldots$, $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$. Pisteen z n. *juuren päähaara* on

$$\sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\operatorname{Arg}(z)}{n} + i \sin \frac{\operatorname{Arg}(z)}{n} \right).$$

Lisäksi $\sqrt[n]{0} := 0$.

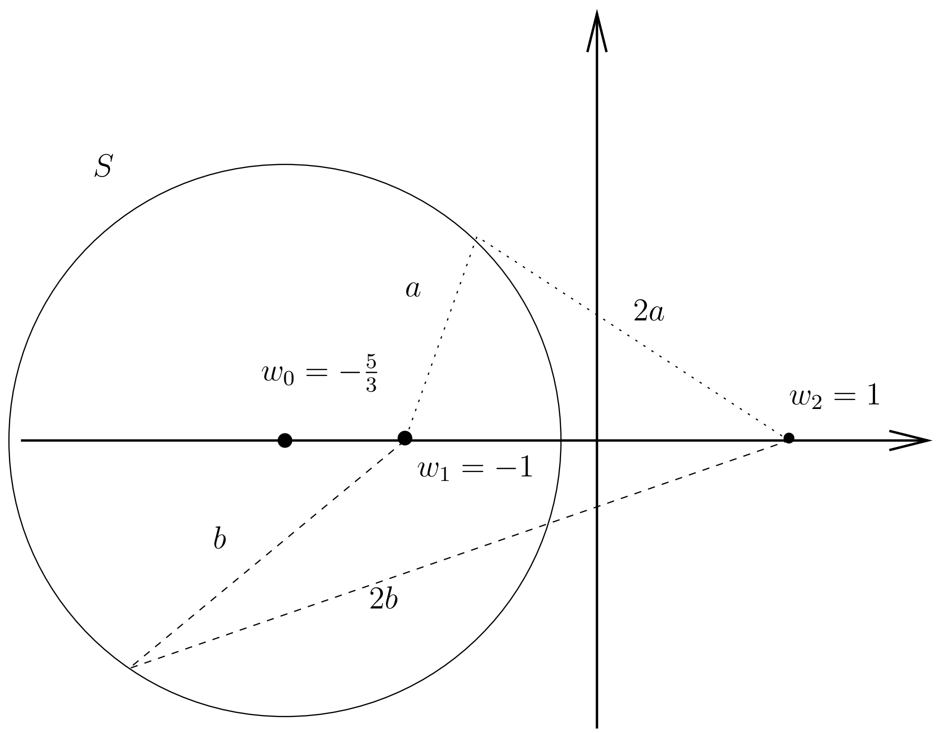
Huomaa, että $\sqrt[1]{z} = z$. Jatkossa merkitään: $\sqrt[2]{z} = \sqrt{z}$, millä tarkoitetaan neliöjuuren päähaaraa. Huomaa, että positiivisten reaalilukujen neliöjuuri (ts. neliöjuuren päähaara) on posititiivinen reaaliluku; negatiivisten reaalilukujen neliöjuuri on positiivisella imaginaariakselilla.

Esimerkki. Kuvaile geometrisesti joukkoa

$$S = \{z \in \mathbf{C} : |z - 1| = 2|z + 1|\}.$$

Olkoon $z = x + iy$. Nyt

$$\begin{aligned}
z \in S &\Leftrightarrow |z-1| = 2|z+1| \\
&\Leftrightarrow |z-1|^2 = 4|z+1|^2 \\
&\Leftrightarrow (z-1)(\overline{z-1}) = 4(z+1)(\overline{z+1}) \\
&\Leftrightarrow |z|^2 - (z+\bar{z}) + 1 = 4|z|^2 + 4(z+\bar{z}) + 4 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 - 2Re(z) + 1 = 4|z|^2 + 8Re(z) + 4 \\
&\Leftrightarrow 3|z|^2 + 10Re(z) + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 + 2\frac{5}{3}Re(z) + 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 + 2Re(z\frac{5}{3}) + (\frac{5}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2 - 1 = \frac{16}{9} \\
&\Leftrightarrow |z + \frac{5}{3}|^2 = (\frac{4}{3})^2 .
\end{aligned}$$



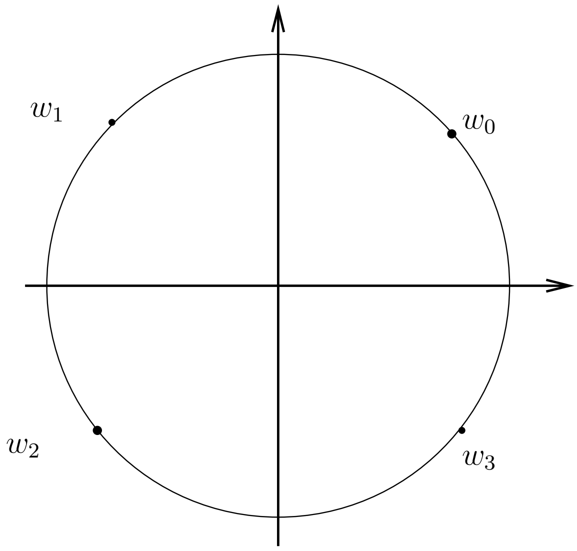
Siten S on ympyränkehä, jonka säde on $4/3$ ja keskipiste $w_0 = -5/3$.

Esimerkki. Määrää kaikki yhtälön $z^4 + 16 = 0$ ratkaisut. Pitää siis löytää kaikki luvun -16 neljännet juuret. Huomataan, että $\sqrt[4]{16} = 2$ ja että $\text{Arg}(-16) = \pi$, joten

Lauseen 1.20 mukaan juuret ovat:

$$
\begin{aligned}
&2(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)), \quad 2(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4)) \\
&2(\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4)) \quad , \quad 2(\cos(7\pi/4)+i\sin(7\pi/4)).
\end{aligned}
$$

Kun nämä lasketaan, saadaan tulokseksi $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ ja $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.



$$w_k = \sqrt[4]{16}(\cos(\pi/4+2k\pi/4)+i\sin(\pi/4+2k\pi/4))$$

1.2. Eksponenttifunktio

Seuraavaksi aiomme määritellä, mitä tarkoitetaan, kun kirjoitetaan

$$e^z \quad , \quad \log z \quad \text{tai} \quad z^w \quad , \text{kun } z,w\in\mathbf{C}:$$

Muista, että (reaalisen) eksponenttifunktion Taylor-kehitelmä on

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}.$$

Lasketaan formaalisti:

$$
\begin{aligned}
e^{iy} &= 1+iy-\frac{y^2}{2!}-i\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+i\frac{y^5}{5!}-\dots \\
&= \underbrace{(1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}-\dots)}_{=\cos y}+i\underbrace{(y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\dots)}_{=\sin y}.
\end{aligned}
$$

Soveltamalla lisäksi eksponenttifunktion laskusääntöä $e^x e^{iy} = e^{x+iy}$, saamme aiheen määritellä:

1.22. Määritelmä. Olkoon $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Määritellään *eksponenttifunktio*

$$\exp(z) := e^z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

1.23. Huomautus. Eksponenttifunktion määrittelyä voi yrittää hahmotella myös seuraavasti: Tarkastellaan ensin kompleksitason (reaalista) suoraa $Re(z) = 0$ eli imaginaariakselia (eli joukkoa $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = 0\}$). Lähdetään "kerimään" tätä suoraa yksikköympyrän kehälle niin, että aloitetaan siirtämällä origo pisteeseen $1 = (1, 0)$ ja siirryttäessä Imaginaariakselia "ylöspäin" sijoitetaan vastinpiste yksikköympyrän kehälle (vastapäivään) niin, että kohdassa $2\pi i$ on kierretty yksi kierros vastapäivään ja ollaan takaisin pisteessä $1 = (1, 0)$. Jatketaan näin ja keritään koko positiivinen imaginaariakseli yksikköympyrän kehälle niin, että kukin $2\pi i$:n nousu kiertää yhden täyden kierroksen vastapäivään. Negatiivinen imaginaariakseli keritään yksikköympyrän muutoin samoin paitsi kiertosuunta on myötäpäivään: kukin $2\pi i$:n lasku kiertää yhden täyden kierroksen myötäpäivään niin, että kohdassa $-2\pi i$ on kierretty yksi kierros myötäpäivään ja ollaan takaisin pisteessä $1 = (1, 0)$. (Tämä kuvaa geometrisesti kuvausta $y \mapsto (\cos y + i \sin y)$, kun $y \in \mathbf{R}$.) Eksponenttifunktion määritelmän mukaan tämä kuva (eli yksikköympyrän kehä) pitää vielä suurentaa kertoimella $e^{Re(z)}$, mikä tässä tapauksessa ei muuta mitään, sillä imaginaariakselilla $Re(z) = 0$ ja siten

$$e^{Re(z)} = e^0 = 1\,.$$

Muut imaginaariakselin suuntaiset suorat ($Re(z) = x_0$) kuvautuvat samaan tapaan ensin yksikköympyrän kehälle kerien (kuvauksella $Im(z) = y \mapsto (\cos y + i \sin y)$) ja sitten suurentamalla/pienentämällä ympyrää kertoimella e^{x_0}. Siten jokaisella $x_0 \in \mathbf{R}$ suoran $Re(z) = x_0$ kuva eksponenttikuvauksessa on origokeskinen e^{x_0}-säteinen ympyrän kehä.

1.24. Huomautus. Jos z on **reaalinen**, niin e^z yhtyy reaalisen eksponenttifunktion määrittelyyn.

Napakoordinaattiesityksen (Lemma 1.15) avulla jokainen kompleksiluku $z \in \mathbf{C}$ voidaan esittää muodossa

$$z = |z|e^{i\theta}\,,$$

missä

$$\theta = \operatorname{Arg}(z) \qquad (\text{kun } z \neq 0).$$

Esimerkki.

$$
\begin{aligned}
&e^0 = 1 \quad , \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\
&e^{i+1} = e(\cos 1 + i \sin 1) \quad \text{ja} \\
&\frac{1}{z} = \frac{1}{|z| e^{i \operatorname{Arg}(z)}} = \frac{1}{|z|} e^{-i \operatorname{Arg}(z)}, \qquad \text{kun } z \neq 0.
\end{aligned}
$$

1.25. Huomautus. Olkoon $z = x + iy$. Nyt

$$
\begin{aligned}
|e^z| &= |e^x| |\cos y + i \sin y| \\
&= e^x \underbrace{\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}}_{=1} = e^x \\
&= e^{Re(z)} \neq 0,
\end{aligned}
$$

joten $e^z \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$. Erityisesti

$$|e^{it}| = e^0 = 1 \qquad \text{kaikilla } t \in \mathbf{R}.$$

Edelleen,

$$\arg(e^z) = \arccos(\cos y) = y = \arcsin(\sin y) = Im(z)\,.$$

Tämän jälkeen on helppo (HT) osoittaa, että eksponenttifunktion kuvajoukko on $\mathbf{C} \setminus \{0\}$,

$$\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \{0\}\,.$$

1.26. Lemma.

i) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ *kaikilla* $z \in \mathbf{C}$.

ii) $e^{z+w} = e^z e^w$ *kaikilla* $z \in \mathbf{C}$.

TODISTUS: i) seuraa kohdasta ii).

ii) Olkoot $z = x + iy$, $w = u + iv$.

$$
\begin{aligned}
e^z e^w &= e^x e^u (\cos y + i \sin y)(\cos v + i \sin v) \\
&= e^{x+u}(\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\sin y \cos v + \cos y \sin v)) \\
&= e^{x+u}(\cos(y+v) + i \sin(y+v)) \\
&= e^{z+w}\,.
\end{aligned}
$$

□

Esimerkki. Lasketaan osamäärä

$$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^5}.$$

Koska $1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ ja $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, on

$$\frac{(1+i)^3}{(1-i)^5} = \frac{(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^3}{(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}})^5} = (\sqrt{2})^{(3-5)}e^{i\frac{\pi}{4}(3+5)} = \frac{1}{2}e^{i\pi 2} = \frac{1}{2}\,.$$

Reaalinen eksponenttifunktio on injektio, ts.

$$\text{kun } t, s \in \mathbf{R} \text{ niin} \qquad e^t = e^s \Leftrightarrow t = s\,;$$

näin ei kuitenkaan ole kompleksisen eksponenttifunktion laita:

1.27. Esimerkki. Ratkaise yhtälö $e^z = 1$.

Merkitään $z = x + iy$. Silloin

$$1 = |e^z| = e^{Re(z)} \Leftrightarrow Re(z) = 0.$$

Siis

$$e^z = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ja } \cos y + i \sin y = 1$$

eli

$$\begin{cases} x = 0 \\ \cos y = 1 \\ \sin y = 0, \end{cases}$$

mistä saadaan

$$\begin{cases} x = 0 & \\ y = 2k\pi & , \quad \text{kun } k \in \mathbf{Z} \\ y = n\pi & , \quad \text{kun } n \in \mathbf{Z}\,. \end{cases}$$

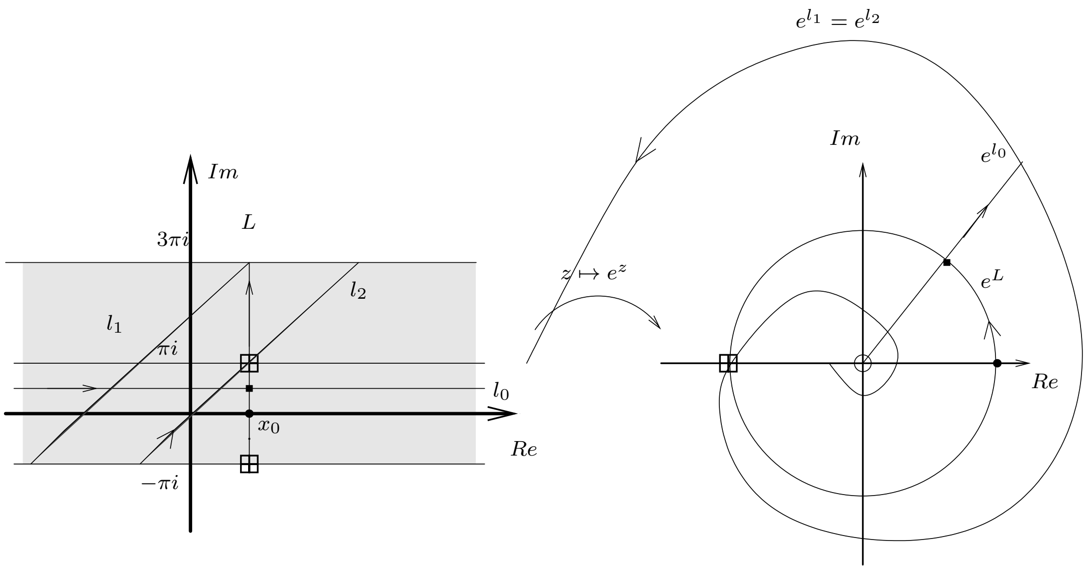
eli $x = 0$ ja $y = 2k\pi$ jollakin $k \in \mathbf{Z}$. Siis $z = 2k\pi i\,,\ k \in \mathbf{Z}$.

1.28. Lause. *Eksponenttifunktio on jaksollinen, jaksona $2\pi i$, ts.*

$$e^z = e^w \quad \textit{jos ja vain jos} \quad z = w + k2\pi i \quad \textit{jollakin } k \in \mathbf{Z}.$$

TODISTUS: Lemman 1.26 nojalla $e^z = e^w$ jos ja vain jos $e^{z-w} = 1$. Esimerkin 1.27 perusteella tämä toteutuu, kun ja vain, kun $z - w = 2\pi i k$ jollakin $k \in \mathbf{Z}$. □

1.29. Huomautus. Lause 1.28 sanoo, että eksponenttifunktio kuvaa jokaisen 2π:n korkuisen reaaliakselin mittaisen nauhan samalla tavalla



Kuvassa spiraalin mittasuhteet ovat väärin.

Tarkastellaan imaginaariakselin suuntaista suoraa

$$L = \{z \in \mathbf{C} : Re(z) = x_0\}.$$

Jos $z \in L$, niin

$$|e^z| = e^{x_0} \quad \text{ja}$$
$$\arg(e^z) = Im(z),$$

ts. L kuvautuu origokeskiselle e^{x_0}-säteiselle ympyrälle siten, että kuva kiertää kehän ympäri kerran aina, kun lähtöpiste liikkuu 2π:n pituisen pätkän suoralla L. Huomaa kierron suunta. Siten

$$\exp(\{z \in \mathbf{C} : Re(z) \le x_0\}) = \overline{B}(0, e^{x_0}) \setminus \{0\}$$

ja yleisemmin

$$\exp(\{z \in \mathbf{C} : x_1 \le Re(z) \le x_0, \quad y_0 \le Im(z) < y_0 + 2\pi\}) = \overline{B}(0, e^{x_0}) \setminus B(0, e^{x_1}).$$

Muut suorat tasossa saadaan yhtälöistä

$$l = \{(x, y) : y = ax + b, x \in \mathbf{R}\} \quad \text{joillakin } a, b \in \mathbf{R}.$$

Siten koska

$$z \in l \Leftrightarrow z = x + i(ax + b) \quad \text{jollain } x \in \mathbf{R}\,,$$

niin kuvapisteelle w saadaan

$$w = e^z = e^x e^{i(ax+b)}.$$

Erityisesti jos $a = 0$, on $l = l_0$ reaaliakselin suuntainen, jolloin kuvapiste w toteuttaa ehdon

$$w = e^z = e^x e^{ib},$$

ts. suoran l_0 kuvana on origosta lähtevä puolisuora (johon 0 ei sisälly), jonka kulma positiiviseen reaaliakseliin on b, ts. kuvajoukko on

$$\{re^{ib} : r > 0\}.$$

Jos $a > 0$, niin sekä $|w|$ että $\arg(w)$ kuvautuvat jatkuvasti monotonisesti — kuvaksi tulee *logaritminen spiraali* (napakoordinaateissa)

$$r = e^{\frac{\theta - b}{a}}.$$

(Jos $a < 0$, saadaan taas logaritminen spiraali mutta toiseen suuntaan.)

1.3. Kompleksinen logaritmi

Reaalinen eksponenttifunktio on injektiivinen, joten sen voi ”kääntää”, ts. on olemassa $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ siten, että $e^{f(t)} = t$ kun $t \in (0, \infty)$ ja $f(e^t) = t$ kaikilla $t \in \mathbf{R}$. Tätä funktiota sanotaan (luonnolliseksi) *logaritmiksi* ja sitä merkitään tällä kurssilla symbolilla ln.

$$s = \ln t, \text{ jos } e^s = t, \text{ kun } s \in \mathbf{R}, t > 0.$$

Kompleksinen eksponenttifunktio ei ole injektio, joten sillä ei ole käänteiskuvausta. Kuitenkin exp on ”lokaalisti” injektio, joten se voidaan ”lokaalisti kääntää” ja saadaan kompleksinen *logaritmi*:

1.30. Määritelmä. Olkoon $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Kompleksiluvun z *logaritmi* on kompleksiluku $w \in \mathbf{C}$ siten, että

$$e^w = z\,, \quad \text{merkitään } w = \log z.$$

Huomaa, että luvun $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ logaritmi $\log z$ *ei ole* yksikäsitteinen, joten näin *ei saada funktiota* : $\mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}$:

1.31. Lause. *Olkoon $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$. Tällöin*

$$w = \log z$$

jos ja vain jos on olemassa $k \in \mathbf{Z}$, jolle

$$w = \ln |z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi).$$

TODISTUS: Koska

$$e^{\ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)} = e^{\ln |z|} e^{i \operatorname{Arg}(z)} = |z| e^{i \operatorname{Arg}(z)} = z,$$

saadaan eksponenttifunktion jaksollisuuden (Lause 1.28) perusteella, että

$$w = \log z \text{ eli } \quad e^w = z,$$

on yhtäpitävää ehdon

$$w = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z + k2\pi i \quad \text{jollakin } k \in \mathbf{Z}$$

kanssa. □

Kompleksisen logaritmin moniarvoisuus voitetaan valitsemalla sopiva logaritmin haara:

1.32. Määritelmä. *Logaritmin päähaara* $\operatorname{Log} z$ määritellään asettamalla

$$\operatorname{Log} z := \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z).$$

1.33. Huomautus. Jos $z \in \mathbf{R}$, $z > 0$ (ts. $Im(z) = 0, Re(z) > 0$), niin

$$\operatorname{Log} z = \ln z.$$

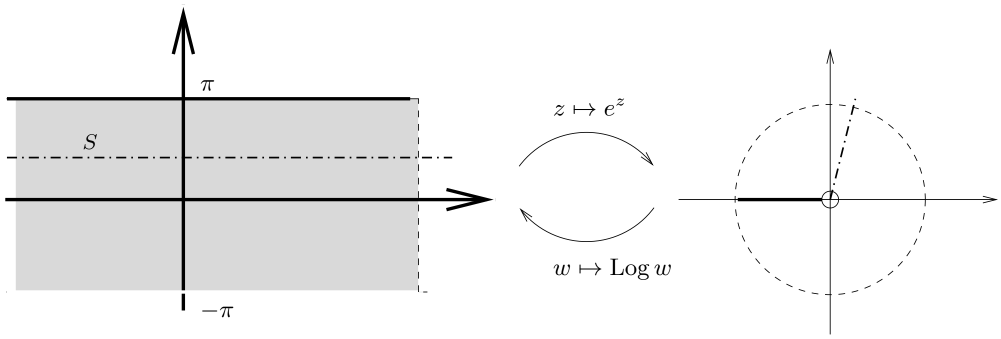
1.34. Huomautus. $\log z_1 z_2$ "=" $\log z_1 + \log z_2$, mutta tämä ei ole totta päähaaralle $\operatorname{Log} z$ (Miksi?).

1.35. Huomautus. Logaritimin päähaara on eksponenttifunktion käänteiskuvaus, kun jälkimmäinen rajoitetaan suikaleeseen

$$S = \{x + iy \in \mathbf{C} : -\pi < y \leq \pi\}.$$

Ts. kun $f = \exp\big|_S$, niin

$$\mathrm{Log} = f^{-1} : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to S$$



Huomaa, että Log (negatiivinen reaaliakseli) $= \{z \in \mathbf{C} : Im(z) = \pi\}$.

1.4. Kompleksinen potenssifunktio

Muistelua: Jos $t \in \mathbf{R}, t > 0$ ja $a \in \mathbf{R}$, niin

$$t^a = e^{a \ln t}.$$

Samaan tapaan määritellään *kompleksinen potenssifunktio*; koska logaritmilla on monta haaraa, tuloskin riippuu (miten?) logaritmin haaran valinnasta. Jatkossa valitaan *logaritmin päähaara* ja määritellään:

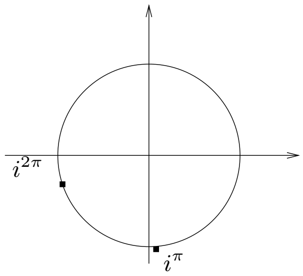
1.36. Määritelmä. Olkoon $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$ ja $\lambda \in \mathbf{C}$. Tällöin

$$z^\lambda := e^{\lambda \,\mathrm{Log}\, z}$$

(*potenssifunktion päähaara*).

Esimerkki.

$$
\begin{aligned}
i^{\pi} &= e^{\pi \operatorname{Log} i} = e^{\pi i (\frac{\pi}{2})} = e^{i \frac{\pi^2}{2}} \\
&= \cos \frac{\pi^2}{2} + i \sin \frac{\pi^2}{2}
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
(-1)^{\pi} &= e^{\pi \operatorname{Log}(-1)} = e^{\pi i (\pi)} = e^{i\pi^2} = \\
&= \cos \pi^2 + i \sin \pi^2.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i^{2\pi} &= e^{2\pi \operatorname{Log} i} = e^{2\pi i (\frac{\pi}{2})} = e^{i\pi^2} \\
&= \cos \pi^2 + i \sin \pi^2.
\end{aligned}
$$

1.37. Huomautus. Jos $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$ ja $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, niin

$$
z^{\lambda+\mu} = e^{(\lambda+\mu) \operatorname{Log} z} = e^{\lambda \operatorname{Log} z} e^{\mu \operatorname{Log} z} = z^{\lambda} z^{\mu}.
$$

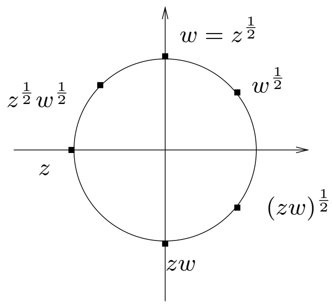
1.38. Huomautus (Varoitus). Potenssifunktion "laskusäännöt" eivät vastaa reaalista tapausta!

Koska $\operatorname{Log}(zw)$ ei aina ole yhtä kuin $\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$, niin $(zw)^{\lambda}$ ei aina ole yhtä kuin $z^{\lambda} w^{\lambda}$.

Esimerkki. Olkoot $z = -1, w = i$ ja $\lambda = \frac{1}{2}$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
(zw)^{\frac{1}{2}} &= (-i)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2} \operatorname{Log}(-i)} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \\
&= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\,,
\end{aligned}
$$

mutta



$$
\begin{aligned}
z^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}} &= e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
&= i\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\,.
\end{aligned}
$$

Myöskään $(z^\lambda)^\mu$ ei aina ole yhtä kuin $z^{(\lambda\mu)}$ (HT).

1.5. Kompleksitason topologiaa

Kompleksitason topologian antaa metriikka

$$d(z,w) := |z-w| = \sqrt{(Re(z-w))^2 + (Im(z-w))^2}\ .$$

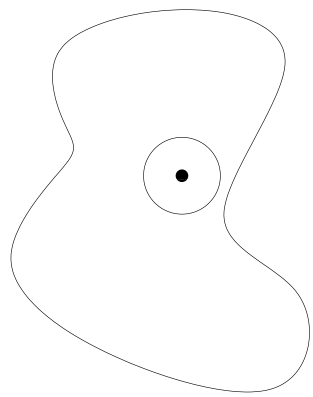
1.39. Huomautus. Avaruuden $\mathbf{C}$ metriikka d on sama kuin avaruuden $\mathbf{R}^2$ euklidinen metriikka. Siten kaikki avaruuden $\mathbf{R}^2$ tavalliset topologiset ja metriset tulokset ovat voimassa avaruudessa $\mathbf{C}$.

Tärkeitä merkintöjä: Olkoot $z_0 \in \mathbf{C}, r \in \mathbf{R}, r > 0$.

$$
\begin{aligned}
B(z_0,r) &:= \{z \in \mathbf{C} : |z-z_0| < r\} && \text{(avoin kiekko)} \\
\overline{B}(z_0,r) &:= \{z \in \mathbf{C} : |z-z_0| \le r\} && \text{(suljettu kiekko)} \\
B^*(z_0,r) &:= \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z-z_0| < r\} && \text{(punkteerattu kiekko)} \\
S(z_0,r) &:= \{z \in \mathbf{C} : |z-z_0| = r\} && \text{(kehä)}
\end{aligned}
$$

Muista: Piste $a \in A \subset \mathbf{C}$ on joukon A *sisäpiste* (merkitään $z \in \operatorname{int} A$), jos on olemassa $r > 0$ siten, että

$$B(z,r) \subset A.$$



Joukko $A \subset \mathbf{C}$ on *avoin*, jos

$$A = \operatorname{int} A,$$

ts. jos jokainen joukon A piste on sen sisäpiste. Edelleen, joukko A on *suljettu*, jos sen komplementti $\complement A = \mathbf{C} \setminus A$ on avoin.

Piste z on joukon A *reunapiste* (merkitään $z \in \partial A$), jos kaikilla $r > 0$

$$B(z,r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad B(z,r) \cap \complement A \neq \emptyset.$$

Joukon A *sulkeuma* on $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Jono $(z_n) \subset \mathbf{C}$ *suppenee kohti pistettä* $z \in \mathbf{C}$, merkitään

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \quad \text{tai} \quad z_n \to z,$$

jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|z - z_n| < \varepsilon \quad \text{kun } n \geq n_\varepsilon.$$

Jono $(z_n) \subset \mathbf{C}$ on *Cauchy-jono*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \quad \text{kun } n, m \geq n_\varepsilon.$$

1.40. Lause. *Pari* $(\mathbf{C}, d)$ *on* täydellinen *metrinen avaruus, ts. jos* $(z_n) \subset \mathbf{C}$ *on mielivaltainen Cauchy-jono, niin* (z_n) *suppenee avaruudessa* $\mathbf{C}$*, so. on olemassa* $z \in \mathbf{C}$*, jolle* $z = \lim_{n\to\infty} z_n$*.*

Todistus: Olkoon $(z_n) \subset \mathbf{C}$ Cauchy-jono. Merkitään

$$x_n = Re(z_n) \quad , \quad y_n = Im(z_n).$$

Tällöin myös $(x_n), (y_n) \subset \mathbf{R}$ ovat Cauchy-jonoja (miksi?). Koska $\mathbf{R}$ on täydellinen, on olemassa $x, y \in \mathbf{R}$, joille

$$x_n \to x \quad \text{ja} \quad y_n \to y.$$

Näytetään, että $z_n \to z := x + iy$:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kun } n \geq N.$$

Tällöin

$$|z_n - z|^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2.$$

□

1.41. Huomautus. Avaruudessa $\mathbf{C}$ jokainen suppeneva jono on Cauchy-jono.

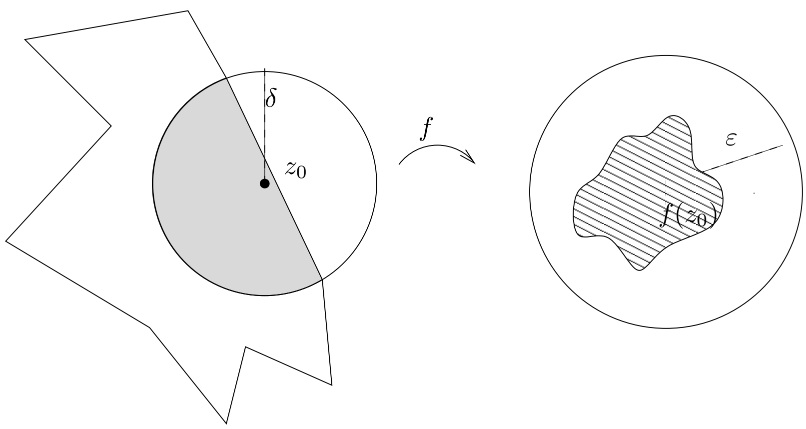
Jokaisella rajoitetulla jonolla $(z_n) \subset \mathbf{C}$ on osajono $(z_{n_j}) \subset \mathbf{C}$, joka suppenee avaruudessa $\mathbf{C}$.

Funktio $f : A \to \mathbf{C}$, $A \subset \mathbf{C}$, on *jatkuva pisteessä* $z_0 \in A$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ siten, että

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,, \quad \text{jos } |z - z_0| < \delta \text{ ja } z \in A,$$

ts. jos

$$f(A \cap B(z_0, \delta)) \subset B(f(z_0), \varepsilon)).$$



Funktio f on *jatkuva joukossa* A, jos f on jatkuva joka pisteessä $z \in A$.

1.42. Huomautus. Funktio $f : A \to \mathbf{C}$, $A \subset \mathbf{C}$, on jatkuva pisteessä z_0 jos ja vain jos sekä $Re\, f : A \to \mathbf{R}$ että $Im\, f : A \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia pisteessä z_0.
Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

1.43. Lause. *Funktio* $f : A \to \mathbf{C}$ *on jatkuva pisteessä* $z_0 \in A$ *jos ja vain jos jokaiselle joukon* A *jonolle, jolle* $z_n \to z_0$, *pätee* $f(z_n) \to f(z_0)$.

TODISTUS: ($\Rightarrow$): Olkoon $(z_n) \in A$ siten, että $z_n \to z$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että

$$f(B(z_0, \delta) \cap A) \subset B(f(z_0), \varepsilon).$$

Koska $z_n \to z$, on olemassa $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|z_n - z_0| < \delta \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Niinpä

$$|f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

($\Leftarrow$): Jos f ei ole jatkuva, niin on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla $\delta > 0$

$$|f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon \quad \text{jollakin } z \in B(z_0, \delta) \cap A.$$

Valitaan $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ja $z_n \in B(z_0, 1/n) \cap A$ siten, että

$$|f(z_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon.$$

Nyt $z_n \to z$, mutta $f(z_n) \not\to f(z_0)$, mikä on ristiriita. $\square$

1.44. Huomautus. Funktion f *raja-arvo pisteessä* z_0,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \in \mathbf{C},$$

jos ja vain jos kaikille $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$, jolle

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{kun } 0 < |z - z_0| < \delta\,.$$

Esimerkki. Eksponenttifunktio $f(z) = e^z$ on jatkuva koko avaruudessa $\mathbf{C}$.

Sen sijaan logaritmin päähaara $g : \mathbf{C}\setminus\{0\} \to \mathbf{C}$, $g(z) = \operatorname{Log} z$ on jatkuva jokaisessa pisteessä

$$z \in \mathbf{C} \setminus \{Im(z) = 0 \text{ ja } Re(z) \leq 0\},$$

mutta g on epäjatkuva negatiivisella reaaliakselilla (HT).

1.45. Määritelmä. Joukko $A \subset \mathbf{C}$ on *epäyhtenäinen*, jos on avoimet joukot $U, V \subset \mathbf{C}$ siten, että

i) $A \cap V \neq \emptyset$,

ii) $A \cap U \neq \emptyset$,

iii) $U \cap V = \emptyset$,

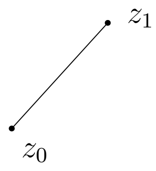
iv) $A \subset (U \cup V)$.

1.46. Huomautus. Ehto iii) voidaan korvata ehdolla $U \cap V \cap A = \emptyset$ (HT).

1.47. Määritelmä. Joukko $A \subset \mathbf{C}$ on *yhtenäinen*, jos se *ei* ole epäyhtenäinen.

Esimerkki.

- Jana kompleksitasossa on yhtenäinen.



$$J = [z_0, z_1] := \{tz_1 + (1-t)z_0 : 0 \leq t \leq 1\}$$

- $\mathbf{C}$ on yhtenäinen.
- $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ on epäyhtenäinen, $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ yhtenäinen.

1.48. Lause. *Olkoot $A_j \subset \mathbf{C}$ yhtenäisiä, $j \in J$. Jos $z_0 \in A_j$ kaikilla $j \in J$, niin*

$$A = \bigcup_{j \in J} A_j \quad \text{on yhtenäinen.}$$

TODISTUS: Olkoon $A \subset U \cup V$, missä $U, V \subset \mathbf{C}$ avoimia ja $A \cap U \cap V = \emptyset$. Oletetaan, että $z_0 \in U$. Väitetään, että $A \subset U$ eli $A \cap V = \emptyset$.

Koska kaikilla $j \in J$ joukko A_j on yhtenäinen, on $A_j \cap V = \emptyset$ eli $A_j \subset U$ kaikilla j. Niinpä

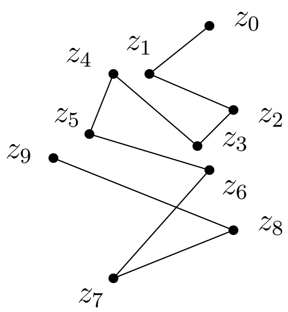
$$A = \bigcup_{j \in J} A_j \subset U.$$

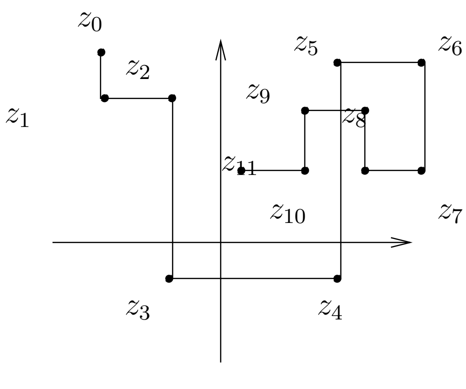
□

1.49. Määritelmä. Joukko $A \subset \mathbf{C}$ on *murtoviiva*, jos on olemassa pisteet $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n \in A$ siten, että

$$\begin{aligned} A &= [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \ldots \cup [z_{n-1}, z_n] \\ &= \bigcup_{j=1}^{n} \{t z_j + (1-t) z_{j-1} : t \in [0,1]\}, \end{aligned}$$

merkitään $A = [z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n]$.





Koordinaatiston suuntainen

Sanotaan, että murtoviiva $[z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n]$ on *koordinaatiston suuntainen*, jos kaikilla $j = 1, 2, \ldots, n$ joko $Re(z_j) = Re(z_{j-1})$ tai $Im(z_j) = Im(z_{j-1})$.

1.50. Huomautus. Lauseesta 1.48 ja janan yhtenäisyydestä seuraa, että murtoviivat ovat yhtenäisiä ja pallot $B = B(z, r)$ ovat yhtenäisiä (miksi?).

1.51. Määritelmä. Avoin yhtenäinen joukko $D \subset \mathbf{C}$ on *alue*.

1.52. Lause. *Olkoon $D \subset \mathbf{C}$ avoin. Tällöin D on alue täsmälleen, kun kaikilla $z_0, z_1 \in D$ on olemassa koordinaatiston suuntainen murtoviiva $A \subset D$ siten, että $z_0 \in A$ ja $z_1 \in A$.*

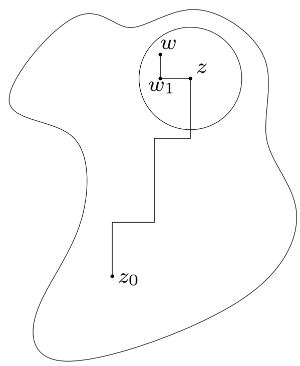
Todistus: ($\Leftarrow$): Harjoitustehtävä.

($\Rightarrow$): Olkoon $z_0 \in D$. Olkoon

$$U = \{z \in D : \text{on olemassa koordinaatiston suuntainen murtoviiva } A \subset D \text{ siten, että } z_0, z \in A\}.$$

Selvästi $z_0 \in U$, joten $U \neq \emptyset$.

U on *avoin*: Jos $z \in U$, niin valitaan kiekko $B = B(z, r) \subset D$. Tämä on mahdollista, koska D on avoin. Tällöin $B \subset U$, koska jos $w \in B$, niin $w_1 = z + Re(w - z) \in B$ ja murtoviiva $P = [z, w_1, w] \subset B$ on koordinaatiston suuntainen. Lisäksi, jos $A \subset D$ on koordinaatiston suuntainen murtoviiva pisteestä z_0 pisteeseen z, niin $A \cup P$ on etsitty murtoviiva.



Olkoon $V = D \setminus U$. Tällöin $V \cap U = \emptyset$ ja $V \cup U = D$.
Lisäksi V on *avoin*: Jos $z \in V$, niin valitaan pallo $B = B(z, r) \subset D$. Nyt $B \subset V$, koska jos olisi $w \in B \cap U$, niin kuten yllä, nähtäisiin että olisi koordinaatiston suuntainen murtoviiva $A \cup P$ pisteestä z_0 pisteeseen z, mikä on ristiriita.

Koska D on yhtenäinen, $V \cap D = \emptyset$, toisin sanoen $U = D$. $\square$

1.53. Määritelmä. Olkoon $A \subset \mathbf{C}$ ja $z_0 \in A$. Joukon A *pisteen z_0 sisältävä komponentti* (*z_0-komponentti*) on joukko

$$E = \bigcup \{C \subset A : C \text{ yhtenäinen}, z_0 \in C\}.$$

1.54. Huomautus. Komponentti $E \neq \emptyset$, mutta voi olla $E = \{z_0\}$.

1.55. Huomautus. Lauseesta 1.48 seuraa, että joukon A z_0-komponentti on yhtenäinen; se on joukon A maksimaalinen yhtenäinen osajoukko, joka sisältää pisteen z_0.

1.56. Huomautus. Olkoon E_j joukon A z_j-komponentti, $j = 1, 2$. Tällöin joko $E_1 = E_2$ tai $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

1.57. Huomautus. $\emptyset \neq A \subset \mathbf{C}$ on yhtenäinen jos ja vain jos joukolla A on vain yksi komponentti (ts. jos $z, w \in A$, niin z-komponentti $=$ w-komponentti.) (Harjoitustehtävä.)

1.58. Huomautus. Jokainen joukko $A \neq \emptyset$ voidaan osittaa sen komponenttien avulla:

$$A = \bigcup_{j \in J} A_j\,,$$

missä joukot A_j ovat pareittain pistevieraita joukon A komponentteja.

1.59. Lause. *Olkoon $G \subset \mathbf{C}$ avoin. Tällöin joukon G komponentit ovat avoimia.*

Todistus: Olkoon E joukon G komponentti. Olkoon $z \in E$ ja valitaan $B = B(z, r) \subset G$. Tämä on mahdollista, koska G on avoin. Lauseesta 1.48 seuraa, että $E \cup B$ on yhtenäinen joukko, joka sisältää pisteen z_0. E on komponentti, joten $B \subset E$. Niinpä E on avoin. □

1.60. Huomautus. Avoimella joukolla $E \subset \mathbf{C}$ voi olla korkeintaan numeroituva määrä komponentteja. Ei-avoimella joukolla voi olla ylinumeroituvan monta komponettia. (Harjoitustehtävä.)

1.61. Lause. *Olkoon $A \subset \mathbf{C}$ yhtenäinen ja $f : A \to \mathbf{C}$ jatkuva. Tällöin $f(A)$ on yhtenäinen.*

Todistus: Harjoitustehtävä. □

2. Analyyttiset funktiot

Tässä luvussa hyökätään kurssin pääkäsitteen, analyyttisen funktion, kimppuun.

2.1. Kompleksinen derivaatta

2.1. Määritelmä. Olkoon $G \subset \mathbf{C}$ avoin ja $z_0 \in G$. Funktio $f : G \to \mathbf{C}$ on *(kompleksisesti) derivoituva pisteessä* $z_0 \in G$, jos raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbf{C}$$

on olemassa. Jos f on derivoituva pisteessä z_0, määritellään

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

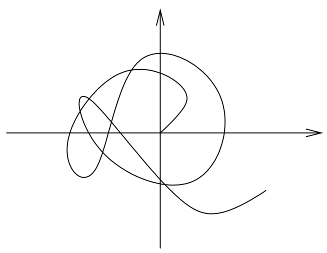
ja sanotaan, että $f'(z_0)$ on funktion f *derivaatta pisteessä* z_0.

Funktiota $f : G \to \mathbf{C}$, missä $G \subset \mathbf{C}$ avoin, sanotaan *analyyttiseksi (holomorfiseksi) joukossa* G, jos f on derivoituva jokaisessa $z_0 \in G$.

2.2. Huomautus. Usein erotusosamäärän raja-arvo kirjoitetaan muotoon

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Huomaa, että $h \in \mathbf{C}$ ja sen lähestyminen nollaan voi tapahtua miltä puolelta hyvänsä.



Tämä (yhdessä kompleksisen kertolaskun kanssa) tekee derivoituvuudesta erittäin vahvan ominaisuuden – kuten tulemme myöhemmin näkemään.

2.3. Huomautus. Kuvaus $f : G \to \mathbf{C}$ on derivoituva[3] pisteessä $z_0 \in G$ jos ja vain jos on olemassa $c \in \mathbf{C}$ $(c = f'(z_0))$ siten, että

$$(*) \qquad f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + E(z) \quad \text{kaikilla } z \in G,$$

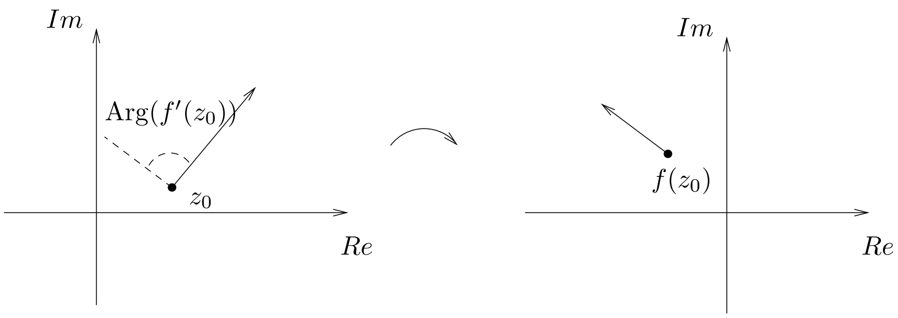
missä $E : G \to \mathbf{C}$ on virhetermi, joka toteuttaa

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|E(z)|}{|z - z_0|} = 0.$$

Kun $c = f'(z_0) \neq 0$ yhtälössä $(*)$, niin $c(z - z_0)$ hallitsee termiä $E(z)$ pisteen z_0 lähistöllä. Siten kuvauksen $w = f(z)$ käyttäytyminen pisteen z_0 lähellä muistuttaa affiinia kuvausta

$$L(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0).$$

Tämän kuvauksen L käyttäytyminen on helppo kuvata geometrisesti: L kiertää tasoa pisteen z_0 ympäri kulman $\theta = \operatorname{Arg}(f'(z_0))$ verran, skaalaa tasoa siten, että kaikki etäisyydet muuttuvat kertoimella $|f'(z_0)|$ (ts. $|z_1 - z_2|\,|f'(z_0)| = |L(z_1) - L(z_2)|$). Lopuksi, L siirtää tason siten, että piste z_0 menee pisteeseen $f(z_0)$.



Jos $f'(z_0) = 0$, niin geometrinen approksimointi tulee vaikeammaksi — asiaan palataan myohemmin (kurssilla kompleksianalyysi 2).

[3] Kompleksianalyysissä derivoituvuus viittaa nimenomaan kompleksiseen derivoituvuuteen. Koska kompleksiluvulla kertominen vastaa erään reaalilineaarisen kuvauksen toimintaa $\mathbf{R}^2$:ssa seuraa ehdosta (*), että kompleksisesti derivoituva funktio on reaalisesti differentioituva ja derivaatta on sama. Käänteinen ei päde yleisesti.

Esimerkki. Funktio $f(z) = z^n$, $n = 1, 2, \ldots$, on analyyttinen koko **C**:ssä:

$$\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \frac{(z - z_0)\big((z^{n-1}) + (z^{n-2}z_0) + \ldots + (zz_0^{n-2}) + (z_0^{n-1})\big)}{z - z_0}$$
$$= z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1} \xrightarrow{z \to z_0} nz_0^{n-1}$$

Siten $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$.

Esimerkki. Funktio $f(z) = \bar{z}$ ei derivoidu missään pisteessä (HT).

2.4. Lemma. *Kun $f : G \to \mathbf{C}$ on derivoituva pisteessä $z_0 \in G$, f on jatkuva pisteessä z_0.*

TODISTUS: Kun $z \neq z_0$,

$$|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0| \, \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \to 0 \cdot f'(z_0) = 0.$$

$\square$

2.5. Lause (Derivoimissääntöjä)**.** *Olkoot $f, g : G \to \mathbf{C}$ derivoituvia pisteessä $z_0 \in G$ ja $\lambda \in \mathbf{C}$ vakio. Tällöin λf, $f + g$, fg sekä $\frac{f}{g}$ (jos $g(z_0) \neq 0$) ovat myös derivoituvia pisteessä z_0. Lisäksi*

$$(\lambda f)'(z_0) = \lambda f'(z_0)$$
$$(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$$
$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0)$$

ja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2} \qquad (\text{kun } g(z_0) \neq 0).$$

TODISTUS: Todistetaan tulo, muut jätetään harjoitustehtäviksi.

$$\frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} = \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\to f'(z_0)} g(z) + f(z_0) \underbrace{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}_{\to g'(z_0)}.$$

Koska g on jatkuva, $g(z) \xrightarrow{z \to z_0} g(z_0)$. Niinpä kun $z \to z_0$, erotusosamäärä suppenee kohti lukua

$$f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

$\square$

2.6. Esimerkki. Kaikki polynomit p,

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \;, n \in \mathbf{N} \,, a_j \in \mathbf{C} \,,$$

ovat analyyttisiä koko tasossa $\mathbf{C}$.

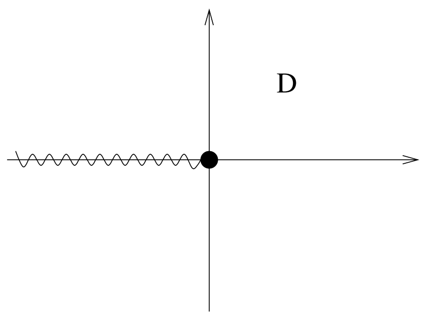
Esimerkki. Olkoon

$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{\frac{i\,\mathrm{Arg}(z)}{2}} \,.$$

Tällöin f on analyyttinen joukossa

$$D = \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0] \,.$$

Huomaa, että funktio $z \mapsto \mathrm{Arg}(z)$ on jatkuva joukossa $D = \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$, joten f on jatkuva joukossa D.



Huomaa myös, että f on epäjatkuva jokaisessa $z \in \mathbf{R},\ z < 0$, joten f ei ole derivoituva negatiivisella reaaliakselilla.

Jos $z_0 \in D$, niin

$$\frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{z - z_0} = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{(\sqrt{z} - \sqrt{z_0})(\sqrt{z} + \sqrt{z_0})} = \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} \xrightarrow{z \to z_0} \frac{1}{2\sqrt{z_0}}.$$

Jos $z_0 = 0$, niin

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\sqrt{z}}{z} = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

Koska $|\frac{1}{\sqrt{z}}| \to \infty$, kun $z \to 0$, ei f ole derivoituva nollassa.

Niinpä f on derivoituva pisteessä z_0 täsmälleen silloin kun $z_0 \in D$. Tällöin

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\sqrt{z_0}}.$$

2.7. Lause (Ketjusääntö)**.** *Olkoot $A, B \subset \mathbf{C}$ avoimia joukkoja. Olkoon $f : A \to \mathbf{C}$ derivoituva pisteessä z_0 ja $f(A) \subset B$. Jos $g : B \to \mathbf{C}$ on derivoituva pisteessä $f(z_0)$, niin $g \circ f : A \to \mathbf{C}$ on derivoituva pisteessä z_0 ja*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

TODISTUS: Olkoon $w_0 = f(z_0)$. Määritellään $F : A \to \mathbf{C}$, $\quad G : B \to \mathbf{C}$ asettamalla

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & \text{kun } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{kun } z = z_0 \end{cases}$$

ja

$$G(w) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}, & \text{kun } w \neq w_0 \\ g'(w_0), & \text{kun } w = w_0. \end{cases}$$

Nyt

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \to f'(z_0) = F(z_0), \qquad \text{kun } z \to z_0,$$

joten F on jatkuva pisteessä z_0. Samoin G on jatkuva pisteessä w_0. Niinpä yhdistetty funktio $G \circ f$ on jatkuva pisteessä z_0, sillä funktion f jatkuvuus seuraa derivoituvuudesta pisteessä z_0.

Jos $z \in A, z \neq z_0$, niin

$$\begin{aligned} \frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0} &= \begin{cases} \dfrac{g(f(z)) - g(w_0)}{f(z) - w_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & \text{jos } f(z) \neq f(z_0) \\ 0, & \text{jos } f(z) = f(z_0) = w_0 \end{cases} \\ &= G(f(z))F(z) \\ &\xrightarrow{z \to z_0} G(f(z_0))F(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0). \end{aligned}$$

□

Esimerkki. Olkoon

$$h(z) = \left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1}\right)^{10}, \text{ kun } \quad z \neq \pm i.$$

Tällöin $h = g \circ f$, missä

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \quad \text{ja} \quad g(z) = z^{10}.$$

Koska

$$f'(z) = \frac{2z(z^2+1) - (z^2-1)2z}{(z^2+1)^2} = \frac{4z}{(z^2+1)^2} \quad \text{ja} \quad g'(z) = 10z^9,$$

saamme

$$h'(z) = 10\left(\frac{z^2-1}{z^2+1}\right)^9 \frac{4z}{(z^2+1)^2} = \frac{40z(z^2-1)^9}{(z^2+1)^{11}}, \text{ kun} \quad z \neq \pm i.$$

2.2. Cauchy-Riemannin yhtälöt

Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$, $G \subset \mathbf{C}$, derivoituva pisteessä $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Merkitään $z = x + iy$ ja

$$\begin{aligned} u(x,y) &= Re\, f(z) \\ v(x,y) &= Im\, f(z). \end{aligned}$$

Tällöin $u, v : G \to \mathbf{R}$ ja $f = u + iv$. Lasketaan $f'(z_0)$ kahdella tavalla:

Ensin lähestytään pistettä z_0 reaaliakselin suuntaisesti:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Siten tavalliset osittaisderivaatat u_x ja v_x ovat olemassa pisteessä (x_0, y_0) ja

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) =: f_x(z_0). \tag{2.1}$$

Tämä on f:n reaalinen osittaisderivaatta.

Sitten lähestytään pistettä z_0 imaginaariakselin suuntaisesti:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0+iy) - f(x_0+iy_0)}{i(y - y_0)} \\ &= -i \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0} \\ &= -i\, u_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Siten osittaisderivaatat u_y ja v_y ovat olemassa ja

$$f'(z_0) = v_y(z_0) - i\, u_y(z_0) =: -i\, f_y(z_0). \tag{2.2}$$

Kun vähennetään kaavat (2.1) ja (2.2) toisistaan, saadaan ns. *Cauchy-Riemannin yhtälöt:*[4]

$$\begin{cases} u_x(z_0) & = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) & = -v_x(z_0). \end{cases}$$

Saaimme:

2.8. Lause. *Jos $f : G \to \mathbf{C}$ on derivoituva pisteessä $z_0 \in G$ ja $f = u + iv$, missä $u, v : G \to \mathbf{R}^2$, niin osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x sekä v_y ovat olemassa ja*

$$\begin{cases} u_x(z_0) & = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) & = -v_x(z_0). \end{cases}$$

□

Kääntäen pätee:

2.9. Lause. *Olkoon $f = u + i\,v : G \to \mathbf{C}$, missä $u = Re(f)$ ja $v = Im(f)$. Oletetaan, että osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y ovat olemassa G:ssä ja* jatkuvia *pisteessä $z_0 \in G$. Jos Cauchy-Riemannin yhtälöt toteutuvat pisteessä z_0 siten, että*

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0), \end{cases}$$

niin f on derivoituva pisteessä z_0 ja

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -i\, f_y(z_0),$$

missä $f_x = u_x + i\, v_x$ ja $f_y = u_y + i\, v_y$.

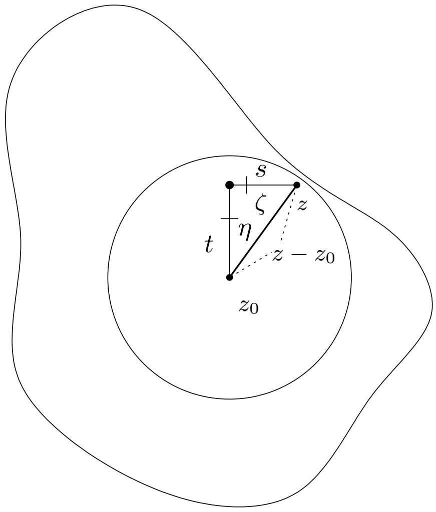
Todistus: Olkoon $c = a + ib$, missä

$$\begin{aligned} a &= u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ b &= -u_y(z_0) = v_x(z_0). \end{aligned}$$

Osoitetaan, että

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c \right| \to 0\,, \qquad \text{kun } z \to z_0.$$

[4] Cauchy (1789–1857), Riemann (1816–1866)



Valitaan ensin kiekko $B(z_0, r) \subset G$. Olkoon $z = x + iy \in B(z_0, r)$, $z_0 = x_0 + iy_0$.
Olkoot $s = x - x_0, t = y - y_0$.
Nyt

$$u(z) - u(z_0) = (u(x_0 + s, y_0 + t) - u(x_0, y_0 + t)) + (u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)).$$

Yhden muuttujan väliarvolauseesta seuraa, että kaikille $z = z_0 + s + it$ on olemassa $s_1, t_1 \in \mathbf{R}$ siten, että $0 \le |s_1| \le |s|$, $0 \le |t_1| \le |t|$ ja

$$\begin{cases} u(x_0 + s, y_0 + t) - u(x_0, y_0 + t) = u_x(x_0 + s_1, y_0 + t)s \\ u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0 + t_1)t. \end{cases}$$

Siten jos $\zeta = (x_0 + s_1) + iy$ ja $\eta = y_0 + i(y_0 + t_1)$, niin $|z_0 - \zeta| \le |z - z_0|$ ja $|z_0 - \eta| \le |z - z_0|$ ja

$$(*) \qquad u(z) - u(z_0) = u_x(\zeta)(x - x_0) + u_y(\eta)(y - y_0).$$

Samalla tavalla löydetään (pisteestä z riippuva) pari θ ja $\xi \in \mathbf{C}$ siten, että $|z_0 - \theta| \le |z - z_0|$ ja $|z_0 - \xi| \le |z - z_0|$ ja

$$(**) \qquad v(z) - v(z_0) = v_x(\theta)(x - x_0) + v_y(\xi)(y - y_0).$$

Huomaa, että kun $z \to z_0$, niin $\zeta, \eta, \theta, \xi \to z_0$.

Nyt lasketaan:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) - c(z - z_0) &= u(z) - u(z_0) + i(v(z) - v(z_0)) \\ &\quad - (a + ib)(x - x_0 + i(y - y_0)) \\ &= u(z) - u(z_0) - u_x(z_0)(x - x_0) - u_y(z_0)(y - y_0) \\ &\quad + i(v(z) - v(z_0) - v_x(z_0)(x - x_0) - v_y(z_0)(y - y_0)) \\ &\overset{(*)\text{ ja }(**)}{=} (u_x(\zeta) - u_x(z_0))(x - x_0) + (u_y(\eta) - u_y(z_0))(y - y_0) \\ &\quad + i\left[(v_x(\theta) - v_x(z_0))(x - x_0) + (v_y(\xi) - v_y(z_0))(y - y_0)\right]. \end{aligned}$$

Koska

$$\frac{|x-x_0|}{|z-z_0|} \le 1 \qquad \text{ja} \qquad \frac{|y-y_0|}{|z-z_0|} \le 1\,,$$

voidaan arvioida

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - c\right| &\le \frac{|u_x(\zeta)-u_x(z_0)||x-x_0|}{|z-z_0|} + \frac{|u_y(\eta)-u_y(z_0)||y-y_0|}{|z-z_0|} \\
&\quad + \frac{|v_x(\theta)-v_x(z_0)||x-x_0|}{|z-z_0|} + \frac{|v_y(\xi)-v_y(z_0)||y-y_0|}{|z-z_0|} \\
&\le |u_x(\zeta)-u_x(z_0)| + |u_y(\eta)-u_y(z_0)| \\
&\quad + |v_x(\theta)-v_x(z_0)| + |v_y(\xi)-v_y(z_0)| \\
&\to 0\,,
\end{aligned}$$

kun $z \to z_0$, koska u_x, u_y, v_x, v_y ovat jatkuvia pisteessä z_0. Siten f on derivoituva pisteessä z_0 ja

$$f'(z_0) = c = f_x(z_0) = -if_y(z_0)\,.$$

□

Esimerkki. Cauchy-Riemannin yhtälöistä seuraa heti mm. seuraava: *Jos f on analyyttinen ja sillä on jatkuvat toisen kertaluvun (reaaliset) osittaisderivaatat G:ssä, niin myös f' on analyyttinen G:ssä.*

2.10. Huomautus. Lauseessa 2.9 ei riitä oletus, että osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y ovat olemassa joukossa G, vaikka toteuttaisivatkin Cauchy-Riemannin yhtälöt (ks. esim 2.12). Kuitenkin riittäisi *a priori* olettaa, että $f = (u, v)$ on reaalifunktioiden mielessä differentioituva pisteessä z_0 (ks. 2.7). Myöhemmin tosin nähdään, että avoimessa joukossa G differentioituvan Cauchy-Riemann -systeemin ratkaisut u ja v tulevat olemaan C^∞-funktioita joukossa G, ts. niillä on kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat.

Esimerkki. Merkitään $z = x + iy$. Olkoon $f(z) = x$. Onko f derivoituva?

$$\begin{aligned}
u(z) &= \mathit{Re}\, f(z) = x \\
v(z) &= \mathit{Im}\, f(z) = 0,
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} u_x &\equiv 1\,, \quad u_y \equiv 0 \\ v_x &\equiv 0\,, \quad v_y \equiv 0. \end{aligned}$$

Siis $u_x = 1 \neq 0 = v_y$, joten Cauchy-Riemannin yhtälö ei toteudu missään. Siispä f ei ole derivoituva missään!

Esimerkki. Olkoon $f(z) = e^z$.

Väite: $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ on analyyttinen koko tasossa $\mathbf{C}$. Lisäksi $f'(z) = e^z$, kun $z \in \mathbf{C}$.

Todistus: Koska

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^x \cos y \qquad \text{ja} \\ v(x,y) &= e^x \sin y\,, \end{aligned}$$

saamme

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y & \qquad u_y &= -e^x \sin y \\ v_x &= e^x \sin y & \qquad v_y &= e^x \cos y, \end{aligned}$$

jotka kaikki ovat jatkuvia. Siten $u_x = v_y$ ja $u_y = -v_x$, joten Lauseesta 2.9 seuraa, että f on derivoituva ja

$$f'(z) = f_x(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^z\,.$$

$\square$

2.11. Seuraus. *Olkoon $G \subset \mathbf{C}$ avoin ja olkoon funktiolla $f : G \to \mathbf{C}$ jatkuvat osittaisderivaatat*

$$f_x = (Re\ f)_x + i(Im\ f)_x \quad \text{ja} \quad f_y = (Re\ f)_y + i(Im\ f)_y$$

joukossa G. Tällöin f on analyyttinen joukossa G, jos ja vain jos funktiot $u = Re\, f$ ja $v = Im\, f$ toteuttavat Cauchy-Riemannin systeemin

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \qquad \text{joukossa } G.$$

Tällöin

$$f' = f_x = -i f_y\,.$$

$\square$

2.12. Esimerkki.

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-z^{-4}), & \text{kun } z \neq 0 \\ 0, & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

Koska $g(z) = e^z$ on analyyttinen ja $h(z) = -z^{-4}$ on analyyttinen joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, on $f = g \circ h$ ketjusäännön nojalla analyyttinen joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Entäpä origossa? Nyt jos $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x}.$$

Kun sijoitetaan $t = x^{-4}$, saadaan edellisestä

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}}{e^t} = 0$$

l'Hospitalin säännön nojalla.

Samoin

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

Siten on olemassa

$$f_x(0) = u_x(0) + iv_x(0) = 0$$

ja samoin nähdään, että myös

$$f_y(0) = u_y(0) + iv_y(0) = 0.$$

Siten u ja v toteuttavat Cauchy-Riemannin systeemin 0:ssa, mutta f ei ole derivoituva siellä, koska f ei ole jatkuva origossa (huomaa, että

$$f(r\, e^{\frac{i\pi}{4}}) = e^{\frac{1}{r^4}} \to \infty, \text{ kun } r \to 0 \text{).}$$

2.3. Cauchy-Riemannin yhtälön seurauksia

2.13. Lause. *Olkoon $f : D \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja $D \subset \mathbf{C}$ alue. Jos $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in D$, niin f on vakio alueessa D.*

TODISTUS: Olkoon $f = u + iv$. Nyt Cauchy-Riemannin yhtälöiden perusteella

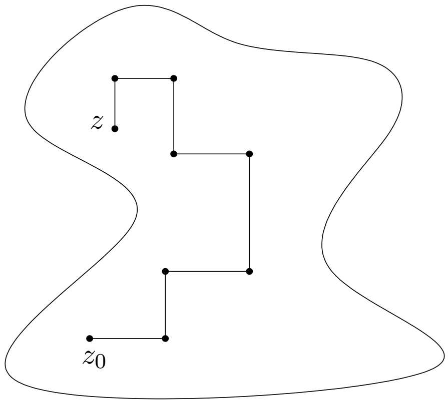
$$f'(z) = f_x(z) = u_x(z) + iv_x(z) = u_x(z) - iu_y(z) = 0,$$

joten $u_x(z) = 0 = u_y(z)$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$. Osoitetaan, että u on vakio (samoin nähdään, että $v_x = v_y = 0$ ja v vakio).

Olkoot $z_0, z \in D$. Valitaan koordinaatiston suuntainen murtoviiva

$$A = [z_0, z_1, \ldots, z_n = z] \subset D$$

(ks. lause 1.52).



Nyt (reaalimuuttujan) väliarvolauseen mukaan kaikille $j = 1, \ldots, n$ on olemassa $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ siten, että

$$\begin{aligned} u(z_j) - u(z_{j-1}) &= \begin{cases} \underbrace{u_x(\zeta_j)}_{=0}(Re(z_j) - Re(z_{j-1}))\,, & \text{jos } Im(z_j) = Im(z_{j-1}) \\ \underbrace{u_y(\zeta_j)}_{=0}(Im(z_j) - Im(z_{j-1}))\,, & \text{jos } Re(z_j) = Re(z_{j-1}) \end{cases} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

mistä seuraa, että

$$u(z_0) = u(z_1) = \ldots = u(z_n) = u(z)\,.$$

Siten u on vakio joukossa D. Samoin v on vakio, joten $f = u + iv$ on vakio alueessa D. $\square$

2.14. Lause. *Olkoon $f : D \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja $D \subset \mathbf{C}$ alue. Jos jokin funktioista*

$$u = Re(f), \quad v = Im(f) \quad \textit{tai} \quad |f|$$

on vakio, niin f on vakio.

TODISTUS: Harjoitustehtävä. □

2.4. Trigonometriset funktiot

Jos $t \in \mathbf{R}$, niin

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t \\ e^{-it} &= \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos t - i \sin t, \end{aligned}$$

mistä saadaan

$$\begin{cases} \cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \,. \end{cases}$$

2.15. Määritelmä. Olkoon $z \in \mathbf{C}$. Määritellään kompleksinen *sini, kosini* ja *tangentti*

$$\begin{cases} \sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \,, \\ \cos z := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \,, \\ \tan z := \dfrac{\sin z}{\cos z} \,, \text{ kun } \cos z \neq 0. \end{cases}$$

2.16. Lause. *Kompleksinen sini ja kosini ovat analyyttisiä koko tasossa* $\mathbf{C}$ *ja*

$$(\sin z)' = \cos z \,, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

TODISTUS: Seuraa lauseesta 2.5. □

2.17. Huomautus (Varoitus!). Kompleksinen sini ja kosini eivät ole rajoitettuja, vaan

$$\sin(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \quad \text{ja} \quad \cos(\mathbf{C}) = \mathbf{C}.$$

2.18. Määritelmä. Koko kompleksitasossa analyyttistä funktiota $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sanotaan *kokonaiseksi*.

Esimerkki. Polynomit

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \quad , \quad a_k \in \mathbf{C}$$

ovat kokonaisia. Eksponenttifunktio exp, sinifunktio $\sin z$ ja kosinifunktio $\cos z$ ovat kokonaisia.

2.19. Huomautus (Harjoitustehtävä). Seuraavat yhtälöt on helpohkoa todentaa:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}\\
&\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z\\
&\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin z\\
&\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w \quad \text{kaikilla } z, w \in \mathbf{C}\\
&\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \quad \text{kaikilla } z, w \in \mathbf{C}
\end{aligned}$$

Koska eksponenttifunktio on jaksollinen, ovat myös kompleksinen sini ja kosini jaksollisia:

$$\begin{aligned}
\cos(z + k2\pi) &= \cos z \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}, \quad k \in \mathbf{Z}.\\
\sin(z + k2\pi) &= \sin z \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}, \quad k \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Esimerkki. Ratkaise yhtälö $\cos z = 0$.

Merkitään $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
0 = \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2}\\
&= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2} \qquad (*)\\
&= \cos x \underbrace{\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)}_{\cosh y \neq 0} - i \sin x \underbrace{\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)}_{\sinh y},
\end{aligned}$$

mikä on yhtäpitävää kuin

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \text{ tai } e^{y} - e^{-y} = 0\,. \end{cases}$$

Koska $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, voidaan jälkimmäisestä unohtaa tapaus $\sin x = 0$.

Niinpä yhtälö $(*)$ on yhtäpitävästi

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ e^{y} - e^{-y} = 0\,, \end{cases}$$

mikä edelleen on yhtäpitävää kuin

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, & k \in \mathbf{Z} \\ e^{2y} = 1\,, & y \in \mathbf{R}\,. \end{cases}$$

Tästä saadaan

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbf{Z}\,, \\ y = 0\,, \end{cases}$$

joten

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbf{Z}\,.$$

Havaitaan: *Kompleksisen kosinin* $\cos z$ *kaikki nollakohdat ovat reaaliakselilla (ne ovat* $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$*).*

Koska

$$\sin z = \cos(\frac{\pi}{2} - z)$$

ovat myös sinifunktion $\sin z$ *nollakohdat reaaliakselilla (ne ovat* $z = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$*).*

2.5. Käänteisfunktioiden haarat

Jos $f : G \to \mathbf{C}$ on analyyttinen mutta ei ole injektio[5] (ts. on olemassa $z_1 \neq z_2 \in G$ siten, että $f(z_1) = f(z_2)$), niin funktiolla f ei ole käänteiskuvausta, ts. ei ole olemassa funktiota $g : f(G) \to G$ siten, että

$$g(f(z)) = z \quad \text{kaikilla } z \in G$$

[5] *Huom:* analyyttistä injektiota sanotaan *univalentiksi.*

ja

$$f(g(z)) = z \quad \text{kaikilla } z \in f(G).$$

Funktiolla f on kuitenkin "oikeanpuoleisia inverssejä" $g : f(G) \to G$ siten, että

$$f(g(z)) = z \quad \text{kaikilla } z \in f(G).$$

Funktion g saa tehdyksi määrittelemällä $g(z)$ olevaksi joku niistä pisteistä $w \in G$, jolle $f(w) = z$. Metodi on hasardi ja on kyseenalaista, löydetäänkö sillä yhtään "hyvää" funktiota g. Valitettavasti huolellakin rakennetut oikeanpuoleiset käänteiskuvaukset g tahtovat olla epäjatkuvia jossain:

Esimerkki. Olkoon

$$f(z) = z^2 ,$$

jolloin funktion f oikeanpuoleinen inverssi saadaan koko tasossa $\mathbf{C}$ määrittelemällä

$$g(z) = \sqrt{z} .$$

Tällöin g on analyyttinen joukossa

$$D = \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{R} : z \leq 0\}$$

mikä sattuu olemaan suurin avoin joukko, jossa g on jatkuva. Huomaa, että g on jatkuva D:n lisäksi vain origossa.

2.20. Määritelmä. Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja olkoon $D \subset f(G)$ alue. Sanotaan, että funktio $g : D \to G$ on kääteiskuvauksen f^{-1} *haara alueessa* D, jos g on jatkuva D:ssä ja

$$f(g(z)) = z \quad \text{kaikilla } z \in D .$$

2.21. Huomautus.

- Jos joukossa $D \subset f(G)$ on jokin käänteiskuvauksen f^{-1} haara, siellä on monesti useita.
- Joukkoa D ei yleensä voida ottaa koko kuvajoukoksi $f(G)$.
- Käänteiskuvauksen f^{-1} haara on injektio (koska $z = f(g(z)) = f(g(w)) = w$).

Seuraava lause sanoo, että käänteiskuvauksen f^{-1} haara on analyyttinen, jos f:n derivaatta ei häviä.

2.22. Lause. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja g käänteiskuvauksen f^{-1} haara alueessa $D \subset f(G)$. Jos $z_0 \in g(D)$ siten, että $f'(z_0) \neq 0$, niin g on derivoituva pisteessä $w_0 = f(z_0)$ ja*

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Erityisesti, jos $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in g(D)$, on g analyyttinen joukossa D.

Todistus: Koska käänteiskuvauksen haara g on injektio, niin jokaiselle $w \in D$, $w \neq w_0$, on $z = g(w) \neq z_0$. Siis voidaan laskea

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{f(g(w)) - f(z_0)} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} \to \frac{1}{f'(z_0)},$$

kun $w \to w_0$. Tässä rajankäynti sujuu, koska g on käänteiskuvauksen haarana jatkuva, joten

$$z = g(w) \to g(w_0) = z_0\,, \qquad \text{kun } w \to w_0\,.$$

□

2.23. Huomautus. Jos käänteiskuvauksen f^{-1} haara g joukossa D on derivoituva pisteessä $w_0 = f(z_0) \in D$, missä $g(w_0) = z_0$, niin ketjusäännöstä seuraa, että

$$f'(\underbrace{z_0}_{=g(w_0)})g'(w_0) = (f \circ g)'(w_0) = (\frac{d}{dw}w)(w_0) = 1,$$

joten $f'(z_0) \neq 0$.

2.6. Logaritmin haarat

2.24. Määritelmä. *Logaritmin haara alueessa D* on analyyttinen funktio $L : D \to \mathbf{C}$ siten, että

$$e^{L(z)} = z \quad \text{kaikilla } z \in D.$$

Huomaa, että $0 \notin D$, koska $e^w \neq 0$ kaikilla w.

Koska ekspontenttifunktio $f(z) = e^z$ on kokonainen ja $f'(z) = e^z \neq 0$ kaikilla z, seuraa lauseesta 2.22, että jokainen jatkuva $L : D \to \mathbf{C}$, jolle

$$e^{L(z)} = z \quad \text{kaikilla } z \in D$$

on analyyttinen ja siten logaritmin haara alueessa D. Edelleen

$$L'(z) = \frac{1}{f'(L(z))} = \frac{1}{e^{L(z)}} = \frac{1}{z}.$$

Lauseesta 1.31 seuraa, että jokaiselle logaritmin haaralle L pätee

$$L(z) = \ln|z| + i\theta(z),$$

missä $\theta : D \to \mathbf{R}$ on jatkuva ja

$$\theta(z) = Im(L(z)) = \arg(z)\,, \quad z \in D\,,$$

missä $\arg(z)$ on jokin pisteen z argumentti; valinta voi riippua pisteestä z.

2.25. Huomautus. Olkoot L ja L_1 logaritmin haaroja alueessa D. Tällöin

$$(L_1 - L)'(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} = 0 \quad \text{kaikilla } z \in D.$$

Lauseesta 2.13 seuraa, että $L_1 - L$ on vakio alueessa D. Koska

$$e^{L_1(z) - L(z)} = \frac{e^{L_1(z)}}{e^{L(z)}} = \frac{z}{z} = 1 \quad \text{kaikilla } z \in D,$$

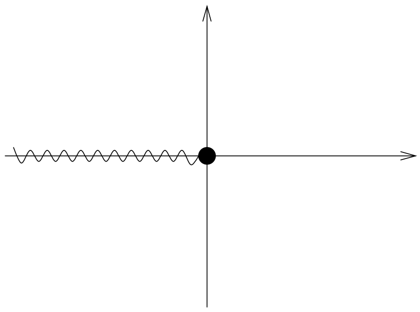
on tämä vakio muotoa $2k\pi i$ jollain $k \in \mathbf{Z}$. Siten on olemassa $k \in \mathbf{Z}$ siten, että

$$L_1(z) = L(z) + 2k\pi i \quad \text{kaikilla } z \in D.$$

Huomaa, ettei vakio k riipu pisteestä $z \in D$! (HT. Totea tämä!)

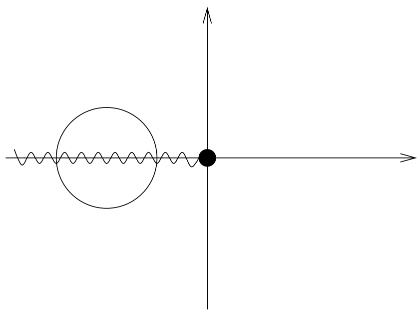
Esimerkki. Logaritmin päähaara

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$



on analyyttinen alueessa $\quad D = \mathbf{C}\backslash\{z \in \mathbf{R} : z \leq 0\}$.

Esimerkki. Olkoon



$$D = B(-1, \frac{1}{2})$$

ja

$$L(z) = \begin{cases} \text{Log}(z) & \text{kun } Im(z) \geq 0 \\ \text{Log}(z) + i2\pi & \text{kun } Im(z) < 0. \end{cases}$$

Tällöin L on logaritmin haara kiekossa D (HT). Miten tämä sopii yhteen huomautuksen 2.25 kanssa?

2.26. Huomautus. Joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ ei ole logaritmin analyyttistä haaraa (HT).

2.7. Kompleksinen ja reaalinen differentioituvuus

Reaalisen tason $\mathbf{R}^2$ avoimessa joukossa $G \subset \mathbf{R}^2$ määritelty kuvaus $f : G \to \mathbf{R}^2$ on (*reaalisesti*) *differentioituva* pisteessä $z_0 = (x_0, y_0)$, jos on olemassa $\mathbf{R}$-lineaarinen $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (ts. matriisi $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$) siten, että

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0, y - y_0) + E(x, y)$$

kaikilla $(x,y) \in G$; tässä $E : G \to \mathbf{R}^2$ on funktio, jolle

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|E(z)|}{|z - z_0|} = 0.$$

Jos merkitään $f(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$, niin matriisin A (funktion f reaalinen derivaatta pisteessä z_0) elementit ovat u:n ja v:n osittaisderivaatat pisteessä (x_0, y_0)

$$A = \begin{bmatrix} u_x(x_0,y_0) & u_y(x_0,y_0) \\ v_x(x_0,y_0) & v_y(x_0,y_0) \end{bmatrix}.$$

Matriisi A vastaa reaalilineaarikuvausta : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Jotta f olisi kompleksisesti derivoituva, tulisi matriisin A vastata kompleksista lineaarikuvausta : $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eli siis kompleksisella vakiolla kertomisoperaatiota. Ts. toiminnon

$$A[x - x_0, y - y_0]$$

tulisi olla kompleksinen kertolasku

$$w\left((x - x_0) + i(y - y_0)\right).$$

Välttämätön ja riittävä ehto (HT) tälle on se, että matriisin A kertoimet totetuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0). \end{cases}$$

Tulkitsemalla (x,y) kompleksiluvuksi $x + iy$ ja käyttämällä yhteyksiä

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad , \quad y = \frac{z + \overline{z}}{2i}$$

saadaan, että $f : G \to \mathbf{C}$ on reaalisesti differentioituva pisteessä $z_0 \in G$ jos ja vain jos on olemassa $c, d \in \mathbf{C}$ siten, että

(2.3) $$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + d(\overline{z} - \overline{z}_0) + E(z)$$

kaikilla $z \in G$, missä $E : G \to \mathbf{C}$ on sellainen, että $\left|\frac{E(z)}{z - z_0}\right| \xrightarrow{z \to z_0} 0$.

Edelleen

$$c = \frac{1}{2}\left(u_x(z_0) + v_y(z_0) + i(v_x(z_0) - u_y(z_0))\right)$$
$$d = \frac{1}{2}(u_x(z_0) - v_y(z_0) + i(v_x(z_0) + u_y(z_0)))$$

Nyt on helppo osoittaa (HT):

Funktio $f : G \to \mathbf{C}$ on (kompleksisesti) derivoituva pisteessä $z_0 \in G$ jos ja vain jos f on reaalisesti differentioituva pisteessä $z_0 \in G$ ja $d = 0$.

Yleisesti käyttään kompleksisia osittaisderivaattoja: Jos funktion $f : G \to \mathbf{C}$ osittaisderivaatat $f_x(z_0)$ ja $f_y(z_0)$ ovat olemassa, $z_0 \in G$, niin merkitään

$$\begin{aligned} f_z(z_0) &:= \frac{1}{2}[f_x(z_0) - if_y(z_0)] && (= \partial f(z_0)) \\ &= \frac{1}{2}(u_x(z_0) + v_y(z_0)) + \frac{i}{2}(v_x(z_0) - u_y(z_0)) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f_{\overline{z}}(z_0) &:= \frac{1}{2}[f_x(z_0) + if_y(z_0)] && (= \overline{\partial} f(z_0)) \\ &= \frac{1}{2}(u_x(z_0) - v_y(z_0)) + \frac{i}{2}(v_x(z_0) + u_y(z_0)). \end{aligned}$$

Tällöin Cauchy-Riemannin yhtälöt on helppo kirjoittaa:

$$f_{\overline{z}} = 0\,,$$

jolloin

$$f'(z_0) = f_z(z_0).$$

Muista, että kompleksinen osittaisderivaatta f_z voi olla olemassa, vaikkei f olisikaan derivoituva.

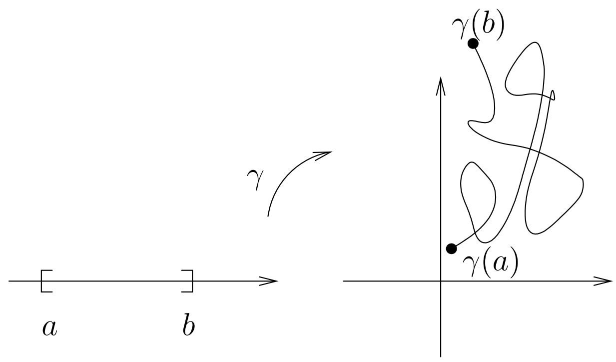
3. Kompleksinen integrointi

3.1. Tieintegraali

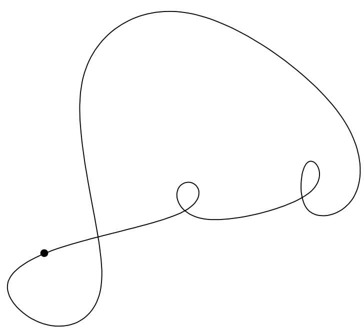
3.1. Määritelmä. Olkoot $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. *Polku* γ kompleksitasossa on jatkuva kuvaus $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$. Piste $\gamma(a)$ on polun γ alkupiste ja $\gamma(b)$ sen loppupiste. Kuvauksen γ kuvajoukko

$$|\gamma| := \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$$

on nimeltään on polun γ *jälki*. Sanotaan, että γ on polku joukossa D, jos $|\gamma| \subset D$.



Polku $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ on *suljettu*, jos $\gamma(a) = \gamma(b)$.



Suljettu polku

3.2. Määritelmä. Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ polku ja

$$\begin{cases} x(t) = Re(\gamma(t)) \\ y(t) = Im(\gamma(t)). \end{cases}$$

Sanotaan, että γ on *jatkuvasti differentioituva polku*, jos $x : [a, b] \to \mathbf{R}$ ja $y : [a, b] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvasti differentioituvia (päätepisteissä toispuoleiset derivaatat). Määritellään tällöin polun γ derivaatta

$$\gamma'(t) = x'(t) + i\, y'(t)$$

Sanotaan, että γ on *paloittain jatkuvasti differentioituva* välillä $[a, b]$, jos on olemassa pisteet $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ siten, että $\gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ on jatkuvasti differentioituva väleillä kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$.

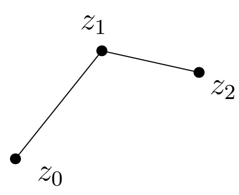
3.3. Määritelmä. *Tie joukossa* $A \subset \mathbf{C}$ on paloittain jatkuvasti differentioituva polku $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ siten, että $|\gamma| \subset A$. Suljettua tietä sanotaan myös *piiriksi.*

Esimerkki. Olkoot z_0, z_1, z_2 eri pisteitä . Määritellään $\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbf{C}$,

$$\gamma_1(t) = [z_0, z_1](t) := tz_1 + (1 - t)z_0 \ , \text{ jana } z_0\text{:sta } z_1\text{:een,}$$

ja

$$\gamma_1 : [0, 2] \to \mathbf{C}\,,$$
$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t)\,, & t \in [0, 1] \\ (t - 1)z_2 + (2 - t)z_1\,, & t \in [1, 2]\,. \end{cases}$$

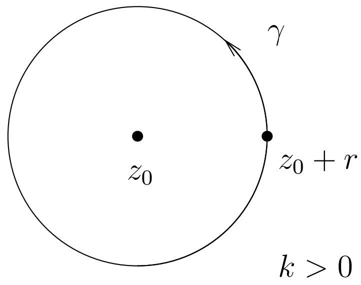


Nyt γ_1 ja γ_2 ovat teitä sekä

$$\gamma_2'(t) = \begin{cases} \gamma_1'(t) = z_1 - z_0\,, & t \in (0, 1) \\ z_2 - z_1\,, & t \in (1, 2)\,. \end{cases}$$

3.4. Esimerkki. Olkoon $k \in \mathbf{Z}$, $z_0 \in \mathbf{C}$ ja $r > 0$. Määritellään $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$,

$$\gamma(t) = z_0 + re^{kit}.$$



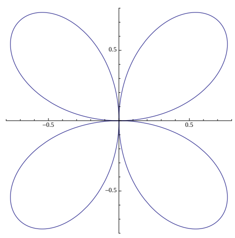
Tällöin γ on suljettu tie (piiri), joka kulkee z_0-keskisen r-säteisen ympyrän kehän ympäri $|k|$ kertaa lähtien pisteestä $z_0 + r$

- vastapäivään, jos $k > 0$
- myötäpäivään, jos $k < 0$.
- γ pysyy paikallaan, jos $k = 0$.

Lisäksi

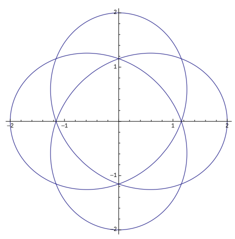
$$\gamma'(t) = ikre^{ikt} \qquad \text{(HT)}.$$

Esimerkki. Olkoon



$$\gamma(t) = \sin 2t \cos t + i \sin 2t \sin t = e^{it} \sin 2t\,, \quad t \in [0, 2\pi].$$

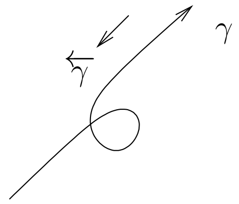
Tällöin γ on suljettu tie ja



$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= 2\cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t + i(2\cos 2t \sin t + \cos t \sin 2t)\\ &= e^{it} \cos 2t + e^{i3t}.\end{aligned}$$

3.5. Määritelmä. Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ polku /tie. Polun γ *käänteispolku* tai *paluupolku /käänteistie* on kuvaus $\overleftarrow{\gamma} : [a,b] \to \mathbf{C}$ siten, että

$$\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t).$$



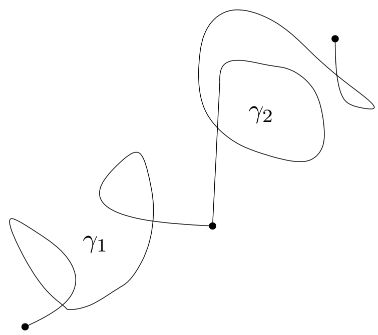
3.6. Huomautus. $\overleftarrow{[z_1, z_2]} = [z_2, z_1]$. (HT).

3.7. Määritelmä. Olkoot $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbf{C}$ ja $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbf{C}$ polkuja siten, että $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Tällöin määritellään *yhdistetty polku (summapolku)*

$$\gamma_1 * \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbf{C}$$

asettamalla

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t)\,, & \text{kun } a_1 \le t \le b_1. \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2)\,, & \text{kun } b_1 \le t \le b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$



3.8. Huomautus. Jos γ_1, γ_2 ovat teitä, ja $\gamma_1 * \gamma_2$ on määritelty, se on myös tie. (HT).

3.9. Huomautus. Jos $D \subset \mathbf{C}$ on alue ja $z_1, z_2 \in D$, niin on olemassa tie $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ siten, että $|\gamma| \subset D$ ja

$$\gamma(a) = z_1\,, \qquad \gamma(b) = z_2.$$

(Tieksi γ voidaan valita *murtoviiva*, ts. äärellisen monen janan muodostama polku, jopa niin että murtoviivan muodostavat janat ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Katso lause 1.52.)

Parametrin vaihto: Usein on mukava kulkea pitkin teitä, jotka on määritelty tietyllä välillä $[a, b]$, esim. $[0, 1]$ tai $[0, 2\pi]$. Tätä varten on yleensä tehtävä *parametrin vaihto*: Jos

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$$

on polku, niin sanotaan, että polku

$$\beta : [c, d] \to \mathbf{C}$$

on saatu polusta γ parametria vaihtamalla, jos on olemassa aidosti kasvava jatkuva surjektio $h : [c, d] \to [a, b]$ siten, että

$$\beta(s) = \gamma(h(s)) \quad \text{kaikilla } s \in [c, d].$$

(Sanotaan, että h on *parametrinvaihtokuvaus*.)
Huomaa, että poluilla γ ja β on sama jälki ja ne kulkevat ”samaan suuntaan”, mutta mahdollisesti eri nopeuksilla. Huomaa myös, että parametrinvaihtokuvaus on bijektio.

Jos γ on tie ja parametrinvaihto h on paloittain jatkuvasti derivoituva, on β myös tie. Tällöin sanotaan, että tiet γ ja β ovat *ekvivalentit*.

Huomaa, että $\beta'(s) = \gamma'(h(s))h'(s)$.

Esimerkki. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $z_1 \neq z_2$ ja $\gamma = [z_1, z_2]$, ts.

$$\gamma(t) = tz_2 + (1 - t)z_1 \quad , \ t \in [0, 1].$$

Määritellään

$$\beta(s) = z_1 + s\frac{z_2 - z_1}{|z_1 - z_2|}\,, \qquad 0 \le s \le |z_1 - z_2|\,,$$

jolloin tie β on saatu tiestä γ parametrin vaihdolla

$$h(s) = \frac{s}{|z_1 - z_2|}\,, \qquad 0 \le s \le |z_1 - z_2|$$

Sanotaan, että tiessä β on käyrän pituus parametrina.

3.10. Määritelmä. Olkoon $\gamma = x + iy : [a, b] \to \mathbf{C}$ jatkuvasti differentioituva polku ja $f = u + iv : |\gamma| \to \mathbf{C}$ jatkuva funktio. Tällöin funktion f *integraali yli polun* γ on

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &:= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b (u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t))dt + \\ &\quad + i\int_a^b (u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t))dt.\end{aligned}$$

Yleisemmin, jos γ on tie, niin valitaan pisteet $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ siten, että $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ on jatkuvasti differentioituva polku ja määritellään funktion f *integraali* yli *tien* γ asettamalla

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Samoin määritellään funktion f *integraali yli tien* γ *kaarenpituuden suhteen* asettamalla

$$\int_\gamma f|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Integraali yli polun γ riippuu muustakin kuin vain polun γ jäljestä:

Esimerkki. Olkoot $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ ja $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ teitä

$$\gamma_1(t) = 2e^{it}, \qquad \gamma_2(t) = 2e^{-i2t}.$$

Nyt γ_1 kiertää kehän $\partial B(0, 2)$ kerran vastapäivään ja γ_2 kahdesti myötäpäivään.

Olkoon $f(z) = \frac{1}{z}$.

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{2e^{it}}dt = i\int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

$$\int\limits_{\gamma_2} f(z)dz = \int\limits_0^{2\pi} \frac{-4ie^{-i2t}}{2e^{-i2t}}dt = -2i\int\limits_0^{2\pi} dt = -4\pi i.$$

$$\int\limits_{\gamma_1} f(z)|dz| = \int\limits_0^{2\pi} \frac{2}{2e^{it}}dt = \frac{1}{-i}\int\limits_0^{2\pi} e^{-it}dt = 0.$$

3.11. Lemma. *Olkoot γ ja β teitä joukossa A ja $f : A \to \mathbf{C}$ sekä $g : A \to \mathbf{C}$ jatkuvia. Tällöin*

(i)

$$\int\limits_{\gamma} (f(z) + g(z))dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz + \int\limits_{\gamma} g(z)dz.$$

(ii)

$$\int\limits_{\gamma} cf(z)dz = c\int\limits_{\gamma} f(z)dz \quad \textit{kaikilla } c \in \mathbf{C}.$$

(iii)

$$\int\limits_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

(iv) Jos yhdistetty polku $\gamma * \beta$ on määritelty, niin

$$\int\limits_{\gamma*\beta} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz + \int\limits_{\beta} f(z)dz.$$

(v) Jos tiet γ ja β ovat ekvivalentit, niin

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\beta} f(z)dz.$$

(vi) Jos $|f(z)| \leq |g(z)|$ kaikilla $z \in |\gamma|$, niin

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \int_\gamma |g(z)||dz| = \int_a^b |g(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt\,,$$

missä $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ on tie.

Todistus: (i), (ii) Harjoitustehtäviä.

(iii): Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$. Koska $\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(b+a-t)$, niin $\overleftarrow{\gamma}'(t) = -\gamma'(b+a-t)$, joten

$$\int_{\overleftarrow{\gamma}} f(t)dz = \int_a^b f(\overleftarrow{\gamma}(t))\overleftarrow{\gamma}'(t)dt = -\int_a^b f(\gamma(b+a-t))\gamma'(b+a-t)dt.$$

Kun sijoitetaan $s = b+a-t$, saadaan

$$\int_b^a f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int_a^b f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int_\gamma f(z)dz.$$

(iv): Harjoitustehtävä.

(v): Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}, \beta : [c,d] \to \mathbf{C}$ ja $h : [c,d] \to [a,b]$ paloittain derivoituva parametrin vaihto siten, että $\gamma(h(s)) = \beta(s)$. Nyt

$$\beta'(s) = \gamma'(h(s))h'(s)\,,$$

joten

$$\int_\beta f(z)dz = \int_c^d f(\beta(s))\beta'(s)ds = \int_c^d f(\gamma(h(s)))\gamma'(h(s))h'(s)ds.$$

Sijoittamalla $t = h(s)$, $dt = h'(s)ds$ saadaan

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma f(z)dz.$$

(vi): Olkoon

$$\int_\gamma f(z)dz = re^{i\theta} \qquad \text{(voidaan olettaa, että } r > 0\text{).}$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
0 \le \left| \int_\gamma f(z)dz \right| = r &= \int_\gamma e^{-i\theta} f(z)dz \\
&= \underbrace{\int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt}_{\in \mathbf{R}} \\
&= \int_a^b \underbrace{Re(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t))}_{\le |g(\gamma(t))||\gamma'(t)|} dt + i \underbrace{\int_a^b Im(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt)}_{=0} \\
&\le \int_a^b |g(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt = \int_\gamma |g(z)||dz|.
\end{aligned}
$$

□

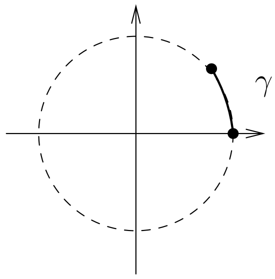
3.12. Huomautus. Jos $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ on tie, niin määritellään *tien* γ *pituus*

$$l(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)|dt.$$

Lemman 3.11 kohdasta (vi) seuraa, että jos $f : |\gamma| \to \mathbf{C}$ on jatkuva ja $|f(z)| \le M$, niin

$$\left| \int_\gamma f dz \right| \le Ml(\gamma).$$

3.13. Esimerkki. Olkoon $f(z) = e^{iz^2}$ ja $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.



Väite:

$$\left|\int_\gamma f\,dz\right| \le \frac{\pi(1-e^{-r^2})}{4r}.$$

Todistus: Jos $z = x + iy$,

$$|e^{iz^2}| = e^{Re(iz^2)} = e^{-2xy}\,,$$

joten kun $z = \gamma(t) = re^{it} = r(\cos t + i\sin t)$,

$$|e^{i\gamma(t)^2}| = e^{-r^2 2\cos t \sin t} = e^{-r^2\sin 2t}.$$

Edelleen, lemman 3.11 kohdan (vi) nojalla

$$\left|\int_\gamma e^{iz^2}dz\right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2\sin 2t} r\,dt,$$

mistä sijoittamalla $s = 2t$ saadaan

$$\frac{r}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2\sin s} ds.$$

Nyt $\sin s \ge \frac{2s}{\pi}$, kun $0 \le s \le \frac{\pi}{2}$ (HT), joten

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le \frac{r}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2 2}{\pi}s} ds = \frac{\pi(1-e^{-r^2})}{4r}.$$

3.2. Primitiivit eli kantafunktiot

Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$, $G \subset \mathbf{C}$ avoin. Sanotaan, että funktio $F : G \to \mathbf{C}$ on funktion f *primitiivi* tai *kantafunktio* joukossa G, jos

$$F'(z) = f(z) \text{ kaikilla } z \in G.$$

3.14. Huomautus. Jos F on funktion f primitiivi, myös $f + c$ on funktion f primitiivi kaikilla vakioilla $c \in \mathbf{C}$.

Primitiivi on aina analyyttinen!

Esimerkki. Eksponenttifunktion $z \mapsto e^z$ primitiivi on eksponenttifunktio itse.

Logaritmin päähaara $G(z) = \operatorname{Log} z$ on funktion $g(z) = \frac{1}{z}$ primitiivi joukossa $\mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{R} : z \leq 0\}$.

3.15. Lause. *Olkoon F jatkuvan funktion f primitiivi avoimessa joukossa $G \subset \mathbf{C}$. Jos $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ on tie joukossa G, niin*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Erityisesti, jos jatkuvalla funktiolla f on primitiivi joukossa G ja γ on suljettu tie, niin

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Todistus: Olkoot $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ siten, että $\gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ on jatkuvasti differentioituva kaikilla $k = 1, \ldots, n$. Olkoon $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ja $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Määritellään

$$\tilde{F}(t) = F(\gamma(t)),$$

jolloin $\tilde{F}$ on jatkuva. Käyttämällä differentiaalilaskennan ketjusääntöä, Cauchy-Riemannin yhtälöistä saatavaa tietoa $F_y = iF_x$ ja tietoa $F'(z) = F_x$ saadaan

$$\begin{aligned}\tilde{F}'(t) &= F_x(\gamma(t))x'(t) + F_y(\gamma(t))y'(t) \\ &= F_x(\gamma(t))x'(t) + iF_x(\gamma(t))y'(t) \\ &= F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t).\end{aligned}$$

Nyt

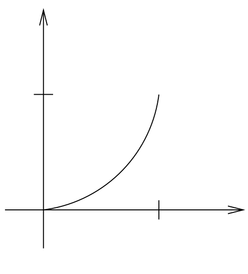
$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \tilde{F}'(t)dt,$$

ja koska $\tilde{F}'$ on jatkuva välillä $[t_{k-1}, t_k]$, tästä analyysin peruslausetta käyttämällä saadaan

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} (\tilde{F}(t_k) - \tilde{F}(t_{k-1})) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)$$
$$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Esimerkki.



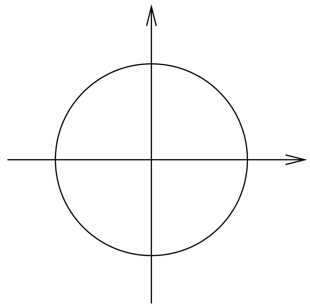
Olkoon $\gamma(t) = t + i\frac{t^2}{\pi}$, $0 \leq t \leq \pi$ ja $f(z) = e^z$. Nyt $F(z) = e^z$, joten

$$\int_\gamma f(z)dz = \Big/_0^\pi F(\gamma(t)) = e^{\pi + i\pi} - e^0 = -e^\pi - 1.$$

3.16. Huomautus. Kaikilla joukossa G analyyttisillä funktioilla ei ole primitiiviä joukossa G. Esimerkiksi funktiolla f,

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

ei ole primitiiviä joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.



Syy: Olkoon $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, jolloin

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i.$$

Mutta γ on suljettu tie, joten jos funktiolla f olisi primitiivi joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, niin lauseen 3.15 mukaan olisi

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Siispä f:llä ei voi olla primitiiviä G:ssä.

3.17. Huomautus. Lause 3.15 antaa ”keinon” primitiivin löytämiseksi: integroidaan pitkin käyrää γ pisteestä z_0 pisteeseen z:

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw + \text{ vakio.}$$

3.18. Huomautus. Osittaisintegrointikaava pätee:
Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ tie G:ssä ja $f, g : G \to \mathbf{C}$ analyyttisiä (ja derivaatat f' ja g' jatkuvia). Tällöin

$$\int_\gamma f(z)g'(z)dz = \Big/_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z)g(z) - \int_\gamma g(z)f'(z)dz.$$

Todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkki. Olkoon $f(z) = z$. Tällöin funktion f primitiivi on $F(z) = \frac{1}{2}z^2$ ja

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma zdz$$

kaikilla suljetuilla $\gamma \subset \mathbf{C}$.

4. Cauchyn lause — lokaali versio

Eräs kompleksianalyysin tärkeimmistä ”perustuloksista” on alunperin vuodelta 1825 oleva Cauchyn lause, jolla tarkoitetaan useitakin lauseita, jotka antavat ehtoja, milloin analyyttisen funktion integraali yli piirin on 0.

Jatkossa käytetään merkintää

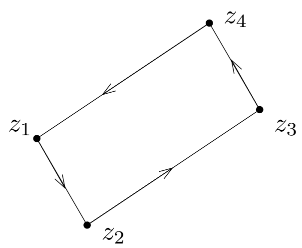
$$\int_{\partial R} f(z)dz,$$

kun tarkoitetaan integraalia yli topologisesti suljetun suorakaiteen R reunan vastapäivään kerran ympäri, ts. jos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ ovat sellaiset pisteet, että $[z_1, z_2]$ ja $[z_4, z_3]$ ovat yhdensuuntaiset sekä $[z_1, z_4]$ ja $[z_2, z_3]$ ovat yhdensuuntaiset ja

$$Re(z_1) = \min_{j=1,2,3,4} Re(z_j),$$

niin $Im(z_2) \leq Im(z_3)$ (ja $Im(z_2) < Im(z_1)$ mikäli $Re(z_2) = Re(z_1)$). Tällöin ∂R on suljettu tie,

$$\partial R = [z_1, z_2] * [z_2, z_3] * [z_3, z_4] * [z_4, z_1].$$



4.1. Lemma. *Olkoon R suljettu suorakaide joukossa G ja $f : G \to \mathbf{C}$ analyyttinen. Tällöin*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

TODISTUS: Olkoon

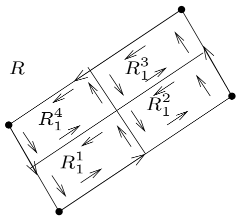
$$I = \int_{\partial R} f(z)dz.$$

Jaetaan R neljään kongruenttiin (samanlaiseen) suorakaiteeseen $R_1^1, R_1^2, R_1^3, R_1^4$. Määritellään

$$I_1^j = \int\limits_{\partial R_1^j} f(z)dz \quad , \quad j = 1,2,3,4.$$

Tällöin

$$I = I_1^1 + I_1^2 + I_1^3 + I_1^4,$$



koska suorakaiteiden R_1^j yhteiset sivut "kuljetaan" eri suuntiin! Siten kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$|I| \leq |I_1^1| + |I_1^2| + |I_1^3| + |I_1^4|.$$

ja siis

$$|I_1^j| \geq \frac{|I|}{4} \qquad \text{jollain } j = 1,2,3,4.$$

Niinpä löydetään suorakaidetta R puolta pienempi suorakaide $R_1 \subset R$ siten, että kun

$$I_1 = \int\limits_{\partial R_1} f(z)dz\,,$$

niin

$$|I_1| \geq 4^{-1}|I|.$$

Samalla tavalla löydetään suorakaiteen R_1 sisältä puolet pienempi suorakaide R_2 siten, että kun

$$I_2 = \int\limits_{\partial R_2} f(z)dz\,,$$

niin

$$|I_2| \geq 4^{-1}|I_1| \geq 4^{-2}|I|.$$

Jatkamalla osiinjakoa induktiivisesti löydetään jono sisäkkäisiä suorakaiteita

$$R \supset R_1 \supset R_2 \supset \dots$$

joukossa G siten, että kun

$$I_n = \int\limits_{\partial R_n} f(z)dz\,,$$

niin

$$|I_n| \geq 4^{-1}|I_{n-1}| \geq \cdots \geq 4^{-n}|I|\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ts.

$$(*) \qquad |I| \leq 4^n |I_n| \quad \text{kaikilla } n = 1, 2, \ldots$$

Olkoon

$$d_n := \text{ suorakaiteen } R_n \text{ halkaisijan pituus } = \sup\{|z - w| : z, w \in R_n\}$$

ja

$$L_n = l(\partial R_n) = \text{ suorakaiteen } R_n \text{ reunan pituus.}$$

Merkitään $d = R$:n halkaisija ja $L = l(\partial R)$. Tällöin

$$d_n = 2^{-n} d\,, \quad L_n = 2^{-n} L\,.$$

Nyt $R_1 \supset R_2 \supset \ldots$ muodostaa vähenevän jonon kompakteja joukkoja ja $d_n \to 0$, joten Cantorin lauseesta seuraa, että on olemassa $z_0 \in R$, jolle

$$\{z_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Koska f on derivoituva pisteessä $z_0 \in G$, niin

$$(**) \qquad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + E(z)\,, \quad z \in G,$$

missä $E : G \to \mathbf{C}$ on sellainen, että

$$\frac{|E(z)|}{|z - z_0|} \to 0 \quad \text{ kun } z \to z_0.$$

Koska f on jatkuva, niin yhtälöstä $(**)$ seuraa, että E on jatkuva joukossa G ja $E(z_0) = 0$.

Olkoon γ suljettu tie joukossa G. Nyt Lauseesta 3.15 seuraa kaavan(**) avulla

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &\overset{(**)}{=} f(z_0) \underbrace{\int_\gamma dz}_{=0} + f'(z_0) \underbrace{\int_\gamma (z - z_0)dz}_{=0} + \int_\gamma E(z)dz \\
&= \int_\gamma E(z)dz.
\end{aligned}$$

Valitaan $\gamma = \partial R_n$, jolloin

$$I_n = \int_{\partial R_n} E(z)dz.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Osoitetaan, että $|I| \leq \varepsilon dL$:

Olkoon $B = B(z_0, \delta) \subset G$ siten, että

$$|E(z)| \leq \varepsilon |z - z_0| \quad \text{kaikilla } z \in B.$$

Valitaan n siten, että $d_n < \delta$. Koska $z_0 \in R_n$ ja $|z - z_0| \leq d_n < \delta$ kaikilla $z \in R_n$, niin $R_n \subset B$. Nyt yhtälöstä $(*)$ seuraa, että

$$|I| \leq 4^n |I_n| = 4^n \left| \int_{\partial R_n} E(z)dz \right|$$

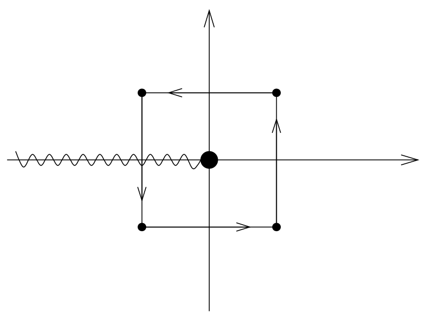
mistä vilkaisemalla huomautusta 3.12 saadaan arvio

$$|I| \leq 4^n \varepsilon d_n L_n = \varepsilon dL.$$

Nyt antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan haluttu tieto: $I = 0$. $\square$

Esimerkki. Integroidaan $\frac{1}{z}$ pitkin tietä

$$\gamma = [1+i, -1+i] * [-1+i, -1-i] * [-1-i, 1-i] * [1-i, 1+i].$$



Merkitään $\gamma_1 = [-1-i, 1-i] * [1-i, 1+i] * [1+i, -1+i]$ ja $\gamma_2 = [-1+i, -1-i]$.

Alueessa $D = \mathbf{C} \setminus \{z \leq 0\}$ funktiolla $\frac{1}{z}$ on primitiivi $\mathrm{Log}(z)$, joten

$$\int\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \mathrm{Log}(-1+i) - \mathrm{Log}(-1-i).$$

Janan γ_2 yli integroimiseen valitaan joukossa $\mathbf{C} \setminus \{z \geq 0\}$ logaritmin haara

$$L(z) = \begin{cases} \mathrm{Log}\, z\,, & \text{jos } Im(z) \geq 0 \\ \mathrm{Log}\, z + 2\pi i\,, & \text{jos } Im(z) < 0. \end{cases}$$

Tällöin

$$\int\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = L(-1-i) - L(-1+i) = \mathrm{Log}(-1-i) + 2\pi i - \mathrm{Log}(-1+i),$$

joten

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

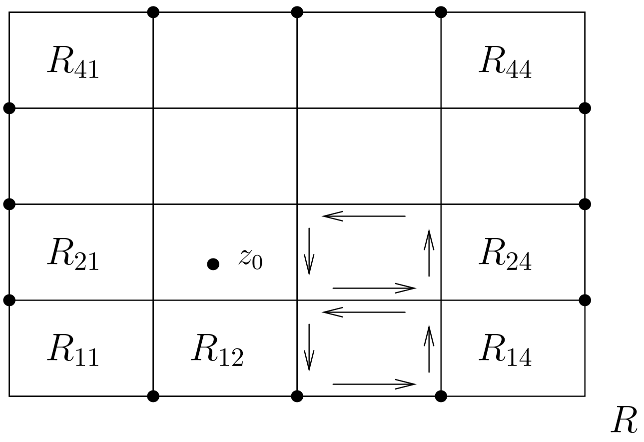
Huomaa, että γ on erään suorakaiteen $R \subset \mathbf{C}$ reuna, mutta $\frac{1}{z}$ ei ole analyyttinen koko suorakaiteessa R. Niinpä analyyttisyysoletusta lemmassa 4.1 ei voida poistaa. Kuitenkin sitä voidaan aavistuksen verran lieventää:

4.2. Lemma. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ jatkuva ja f analyyttinen joukossa $G \setminus \{z_0\}$. Tällöin*

$$\int\limits_{\partial R} f dz = 0$$

kaikilla suljetuilla suorakaiteilla $R \subset G$.

Todistus: Olkoon $R \subset G$ suorakaide. Olkoon $n = 1, 2, \ldots$. Jaetaan suorakaiteen R reunajanat n yhtäsuureen palaseen ja yhdistetään jakopisteet reunojen suuntaisilla janoilla, jolloin saadaan n^2 kongruenttia suorakaidetta R_{kl}, missä $k, l = 1, \ldots, n$.



$n = 4$

Tällöin

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \int_{\partial R_{kl}} f(z)dz.$$

Jos $z_0 \notin R_{kl}$, on lemman 4.1 nojalla

$$\int_{\partial R_{kl}} f(z)dz = 0.$$

Jos $z_0 \in R_{kl}$, niin

$$\left| \int_{\partial R_{kl}} f(z)dz \right| \leq \max_{z \in R} |f(z)| \, l(\partial R_{kl}) = M\frac{L}{n},$$

missä $M = \max_{z \in R} |f(z)| < \infty$, koska f on jatkuva, ja $L = l(\partial R)$. Nyt z_0 kuuluu korkeintaan neljään suljettuun suorakaiteeseen R_{kl}, joten

$$\left| \int_{\partial R} f(z)dz \right| = \left| \sum_{z_0 \in R_{kl}} \int_{\partial R_{kl}} f(z)dz \right| \leq \frac{4ML}{n}.$$

Kun annetaan $n \to \infty$, saadaan

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

$\square$

4.3. Huomautus (Merkintä). Olkoon γ suunnattu jana $[z_0, z_1]$. Merkitään

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz.$$

Lemma 4.1 johtaa ehtoon kantafunktion eli primitiivin eksistenssille:

4.4. Lemma. *Olkoon $B \subset \mathbf{C}$ avoin kiekko ja $f : B \to \mathbf{C}$ sellainen jatkuva funktio, jolle*

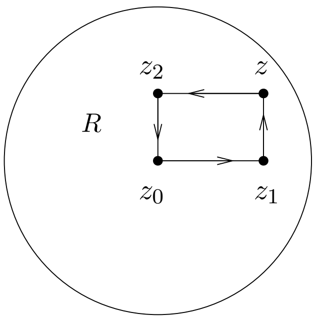
$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

kaikilla suljetuilla suorakaiteilla R, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Tällöin funktiolla f on kantafunktio kiekossa B.

Erityisesti, lauseen 3.15 nojalla

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \qquad \textit{kaikilla kiekon } B \textit{ suljetuilla teillä } \gamma\,.$$

Todistus: Olkoon $z_0 = x_0 + iy_0$ kiekon B keskipiste. Jos $z = x + iy \in B$, niin asetetaan $z_1 = x + iy_0$ ja $z_2 = x_0 + iy$.



Jos $x \neq x_0$, $y \neq y_0$ ja

$$\gamma = [z_0, z_1] * [z_1, z] * [z, z_2] * [z_2, z_0]\,,$$

niin

$$0 = \int_\gamma f(\xi)d\xi = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi + \int_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi + \int_{z}^{z_2} f(\xi)d\xi + \int_{z_2}^{z_0} f(\xi)d\xi\,.$$

Määritellään nyt

$$F(z) = \int_{z_0}^{z_2} f(\xi)d\xi + \int_{z_2}^{z} f(\xi)d\xi,$$

jolloin siis myös

$$F(z) = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi + \int_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi.$$

Jatkuvuuden nojalla nämä kaavat pätevät myös, jos $x = x_0$ tai $y = y_0$. Nyt (HT)

$$F(z) = \int_{x_0}^{x} f(t+iy)dt + i\int_{y_0}^{y} f(x_0+it)dt,$$

josta

$$\begin{aligned} F_x(z) &= \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} f(t+iy)dt + i\int_{y_0}^{y} f(x_0+it)dt\right) \\ &= f(x+iy) = f(z). \end{aligned}$$

Samoin

$$F(z) = \int_{x_0}^{x} f(t+iy_0)dt + i\int_{y_0}^{y} f(x+it)dt,$$

josta

$$F_y(z) = if(x+iy) = if(z).$$

Koska f on jatkuva, on F C^1-funktio kiekossa B. Siten Cauchy-Riemannin systeemistä

$$F_x = f = -i(if) = -iF_y$$

saadaan seurauksen 2.11 nojalla, että F on analyyttinen B:ssä ja $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in B$. □

Seuraavaa lausetta tarvitaan myöhemmin:

4.5. Lause. *Olkoon $f : D \to \mathbf{C}$ jatkuva ja $D \subset \mathbf{C}$ alue. Tällöin*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \qquad \textit{kaikilla suljetuilla teillä } \gamma \subset D$$

jos ja vain jos funktiolla f on primitiivi joukossa D.

Todistus: Ehdon riittävyys todistettiin lauseessa 3.15.

Todistetaan ehdon välttämättömyys. Olkoon $w_0 \in D$. Jos $z \in D$, niin valitaan tie $\gamma : [a, b] \to D$ siten, että $\gamma(a) = w_0$ ja $\gamma(b) = z$. Määritellään

$$F(z) := \int_\gamma f(\xi)d\xi.$$

Tällöin $F : D \to \mathbf{C}$ on hyvin määritelty, koska jos σ on toinen tie pisteestä w_0 pisteeseen z, niin $\gamma * \overleftarrow{\sigma}$ on piiri joukossa D ja

$$0 = \int_{\gamma * \overleftarrow{\sigma}} f(\xi)d\xi = \int_\gamma f(\xi)d\xi - \int_\sigma f(\xi)d\xi,$$

joten $F(z)$ ei riipu tien γ valinnasta.

Väite: F on funktion f kantafunktio.

Todistus: Olkoon $z_0 \in D$ ja valitaan $B = B(z_0, r) \subset D$. Jos γ_0 on tie pisteestä w_0 pisteeseen z_0 ja $z \in B$, niin asetetaan $\gamma = \gamma_0 + [z_0, z]$. Huomaa, että f toteuttaa lemman 4.4 oletukset kiekossa B, joten funktiolla f on kiekossa B primitiivi G. Nyt

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_0} f(\xi)d\xi + \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \\ &\overset{\text{lause 3.15}}{=} \underbrace{F(z_0) + G(z) - G(z_0)}_{\text{analyyttinen}} \end{aligned}$$

on analyyttinen kiekossa B. Lisäksi

$$F'(z_0) = G'(z_0) = f(z_0).$$

$\square$

Nyt voidaan kirjata Cauchyn lauseen lokaali muoto:

4.6. Lause (Cauchyn lauseen lokaali muoto)**.** *Olkoon f analyyttinen kiekossa B. Tällöin*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

kaikilla suljetuilla teillä γ kiekossa B.

Todistus: Lemmasta 4.1 seuraa, että

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0 \text{ kaikilla suljetuilla suorakaiteilla } R \subset B$$

ja lemmasta 4.4, että funktiolla f on kantafunktio B:ssä, joten

$$\int_\gamma f(z)dz = 0\,.$$

□

4.7. Huomautus. i) Lemmasta 4.2 (ja Lauseen 4.6 todistuksesta)seuraa, että lauseessa 4.6 riittää olettaa, että f on jatkuva kiekossa B ja analyyttinen joukossa $B \setminus \{z_0\}$ jollakin $z_0 \in B$.

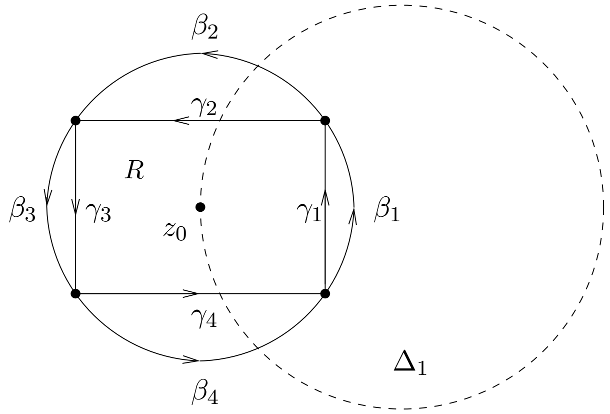
ii) Jos γ on riittävän sileän alueen suljettu reunakäyrä ja f' on jatkuva, seuraa Cauchyn lauseen väite helposti Greenin lauseesta ja Cauchy-Riemannin yhtälöistä (HT).

Esimerkki. Näytä, että

$$\int_{\partial R} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i\,,$$

missä R on suorakaide keskipisteenään z_0.

Olkoon $K = K(z_0, r)$ suorakaiteen R ympärille piirretty ympyrä ja olkoot γ_k ja β_k arvoilla $k = 1, 2, 3, 4$ polkuja kuten oheisessa kuvassa on osoitettu.



Nyt tiet

$$\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4 \quad \text{ja} \quad \beta = \beta_1 * \beta_2 * \beta_3 * \beta_4$$

jakavat piirit ∂R ja K. Kullekin k voidaan valita avoin kiekko Δ_k, joka sisältää suljetun polun $\gamma_k * \overleftarrow{\beta_k}$ ja jossa

$$F(z) = (z - z_0)^{-1}$$

on analyyttinen. Kuvassa näkyy Δ_1. Lauseen 4.6 mukaan

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - z_0} - \int_{\beta_k} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{\gamma_k * \overleftarrow{\beta_k}} \frac{dz}{z - z_0} = 0$$

kun $1 \leq k \leq 4$. Siten

$$\begin{aligned}\int_{\partial R} \frac{dz}{z - z_0} &= \sum_{k=1}^{4} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{4} \int_{\beta_k} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int_{|z - z_0| = r} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}dt}{re^{it}} = 2\pi i.\end{aligned}$$

4.8. Huomautus. Cauchyn lauseen 4.6 oletus, että eletään kiekossa, on liian rajoittava — myöhemmin siitä pyritään pääsemään eroon.

Lauseista 4.5 ja 4.6 saadaan:

4.9. Seuraus. *Kiekossa B analyyttisellä funktiolla f on primitiivi B:ssä, ts. analyyttinen funktio f on aina jonkin kiekossa B analyyttisen funktion F derivaatta.*

□

4.10. Huomautus. Edellinen seuraus ei ole totta, jos kiekko korvataan mielivaltaisella alueella. Esimerkiksi funktiolla $1/z$ ei ole primitiiviä $\mathbf{C} \setminus \{0\}$:ssa.

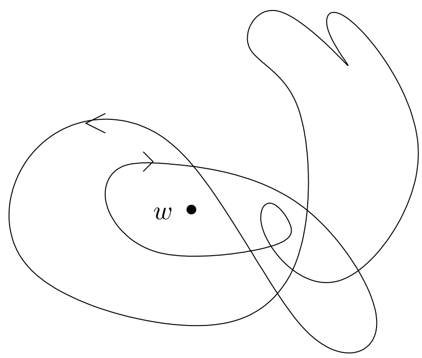
5. Kierrosluvut ja Cauchyn integraalikaava — lokaali versio

5.1. Kierrosluvut

Olkoon γ suljettu tie $\mathbf{C}$:ssä ja $w \in \mathbf{C} \setminus |\gamma|$. Tien γ *kierrosluku pisteen w ympäri* on

$$n(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z-w}.$$

(Lukua $n(\gamma, w)$ kutsutaan myös tien γ *indeksiksi* pisteen w suhteen).



5.1. Lemma. *Olkoon γ suljettu tie ja $w \in \mathbf{C} \setminus |\gamma|$. Tällöin*

$$n(\gamma, w) \in \mathbf{Z}.$$

Todistus: Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$. Määritellään $g : [a, b] \to \mathbf{C}$ asettamalla

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds.$$

Tällöin g on jatkuva ja $g(a) = 0,\ g(b) = 2\pi i\, n(\gamma, w)$. Lisäksi (HT) g on paloittain jatkuvasti derivoituva ja

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w}$$

jokaisella $t \in [a,b]$, jossa γ' on jatkuva. Määritellään

$$h(t) = e^{-g(t)}(\gamma(t) - w).$$

Nyt h on jatkuva ja

$$\begin{aligned} h'(t) &= e^{-g(t)}\big(\gamma'(t) - g'(t)(\gamma(t) - w)\big) \\ &= e^{-g(t)}(\gamma'(t) - \gamma'(t)) = 0 \end{aligned}$$

jokaisessa t, jossa γ' on jatkuva. Niinpä $h'(t) = 0$ paitsi äärellisen monella $t \in [a,b]$. Siten, koska h on jatkuva, saadaan

$$h(t) = c = \text{vakio kaikilla } t \in [a,b].$$

Erityisesti, $h(a) = h(b)$ ja siis

$$e^{-g(b)} = \frac{h(b)}{\gamma(b) - w} = \frac{h(a)}{\gamma(a) - w} = e^{-g(a)} = e^0 = 1.$$

Lauseesta 1.28 seuraa, että $-2\pi i\, n(\gamma, w) = -g(b) = 2\pi i k$ jollakin $k \in \mathbf{Z}$, mistä väite seuraa. □

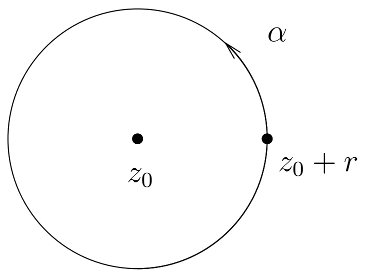
5.2. Huomautus. Jos γ ja σ ovat suljettuja teitä niin

$$n(\gamma * \sigma, w) = n(\gamma, w) + n(\sigma, w), \qquad \text{mikäli } \gamma * \sigma \text{ on määritelty,}$$

ja

$$n(\gamma, w) = -n(\overleftarrow{\gamma}, w)\,.$$

Esimerkki. Olkoon $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, jolloin $n(\alpha, z_0) = 1$.



Olkoon $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_m$, missä jokaisella $k = 1, \ldots, m$ joko $\gamma_k = \alpha$ tai $\gamma_k = \overleftarrow{\alpha}$. Tällöin

$$n(\gamma, z_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{P}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0} + \frac{N}{2\pi i} \int\limits_{\overleftarrow{\alpha}} \frac{dz}{z - z_0} = P - N,$$

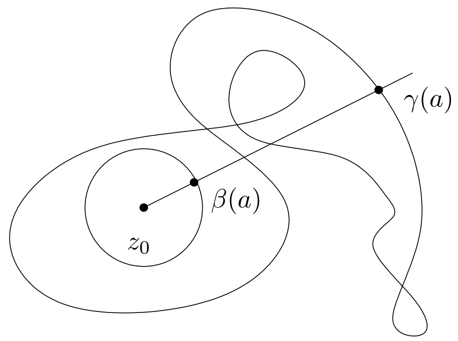
missä

$$P = \#\{k : \gamma_k = \alpha\} \quad \text{"positiiviset kierrokset" ja}$$
$$N = \#\{k : \gamma_k = \overleftarrow{\alpha}\} \quad \text{"negatiiviset kierrokset".}$$

Kierrosluku ottaa siis suunnan huomioon.

5.3. Huomautus. Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ suljettu tie ja $z_0 \in \mathbf{C} \setminus |\gamma|$. Nyt voidaan valita $r > 0$ siten, että $\overline{B}(z_0, r) \cap |\gamma| = \emptyset$ ja määritellä $\beta : [a, b] \to \mathbf{C}$,

$$\beta(t) = z_0 + r \frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|}.$$



Tällöin γ kiertää pisteen z_0 ympäri kerran positiiviseen suuntaan (osavälillä $[c, d] \subset [a, b]$) jos ja vain jos β kiertää kehän $\partial B(z_o, r)$ kerran vastapäivään. Vastaavasti γ kiertää pisteen z_0 ympäri kerran negatiiviseen suuntaan jos ja vain jos β kiertää kehän $\partial B(z_o, r)$ kerran myötäpäivään.

Huomataan, että γ kiertää pisteen z_0 kerran ympäri osavälillä $[c, d]$, jos $\beta(c) = \beta(d) = \beta(a)$, $\beta([c, d]) = \partial B(z_0, r)$ ja $\beta(t) \neq \beta(a)$ kaikilla t, joille $c < t < d$.

Myöhemmin (kurssilla Kompleksianalyysi 2) todistetaan, että tästä johtuen tien γ kierrosluku pisteen z_0 ympäri on "selvästi" tien β kierrosluku pisteen z_0 ympäri, mikä on helppo katsoa kuvasta.

5.4. Lemma. *Olkoon γ suljettu tie kompleksitasossa $\mathbf{C}$ ja D joukon $G := \mathbf{C} \setminus |\gamma|$ eräs komponentti. Tällöin*

$$n(\gamma, a) = n(\gamma, b) \qquad \textit{kaikilla } a, b \in D\,.$$

Jos D on joukon G rajoittamaton komponentti, on $n(\gamma, z) = 0$ kaikilla $z \in D$.

TODISTUS: Määritellään $f : G \to \mathbf{C}$, $f(z) = n(\gamma, z)$. Osoitetaan, että f on jatkuva, jolloin $f(D)$ on yhtenäinen joukon $\mathbf{Z}$ osajoukko — siis välttämättä yksi piste $\{k\}$ eli $n(\gamma, a) = k$ kaikilla $a \in D$.

Olkoon $z_0 \in G$ ja $r = \operatorname{dist}(z_0, |\gamma|) > 0$. Jos $|z - z_0| < \delta < \frac{1}{2}r$, niin

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_\gamma \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right) d\zeta\right| \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_\gamma \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta\right| \\ &\leq \frac{|z - z_0|}{2\pi}\int\limits_\gamma \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|} d\zeta. \end{aligned}$$

Kun $|z - z_0| < \frac{1}{2}r$ ja $\zeta \in |\gamma|$, niin $|\zeta - z_0| \geq r$ ja

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| > r - \frac{1}{2}r = \frac{r}{2}\,.$$

Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja valitaan $\delta < \frac{r}{2}$ siten, että

$$\delta < \frac{\varepsilon\pi r^2}{2l(\gamma)},$$

jolloin

$$|f(z) - f(z_0)| \leq \frac{|z - z_0|}{2\pi}\int\limits_\gamma \underbrace{\frac{|d\zeta|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|}}_{>\frac{r^2}{2}} \leq \frac{2\delta}{r^2\pi} l(\gamma) < \varepsilon.$$

Siten f on jatkuva ja siis f on vakio joukossa D.

Jos D on rajoittamaton, valitaan $R > 0$ siten, että $|\gamma| \subset B = B(0, R)$. Jos $z_0 \in D$ ja $|z_0| > R$, on $\frac{1}{z - z_0}$ analyyttinen B:ssä, joten Cauchyn lauseesta 4.6 seuraa, että

$$n(\gamma, z_0) = \int\limits_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 0\,.$$

Siten todistuksen alkuosasta seuraa, että

$$n(\gamma, w) = n(\gamma, z_0) = 0 \quad \text{kaikilla } w \in D\,.$$

□

5.2. Lokaali Cauchyn integraalikaava

5.5. Lause (Cauchyn integraalikaava — lokaali muoto)**.** *Olkoon B avoin kiekko, $f : B \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja γ suljettu tie kiekossa B. Tällöin*

$$n(\gamma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

kaikilla $z \in B \setminus |\gamma|$.

Todistus: Kiinnitetään $z \in B \setminus |\gamma|$ ja määritellään $g : B \to \mathbf{C}$,

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{kun } \zeta \neq z \\ f'(z)\,, & \text{kun } \zeta = z. \end{cases}$$

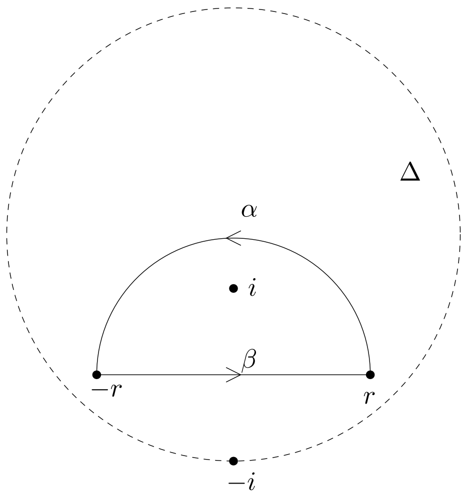
Tällöin g on jatkuva kiekossa B ja analyyttinen joukossa $B \setminus \{z\}$, joten Cauchyn lausetta (katso Huom. 4.7) voidaan soveltaa funktioon g. Niinpä

$$\begin{aligned} 0 = \int_\gamma g(\zeta) d\zeta &= \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i\, n(\gamma, z) f(z). \end{aligned}$$

□

Esimerkki. Laske integraali (suppenee!)

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2+1}\,dt\,.$$



Koska integrandi on parillinen funktio ja koska vastaava funktio, jossa $\cos t$ on korvattu funktiolla $\sin t$, on pariton, saadaan kun $r > 0$,

$$(*)\qquad \int_0^r \frac{\cos t\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-r}^r \frac{\cos t\,dt}{t^2+1} + \frac{i}{2}\int_{-r}^r \frac{\sin t\,dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-r}^r \frac{e^{it}\,dt}{t^2+1}.$$

Tämä johtaa ajatukset analyyttiseen funktioon

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,.$$

Voidaan myös ajatella, että

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-i}, \qquad \text{missä} \qquad f(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}\,.$$

Tehtävän ratkaisemisen salaisuus piilee integroinnissa yli polun $\gamma = \beta * \alpha$, missä $\beta(t) = t$, kun $-r \le t \le r$ ja $\alpha(t) = re^{it}$, kun $0 \le t \le \pi$. Oletetaan, että $r > 1$.

Käyttämällä yhtälöä $(*)$ lasketaan

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\cos t\; dt}{t^2+1} &= \frac{1}{2}\int_\beta \frac{e^{iz}\; dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^{iz}\; dz}{z^2+1} - \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{e^{iz}\; dz}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-i} - \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{e^{iz}\; dz}{z^2+1} = \pi i\; n(\gamma, i)f(i) - \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{e^{iz}\; dz}{z^2+1} \\
&= \frac{\pi}{2e} - \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{e^{iz}\; dz}{z^2+1}.
\end{aligned}$$

Tässä laskelmassa sovellettiin Cauchyn lauseen lokaalia versiota funktioon f ja kiekkoon Δ, johon $|\gamma|$ sisältyy, mutta johon piste $-i$ ei sisälly. Edelleen,

$$\begin{aligned}
\left|\int_\alpha \frac{e^{iz}\; dz}{z^2+1}\right| &\leq \int_\alpha \frac{|e^{iz}||dz|}{|z^2+1|} \leq \int_\alpha \frac{e^{-Im(z)}|dz|}{|z|^2-1} \\
&= \frac{r}{r^2-1}\int_0^\pi e^{-r\sin t}dt = \frac{2r}{r^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}dt \\
&\leq \frac{2r}{r^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2rt}{\pi}} dt = \frac{\pi(1-e^{-r})}{r^2-1} \to 0\,,
\end{aligned}$$

kun $r \to \infty$. Niinpä

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2+1}\; dt = \lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{\cos t}{t^2+1}\; dt = \frac{\pi}{2e}.$$

5.3. Lokaalin Cauchyn integraalikaavan seurauksia

Tarvitaan lemma:

5.6. Lemma. *Olkoon γ tie, $h : |\gamma| \to \mathbf{C}$ jatkuva ja $k = 1, 2, \ldots$. Määritellään $H : \mathbf{C} \setminus |\gamma| \to \mathbf{C}$,*

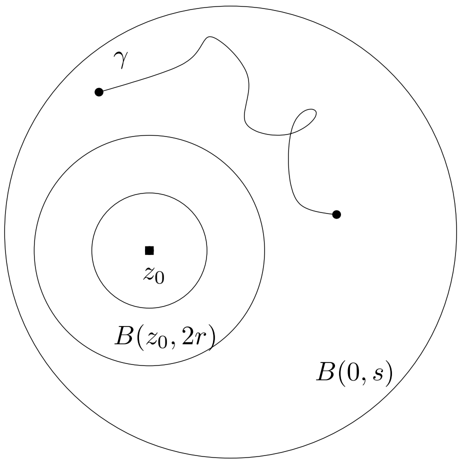
$$H(z) = \int_\gamma \frac{h(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^k}.$$

Tällöin H on analyyttinen joukossa $G = \mathbf{C} \setminus |\gamma|$ ja

$$H'(z) = k \int_\gamma \frac{h(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Todistus: Todistetaan vain tapaus $k = 1$. (Kun $k = 2$, todistus on samanlainen, mutta monimutkaisempi, HT.)
Väite on siis, että

$$\frac{H(z) - H(z_0)}{z - z_0} \to \int_\gamma \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta.$$



Olkoon $B(z_0, 2r) \subset G$.Jos $z \in G$ ja $z \neq z_0$ niin

$$\frac{H(z) - H(z_0)}{z - z_0} = \frac{1}{z - z_0} \int_\gamma h(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta = \int_\gamma \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta,$$

mistä saadaan, että

$$\begin{aligned} &\frac{H(z) - H(z_0)}{z - z_0} - \int_\gamma \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \\ &= \int_\gamma h(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} \right) d\zeta \\ &= (z - z_0) \int_\gamma \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Nyt jos $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$ ja $\zeta \in |\gamma|$, niin $|\zeta - z_0| \geq 2r \geq r$ ja

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geq r\,.$$

Tällöin

$$\left| \frac{H(z) - H(z_0)}{z - z_0} - \int\limits_\gamma \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta \right| \leq |z - z_0| \underbrace{\int\limits_\gamma \frac{|h(\zeta)||d\zeta|}{r^3}}_{=\text{vakio}<\infty} \to 0,$$

kun $z \to z_0$. □

5.7. Lause. *Olkoon f analyyttinen joukossa G. Silloin f' on myös analyyttinen joukossa G. Erityisesti f' on jatkuva joukossa G.*

Todistus: Olkoon $B = B(z_0, r) \subset G$ kiekko. Olkoon $0 < s < r$ ja merkitään $D = B(z_0, s)$. Olkoon $\gamma(t) = z_0 + se^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, jolloin lokaalia Cauchyn integraalikaavaa voidaan soveltaa kiekossa B: koska $n(\gamma, z) = 1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

kaikilla $z \in D$. Siten lemmasta 5.6 arvolla $k = 1$ seuraa, että

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

kaikilla $z \in D$. Kun sovelletaan uudelleen lemmaa 5.6, tällä kertaa arvolla $k = 2$, saadaan että f' on analyyttinen. □

Induktiolla saadaan:

5.8. Seuraus. *Olkoon f analyyttinen joukossa G. Tällöin kaikkien kertalukujen derivatat $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ ovat olemassa ja analyyttisiä joukossa G. Erityisesti ne ovat jatkuvia joukossa G.*

Todistus: Harjoitustehtävä. □

Seuraava lemma on lemmalle 4.1 käänteinen väite:

5.9. Lause (Morera[6]). *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ jatkuva, $G \subset \mathbf{C}$ avoin. Jos*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

kaikilla koordinaatiston suuntaisilla suljetuilla suorakaiteilla $R \subset G$, niin f on analyyttinen joukossa G.

Todistus: Riittää osoittaa, että f on analyyttinen mielivaltaisessa kiekossa $B \subset G$. Siellä f toteuttaa lemman 4.4 oletukset kiekossa B, joten funktiolla f on primitiivi kiekossa B. Siten f on analyyttisen funktion derivaattana lauseen 5.7 mukaan analyyttinen kiekossa B. □

Yhdistämällä Moreran lause lemman 4.2 kanssa saadaan:

5.10. Lause. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ jatkuva ja f analyyttinen joukossa $G \setminus \{z_0\}$. Tällöin f on analyyttinen joukossa G.* □

Seuraavaksi saadaan lokaali Cauchyn integraalikaava derivaatoille:

5.11. Lause. *Olkoon f analyyttinen kiekossa B, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ja γ suljettu tie kiekossa B. Tällöin*

$$n(\gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

kaikilla $z \in B \setminus |\gamma|$.

Todistus: Induktiolla. Kun $k = 0$, $f^{(0)} = f$ ja tapaus on Cauchyn integraalikaavan 5.5 mukainen. OK.

Induktio-oletus: Kaava pätee arvolla k.

Väite: Kaava pätee arvolla $k + 1$.

Todistus: Koska f' on analyyttinen, voidaan induktio-oletusta soveltaa siihen. Saadaan

$$n(\gamma, z) f^{(k+1)}(z) = n(\gamma, z)(f')^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

[6] Morera, 1856–1909

Määritellään

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}},$$

kun $\zeta \in B$ ja $\zeta \neq z$. Tällöin g on analyyttinen joukossa $B \setminus \{z\}$ ja

$$g'(\zeta) = \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} - \frac{(k+1)f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}}.$$

Koska g' on jatkuva joukossa $B \setminus \{z\}$ ja g on sen primitiivi, niin

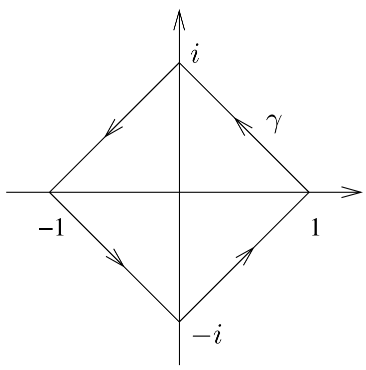
$$\int_\gamma g' \, d\zeta = 0,$$

joten

$$\begin{aligned} n(\gamma, z) f^{k+1}(z) &= \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \underbrace{\int_\gamma g'(\zeta) d\zeta}_{=0} + \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta \\ &= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta, \end{aligned}$$

mistä väite. □

Esimerkki.



Olkoon $\gamma = [1, i] * [i, -1] * [-1, -i] * [-i, 1]$ kuten kuvassa. Laske

$$I = \int_\gamma \frac{e^z + z^2 \sin z}{z^3} dz\,.$$

Olkoon

$$f(z) = e^z + z^2 \sin z\,.$$

Nyt

$$f'(z) = e^z + 2z \sin z + z^2 \cos z$$

ja

$$f''(z) = e^z + 2 \sin z + 4z \cos z - z^2 \sin z\,.$$

Sovelletaan lauseen 5.11 tapausta $k = 2$, jolloin saadaan

$$I = \frac{2\pi i}{2!} \underbrace{n(\gamma, 0)}_{=1} \underbrace{f''(0)}_{=1} = \pi i.$$

Lauseen 5.11 avulla saadaan analyttisen funktion itsensä arviosta arvio derivaatoille:

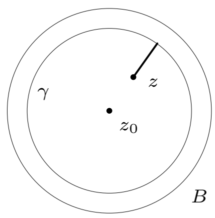
5.12. Lause (Cauchyn estimaatti)**.** *Olkoon f analyyttinen kiekossa $B = B(z_0, r)$. Jos $|f(z)| \leq M$ kaikilla $z \in B$, niin*

$$|f^{(k)}(z)| \leq \frac{k! M r}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}$$

kaikilla $z \in B$, $k = 1, 2, \ldots$. Erityisesti

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k! M}{r^k}.$$

Todistus: Olkoon $z \in B$, $|z - z_0| < s < r$ ja $\gamma(t) = z_0 + s e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.



Jos $\zeta \in |\gamma|$, niin

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| = s - |z - z_0|,$$

joten käyttämällä lausetta 5.11 saadaan

$$|f^{(k)}(z)| = \frac{k!}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta\right|$$

$$\leq \frac{k!}{2\pi}\int\limits_{\gamma} \frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta - z|^{k+1}} \overset{l(\gamma)=2\pi s}{\leq} \frac{k! M s 2\pi}{2\pi(s - |z - z_0|)^{k+1}}.$$

Kun annetaan $s \nearrow r$, väite seuraa. □

5.13. Lause (Liouville[7]). *Rajoitettu kokonainen funktio on vakio.*

TODISTUS: Olkoon f kokonainen ja $|f| \leq M$ jollakin $M \in \mathbf{R}$. Olkoon $z \in \mathbf{C}$ ja $r > 0$. Sovelletaan Cauchyn estimaattia 5.12 kiekkoon $B(z, r)$. Saadaan

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \xrightarrow{r \to \infty} 0.$$

Siten $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$. Niinpä f on vakio. □

5.14. Huomautus. Liouvillen lauseesta seuraa siis, että ei-vakion kokonaisen funktion f kuvajoukko $f(\mathbf{C})$ on rajoittamaton.

Pätee paljon kovempi (ja syvällisempi) tulos, ns. *Picardin*[8] *pieni lause* : "Kokonaiselle ei-vakiolle kuvaukselle $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, joukko $\mathbf{C} \setminus f(\mathbf{C})$ sisältää enintään yhden pisteen."

Mm. seuraava yllättävä Liouvillen lauseen sovellutus osoittaa Liouvillen lauseen tärkeyden:

5.15. Lause (Algebran peruslause). *Olkoon p polynomi,*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \quad , \quad a_n \neq 0, n \geq 1.$$

Tällöin polynomilla p on juuri kompleksilukujen joukossa $\mathbf{C}$, ts. on olemassa $z \in \mathbf{C}$, jolle $p(z) = 0$.

[7]Liouville, 1809–1882
[8]Picard, 1856–1941

TODISTUS: *Antiteesi:* $p(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$.

Tällöin

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

on analyyttinen joukossa $\mathbf{C}$. Nyt

$$|p(z)| = |z|^n \left| \frac{a_0}{z^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right| \geq |z|^n \Big(\underbrace{|a_n|}_{\neq 0} - \underbrace{\frac{|a_0|}{|z|^n} - \ldots - \frac{|a_{n-1}|}{|z|}}_{\to 0} \Big) \to \infty,$$

kun $|z| \to \infty$. Siten $|f(z)| \to 0$, kun $|z| \to \infty$, joten on olemassa $r > 0$, jolle

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{kaikilla } z, \text{ joilla } |z| \geq r\,.$$

Toisaalta f on jatkuva ja siis rajoitettu, $|f(z)| \leq M$, suljetussa kiekossa $\overline{B}(0, r)$. Siispä

$$|f(z)| \leq \max(M, 1) \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}\,.$$

Nyt Liouvillen lauseesta seuraa, että f on vakio. Niinpä p on vakio, mikä on ristiriita.

□

5.4. Maksimiperiaate

5.16. Lause (Maksimiperiaate/Maksimimodulilause)**.** *Olkoon $D \subset \mathbf{C}$ alue ja $f : D \to \mathbf{C}$ analyyttinen. Jos on olemassa sellainen $z_0 \in D$, että $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in D$, niin f on vakio alueessa D.*

TODISTUS: Merkitään $w(z) = |f(z)|$. Lauseen 2.14 nojalla riittää osoittaa, että w on vakio. Olkoon

$$M = w(z_0) = |f(z_0)| = \max_{z \in D} w(z)\,.$$

Olkoon

$$U = \{z \in D : w(z) < M\} \quad \text{ja} \quad V = \{z \in D : w(z) = M\}\,.$$

Tällöin $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = D$ ja $z_0 \in V \neq \emptyset$. Koska w on jatkuva, on U avoin. Siten riittää osoittaa, että V on myös avoin, jolloin alueen D yhtenäisyydestä seuraa, että $U = \emptyset$ eli $w(z) = M$ kaikilla $z \in D$.

Olkoon $z_1 \in V$ ja valitaan $r > 0$, jolle $B = B(z_1, r) \subset D$. Jos $0 < s < r$, niin voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa kiekossa B tiehen $\gamma(t) = z_1 + se^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Saadaan

$$M = w(z_1) = |f(z_1)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{|f(\gamma(t))|\overbrace{|\gamma'(t)|}^{=s}}{\underbrace{|\gamma(t) - z_1|}_{=s}} dt = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} w(z_1 + se^{it}) dt.$$

Niinpä

$$0 \geq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \underbrace{M - w(z_1 + se^{it})}_{\geq 0} dt \geq 0.$$

Koska integroitava funktio $M - w$ on jatkuva ja ei-negatiivinen,

$$w(z_1 + se^{it}) = M \quad \text{kaikilla } t \in [0, 2\pi]\,.$$

Tästä seuraa, että

$$w(z_1 + se^{it}) = M \quad \text{kaikilla } s \in [0, r] \text{ ja } t \in [0, 2\pi]\,,$$

eli $w(z) = M$ kaikilla $z \in B(z_1, r)$, joten $B(z_1, r) \subset V$. □

5.17. Seuraus. *Olkoon $D \subset \mathbf{C}$ rajoitettu alue ja $f : \overline{D} \to \mathbf{C}$ jatkuva ja f analyyttinen alueessa D. Tällöin on olemassa $w_0 \in \partial D$, jolle $|f(z)| \leq |f(w_0)|$ kaikilla $z \in \overline{D}$.*

Todistus: Koska $|f|$ on jatkuva, on sellainen $w_0 \in \overline{D}$, jolle

$$|f(w_0)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|\,.$$

Jos $w_0 \notin D$, niin $w_0 \in \partial D$ ja asia on selvä. Jos taas $w_0 \in D$, niin lauseen 5.16 nojalla f on vakio joukossa $\overline{D}$. Tällöin kaikilla $w_1 \in \partial D$ pätee

$$|f(w_1)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)|\,.$$

□

Maksimiperiaatteen avullaa saadaan Schwarzin lemmana tunnettu tulos, joka on erittäin hyödyllinen:

5.18. Lause (Schwarzin lemma)**.** *Jos* $f : B(0,1) \to \mathbf{C}$ *on analyttinen,* $f(0) = 0$, *ja* $|f(z)| \leq 1$ *kaikilla* z, *niin*

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \textit{ja} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \textit{kaikilla } z \in B(0,1).$$

Lisäksi, jos on $z_0 \in B(0,1)$, $z_0 \neq 0$, *jolle* $|f(z_0)| = |z_0|$, *niin on olemassa* $\lambda \in \mathbf{C}$, *jolle* $|\lambda| = 1$ *ja*

$$f(z) = \lambda z \quad \textit{kaikilla } z \in B(0,1).$$

Todistus: Seuraa helpohkosti (HT) soveltamalla maksimiperiaatetta funktioon

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}\,, & \text{kun } z \neq 0, \\ f'(0)\,, & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

$\square$