Kompleksianalyysi

Tero Kilpeläinen

Luentomuistiinpanoja keväälle 2005
26. huhtikuuta 2006

Alkusanat

Seuraavilla sivuilla on luentomuistiinpanoja kompleksianalyysin laudatur-kurssille. Toivoakseni kirjoitus helpottaa omien luentomuistiinpanojen tekemistä ja oppimista.

Kurssin alussa käsitellään lyhyesti kompleksitasoa ja sen perusfunktioita. Kurssin pääasialliseen kohteeseen, analyyttiseen funktioon tutustutaan luvussa 2. Kurssia seuratessa on ehkä hyödyllistä tarkkailla analogioita toisaalta analyyttisen funktion ja yhden muuttujan reaalifunktion teorioiden sekä toisaalta kompleksisen derivoinnin ja tason reaalisen differentiaalilaskennan välillä.

Kiitos Anna Tuholalle, joka kirjoitti muistiinpanojen ensimmäisen LaTeX-version. Sittemmin olen lisännyt muunmuassa kirjoitusvihreitä tekstiin.

Sisältö

1. Kompleksiluvut ja kompleksitaso

1.1. Yleistä kompleksiluvuista

1.1. Määritelmä. *Kompleksilukujen kunta* $\mathbf{C}$ koostuu kaikista pareista $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, joille määritellään yhteen- ja kertolasku seuraavasti:
Olkoon $z = (x, y) \in \mathbf{C}$ ja $w = (u, v) \in \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} z + w &= (x + u, y + v) \\ z\,w &= (xu - yv, xv + yu)\,. \end{aligned}$$

1.2. Huomautus. Kunnan $\mathbf{C}$ *nolla-alkio* on

$$0 = (0, 0)$$

ja *ykkösalkio* on

$$1 = (1, 0),$$

ts.

$$\begin{aligned} z + 0 &= 0 + z = z \\ z \cdot 0 &= 0 \cdot z = 0\,. \end{aligned}$$

Jos $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$, niin pisteen z *käänteisalkio* z^{-1} on sellainen kunnan $\mathbf{C}$ alkio, jolle

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1.$$

1.3. Huomautus. $(zw)^{-1} = z^{-1}w^{-1}$. (Harjoitustehtävä)

1.4. Huomautus. $z = (x, y)$, $w = (u, v)$. Tällöin $z = w \Leftrightarrow x = u$ ja $y = v$.

1.5. Määritelmä. Olkoon $z = (x, y) \in \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} x &=: Re(z) = \text{ pisteen } z \textit{ reaaliosa} \\ y &=: Im(z) = \text{ pisteen } z \textit{ imaginaariosa.} \end{aligned}$$

1.6. Huomautus. Samastamalla reaaliluku[1] a luvuksi $(a, 0)$ voidaan tulkita, että $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

1.7. Määritelmä. $i := (0, 1) \in \mathbf{C}$ on *imaginääriyksikkö.*

1.8. Huomautus.

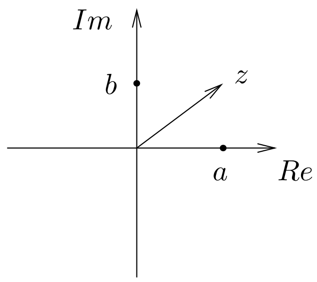
$$\begin{aligned} &i^2 := i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (0-1,\, 0+0) = (-1, 0) = -1. \\ &i^3 := i \cdot i \cdot i = i \cdot i^2 = -1(0,1) = (0,-1) = -i. \\ &i^4 := i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1 = (1,0). \\ &i^5 := i \cdot i^4 = i \text{ jne.} \end{aligned}$$

1.9. Lause. *Jos $x \in \mathbf{C}$, niin on olemassa yksikäsitteiset $a, b \in \mathbf{R}$, joille*

$$z = a + ib\,.$$

Erityisesti,

$$a = Re(z) \quad \text{ja} \quad b = Im(z)\,.$$



Todistus: $z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = Re(z) + iIm(z)$.

Jos $(a_1, b_1) = a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 = (a_2, b_2)$, niin $a_1 = a_2$ ja $b_1 = b_2$. $\square$

[1] **Varoitus:** Kompleksilukujen välillä ei ole järjestysrelaatiota. Jos jatkossa kirjoitetaan esimerkiksi $a \leq b$, niin merkintä pitää sisällään sopimuksen, että $a, b \in \mathbf{R}$.

Esimerkki.

$$
\begin{aligned}
(1+4i)+(-2-i) &= -1+3i\,.\\
(2-6i)(1+i) &= 2+6+i(-6+2) = 8-4i\,.\\
\frac{2+5i}{3-4i} &= (2+5i)(3-4i)^{-1} = ?
\end{aligned}
$$

Nyt

$$
\begin{aligned}
(3-4i)^{-1} &= (3+4i)(3+4i)^{-1}(3-4i)^{-1}\\
&= (3+4i)\Bigg(\underbrace{(3+4i)(3-4i)}_{=9+16}\Bigg)^{-1}\\
&= \frac{3}{25}+\frac{4}{25}i
\end{aligned}
$$

Siten

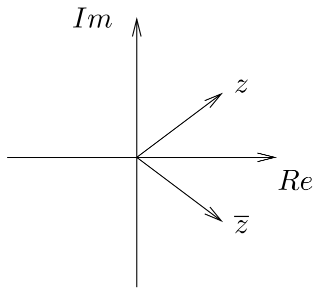
$$
\frac{2+5i}{3-4i} = (2+5i)(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i) = -\frac{14}{25}+\frac{23}{25}i\,.
$$

1.10. Määritelmä. Luvun $z = x+iy \in \mathbf{C}$ *kompleksikonjugaatti* (tai *liittoluku*) on kompleksiluku

$$\bar{z} := x - iy = (x, -y)$$

ts.

$$Re(z) = Re(\bar{z}) \quad \text{ja} \quad Im(z) = -Im(\bar{z})\,.$$



Luvut z ja $\bar{z}$ ovat toistensa peilikuvia reaaliakselin suhteen.

1.11. Määritelmä. Luvun $z = x+iy \in \mathbf{C}$ *moduli* tai *itseisarvo* (*pituus, normi*) on

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

1.12. Lemma. *Olkoot $z, w \in \mathbf{C}$. Tällöin*

i) $\bar{\bar{z}} = z$.

ii) $\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \quad , \quad \overline{z-w} = \bar{z} - \bar{w}$.

iii) $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$.

iv) $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1} \quad ,$ *jos* $z \neq 0$.

v) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad , \quad Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

vi) $|zw| = |z||w|$.

vii) $|z| = |\bar{z}| \quad , \quad |z|^2 = z\bar{z}$.

viii) $|Re(z)| \leq |z| \quad , \quad |Im(z)| \leq |z|$.

ix) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad ,$ *jos* $z \neq 0$.

x) $|z+w| \leq |z| + |w|$ *ja* $\big||z| - |w|\big| \leq |z+w|$.

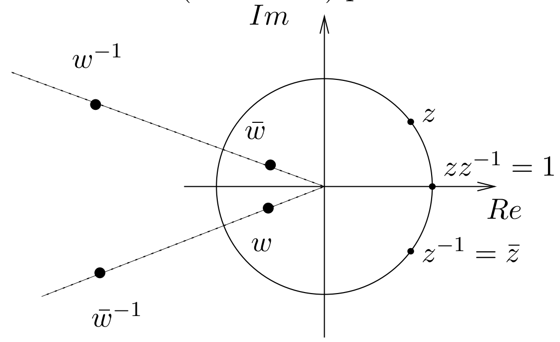
Todistus: Todistetaan kolmioepäyhtälö: $|z+w| \leq |z| + |w|$. Muut HT.

Nyt

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\
&= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\
&= |z|^2 + 2\frac{z\bar{w} + \overline{(z\bar{w})}}{2} + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2Re(z\bar{w}) + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|Re(z\bar{w})| + |w|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

□

1.13. Huomautus. Lemman 1.12 kohdan ix) mukaan kompleksiluvun $w \in \mathbf{C}\setminus\{0\}$ käänteisluku w^{-1} on w:n kompleksikonjugaatin $\bar{w}$ suuntaisella (reaalisella) puolisuoralla ja pituudeltaan w:n pituuden käänteisluku:



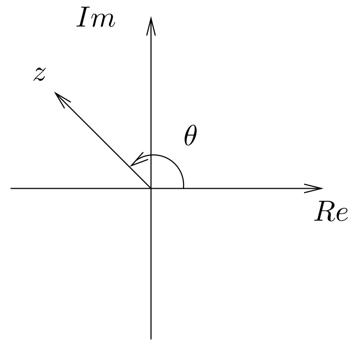
$$|w^{-1}| = \frac{|\bar{w}|}{|w|^2} = \frac{|w|}{|w|^2} = \frac{1}{|w|}.$$

Erityisesti, jos $|z| = 1$, niin

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \bar{z}.$$

1.14. Lemma (napakoordinaatit). *Olkoon $z \in \mathbf{C}$. Tällöin on olemassa $\theta \in \mathbf{R}$, jolle*

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$



TODISTUS: Voidaan olettaa, että $z = x + iy \neq 0$. Olkoon θ yhtälöparin

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

ratkaisu. Tällöin

$$|z|(\cos\theta + i\sin\theta) = x + iy = z.$$

$\square$

1.15. Huomautus. Lemman 1.14 antama esitys on pisteen $(x, y) \in \mathbf{R}$ *napakoordinaattiesitys*, ts.

$$\begin{cases} x = |z| \cos \theta \\ y = |z| \sin \theta \,. \end{cases}$$

1.16. Määritelmä. Kompleksiluvun $z \neq 0$ *argumentti* $\arg(z)$ on reaaliluku θ, jolle

$$\begin{cases} x = |z| \cos \theta \\ y = |z| \sin \theta \end{cases} \quad \text{ja}$$

ts.

$$\arg(z) = \arccos \frac{x}{|z|} = \arcsin \frac{y}{|z|} \,.$$

1.17. Huomautus. Kompleksiluvun $z \neq 0$ argumentti $\arg(z)$ on luvun 2π monikertoja vaille yksikäsitteinen. Yleensä valitaan ns. *argumentin päähaara* $\operatorname{Arg}(z)$, joka on se luvuista $\arg(z)$, jolle

$$\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi].$$

1.18. Huomautus. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Olkoon $\theta_j \in \arg(z_j)$, $j = 1, 2$, ts.

$$z_j = |z_j|(\cos \theta_j + i \sin \theta_j).$$

Tällöin

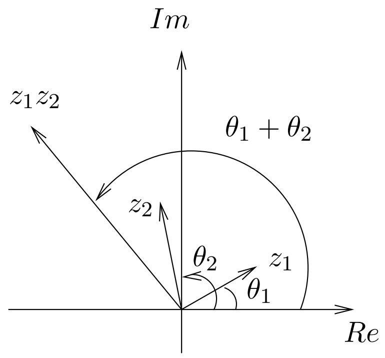
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2| \left(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)\right) \\ &= |z_1||z_2| \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)\right), \end{aligned}$$

mikä seuraa helposti trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoista (HT). Siis kompleksilukujen kertolaskussa niiden argumentit lasketaan yhteen ja pituudet kerrotaan keskenään.

Edellisestä yhtälöstä seuraa, että voidaan tehdä seuraava tulkinta:

$$\arg(z_1 z_2) \,''{=}''\, \arg z_1 + \arg z_2 \,,$$

missä on tosin muistettava, ettei arg ole yksikäsitteisesti määrätty.



Kertolaskun geometrinen tulkinta

Induktiolla saadaan *de Moivren kaavat*:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad , \quad \theta \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{Z}\,.$$

1.19. Lause. *Olkoon $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$ ja $n = 1, 2, 3, \ldots$. Tällöin yhtälöllä*

$$w^n = z$$

on täsmälleen n eri ratkaisua $w \in \mathbf{C}$. Lisäksi, $w^n = z$, jos ja vain, jos

$$w = w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n})\right)$$

jollakin $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Todistus: Olkoon $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Jos $w = |w|(\cos\phi + i\sin\phi)$ sellainen, että $w^n = z$, saadaan de Moivren kaavasta, että

$$|w|^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = (|w|(\cos\phi + i\sin\phi))^n = |z|(\cos\theta + i\sin\theta),$$

josta edelleen

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ \cos(n\phi) = \cos\theta \\ \sin(n\phi) = \sin\theta \end{cases}.$$

Osoita harjoitustehtävänä, että tästä seuraa

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ n\phi = \theta + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

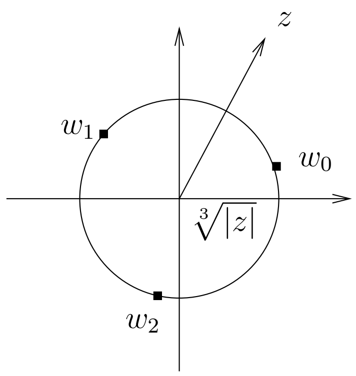
Tällöin

$$\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$

Kun $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, niin saadaan eri ratkaisut

$$w = w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\operatorname{Arg} z + 2k\pi}{n})\right).$$

Muut k:n arvot antavat jonkin näistä pisteistä. On myös helppo havaita, että kyseiset kompleksiluvut $w = w_k$ toteuttavat yhtälön $w^n = z$. $\square$



Luvun z n. juuret ovat $\sqrt[n]{|z|}$-säteisen origokeskisen ympyrän kehällä tasaisesti siroteltuna niin että kunkin argumentti n:llä kerrottuna antaa z:n argumentin.

1.20. Määritelmä. Olkoot $n = 1, 2, 3, \ldots$, $z \in \mathbf{C}$, $z \neq 0$. Pisteen z n. *juuren päähaara* on

$$\sqrt[n]{z} := \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n} + i\sin\frac{\operatorname{Arg}(z)}{n}\right).$$

Lisäksi $\sqrt[n]{0} := 0$.

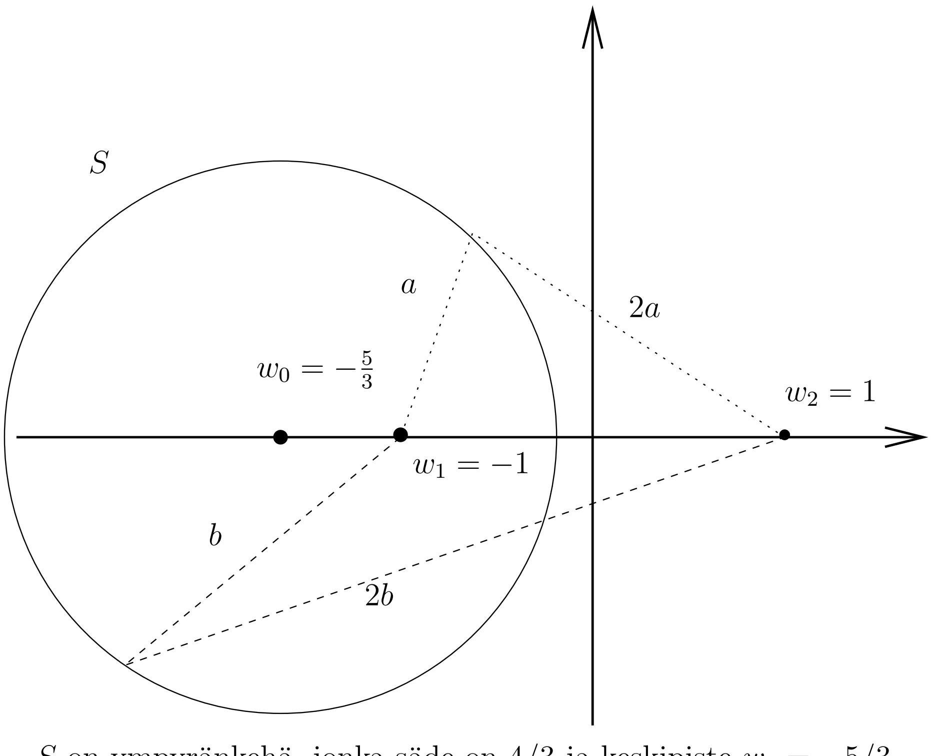
Huomaa, että $\sqrt[1]{z} = z$. Jatkossa merkitään: $\sqrt[2]{z} = \sqrt{z}$, millä tarkoitetaan neliöjuuren päähaaraa. Huomaa, että positiivisten reaalilukujen neliöjuuri (ts. neliöjuuren päähaara) on posititiivinen reaaliluku; negatiivisten reaalilukujen neliöjuuri on positiivisella imaginaariakselilla.

Esimerkki. Kuvaile geometrisesti joukkoa

$$S = \{z \in \mathbf{C} : |z-1| = 2|z+1|\}.$$

Olkoon $z = x + iy$. Nyt

$$\begin{aligned}
z \in S &\Leftrightarrow |z-1| = 2|z+1| \\
&\Leftrightarrow |z-1|^2 = 4|z+1|^2 \\
&\Leftrightarrow (z-1)(\overline{z-1}) = 4(z+1)(\overline{z+1}) \\
&\Leftrightarrow |z|^2 - (z+\bar{z}) + 1 = 4|z|^2 + 4(z+\bar{z}) + 4 \\
&\Leftrightarrow |z|^2 - 2Re(z) + 1 = 4|z|^2 + 8Re(z) + 4 \\
&\Leftrightarrow 3|z|^2 + 10Re(z) + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow 3(x^2+y^2) + 10x + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + \frac{10}{3}x + y^2 = -1 \\
&\Leftrightarrow x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{25}{9} + y^2 = \frac{16}{9} \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{5}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{9}.
\end{aligned}$$



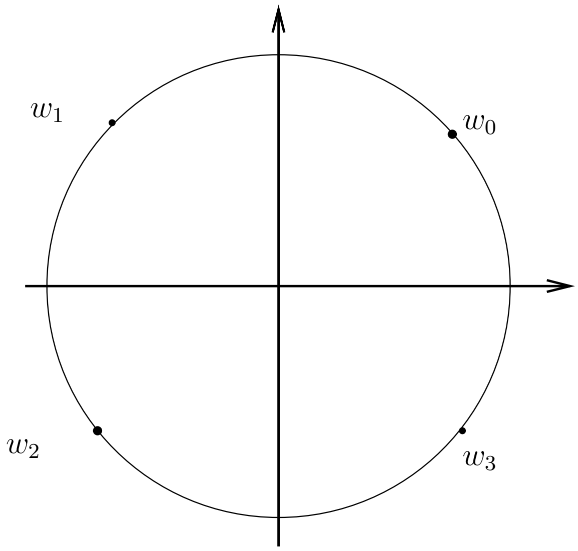
S on ympyränkehä, jonka säde on $4/3$ ja keskipiste $w_0 = -5/3$.

Esimerkki. Määrää kaikki yhtälön $z^4 + 16 = 0$ ratkaisut. Pitää siis löytää kaikki luvun -16 neljännet juuret. Huomataan, että $\sqrt[4]{16} = 2$ ja että $\mathrm{Arg}(-16) = \pi$, joten

Lauseen 1.19 mukaan juuret ovat:

$$2(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))\,, \quad 2(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$$
$$2(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)) \quad , \quad 2(\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)).$$

Kun nämä lasketaan, saadaan tulokseksi $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$ ja $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$.



$$w_k = \sqrt[4]{16}(\cos(\pi/4 + 2k\pi/4) + i\sin(\pi/4 + 2k\pi/4))$$

1.2. Eksponenttifunktio

Seuraavaksi aiomme määritellä, mitä tarkoitetaan, kun kirjoitetaan

$$e^z \quad , \quad \log z \quad \text{tai} \quad z^w \quad , \text{kun } z, w \in \mathbf{C}:$$

Muista, että (reaalisen) eksponenttifunktion Taylor-kehitelmä on

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}.$$

Lasketaan formaalisti:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \dots \\ &= \underbrace{(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots)}_{=\cos y} + i\underbrace{(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots)}_{=\sin y}. \end{aligned}$$

Soveltamalla lisäksi eksponenttifunktion laskusääntöä $e^x e^{iy} = e^{x+iy}$, saamme aiheen määritellä:

1.21. Määritelmä. Olkoon $z = x + iy \in \mathbf{C}$. Määritellään *eksponenttifunktio*

$$\exp(z) := e^z := e^x(\cos y + i \sin y).$$

1.22. Huomautus. Jos z on **reaalinen**, niin e^z yhtyy reaalisen eksponenttifunktion määrittelyyn.

Napakoordinaattiesityksen (Lemma 1.14) avulla jokainen kompleksiluku $z \in \mathbf{C}$ voidaan esittää muodossa

$$z = |z| e^{i\theta},$$

missä

$$\theta = \mathrm{Arg}(z) \qquad (\text{kun } z \neq 0).$$

Esimerkki.

$$\begin{aligned} &e^0 = 1 \quad , \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ &e^{i+1} = e(\cos 1 + i \sin 1)\,. \end{aligned}$$

1.23. Huomautus. Olkoon $z = x + iy$. Nyt

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^x||\cos y + i \sin y| \\ &= e^x \underbrace{\sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y}}_{=1} = e^x \\ &= e^{Re(z)} \neq 0, \end{aligned}$$

joten $e^z \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$. Lisäksi,

$$\arg(e^z) = \arccos(\cos y) = y = \arcsin(\sin y) = Im(z)\,.$$

Tämän jälkeen on helppo (HT) osoittaa, että eksponenttifunktion kuvajoukko on $\mathbf{C} \setminus \{0\}$,

$$\exp(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \setminus \{0\}\,.$$

1.24. Lemma.

i) $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ *kaikilla* $z \in \mathbf{C}$.

ii) $e^{z+w} = e^z e^w$ *kaikilla* $z \in \mathbf{C}$.

TODISTUS: i) seuraa kohdasta ii).

ii) Olkoot $z = x + iy$, $w = u + iv$.

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^x e^u(\cos y + i \sin y)(\cos v + i \sin v) \\ &= e^{x+u}(\cos y \cos v - \sin y \sin v + i(\sin y \cos v + \cos y \sin v)) \\ &= e^{x+u}(\cos(y+v) + i \sin(y+v)) \\ &= e^{z+w}\,. \end{aligned}$$

□

Reaalinen eksponenttifunktio on injektio, ts.

$$\text{kun } t, s \in \mathbf{R} \text{ niin } \quad e^t = e^s \Leftrightarrow t = s\,;$$

näin ei kuitenkaan ole kompleksisen eksponenttifunktion laita:

1.25. Esimerkki. Ratkaise yhtälö $e^z = 1$.

Merkitään $z = x + iy$. Silloin

$$1 = |e^z| = e^{Re(z)} \Leftrightarrow Re(z) = 0.$$

Siis

$$e^z = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ja } \cos y + i \sin y = 1$$

eli

$$\begin{cases} x = 0 \\ \cos y = 1 \\ \sin y = 0, \end{cases}$$

mistä saadaan

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2k\pi \quad , \quad \text{kun } k \in \mathbf{Z} \\ y = n\pi \quad , \quad \text{kun } n \in \mathbf{Z}\,. \end{cases}$$

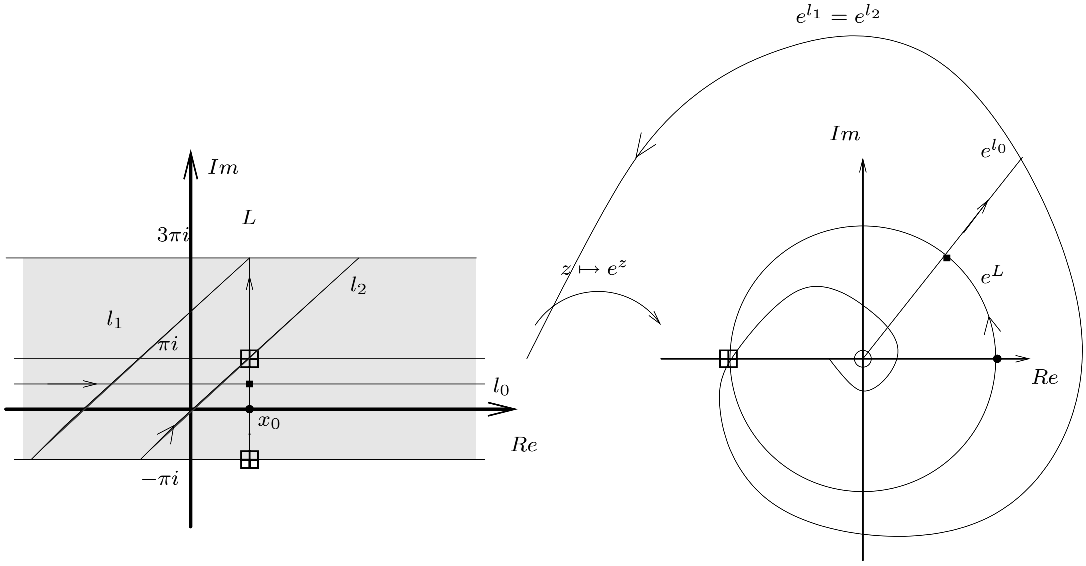
eli $x = 0$ ja $y = 2k\pi$ jollakin $k \in \mathbf{Z}$. Siis $z = 2k\pi i\,,\ k \in \mathbf{Z}$.

1.26. Lause. *Eksponenttifunktio on jaksollinen, jaksona $2\pi i$, ts.*

$$e^z = e^w \quad \text{jos ja vain jos} \quad z = w + k2\pi i \quad \text{jollakin } k \in \mathbf{Z}.$$

TODISTUS: Lemman 1.24 nojalla $e^z = e^w$ jos ja vain jos $e^{z-w} = 1$. Esimerkin 1.25 perusteella tämä toteutuu, kun ja vain, kun $z - w = 2\pi ik$ jollakin $k \in \mathbf{Z}$. □

1.27. Huomautus. Lause 1.26 sanoo, että eksponenttifunktio kuvaa jokaisen 2π:n korkuisen reaaliakselin mittaisen nauhan samalla tavalla



Kuvassa spiraalin mittasuhteet ovat väärin.

Tarkastellaan imaginaariakselin suuntaista suoraa

$$L = \{z \in \mathbf{C} : Re(z) = x_0\}.$$

Jos $z \in L$, niin

$$|e^z| = e^{x_0} \quad \text{ja}$$
$$\arg(e^z) = Im(z),$$

ts. L kuvautuu origokeskiselle e^{x_0}-säteiselle ympyrälle siten, että kuva kiertää kehän ympäri kerran aina, kun lähtöpiste liikkuu 2π:n pituisen pätkän suoralla L. Huomaa kierron suunta. Siten

$$\exp(\{z \in \mathbf{C} : Re(z) \leq x_0\}) = \overline{B}(0, e^{x_0}) \setminus \{0\}.$$

Muut suorat tasossa saadaan yhtälöistä

$$l = \{(x, y) : y = ax + b, x \in \mathbf{R}\} \quad \text{joillakin } a, b \in \mathbf{R}.$$

Siten koska

$$z \in l \Leftrightarrow z = x + i(ax + b) \quad \text{jollain } x \in \mathbf{R},$$

niin kuvapisteelle w saadaan

$$w = e^z = e^x e^{i(ax+b)}.$$

Erityisesti jos $a = 0$, on $l = l_0$ reaaliakselin suuntainen, jolloin kuvapiste w toteuttaa ehdon

$$w = e^z = e^x e^{ib},$$

ts. suoran l_0 kuvana on origosta lähtevä puolisuora (johon 0 ei sisälly), jonka kulma positiiviseen reaaliakseliin on b, ts. kuvajoukko on

$$\{re^{ib} : r > 0\}.$$

Jos $a > 0$, niin sekä $|w|$ että $\arg(w)$ kuvautuvat jatkuvasti monotonisesti — kuvaksi tulee *logaritminen spiraali* (napakoordinaateissa)

$$r = e^{\frac{\theta - b}{a}}.$$

(Jos $a < 0$, saadaan taas logaritminen spiraali mutta toiseen suuntaan.)

1.3. Kompleksinen logaritmi

Reaalinen eksponenttifunktio on injektiivinen, joten sen voi "kääntää", ts. on olemassa $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ siten, että $e^{f(t)} = t$ kun $t \in (0, \infty)$ ja $f(e^t) = t$ kaikilla $t \in \mathbf{R}$. Tätä funktiota sanotaan (luonnolliseksi) *logaritmiksi* ja sitä merkitään tällä kurssilla symbolilla ln.

$$s = \ln t, \text{ jos } e^s = t, \text{ kun } s \in \mathbf{R}, t > 0.$$

Kompleksinen eksponenttifunktio ei ole injektio, joten sillä ei ole käänteiskuvausta. Kuitenkin exp on "lokaalisti" injektio, joten se voidaan "lokaalisti kääntää" ja saadaan kompleksinen *logaritmi*:

1.28. Määritelmä. Olkoon $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Kompleksiluvun z *logaritmi* on kompleksiluku $w \in \mathbf{C}$ siten, että

$$e^w = z\,, \quad \text{merkitään } w = \log z.$$

Huomaa, että luvun $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ logaritmi $\log z$ *ei ole* yksikäsitteinen, joten näin *ei saada funktiota* : $\mathbf{C} \setminus \{0\} \to \mathbf{C}$:

1.29. Lause. *Olkoon $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$. Tällöin*

$$w = \log z$$

jos ja vain jos on olemassa $k \in \mathbf{Z}$, jolle

$$w = \ln|z| + i(\operatorname{Arg} z + 2k\pi).$$

Todistus: Koska

$$e^{\ln|z| + i\operatorname{Arg}(z)} = e^{\ln|z|}e^{i\operatorname{Arg}(z)} = |z|e^{i\operatorname{Arg}(z)} = z,$$

saadaan eksponenttifunktion jaksollisuuden (Lause 1.26) perusteella, että

$$w = \log z \text{ eli } \quad e^w = z,$$

on yhtäpitävää ehdon

$$w = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z + k2\pi i \quad \text{jollakin } k \in \mathbf{Z}$$

kanssa. □

Kompleksisen logaritmin moniarvoisuus voitetaan valitsemalla sopiva logaritmin haara:

1.30. Määritelmä. *Logaritmin päähaara* $\operatorname{Log} z$ määritellään asettamalla

$$\operatorname{Log} z := \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z).$$

1.31. Huomautus. Jos $z \in \mathbf{R}$, $z > 0$ (ts. $Im(z) = 0, Re(z) > 0$), niin

$$\operatorname{Log} z = \ln z.$$

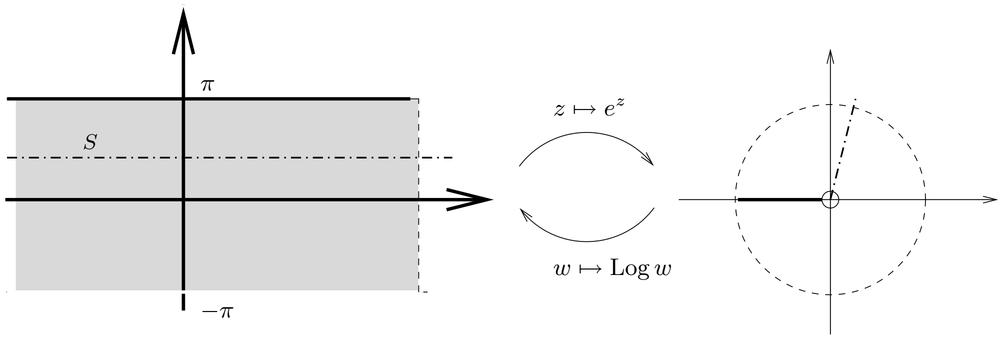
1.32. Huomautus. $\log z_1 z_2$ "=" $\log z_1 + \log z_2$, mutta tämä ei ole totta päähaaralle $\operatorname{Log} z$ (Miksi?).

1.33. Huomautus. Logaritimin päähaara on eksponenttifunktion käänteiskuvaus, kun jälkimmäinen rajoitetaan suikaleeseen

$$S = \{x + iy \in \mathbf{C} : -\pi < y \leq \pi\}.$$

Ts. kun $f = \exp\big|_S$, niin

$$\operatorname{Log} = f^{-1} : \mathbf{C} \setminus \{0\} \to S$$



Huomaa, että Log (negatiivinen reaaliakseli) $= \{z \in \mathbf{C} : Im(z) = \pi\}$.

1.4. Kompleksinen potenssifunktio

Muistelua: Jos $t \in \mathbf{R}, t > 0$ ja $a \in \mathbf{R}$, niin

$$t^a = e^{a \ln t}.$$

Samaan tapaan määritellään *kompleksinen potenssifunktio*; koska logaritmilla on monta haaraa, tuloskin riippuu (miten?) logaritmin haaran valinnasta. Jatkossa valitaan *logaritmin päähaara* ja määritellään:

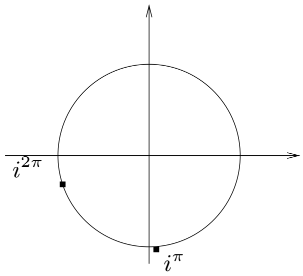
1.34. Määritelmä. Olkoon $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$ ja $\lambda \in \mathbf{C}$. Tällöin

$$z^\lambda := e^{\lambda \operatorname{Log} z}$$

(*potenssifunktion päähaara*).

Esimerkki.

$$\begin{aligned} i^\pi &= e^{\pi \operatorname{Log} i} = e^{\pi i(\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi^2}{2}} \\ &= \cos\frac{\pi^2}{2} + i\sin\frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} (-1)^\pi &= e^{\pi \operatorname{Log}(-1)} = e^{\pi i(\pi)} = e^{i\pi^2} = \\ &= \cos\pi^2 + i\sin\pi^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i^{2\pi} &= e^{2\pi \operatorname{Log} i} = e^{2\pi i(\frac{\pi}{2})} = e^{i\pi^2} \\ &= \cos\pi^2 + i\sin\pi^2. \end{aligned}$$

1.35. Huomautus. Jos $z \in \mathbf{C}, z \neq 0$ ja $\lambda, \mu \in \mathbf{C}$, niin

$$z^{\lambda+\mu} = e^{(\lambda+\mu)\operatorname{Log} z} = e^{\lambda \operatorname{Log} z} e^{\mu \operatorname{Log} z} = z^\lambda z^\mu.$$

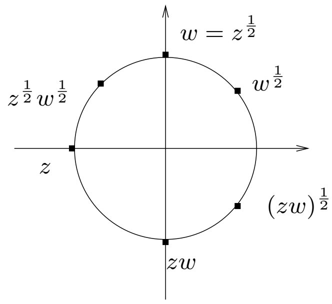
1.36. Huomautus (Varoitus)**.** Potenssifunktion "laskusäännöt" eivät vastaa reaalista tapausta!

Koska $\operatorname{Log}(zw)$ ei aina ole yhtä kuin $\operatorname{Log} z + \operatorname{Log} w$, niin $(zw)^\lambda$ ei aina ole yhtä kuin $z^\lambda w^\lambda$.

Esimerkki. Olkoot $z = -1, w = i$ ja $\lambda = \frac{1}{2}$. Tällöin

$$\begin{aligned} (zw)^{\frac{1}{2}} = (-i)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(-i)} &= e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ &= \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i), \end{aligned}$$

mutta



$$
\begin{aligned}
z^{\frac{1}{2}} w^{\frac{1}{2}} &= e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} \\
&= i\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\,.
\end{aligned}
$$

Myöskään $(z^{\lambda})^{\mu}$ ei aina ole yhtä kuin $z^{(\lambda\mu)}$ (HT).

1.5. Kompleksitason topologiaa

Kompleksitason topologian antaa metriikka

$$d(z,w) := |z-w| = \sqrt{(Re(z-w))^2 + (Im(z-w))^2}\,.$$

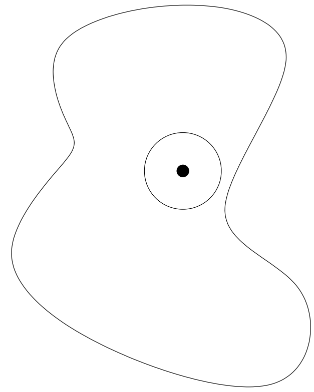
1.37. Huomautus. Avaruuden $\mathbf{C}$ metriikka d on sama kuin avaruuden $\mathbf{R}^2$ euklidinen metriikka. Siten kaikki avaruuden $\mathbf{R}^2$ tavalliset topologiset ja metriset tulokset ovat voimassa avaruudessa $\mathbf{C}$.

Tärkeitä merkintöjä: Olkoot $z_0 \in \mathbf{C}, r \in \mathbf{R}, r > 0$.

$$
\begin{aligned}
B(z_0,r) &:= \{z \in \mathbf{C} : |z-z_0| < r\} && \text{(avoin kiekko)} \\
\overline{B}(z_0,r) &:= \{z \in \mathbf{C} : |z-z_0| \le r\} && \text{(suljettu kiekko)} \\
B^*(z_0,r) &:= \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z-z_0| < r\} && \text{(punkteerattu kiekko)} \\
S(z_0,r) &:= \{z \in \mathbf{C} : |z-z_0| = r\} && \text{(kehä)}
\end{aligned}
$$

Muista: Piste $a \in A \subset \mathbf{C}$ on joukon A *sisäpiste* (merkitään $z \in \operatorname{int} A$), jos on olemassa $r > 0$ siten, että

$$B(z,r) \subset A.$$



Joukko $A \subset \mathbf{C}$ on *avoin*, jos

$$A = \operatorname{int} A,$$

ts. jos jokainen joukon A piste on sen sisäpiste. Edelleen, joukko A on *suljettu*, jos sen komplementti $\complement A = \mathbf{C} \setminus A$ on avoin.

Piste z on joukon A *reunapiste* (merkitään $z \in \partial A$), jos kaikilla $r > 0$

$$B(z,r) \cap A \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad B(z,r) \cap \complement A \neq \emptyset.$$

Joukon A *sulkeuma* on $\overline{A} = A \cup \partial A$.

Jono $(z_n) \subset \mathbf{C}$ *suppenee kohti pistettä* $z \in \mathbf{C}$, merkitään

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n \quad \text{tai} \quad z_n \to z,$$

jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|z - z_n| < \varepsilon \quad \text{kun } n \geq n_\varepsilon.$$

Jono $(z_n) \subset \mathbf{C}$ on *Cauchy-jono*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $n_\varepsilon \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \quad \text{kun } n, m \geq n_\varepsilon.$$

1.38. Lause. *Pari* $(\mathbf{C}, d)$ *on* täydellinen *metrinen avaruus, ts. jos* $(z_n) \subset \mathbf{C}$ *on mielivaltainen Cauchy-jono, niin* (z_n) *suppenee avaruudessa* $\mathbf{C}$*, so. on olemassa* $z \in \mathbf{C}$*, jolle* $z = \lim_{n\to\infty} z_n$.

Todistus: Olkoon $(z_n) \subset \mathbf{C}$ Cauchy-jono. Merkitään

$$x_n = Re(z_n) \quad , \quad y_n = Im(z_n).$$

Tällöin myös $(x_n), (y_n) \subset \mathbf{R}$ ovat Cauchy-jonoja (miksi?). Koska $\mathbf{R}$ on täydellinen, on olemassa $x, y \in \mathbf{R}$, joille

$$x_n \to x \quad \text{ja} \quad y_n \to y.$$

Näytetään, että $z_n \to z := x + iy$:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{kun } n \geq N.$$

Tällöin

$$|z_n - z|^2 = |x_n - x|^2 + |y_n - y|^2 < \frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4} < \varepsilon^2.$$

□

1.39. Huomautus. Avaruudessa $\mathbf{C}$ jokainen suppeneva jono on Cauchy-jono.

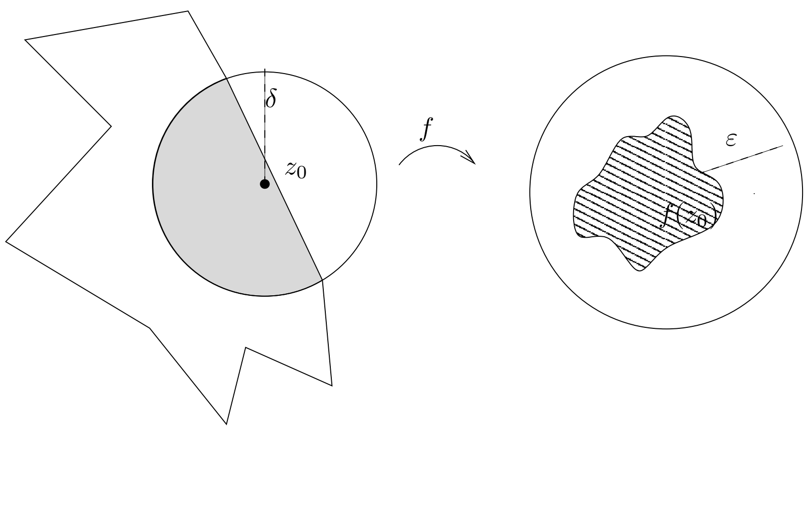
Jokaisella rajoitetulla jonolla $(z_n) \subset \mathbf{C}$ on osajono $(z_{n_j}) \subset \mathbf{C}$, joka suppenee avaruudessa $\mathbf{C}$.

Funktio $f : A \to \mathbf{C}$, $A \subset \mathbf{C}$, on *jatkuva pisteessä* $z_0 \in A$, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta = \delta(\varepsilon, z_0)$ siten, että

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\,, \quad \text{jos } |z - z_0| < \delta \text{ ja } z \in A,$$

ts. jos

$$f(A \cap B(z_0, \delta)) \subset B(f(z_0), \varepsilon)).$$



Funktio f on *jatkuva joukossa* A, jos f on jatkuva joka pisteessä $z \in A$.

1.40. Huomautus. Funktio $f : A \to \mathbf{C}$, $A \subset \mathbf{C}$, on jatkuva pisteessä z_0 jos ja vain jos sekä $Re\, f : A \to \mathbf{R}$ että $Im\, f : A \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia pisteessä z_0.
Todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

1.41. Lause. *Funktio $f : A \to \mathbf{C}$ on jatkuva pisteessä $z_0 \in A$ jos ja vain jos jokaiselle joukon A jonolle, jolle $z_n \to z_0$, pätee $f(z_n) \to f(z_0)$.*

TODISTUS: ($\Rightarrow$): Olkoon $(z_n) \in A$ siten, että $z_n \to z$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että

$$f(B(z_0, \delta) \cap A) \subset B(f(z_0), \varepsilon).$$

Koska $z_n \to z$, on olemassa $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|z_n - z_0| < \delta \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Niinpä

$$|f(z_n) - f(z_0)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

($\Leftarrow$): Jos f ei ole jatkuva, niin on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla $\delta > 0$

$$|f(z) - f(z_0)| \geq \varepsilon \quad \text{jollakin } z \in B(z_0, \delta) \cap A.$$

Valitaan $\delta_n = 1/n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ja $z_n \in B(z_0, 1/n) \cap A$ siten, että

$$|f(z_n) - f(z_0)| \geq \varepsilon.$$

Nyt $z_n \to z$, mutta $f(z_n) \nrightarrow f(z_0)$, mikä on ristiriita. □

1.42. Huomautus. Funktion f *raja-arvo pisteessä* z_0,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 \in \mathbf{C},$$

jos ja vain jos kaikille $\varepsilon > 0$ on $\delta > 0$, jolle

$$|f(z) - w_0| < \varepsilon \quad \text{kun } 0 < |z - z_0| < \delta\,.$$

Esimerkki. Eksponenttifunktio $f(z) = e^z$ on jatkuva koko avaruudessa $\mathbf{C}$.

Sen sijaan logaritmin päähaara $g : \mathbf{C}\setminus\{0\} \to \mathbf{C}$, $g(z) = \operatorname{Log} z$ on jatkuva jokaisessa pisteessä

$$z \in \mathbf{C} \setminus \{Im(z) = 0 \text{ ja } Re(z) \leq 0\},$$

mutta g on epäjatkuva negatiivisella reaaliakselilla (HT).

1.43. Määritelmä. Joukko $A \subset \mathbf{C}$ on *epäyhtenäinen*, jos on avoimet joukot $U, V \subset \mathbf{C}$ siten, että

i) $A \cap V \neq \emptyset$,

ii) $A \cap U \neq \emptyset$,

iii) $U \cap V = \emptyset$,

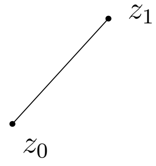
iv) $A \subset (U \cup V)$.

1.44. Huomautus. Ehto iii) voidaan korvata ehdolla $U \cap V \cap A = \emptyset$ (HT).

1.45. Määritelmä. Joukko $A \subset \mathbf{C}$ on *yhtenäinen*, jos se *ei* ole epäyhtenäinen.

Esimerkki.

- Jana kompleksitasossa on yhtenäinen.



$$J = [z_0, z_1] := \{tz_1 + (1-t)z_0 : 0 \leq t \leq 1\}$$

- $\mathbf{C}$ on yhtenäinen.
- $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ on epäyhtenäinen, $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ yhtenäinen.

1.46. Lause. *Olkoot $A_j \subset \mathbf{C}$ yhtenäisiä, $j \in J$. Jos $z_0 \in A_j$ kaikilla $j \in J$, niin*

$$A = \bigcup_{j \in J} A_j \quad \textit{on yhtenäinen.}$$

Todistus: Olkoon $A \subset U \cup V$, missä $U, V \subset \mathbf{C}$ avoimia ja $A \cap U \cap V = \emptyset$. Oletetaan, että $z_0 \in U$. Väitetään, että $A \subset U$ eli $A \cap V = \emptyset$.

Koska kaikilla $j \in J$ joukko A_j on yhtenäinen, on $A_j \cap V = \emptyset$ eli $A_j \subset U$ kaikilla j. Niinpä

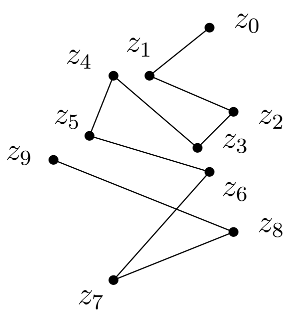
$$A = \bigcup_{j \in J} A_j \subset U.$$

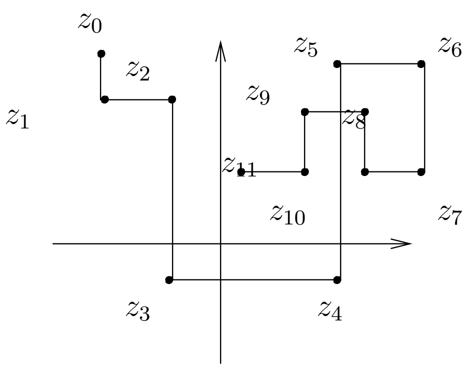
$\square$

1.47. Määritelmä. Joukko $A \subset \mathbf{C}$ on *murtoviiva*, jos on olemassa pisteet $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n \in A$ siten, että

$$\begin{aligned} A &= [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \ldots \cup [z_{n-1}, z_n] \\ &= \bigcup_{j=1}^{n} \{tz_j + (1-t)z_{j-1} : t \in [0,1]\}, \end{aligned}$$

merkitään $A = [z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n]$.





Koordinaatiston suuntainen

Sanotaan, että murtoviiva $[z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n]$ on *koordinaatiston suuntainen*, jos kaikilla $j = 1, 2, \ldots, n$ joko $Re(z_j) = Re(z_{j-1})$ tai $Im(z_j) = Im(z_{j-1})$.

1.48. Huomautus. Lauseesta 1.46 ja janan yhtenäisyydestä seuraa, että murtoviivat ovat yhtenäisiä ja pallot $B = B(z, r)$ ovat yhtenäisiä (miksi?).

1.49. Määritelmä. Avoin yhtenäinen joukko $D \subset \mathbf{C}$ on *alue*.

1.50. Lause. *Olkoon $D \subset \mathbf{C}$ avoin. Tällöin D on alue täsmälleen, kun kaikilla $z_0, z_1 \in D$ on olemassa koordinaatiston suuntainen murtoviiva $A \subset D$ siten, että $z_0 \in A$ ja $z_1 \in A$.*

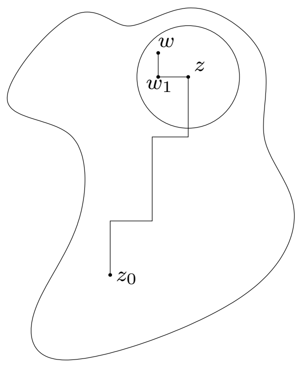
TODISTUS: ($\Leftarrow$): Harjoitustehtävä.

($\Rightarrow$): Olkoon $z_0 \in D$. Olkoon

$$U = \{z \in D : \text{on olemassa koordinaatiston suuntainen murtoviiva } A \subset D \text{ siten, että } z_0, z \in A\}.$$

Selvästi $z_0 \in U$, joten $U \neq \emptyset$.

U on *avoin*: Jos $z \in U$, niin valitaan kiekko $B = B(z, r) \subset D$. Tämä on mahdollista, koska D on avoin. Tällöin $B \subset U$, koska jos $w \in B$, niin $w_1 = z + Re(w - z) \in B$ ja murtoviiva $P = [z, w_1, w] \subset B$ on koordinaatiston suuntainen. Lisäksi, jos $A \subset D$ on koordinaatiston suuntainen murtoviiva pisteestä z_0 pisteeseen z, niin $A \cup P$ on etsitty murtoviiva.



Olkoon $V = D \setminus U$. Tällöin $V \cap U = \emptyset$ ja $V \cup U = D$.
Lisäksi V on *avoin*: Jos $z \in V$, niin valitaan pallo $B = B(z, r) \subset D$. Nyt $B \subset V$, koska jos olisi $w \in B \cap U$, niin kuten yllä, nähtäisiin että olisi koordinaatiston suuntainen murtoviiva $A \cup P$ pisteestä z_0 pisteeseen z, mikä on ristiriita.

Koska D on yhtenäinen, $V \cap D = \emptyset$, toisin sanoen $U = D$. □

1.51. Määritelmä. Olkoon $A \subset \mathbf{C}$ ja $z_0 \in A$. Joukon A *pisteen z_0 sisältävä komponentti* (*z_0-komponentti*) on joukko

$$E = \bigcup \{C \subset A : C \text{ yhtenäinen}, z_0 \in C\}.$$

1.52. Huomautus. Komponentti $E \neq \emptyset$, mutta voi olla $E = \{z_0\}$.

1.53. Huomautus. Lauseesta 1.46 seuraa, että joukon A z_0-komponentti on yhtenäinen; se on joukon A maksimaalinen yhtenäinen osajoukko, joka sisältää pisteen z_0.

1.54. Huomautus. Olkoon E_j joukon A z_j-komponentti, $j = 1, 2$. Tällöin joko $E_1 = E_2$ tai $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

1.55. Huomautus. $\emptyset \neq A \subset \mathbf{C}$ on yhtenäinen jos ja vain jos joukolla A on vain yksi komponentti (ts. jos $z, w \in A$, niin z-komponentti $=$ w-komponentti.) (Harjoitustehtävä.)

1.56. Huomautus. Jokainen joukko $A \neq \emptyset$ voidaan osittaa sen komponenttien avulla:

$$A = \bigcup_{j \in J} A_j\,,$$

missä joukot A_j ovat pareittain pistevieraita joukon A komponentteja.

1.57. Lause. *Olkoon $G \subset \mathbf{C}$ avoin. Tällöin joukon G komponentit ovat avoimia.*

TODISTUS: Olkoon E joukon G komponentti. Olkoon $z \in E$ ja valitaan $B = B(z, r) \subset G$. Tämä on mahdollista, koska G on avoin. Lauseesta 1.46 seuraa, että $E \cup B$ on yhtenäinen joukko, joka sisältää pisteen z_0. E on komponentti, joten $B \subset E$. Niinpä E on avoin. □

1.58. Huomautus. Avoimella joukolla $E \subset \mathbf{C}$ voi olla korkeintaan numeroituva määrä komponentteja. Ei-avoimella joukolla voi olla ylinumeroituvan monta komponettia. (Harjoitustehtävä.)

1.59. Lause. *Olkoon $A \subset \mathbf{C}$ yhtenäinen ja $f : A \to \mathbf{C}$ jatkuva. Tällöin $f(A)$ on yhtenäinen.*

TODISTUS: Harjoitustehtävä. □

2. Analyyttiset funktiot

Tässä luvussa hyökätään kurssin pääkäsitteen, analyyttisen funktion, kimppuun.

2.1. Kompleksinen derivaatta

2.1. Määritelmä. Olkoon $G \subset \mathbf{C}$ avoin ja $z_0 \in G$. Funktio $f : G \to \mathbf{C}$ on *(kompleksisesti) derivoituva pisteessä* $z_0 \in G$, jos raja-arvo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbf{C}$$

on olemassa. Jos f on derivoituva pisteessä z_0, määritellään

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

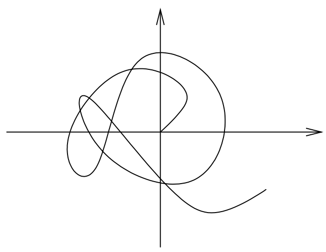
ja sanotaan, että $f'(z_0)$ on funktion f *derivaatta pisteessä* z_0.

Funktiota $f : G \to \mathbf{C}$, missä $G \subset \mathbf{C}$ avoin, sanotaan *analyyttiseksi (holomorfiseksi) joukossa* G, jos f on derivoituva jokaisessa $z_0 \in G$.

2.2. Huomautus. Usein erotusosamäärän raja-arvo kirjoitetaan muotoon

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

Huomaa, että $h \in \mathbf{C}$ ja sen lähestyminen nollaan voi tapahtua miltä puolelta hyvänsä.



2.3. Huomautus. Kuvaus $f : G \to \mathbf{C}$ on derivoituva pisteessä $z_0 \in G$ jos ja vain jos on olemassa $c \in \mathbf{C}$ $(c = f'(z_0))$ siten, että

$$(*) \qquad f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + E(z) \quad \text{kaikilla } z \in G,$$

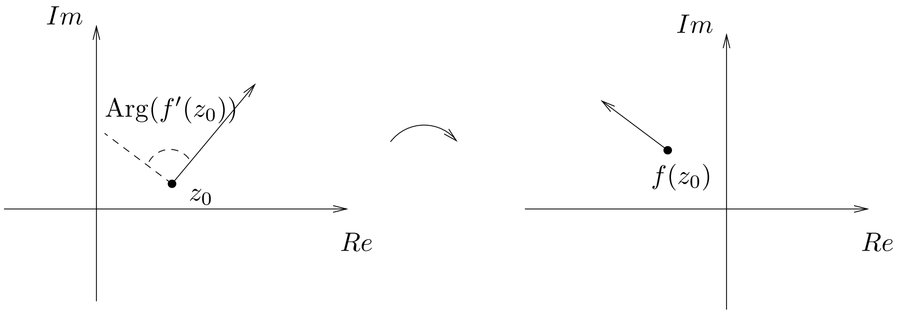
missä $E : G \to \mathbf{C}$ on virhetermi, joka toteuttaa

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|E(z)|}{|z - z_0|} = 0.$$

Kun $c = f'(z_0) \neq 0$ yhtälössä $(*)$, niin $c(z - z_0)$ hallitsee termiä $E(z)$ pisteen z_0 lähistöllä. Siten kuvauksen $w = f(z)$ käyttäytyminen pisteen z_0 lähellä muistuttaa affiinia kuvausta

$$L(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0).$$

Tämän kuvauksen L käyttäytyminen on helppo kuvata geometrisesti: L kiertää tasoa pisteen z_0 ympäri kulman $\theta = \operatorname{Arg}(f'(z_0))$ verran, skaalaa tasoa siten, että kaikki etäisyydet muuttuvat kertoimella $|f'(z_0)|$ (ts. $|z_1 - z_2|\,|f'(z_0)| = |L(z_1) - L(z_2)|$). Lopuksi, L siirtää tason siten, että piste z_0 menee pisteeseen $f(z_0)$.



Jos $f'(z_0) = 0$, niin geometrinen approksimointi tulee vaikeammaksi — asiaan palataan myohemmin.

Esimerkki. Funktio $f(z) = z^n$, $n = 1, 2, \ldots$, on analyyttinen koko $\mathbf{C}$:ssä:

$$\begin{aligned}\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \frac{(z - z_0)\big((z^{n-1}) + (z^{n-2}z_0) + \ldots + (zz_0^{n-2}) + (z_0^{n-1})\big)}{z - z_0} \\ &= z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + zz_0^{n-2} + z_0^{n-1} \xrightarrow{z \to z_0} nz_0^{n-1}\end{aligned}$$

Siten $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$.

2.4. Lemma. *Kun $f : G \to \mathbf{C}$ on derivoituva pisteessä $z_0 \in G$, f on jatkuva pisteessä z_0.*

Todistus: Kun $z \neq z_0$,

$$|f(z) - f(z_0)| = |z - z_0|\,|\frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} \to 0 \cdot f'(z_0) = 0.$$

□

2.5. Lause (Derivoimissääntöjä)**.** *Olkoot $f, g : G \to \mathbf{C}$ derivoituvia pisteessä $z_0 \in G$ ja $\lambda \in \mathbf{C}$ vakio. Tällöin λf, $f + g$, fg sekä $\frac{f}{g}$ (jos $g(z_0) \neq 0$) ovat myös derivoituvia pisteessä z_0. Lisäksi*

$$\begin{aligned} (\lambda f)'(z_0) &= \lambda f'(z_0) \\ (f+g)'(z_0) &= f'(z_0) + g'(z_0) \\ (fg)'(z_0) &= f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0) \end{aligned}$$

ja

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{(g(z_0))^2} \qquad (\textit{kun } g(z_0) \neq 0).$$

Todistus: Todistetaan tulo, muut jätetään harjoitustehtäviksi.

$$\frac{f(z)g(z) + f'(z_0)g'(z_0)}{z - z_0} = \underbrace{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}_{\to f'(z_0)} g(z) + f(z_0)\underbrace{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}}_{\to g'(z_0)}.$$

Koska g on jatkuva, $g(z) \xrightarrow{z \to z_0} g(z_0)$. Niinpä kun $z \to z_0$, erotusosamäärä suppenee kohti lukua

$$f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

□

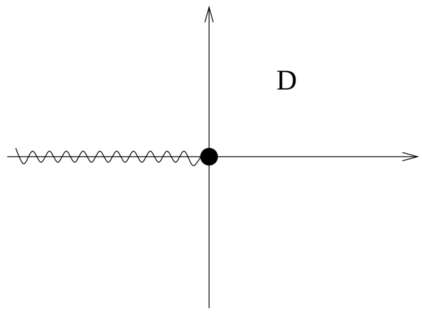
2.6. Esimerkki. Kaikki polynomit p,

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\ , n \in \mathbf{N}\,, a_j \in \mathbf{C}\,,$$

ovat analyyttisiä koko tasossa $\mathbf{C}$.

Esimerkki. Olkoon
$$f(z) = \sqrt{z} = \sqrt{|z|}e^{\frac{i\,\mathrm{Arg}(z)}{2}}.$$
Tällöin f on analyyttinen joukossa
$$D = \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Huomaa, että funktio $z \mapsto \mathrm{Arg}(z)$ on jatkuva joukossa $D = \mathbf{C} \setminus (-\infty, 0]$, joten f on jatkuva joukossa D.



Huomaa myös, että f on epäjatkuva jokaisessa $z \in \mathbf{R},\ z < 0$, joten f ei ole derivoituva negatiivisella reaaliakselilla.

Jos $z_0 \in D$, niin
$$\frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{z - z_0} = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{z_0}}{(\sqrt{z} - \sqrt{z_0})(\sqrt{z} + \sqrt{z_0})} = \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{z_0}} \xrightarrow{z \to z_0} \frac{1}{2\sqrt{z_0}}.$$

Jos $z_0 = 0$, niin
$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\sqrt{z}}{z} = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$
Koska $|\frac{1}{\sqrt{z}}| \to \infty$, kun $z \to 0$, ei f ole derivoituva nollassa.

Niinpä f on derivoituva pisteessä z_0 täsmälleen silloin kun $z_0 \in D$. Tällöin
$$f'(z_0) = \frac{1}{2\sqrt{z_0}}.$$

2.7. Lause (Ketjusääntö)**.** *Olkoot $A, B \subset \mathbf{C}$ avoimia joukkoja. Olkoon $f : A \to \mathbf{C}$ derivoituva pisteessä z_0 ja $f(A) \subset B$. Jos $g : B \to \mathbf{C}$ on derivoituva pisteessä $f(z_0)$, niin $g \circ f : A \to \mathbf{C}$ on derivoituva pisteessä z_0 ja*
$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

TODISTUS: Olkoon $w_0 = f(z_0)$. Määritellään $F : A \to \mathbf{C}$, $\quad G : B \to \mathbf{C}$ asettamalla

$$F(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}, & \text{kun } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{kun } z = z_0 \end{cases}$$

ja

$$G(w) = \begin{cases} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0}, & \text{kun } w \neq w_0 \\ g'(w_0), & \text{kun } w = w_0. \end{cases}$$

Nyt

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \to f'(z_0) = F(z_0), \qquad \text{kun } z \to z_0,$$

joten F on jatkuva pisteessä z_0. Samoin G on jatkuva pisteessä w_0. Niinpä yhdistetty funktio $G \circ f$ on jatkuva pisteessä z_0, sillä funktion f jatkuvuus seuraa derivoituvuudesta pisteessä z_0.

Jos $z \in A, z \neq z_0$, niin

$$\begin{aligned} \frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0} &= \begin{cases} \dfrac{g(f(z)) - g(w_0)}{f(z) - w_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & \text{jos } f(z) \neq f(z_0) \\ 0, & \text{jos } f(z) = f(z_0) = w_0 \end{cases} \\ &= G(f(z))F(z) \\ &\xrightarrow{z \to z_0} G(f(z_0))F(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0). \end{aligned}$$

□

Esimerkki. Olkoon

$$h(z) = \left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \right)^{10}, \text{ kun } \quad z \neq \pm i.$$

Tällöin $h = g \circ f$, missä

$$f(z) = \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \quad \text{ja} \quad g(z) = z^{10}.$$

Koska

$$f'(z) = \frac{2z(z^2 + 1) - (z^2 - 1)2z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{4z}{(z^2 + 1)^2} \quad \text{ja} \quad g'(z) = 10z^9,$$

saamme

$$h'(z) = 10 \left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \right)^9 \frac{4z}{(z^2 + 1)^2} = \frac{40z(z^2 - 1)^9}{(z^2 + 1)^{11}}, \text{ kun } \quad z \neq \pm i.$$

2.2. Cauchy-Riemannin yhtälöt

Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$, $G \subset \mathbf{C}$, derivoituva pisteessä $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$. Merkitään $z = x + iy$ ja

$$\begin{aligned} u(x,y) &= Re\, f(z) \\ v(x,y) &= Im\, f(z). \end{aligned}$$

Tällöin $u, v : G \to \mathbf{R}$ ja $f = u + iv$. Lasketaan $f'(z_0)$ kahdella tavalla:

Ensin lähestytään pistettä z_0 reaaliakselin suuntaisesti:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x+iy_0) - f(x_0+iy_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} \\ &= u_x(x_0,y_0) + i\, v_x(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Siten tavalliset osittaisderivaatat u_x ja v_x ovat olemassa pisteessä (x_0, y_0) ja

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) =: f_x(z_0). \tag{2.1}$$

Tämä on f:n reaalinen osittaisderivaatta.

Sitten lähestytään pistettä z_0 imaginaariakselin suuntaisesti:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0+iy) - f(x_0+iy_0)}{i(y - y_0)} \\ &= -i \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0,y) - u(x_0,y_0)}{y - y_0} + \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0,y) - v(x_0,y_0)}{y - y_0} \\ &= -i\, u_y(x_0,y_0) + v_y(x_0,y_0). \end{aligned}$$

Siten osittaisderivaatat u_y ja v_y ovat olemassa ja

$$f'(z_0) = v_y(z_0) - i\, u_y(z_0) =: -i\, f_y(z_0). \tag{2.2}$$

Kun vähennetään kaavat (2.1) ja (2.2) toisistaan, saadaan ns. *Cauchy-Riemannin yhtälöt:*[2]

$$\begin{cases} u_x(z_0) &= v_y(z_0) \\ u_y(z_0) &= -v_x(z_0). \end{cases}$$

[2] Cauchy (1789–1857), Riemann (1816–1866)

Saaimme:

2.8. Lause. *Jos $f : G \to \mathbf{C}$ on derivoituva pisteessä $z_0 \in G$ ja $f = u + iv$, missä $u, v : G \to \mathbf{R}^2$, niin osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x sekä v_y ovat olemassa ja*

$$\begin{cases} u_x(z_0) & = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) & = -v_x(z_0). \end{cases}$$

□

Kääntäen pätee:

2.9. Lause. *Olkoon $f = u + i\,v : G \to \mathbf{C}$, missä $u = Re(f)$ ja $v = Im(f)$. Oletetaan, että osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y ovat olemassa G:ssä ja* jatkuvia *pisteessä $z_0 \in G$. Jos Cauchy-Riemannin yhtälöt toteutuvat pisteessä z_0 siten, että*

$$\begin{cases} u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ u_y(z_0) = -v_x(z_0), \end{cases}$$

niin f on derivoituva pisteessä z_0 ja

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = -i\, f_y(z_0),$$

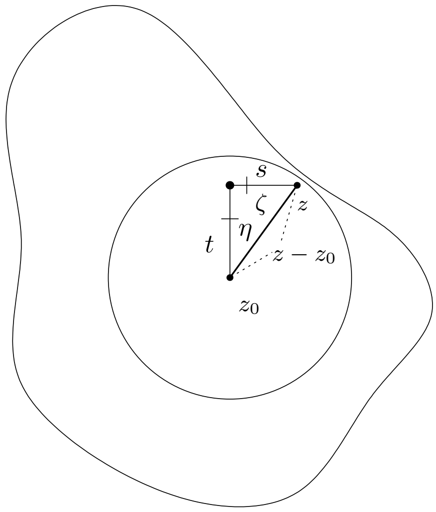
missä $f_x = u_x + i\, v_x$ ja $f_y = u_y + i\, v_y$.

Todistus: Olkoon $c = a + ib$, missä

$$\begin{aligned} a &= u_x(z_0) = v_y(z_0) \\ b &= -u_y(z_0) = v_x(z_0). \end{aligned}$$

Osoitetaan, että

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - c \right| \to 0\,, \qquad \text{kun } z \to z_0.$$



Valitaan ensin kiekko $B(z_0, r) \subset G$. Olkoon $z = x + iy \in B(z_0, r)$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Olkoot $s = x - x_0, t = y - y_0$.
Nyt

$$u(z) - u(z_0) = (u(x_0 + s, y_0 + t) - u(x_0, y_0 + t)) + (u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)).$$

Yhden muuttujan väliarvolauseesta seuraa, että kaikille $z = z_0 + s + it$ on olemassa $s_1, t_1 \in \mathbf{R}$ siten, että $0 \leq |s_1| \leq |s|$, $0 \leq |t_1| \leq |t|$ ja

$$\begin{cases} u(x_0 + s, y_0 + t) - u(x_0, y_0 + t) = u_x(x_0 + s_1, y_0 + t)s \\ u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0 + t_1)t. \end{cases}$$

Siten jos $\zeta = (x_0 + s_1) + iy$ ja $\eta = y_0 + i(y_0 + t_1)$, niin $|z_0 - \zeta| \leq |z - z_0|$ ja $|z_0 - \eta| \leq |z - z_0|$ ja

$$(*) \qquad u(z) - u(z_0) = u_x(\zeta)(x - x_0) + u_y(\eta)(y - y_0).$$

Samalla tavalla löydetään (pisteestä z riippuva) pari θ ja $\xi \in \mathbf{C}$ siten, että $|z_0 - \theta| \leq |z - z_0|$ ja $|z_0 - \xi| \leq |z - z_0|$ ja

$$(**) \qquad v(z) - v(z_0) = v_x(\theta)(x - x_0) + v_y(\xi)(y - y_0).$$

Huomaa, että kun $z \to z_0$, niin $\zeta, \eta, \theta, \xi \to z_0$.

Nyt lasketaan:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) - c(z - z_0) &= u(z) - u(z_0) + i(v(z) - v(z_0)) \\ &\qquad - (a + ib)(x - x_0 + i(y - y_0)) \\ &= u(z) - u(z_0) - u_x(z_0)(x - x_0) - u_y(z_0)(y - y_0) \\ &\quad + i(v(z) - v(z_0) - v_x(z_0)(x - x_0) - v_y(z_0)(y - y_0)) \\ &\overset{(*) \text{ ja } (**)}{=} (u_x(\zeta) - u_x(z_0))(x - x_0) + (u_y(\eta) - u_y(z_0))(y - y_0) \\ &\quad + i\left[(v_x(\theta) - v_x(z_0))(x - x_0) + (v_y(\xi) - v_y(z_0))(y - y_0)\right]. \end{aligned}$$

Koska

$$\frac{|x-x_0|}{|z-z_0|} \le 1 \quad \text{ja} \quad \frac{|y-y_0|}{|z-z_0|} \le 1\,,$$

voidaan arvioida

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - c\right| &\le \frac{|u_x(\zeta)-u_x(z_0)||x-x_0|}{|z-z_0|} + \frac{|u_y(\eta)-u_y(z_0)||y-y_0|}{|z-z_0|} \\
&\quad + \frac{|v_x(\theta)-v_x(z_0)||x-x_0|}{|z-z_0|} + \frac{|v_y(\xi)-v_y(z_0)||y-y_0|}{|z-z_0|} \\
&\le |u_x(\zeta)-u_x(z_0)| + |u_y(\eta)-u_y(z_0)| \\
&\quad + |v_x(\theta)-v_x(z_0)| + |v_y(\xi)-v_y(z_0)| \\
&\to 0\,,
\end{aligned}$$

kun $z \to z_0$, koska u_x, u_y, v_x, v_y ovat jatkuvia pisteessä z_0. Siten f on derivoituva pisteessä z_0 ja

$$f'(z_0) = c = f_x(z_0) = -if_y(z_0)\,.$$

□

2.10. Huomautus. Lauseessa 2.9 ei riitä oletus, että osittaisderivaatat u_x, u_y, v_x ja v_y ovat olemassa joukossa G, vaikka toteuttaisivatkin Cauchy-Riemannin yhtälöt (ks. esim 2.12). Kuitenkin riittäisi *a priori* olettaa, että $f = (u, v)$ on reaalifunktioiden mielessä differentioituva pisteessä z_0 (ks. 2.7). Myöhemmin tosin nähdään, että avoimessa joukossa G differentioituvan Cauchy-Riemann -systeemin ratkaisut u ja v tulevat olemaan C^∞-funktioita joukossa G, ts. niillä on kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat.

Esimerkki. Merkitään $z = x + iy$. Olkoon $f(z) = x$. Onko f derivoituva?

$$\begin{aligned}
u(z) &= Re\, f(z) = x \\
v(z) &= Im\, f(z) = 0,
\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}
u_x &\equiv 1\,, \quad u_y \equiv 0 \\
v_x &\equiv 1\,, \quad v_y \equiv 0.
\end{aligned}$$

Siis $u_x = 1 \ne 0 = v_y$, joten Cauchy-Riemannin yhtälö ei toteudu missään. Siispä f ei ole derivoituva missään!

Esimerkki. Olkoon $f(z) = e^z$.

Väite: $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ on analyyttinen koko tasossa $\mathbf{C}$. Lisäksi $f'(z) = e^z$, kun $z \in \mathbf{C}$.

Todistus: Koska

$$\begin{aligned} u(x,y) &= e^x \cos y \qquad \text{ja} \\ v(x,y) &= e^x \sin y\,, \end{aligned}$$

saamme

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y & \qquad u_y &= -e^x \sin y \\ v_x &= e^x \sin y & \qquad v_y &= e^x \cos y, \end{aligned}$$

jotka kaikki ovat jatkuvia. Siten $u_x = v_y$ ja $u_y = -v_x$, joten Lauseesta 2.9 seuraa, että f on derivoituva ja

$$f'(z) = f_x(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{iy} = e^z\,.$$

□

2.11. Seuraus. *Olkoon $G \subset \mathbf{C}$ avoin ja olkoon funktiolla $f : G \to \mathbf{C}$ jatkuvat osittaisderivaatat*

$$f_x = (Re\ f)_x + i(Im\ f)_x \quad \text{ja} \quad f_y = (Re\ f)_y + i(Im\ f)_y$$

joukossa G. Tällöin f on analyyttinen joukossa G, jos ja vain jos funktiot $u = Re\, f$ ja $v = Im\, f$ toteuttavat Cauchy-Riemannin systeemin

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \quad \textit{joukossa } G.$$

Tällöin

$$f' = f_x = -i f_y\,.$$

□

2.12. Esimerkki.

$$f(z) = \begin{cases} \exp(-z^{-4})\,, & \text{kun } z \neq 0 \\ 0\,, & \text{kun } z = 0. \end{cases}$$

Koska $g(z) = e^z$ on analyyttinen ja $h(z) = -z^{-4}$ on analyyttinen joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, on $f = g \circ h$ ketjusäännön nojalla analyyttinen joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Entäpä origossa? Nyt jos $x \in \mathbf{R}\,,\ x \neq 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x}.$$

Kun sijoitetaan $t = x^{-4}$, saadaan edellisestä

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{t \to \infty} \frac{t^{\frac{1}{4}}}{e^t} = 0$$

l'Hospitalin säännön nojalla.

Samoin

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

Siten on olemassa

$$f_x(0) = u_x(0) + iv_x(0) = 0$$

ja samoin nähdään, että myös

$$f_y(0) = u_y(0) + iv_y(0) = 0.$$

Siten u ja v toteuttavat Cauchy-Riemannin systeemin 0:ssa, mutta f ei ole derivoituva siellä, koska f ei ole jatkuva origossa (huomaa, että

$$f(r\,e^{\frac{i\pi}{4}}) = e^{\frac{1}{r^4}} \to \infty\,,\ \text{kun } r \to 0\ ).$$

2.3. Cauchy-Riemannin yhtälön seurauksia

2.13. Lause. *Olkoon $f : D \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja $D \subset \mathbf{C}$ alue. Jos $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in D$, niin f on vakio alueessa D.*

TODISTUS: Olkoon $f = u + iv$. Nyt Cauchy-Riemannin yhtälöiden perusteella

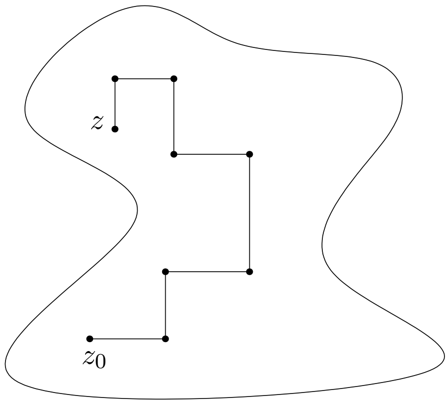
$$f'(z) = f_x(z) = u_x(z) + iv_x(z) = u_x(z) - iu_y(z) = 0,$$

joten $u_x(z) = 0 = u_y(z)$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$. Osoitetaan, että u on vakio (samoin nähdään, että $v_x = v_y = 0$ ja v vakio).

Olkoot $z_0, z \in D$. Valitaan koordinaatiston suuntainen murtoviiva

$$A = [z_0, z_1, \ldots, z_n = z] \subset D$$

(ks. lause 1.50).



Nyt (reaalimuuttujan) väliarvolauseen mukaan kaikille $j = 1, \ldots, n$ on olemassa $\zeta_j \in [z_{j-1}, z_j]$ siten, että

$$\begin{aligned} u(z_j) - u(z_{j-1}) &= \begin{cases} \underbrace{u_x(\zeta_j)}_{=0}(Re(z_j) - Re(z_{j-1}))\,, & \text{jos } Im(z_j) = Im(z_{j-1}) \\ \underbrace{u_y(\zeta_j)}_{=0}(Im(z_j) - Im(z_{j-1}))\,, & \text{jos } Re(z_j) = Re(z_{j-1}) \end{cases} \\ &= 0\,, \end{aligned}$$

mistä seuraa, että

$$u(z_0) = u(z_1) = \ldots = u(z_n) = u(z)\,.$$

Siten u on vakio joukossa D. Samoin v on vakio, joten $f = u + iv$ on vakio alueessa D. $\square$

2.14. Lause. *Olkoon $f : D \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja $D \subset \mathbf{C}$ alue. Jos jokin funktioista*

$$u = Re(f), \quad v = Im(f) \quad \textit{tai} \quad |f|$$

on vakio, niin f on vakio.

TODISTUS: Harjoitustehtävä. □

2.4. Trigonometriset funktiot

Jos $t \in \mathbf{R}$, niin

$$\begin{aligned} e^{it} &= \cos t + i \sin t \\ e^{-it} &= \cos(-t) + i \sin(-t) = \cos t - i \sin t, \end{aligned}$$

mistä saadaan

$$\begin{cases} \cos t = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2} \\ \sin t = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i} \end{cases} .$$

2.15. Määritelmä. Olkoon $z \in \mathbf{C}$. Määritellään kompleksinen *sini, kosini* ja *tangentti*

$$\begin{cases} \sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \\ \cos z := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \tan z := \dfrac{\sin z}{\cos z}, \text{ kun } \cos z \neq 0. \end{cases}$$

2.16. Lause. *Kompleksinen sini ja kosini ovat analyyttisiä koko tasossa* $\mathbf{C}$ *ja*

$$(\sin z)' = \cos z\,, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

TODISTUS: Seuraa lauseesta 2.5. □

2.17. Huomautus (Varoitus!). Kompleksinen sini ja kosini eivät ole rajoitettuja, vaan

$$\sin(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \quad \text{ja} \quad \cos(\mathbf{C}) = \mathbf{C}.$$

2.18. Määritelmä. Koko kompleksitasossa analyyttistä funktiota $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ sanotaan *kokonaiseksi*.

Esimerkki. Polynomit

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n \quad , \quad a_k \in \mathbf{C}$$

ovat kokonaisia. Eksponenttifunktio exp, sinifunktio $\sin z$ ja kosinifunktio $\cos z$ ovat kokonaisia.

2.19. Huomautus (Harjoitustehtävä). Seuraavat yhtälöt on helpohkoa todentaa:

$$\begin{aligned}
&\cos^2 z + \sin^2 z = 1 \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C} \\
&\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z \\
&\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin z \\
&\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w \quad \text{kaikilla } z, w \in \mathbf{C} \\
&\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \quad \text{kaikilla } z, w \in \mathbf{C}
\end{aligned}$$

Koska eksponenttifunktio on jaksollinen, ovat myös kompleksinen sini ja kosini jaksollisia:

$$\begin{aligned}
\cos(z + k2\pi) &= \cos z \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}, \quad k \in \mathbf{Z}. \\
\sin(z + k2\pi) &= \sin z \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}, \quad k \in \mathbf{Z}.
\end{aligned}$$

Esimerkki. Ratkaise yhtälö $\cos z = 0$.

Merkitään $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
0 = \cos z &= \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} \\
(*) \qquad &= \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2} \\
&= \cos x \underbrace{\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)}_{\cosh y \neq 0} - i \sin x \underbrace{\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)}_{\sinh y},
\end{aligned}$$

mikä on yhtäpitävää kuin

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \text{ tai } e^y - e^{-y} = 0\,. \end{cases}$$

Koska $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$, voidaan jälkimmäisestä unohtaa tapaus $\sin x = 0$.

Niinpä yhtälö $(*)$ on yhtäpitävästi

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ e^y - e^{-y} = 0\,, \end{cases}$$

mikä edelleen on yhtäpitävää kuin

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, & k \in \mathbf{Z} \\ e^{2y} = 1\,, & y \in \mathbf{R}\,. \end{cases}$$

Tästä saadaan

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbf{Z}\,, \\ y = 0\,, \end{cases}$$

joten

$$z = \frac{\pi}{2} + k\pi\,, \quad k \in \mathbf{Z}\,.$$

Havaitaan: *Kompleksisen kosinin* $\cos z$ *kaikki nollakohdat ovat reaaliakselilla (ne ovat* $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$*).*

Koska

$$\sin z = \cos(\frac{\pi}{2} - z)$$

ovat myös sinifunktion $\sin z$ *nollakohdat reaaliakselilla (ne ovat* $z = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$*).*

2.5. Käänteisfunktioiden haarat

Jos $f : G \to \mathbf{C}$ on analyyttinen mutta ei ole injektio[3] (ts. on olemassa $z_1 \neq z_2 \in G$ siten, että $f(z_1) = f(z_2)$), niin funktiolla f ei ole käänteiskuvausta, ts. ei ole olemassa funktiota $g : f(G) \to G$ siten, että

$$g(f(z)) = z \quad \text{kaikilla } z \in G$$

[3] *Huom:* analyyttistä injektiota sanotaan *univalentiksi.*

ja

$$f(g(z)) = z \quad \text{kaikilla } z \in f(G).$$

Funktiolla f on kuitenkin "oikeanpuoleisia inverssejä" $g : f(G) \to G$ siten, että

$$f(g(z)) = z \quad \text{kaikilla } z \in f(G).$$

Funktion g saa tehdyksi määrittelemällä $g(z)$ olevaksi joku niistä pisteistä $w \in G$, jolle $f(w) = z$. Metodi on hasardi ja on kyseenalaista, löydetäänkö sillä yhtään "hyvää" funktiota g. Valitettavasti huolellakin rakennetut oikeanpuoleiset käänteiskuvaukset g tahtovat olla epäjatkuvia jossain:

Esimerkki. Olkoon

$$f(z) = z^2 ,$$

jolloin funktion f oikeanpuoleinen inverssi saadaan koko tasossa $\mathbf{C}$ määrittelemällä

$$g(z) = \sqrt{z} .$$

Tällöin g on analyyttinen joukossa

$$D = \mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{R} : z \leq 0\}$$

mikä sattuu olemaan suurin avoin joukko, jossa g on jatkuva. Huomaa, että g on jatkuva D:n lisäksi vain origossa.

2.20. Määritelmä. Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja olkoon $D \subset f(G)$ alue. Sanotaan, että funktio $g : D \to G$ on kääteiskuvauksen f^{-1} *haara alueessa* D, jos g on jatkuva D:ssä ja

$$f(g(z)) = z \quad \text{kaikilla } z \in D .$$

2.21. Huomautus.

- Jos joukossa $D \subset f(G)$ on jokin käänteiskuvauksen f^{-1} haara, siellä on monesti useita.
- Joukkoa D ei yleensä voida ottaa koko kuvajoukoksi $f(G)$.
- Käänteiskuvauksen f^{-1} haara on injektio (koska $z = f(g(z)) = f(g(w)) = w$).

Seuraava lause sanoo, että käänteiskuvauksen f^{-1} haara on analyyttinen, jos f:n derivaatta ei häviä.

2.22. Lause. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja g käänteiskuvauksen f^{-1} haara alueessa $D \subset f(G)$. Jos $z_0 \in g(D)$ siten, että $f'(z_0) \neq 0$, niin g on derivoituva pisteessä $w_0 = f(z_0)$ ja*

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Erityisesti, jos $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in g(D)$, on g analyyttinen joukossa D.

TODISTUS: Koska käänteiskuvauksen haara g on injektio, niin jokaiselle $w \in D$, $w \neq w_0$, on $z = g(w) \neq z_0$. Siis voidaan laskea

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{f(g(w)) - f(z_0)} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} \to \frac{1}{f'(z_0)},$$

kun $w \to w_0$. Tässä rajankäynti sujuu, koska g on käänteiskuvauksen haarana jatkuva, joten

$$z = g(w) \to g(w_0) = z_0\,, \qquad \text{kun } w \to w_0\,.$$

□

2.23. Huomautus. Jos käänteiskuvauksen f^{-1} haara g joukossa D on derivoituva pisteessä $w_0 = f(z_0) \in D$, missä $g(w_0) = z_0$, niin ketjusäännöstä seuraa, että

$$f'(\underbrace{z_0}_{=g(w_0)})g'(w_0) = (f \circ g)'(w_0) = (\frac{d}{dw}w)(w_0) = 1,$$

joten $f'(z_0) \neq 0$.

2.6. Logaritmin haarat

2.24. Määritelmä. *Logaritmin haara alueessa D* on analyyttinen funktio $L : D \to \mathbf{C}$ siten, että

$$e^{L(z)} = z \quad \text{kaikilla } z \in D.$$

Huomaa, että $0 \notin D$, koska $e^w \neq 0$ kaikilla w.

Koska ekspontenttifunktio $f(z) = e^z$ on kokonainen ja $f'(z) = e^z \neq 0$ kaikilla z, seuraa lauseesta 2.22, että jokainen jatkuva $L : D \to \mathbf{C}$, jolle

$$e^{L(z)} = z \quad \text{kaikilla } z \in D$$

on analyyttinen ja siten logaritmin haara joukossa D. Edelleen

$$L'(z) = \frac{1}{f'(L(z))} = \frac{1}{e^{L(z)}} = \frac{1}{z}.$$

Lauseesta 1.29 seuraa, että jokaiselle logaritmin haaralle L pätee

$$L(z) = \ln|z| + i\theta(z),$$

missä $\theta : D \to \mathbf{R}$ on jatkuva ja

$$\theta(z) = Im(L(z)) = \arg(z)\,, \quad z \in D\,,$$

missä $\arg(z)$ on jokin pisteen z argumentti; valinta voi riippua pisteestä z.

2.25. Huomautus. Olkoot L ja L_1 logaritmin haaroja alueessa D. Tällöin

$$(L_1 - L)'(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} = 0 \quad \text{kaikilla } z \in D.$$

Lauseesta 2.13 seuraa, että $L_1 - L$ on vakio alueessa D. Koska

$$e^{L_1(z) - L(z)} = \frac{e^{L_1(z)}}{e^{L(z)}} = \frac{z}{z} = 1 \quad \text{kaikilla } z \in D,$$

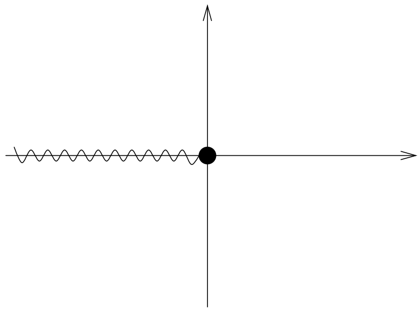
on tämä vakio muotoa $2k\pi i$ jollain $k \in \mathbf{Z}$. Siten on olemassa $k \in \mathbf{Z}$ siten, että

$$L_1(z) = L(z) + 2k\pi i \quad \text{kaikilla } z \in D.$$

Huomaa, ettei vakio k riipu pisteestä $z \in D$! (HT. Totea tämä!)

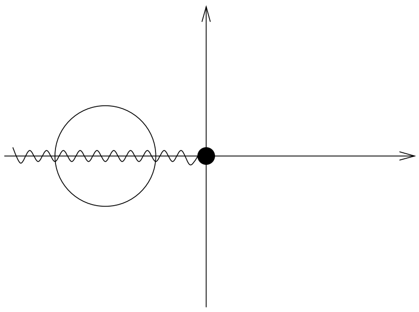
Esimerkki. Logaritmin päähaara

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}(z)$$



on analyyttinen alueessa $\quad D = \mathbf{C} \backslash \{z \in \mathbf{R} : z \leq 0\}.$

Esimerkki. Olkoon



$$D = B(-1, \frac{1}{2})$$

ja

$$L(z) = \begin{cases} \mathrm{Log}(z) & \text{kun } Im(z) \geq 0 \\ \mathrm{Log}(z) + i2\pi & \text{kun } Im(z) < 0. \end{cases}$$

Tällöin L on logaritmin haara kiekossa D (HT). Miten tämä sopii yhteen huomautuksen 2.25 kanssa?

2.26. Huomautus. Joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ ei ole logaritmin analyyttistä haaraa (HT).

2.7. Kompleksinen ja reaalinen differentioituvuus

Reaalisen tason $\mathbf{R}^2$ avoimessa joukossa $G \subset \mathbf{R}^2$ määritelty kuvaus $f : G \to \mathbf{R}^2$ on (*reaalisesti*) *differentioituva* pisteessä $z_0 = (x_0, y_0)$, jos on olemassa $\mathbf{R}$-lineaarinen $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ (ts. matriisi $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$) siten, että

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A(x - x_0, y - y_0) + E(x, y)$$

kaikilla $(x, y) \in G$; tässä $E : G \to \mathbf{R}^2$ on funktio, jolle

$$\lim_{z \to z_0} \frac{|E(z)|}{|z - z_0|} = 0.$$

Jos merkitään $f(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, niin matriisin A (funktion f reaalinen derivaatta pisteessä z_0) elementit ovat u:n ja v:n osittaisderivaatat pisteessä (x_0, y_0)

$$A = \begin{bmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{bmatrix}.$$

Matriisi A vastaa reaalilineaarikuvausta : $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Jotta f olisi kompleksisesti derivoituva, tulisi matriisin A vastata kompleksista lineaarikuvausta : $\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eli siis kompleksisella vakiolla kertomisoperaatiota. Ts. toiminnon

$$A[x - x_0, y - y_0]$$

tulisi olla kompleksinen kertolasku

$$w\left((x - x_0) + i(y - y_0)\right).$$

Välttämätön ja riittävä ehto (HT) tälle on se, että matriisin A kertoimet totetuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0). \end{cases}$$

Tulkitsemalla (x, y) kompleksiluvuksi $x + iy$ ja käyttämällä yhteyksiä

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad , \quad y = \frac{z + \overline{z}}{2i}$$

saadaan, että $f : G \to \mathbf{C}$ on reaalisesti differentioituva pisteessä $z_0 \in G$ jos ja vain jos on olemassa $c, d \in \mathbf{C}$ siten, että

(2.3) $$f(z) = f(z_0) + c(z - z_0) + d(\overline{z} - \overline{z}_0) + E(z)$$

kaikilla $z \in G$, missä $E : G \to \mathbf{C}$ on sellainen, että $\left|\frac{E(z)}{z - z_0}\right| \xrightarrow{z \to z_0} 0$.

Edelleen

$$c = \frac{1}{2}\left(u_x(z_0) + v_y(z_0) + i(v_x(z_0) - u_y(z_0))\right)$$
$$d = \frac{1}{2}(u_x(z_0) - v_y(z_0) + i(v_x(z_0) + u_y(z_0)))$$

Nyt on helppo osoittaa (HT):

Funktio $f : G \to \mathbf{C}$ on (kompleksisesti) derivoituva pisteessä $z_0 \in G$ jos ja vain jos f on reaalisesti differentioituva pisteessä $z_0 \in G$ ja $d = 0$.

Yleisesti käyttään kompleksisia osittaisderivaattoja: Jos funktion $f : G \to \mathbf{C}$ osittaisderivaatat $f_x(z_0)$ ja $f_y(z_0)$ ovat olemassa, $z_0 \in G$, niin merkitään

$$\begin{aligned} f_z(z_0) &:= \frac{1}{2}[f_x(z_0) - i f_y(z_0)] && (= \partial f(z_0)) \\ &= \frac{1}{2}(u_x(z_0) + v_y(z_0)) + \frac{i}{2}(v_x(z_0) - u_y(z_0)) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f_{\overline{z}}(z_0) &:= \frac{1}{2}[f_x(z_0) + i f_y(z_0)] && (= \overline{\partial} f(z_0)) \\ &= \frac{1}{2}(u_x(z_0) - v_y(z_0)) + \frac{i}{2}(v_x(z_0) + u_y(z_0)). \end{aligned}$$

Tällöin Cauchy-Riemannin yhtälöt on helppo kirjoittaa:

$$f_{\overline{z}} = 0\,,$$

jolloin

$$f'(z_0) = f_z(z_0).$$

Muista, että kompleksinen osittaisderivaatta f_z voi olla olemassa, vaikkei f olisikaan derivoituva.

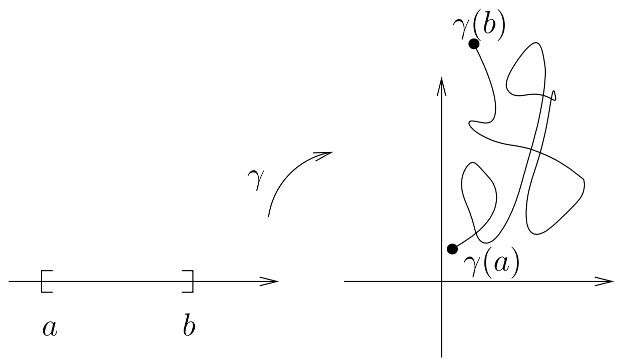
3. Kompleksinen integrointi

3.1. Tieintegraali

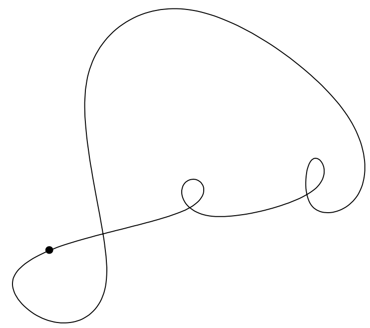
3.1. Määritelmä. Olkoot $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. *Polku* γ kompleksitasossa on jatkuva kuvaus $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$. Piste $\gamma(a)$ on polun γ alkupiste ja $\gamma(b)$ sen loppupiste. Kuvauksen γ kuvajoukko

$$|\gamma| := \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}$$

on nimeltään on polun γ *jälki*. Sanotaan, että γ on polku joukossa D, jos $|\gamma| \subset D$.



Polku $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ on *suljettu*, jos $\gamma(a) = \gamma(b)$.



Suljettu polku

3.2. Määritelmä. Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ polku ja

$$\begin{cases} x(t) = Re(\gamma(t)) \\ y(t) = Im(\gamma(t)). \end{cases}$$

Sanotaan, että γ on *jatkuvasti differentioituva polku*, jos $x : [a, b] \to \mathbf{R}$ ja $y : [a, b] \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvasti differentioituvia (päätepisteissä toispuoleiset derivaatat). Määritellään tällöin polun γ derivaatta

$$\gamma'(t) = x'(t) + i\, y'(t)$$

Sanotaan, että γ on *paloittain jatkuvasti differentioituva* välillä $[a, b]$, jos on olemassa pisteet $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ siten, että $\gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]}$ on jatkuvasti differentioituva väleillä kaikilla $k = 1, 2, \ldots, n$.

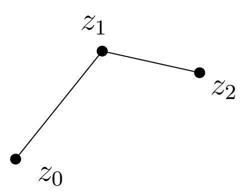
3.3. Määritelmä. *Tie joukossa* $A \subset \mathbf{C}$ on paloittain jatkuvasti differentioituva polku $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ siten, että $|\gamma| \subset A$. Suljettua tietä sanotaan myös *piiriksi.*

Esimerkki. Olkoot z_0, z_1, z_2 eri pisteitä . Määritellään $\gamma_1 : [0, 1] \to \mathbf{C}$,

$$\gamma_1(t) = [z_0, z_1](t) := tz_1 + (1 - t)z_0\ , \text{ jana } z_0\text{:sta } z_1\text{:een,}$$

ja

$$\gamma_1 : [0, 2] \to \mathbf{C}\,,$$
$$\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t)\,, & t \in [0, 1] \\ (t-1)z_2 + (2-t)z_1\,, & t \in [1, 2]\,. \end{cases}$$

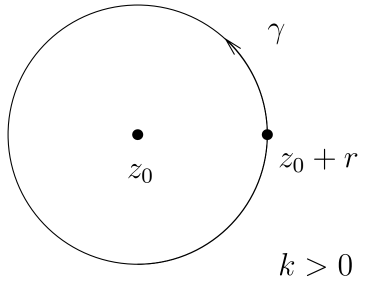


Nyt γ_1 ja γ_2 ovat teitä sekä

$$\gamma_2'(t) = \begin{cases} \gamma_1'(t) = z_1 - z_0\,, & t \in (0, 1) \\ z_2 - z_1\,, & t \in (1, 2)\,. \end{cases}$$

3.4. Esimerkki. Olkoon $k \in \mathbf{Z}$, $z_0 \in \mathbf{C}$ ja $r > 0$. Määritellään $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$,

$$\gamma(t) = z_0 + re^{kit}.$$



Tällöin γ on suljettu tie (piiri), joka kulkee z_0-keskisen r-säteisen ympyrän kehän ympäri $|k|$ kertaa lähtien pisteestä $z_0 + r$

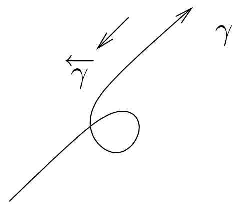
- vastapäivään, jos $k > 0$
- myötäpäivään, jos $k < 0$.
- γ pysyy paikallaan, jos $k = 0$.

Lisäksi

$$\gamma'(t) = ikre^{ikt} \qquad \text{(HT)}.$$

3.5. Määritelmä. Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ polku /tie. Polun γ *käänteispolku* tai *paluupolku /käänteistie* on kuvaus $\overleftarrow{\gamma} : [a, b] \to \mathbf{C}$ siten, että

$$\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(b + a - t).$$



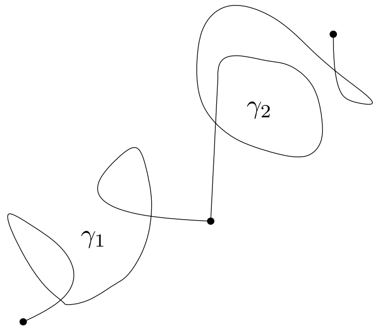
3.6. Huomautus. $\overleftarrow{[z_1, z_2]} = [z_2, z_1]$. (HT).

3.7. Määritelmä. Olkoot $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbf{C}$ ja $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbf{C}$ polkuja siten, että $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$. Tällöin määritellään *yhdistetty polku (summapolku)*

$$\gamma_1 * \gamma_2 : [a_1, b_1 + b_2 - a_2] \to \mathbf{C}$$

asettamalla

$$\gamma_1 * \gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(t)\,, & \text{kun } a_1 \le t \le b_1. \\ \gamma_2(t - b_1 + a_2)\,, & \text{kun } b_1 \le t \le b_1 + b_2 - a_2. \end{cases}$$



3.8. Huomautus. Jos γ_1, γ_2 ovat teitä, ja $\gamma_1 * \gamma_2$ on määritelty, se on myös tie. (HT).

3.9. Huomautus. Jos $D \subset \mathbf{C}$ on alue ja $z_1, z_2 \in D$, niin on olemassa tie $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ siten, että $|\gamma| \subset D$ ja

$$\gamma(a) = z_1\,, \qquad \gamma(b) = z_2.$$

(Tieksi γ voidaan valita *murtoviiva*, ts. äärellisen monen janan muodostama polku, jopa niin että murtoviivan muodostavat janat ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Katso lause 1.50.)

Parametrin vaihto: Usein on mukava kulkea pitkin teitä, jotka on määritelty tietyllä välillä $[a, b]$, esim. $[0, 1]$ tai $[0, 2\pi]$. Tätä varten on yleensä tehtävä *parametrin vaihto*: Jos

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$$

on polku, niin sanotaan, että polku

$$\beta : [c, d] \to \mathbf{C}$$

on saatu polusta γ parametria vaihtamalla, jos on olemassa aidosti kasvava jatkuva surjektio $h : [c, d] \to [a, b]$ siten, että

$$\beta(s) = \gamma(h(s)) \quad \text{kaikilla } s \in [c, d].$$

(Sanotaan, että h on *parametrinvaihtokuvaus*.)
Huomaa, että poluilla γ ja β on sama jälki ja ne kulkevat ”samaan suuntaan”, mutta mahdollisesti eri nopeuksilla. Huomaa myös, että parametrinvaihtokuvaus on bijektio.

Jos γ on tie ja parametrinvaihto h on paloittain jatkuvasti derivoituva, on β myös tie. Tällöin sanotaan, että tiet γ ja β ovat *ekvivalentit.*

Huomaa, että $\beta'(s) = \gamma'(h(s))h'(s)$.

Esimerkki. Olkoot $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$, $z_1 \neq z_2$ ja $\gamma = [z_1, z_2]$, ts.

$$\gamma(t) = tz_2 + (1-t)z_1 \quad , \ t \in [0,1].$$

Määritellään

$$\beta(s) = z_1 + s\frac{z_2 - z_1}{|z_1 - z_2|}, \qquad 0 \le s \le |z_1 - z_2|,$$

jolloin tie β on saatu tiestä γ parametrin vaihdolla

$$h(s) = \frac{s}{|z_1 - z_2|}, \qquad 0 \le s \le |z_1 - z_2|$$

Sanotaan, että tiessä β on käyrän pituus parametrina.

3.10. Määritelmä. Olkoon $\gamma = x + iy : [a,b] \to \mathbf{C}$ jatkuvasti differentioituva polku ja $f = u + iv : |\gamma| \to \mathbf{C}$ jatkuva funktio. Tällöin funktion f *integraali yli polun* γ on

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &:= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_a^b (u(x(t),y(t))x'(t) - v(x(t),y(t))y'(t))dt + \\ &\quad + i\int_a^b (u(x(t),y(t))y'(t) + v(x(t),y(t))x'(t))dt.\end{aligned}$$

Yleisemmin, jos γ on tie, niin valitaan pisteet $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ siten, että $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ on jatkuvasti differentioituva polku ja määritellään funktion f *integraali* yli *tien* γ asettamalla

$$\int_\gamma f(z)dz := \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Samoin määritellään funktion f *integraali yli tien* γ *kaarenpituuden suhteen* asettamalla

$$\int_\gamma f|dz| := \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt.$$

Integraali yli polun γ riippuu muustakin kuin vain polun γ jäljestä:

Esimerkki. Olkoot $\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ ja $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ teitä

$$\gamma_1(t) = 2e^{it}, \qquad \gamma_1(t) = 2e^{-i2t}.$$

Nyt γ_1 kiertää kehän $\partial B(0, 2)$ kerran vastapäivään ja γ_2 kahdesti myötäpäivään. Olkoon $f(z) = \frac{1}{z}$.

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{2ie^{it}}{2e^{it}}dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

$$\int_{\gamma_2} f(z)dz = \int_0^{2\pi} \frac{-4ie^{-i2t}}{2e^{-i2t}}dt = -2i\int_0^{2\pi} dt = -4\pi i.$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)|dz| = \int_0^{2\pi} \frac{2}{2e^{it}}dt = \frac{1}{-i}\int_0^{2\pi} e^{-it}dt = 0.$$

3.11. Lemma. *Olkoot γ ja β teitä joukossa A ja $f : A \to \mathbf{C}$ sekä $g : A \to \mathbf{C}$ jatkuvia. Tällöin*

(i)

$$\int_\gamma (f(z) + g(z))dz = \int_\gamma f(z)dz + \int_\gamma g(z)dz.$$

(ii)

$$\int_\gamma cf(z)dz = c\int_\gamma f(z)dz \quad \textit{kaikilla } c \in \mathbf{C}.$$

(iii)

$$\int\limits_{\overleftarrow{\gamma}} f(z)dz = -\int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

(iv) *Jos yhdistetty polku $\gamma * \beta$ on määritelty, niin*

$$\int\limits_{\gamma*\beta} f(z)dz = \int\limits_{\gamma} f(z)dz + \int\limits_{\beta} f(z)dz$$

(v) *Jos tiet γ ja β ovat ekvivalentit, niin*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz = \int\limits_{\beta} f(z)dz.$$

(vi) *Jos $|f(z)| \leq |g(z)|$ kaikilla $z \in |\gamma|$, niin*

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)dz\right| \leq \int\limits_{\gamma} |g(z)||dz| = \int\limits_{a}^{b} |g(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt\,,$$

missä $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ on tie.

Todistus: (i), (ii) Harjoitustehtäviä.

(iii): Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$. Koska $\overleftarrow{\gamma}(t) = \gamma(b+a-t)$, niin $\overleftarrow{\gamma}'(t) = -\gamma'(b+a-t)$, joten

$$\int\limits_{\overleftarrow{\gamma}} f(t)dz = \int\limits_{a}^{b} f(\overleftarrow{\gamma}(t))\overleftarrow{\gamma}'(t)dt = -\int\limits_{a}^{b} f(\gamma(b+a-t))\gamma'(b+a-t)dt.$$

Kun sijoitetaan $s = b + a - t$, saadaan

$$\int\limits_{b}^{a} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int\limits_{a}^{b} f(\gamma(s))\gamma'(s)ds = -\int\limits_{\gamma} f(z)dz.$$

(iv): Harjoitustehtävä.

(v): Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}, \beta : [c,d] \to \mathbf{C}$ ja $h : [c,d] \to [a,b]$ paloittain derivoituva parametrin vaihto siten, että $\gamma(h(s)) = \beta(s)$. Nyt

$$\beta'(s) = \gamma'(h(s))h'(s)\,,$$

joten

$$\int\limits_\beta f(z)dz = \int\limits_c^d f(\beta(s))\beta'(s)ds = \int\limits_c^d f(\gamma(h(s)))\gamma'(h(s))h'(s)ds.$$

Sijoittamalla $t = h(s)$, $dt = h'(s)ds$ saadaan

$$\int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int\limits_\gamma f(z)dz.$$

(vi): Olkoon

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = re^{i\theta} \qquad \text{(voidaan olettaa, että } r > 0).$$

Nyt

$$\begin{aligned}
0 \le \left|\int\limits_\gamma f(z)dz\right| &= r = \int\limits_\gamma e^{-i\theta} f(z)dz \\
&= \underbrace{\int\limits_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt}_{\in\mathbf{R}} \\
&= \int\limits_a^b \underbrace{Re(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t))}_{\le|g(\gamma(t))||\gamma'(t)|}\,dt + i\underbrace{\int\limits_a^b Im(e^{-i\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt)}_{=0} \\
&\le \int\limits_a^b |g(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt = \int\limits_\gamma |g(z)||dz|.
\end{aligned}$$

□

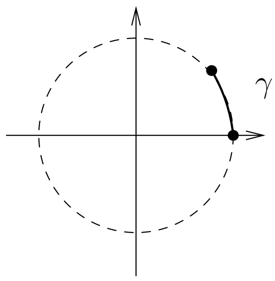
3.12. Huomautus. Jos $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ on tie, niin määritellään *tien γ pituus*

$$l(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Lemman 3.11 kohdasta (vi) seuraa, että jos $f : |\gamma| \to \mathbf{C}$ on jatkuva ja $|f(z)| \le M$, niin

$$\left| \int_\gamma f dz \right| \le M l(\gamma).$$

3.13. Esimerkki. Olkoon $f(z) = e^{iz^2}$ ja $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$.



Väite:

$$\left| \int_\gamma f\, dz \right| \le \frac{\pi(1 - e^{-r^2})}{4r}.$$

Todistus: Jos $z = x + iy$,

$$|e^{iz^2}| = e^{Re(iz^2)} = e^{-2xy},$$

joten kun $z = \gamma(t) = re^{it} = r(\cos t + i \sin t)$,

$$|e^{i\gamma(t)^2}| = e^{-r^2 2 \cos t \sin t} = e^{-r^2 \sin 2t}.$$

Edelleen, lemman 3.11 kohdan (vi) nojalla

$$\left| \int_\gamma e^{iz^2} dz \right| \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-r^2 \sin 2t} r\, dt,$$

mistä sijoittamalla $s = 2t$ saadaan

$$\frac{r}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2 \sin s} ds.$$

Nyt $\sin s \geq \frac{2s}{\pi}$, kun $0 \leq s \leq \frac{\pi}{2}$ (HT), joten

$$\left|\int\limits_\gamma f(z)dz\right| \leq \frac{r}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2 2}{\pi}s} ds = \frac{\pi(1-e^{-r^2})}{4r}.$$

3.2. Primitiivit eli kantafunktiot

Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$, $G \subset \mathbf{C}$ avoin. Sanotaan, että funktio $F : G \to \mathbf{C}$ on funktion f *primitiivi* tai *kantafunktio* joukossa G, jos

$$F'(z) = f(z) \text{ kaikilla } z \in G.$$

3.14. Huomautus. Jos F on funktion f primitiivi, myös $f + c$ on funktion f primitiivi kaikilla vakioilla $c \in \mathbf{C}$.

Primitiivi on aina analyyttinen!

Esimerkki. Eksponenttifunktion $z \mapsto e^z$ primitiivi on eksponenttifunktio itse.

Logaritmin päähaara $G(z) = \operatorname{Log} z$ on funktion $g(z) = \frac{1}{z}$ primitiivi joukossa $\mathbf{C} \setminus \{z \in \mathbf{R} : z \leq 0\}$.

3.15. Lause. *Olkoon F jatkuvan funktion f primitiivi avoimessa joukossa $G \subset \mathbf{C}$. Jos $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ on tie joukossa G, niin*

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Erityisesti, jos jatkuvalla funktiolla f on primitiivi joukossa G ja γ on suljettu tie, niin

$$\int\limits_\gamma f(z)dz = 0.$$

TODISTUS: Olkoot $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ siten, että $\gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ on jatkuvasti differentioituva kaikilla $k = 1, \ldots, n$. Olkoon $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ja $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Määritellään

$$\tilde{F}(t) = F(\gamma(t)),$$

jolloin $\tilde{F}$ on jatkuva. Käyttämällä differentiaalilaskennan ketjusääntöä, Cauchy-Riemannin yhtälöistä saatavaa tietoa $F_y = iF_x$ ja tietoa $F'(z) = F_x$ saadaan

$$\begin{aligned}\tilde{F}'(t) &= F_x(\gamma(t))x'(t) + F_y(\gamma(t))y'(t)\\ &= F_x(\gamma(t))x'(t) + iF_x(\gamma(t))y'(t)\\ &= F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t).\end{aligned}$$

Nyt

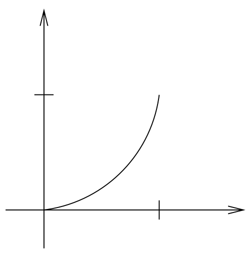
$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\\ &= \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \tilde{F}'(t)dt,\end{aligned}$$

ja koska $\tilde{F}'$ on jatkuva välillä $[t_{k-1}, t_k]$, tästä analyysin peruslausetta käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \sum_{k=1}^{n}(\tilde{F}(t_k) - \tilde{F}(t_{k-1})) = \tilde{F}(b) - \tilde{F}(a)\\ &= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).\end{aligned}$$

□

Esimerkki.



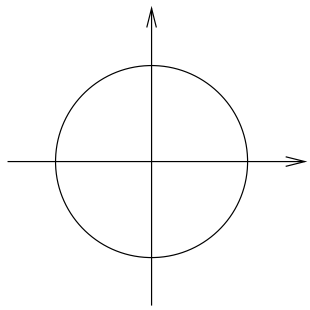
Olkoon $\gamma(t) = t + i\frac{t^2}{\pi}$, $0 \leq t \leq \pi$ ja $f(z) = e^z$. Nyt $F(z) = e^z$, joten

$$\int_\gamma f(z)dz = \Big/_{\!\!0}^{\pi} F(\gamma(t)) = e^{\pi + i\pi} - e^0 = -e^\pi - 1.$$

3.16. Huomautus. Kaikilla joukossa G analyyttisillä funktioilla ei ole primitiiviä joukossa G. Esimerkiksi funktiolla f,

$$f(z) = \frac{1}{z},$$

ei ole primitiiviä joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$.



Syy: Olkoon $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, jolloin

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i.$$

Mutta γ on suljettu tie, joten jos funktiolla f olisi primitiivi joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$, niin lauseen 3.15 mukaan olisi

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Siispä f:llä ei voi olla primitiiviä G:ssä.

3.17. Huomautus. Lause 3.15 antaa ”keinon” primitiivin löytämiseksi: integroidaan pitkin käyrää γ pisteestä z_0 pisteeseen z:

$$F(z) = \int_\gamma f(w)dw + \text{ vakio.}$$

3.18. Huomautus. Osittaisintegrointikaava pätee:
Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ tie G:ssä ja $f, g : G \to \mathbf{C}$ analyyttisiä (ja derivaatat f' ja g' jatkuvia). Tällöin

$$\int_\gamma f(z)g'(z)dz = \Big/_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(z)g(z) - \int_\gamma g(z)f'(z)dz.$$

Todistaminen jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkki. Olkoon $f(z) = z$. Tällöin funktion f primitiivi on $F(z) = \frac{1}{2}z^2$ ja

$$0 = \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma zdz$$

kaikilla suljetuilla $\gamma \subset \mathbf{C}$.

4. Cauchyn lause — lokaali versio

Eräs kompleksianalyysin tärkeimmistä "perustuloksista" on alunperin vuodelta 1825 oleva Cauchyn lause, jolla tarkoitetaan useitakin lauseita, jotka antavat ehtoja, milloin analyyttisen funktion integraali yli piirin on 0.

Jatkossa käytetään merkintää

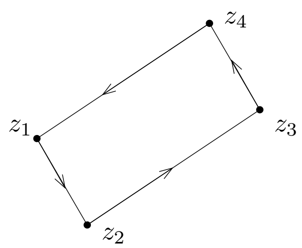
$$\int_{\partial R} f(z)dz,$$

kun tarkoitetaan integraalia yli topologisesti suljetun suorakaiteen R reunan vastapäivään kerran ympäri, ts. jos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ ovat sellaiset pisteet, että $[z_1, z_2]$ ja $[z_4, z_3]$ ovat yhdensuuntaiset sekä $[z_1, z_4]$ ja $[z_2, z_3]$ ovat yhdensuuntaiset ja

$$Re(z_1) = \min_{j=1,2,3,4} Re(z_j),$$

niin $Im(z_2) \leq Im(z_3)$ (ja $Im(z_2) < Im(z_1)$ mikäli $Re(z_2) = Re(z_1)$). Tällöin ∂R on suljettu tie,

$$\partial R = [z_1, z_2] * [z_2, z_3] * [z_3, z_4] * [z_4, z_1].$$



4.1. Lemma. *Olkoon R suljettu suorakaide joukossa G ja $f : G \to \mathbf{C}$ analyyttinen. Tällöin*

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

TODISTUS: Olkoon

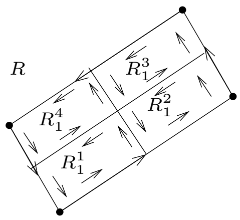
$$I = \int_{\partial R} f(z)dz.$$

Jaetaan R neljään kongruenttiin (samanlaiseen) suorakaiteeseen $R_1^1, R_1^2, R_1^3, R_1^4$. Määritellään

$$I_1^j = \int\limits_{\partial R_1^j} f(z)dz \quad , \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Tällöin

$$I = I_1^1 + I_1^2 + I_1^3 + I_1^4,$$



koska suorakaiteiden R_1^j yhteiset sivut "kuljetaan" eri suuntiin! Siten kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$|I| \leq |I_1^1| + |I_1^2| + |I_1^3| + |I_1^4|.$$

ja siis

$$|I_1^j| \geq \frac{|I|}{4} \quad \text{jollain } j = 1, 2, 3, 4.$$

Niinpä löydetään suorakaidetta R puolta pienempi suorakaide $R_1 \subset R$ siten, että kun

$$I_1 = \int\limits_{\partial R_1} f(z)dz\,,$$

niin

$$|I_1| \geq 4^{-1}|I|.$$

Samalla tavalla löydetään suorakaiteen R_1 sisältä puolet pienempi suorakaide R_2 siten, että kun

$$I_2 = \int\limits_{\partial R_2} f(z)dz\,,$$

niin

$$|I_2| \geq 4^{-1}|I_1| \geq 4^{-2}|I|.$$

Jatkamalla osiinjakoa induktiivisesti löydetään jono sisäkkäisiä suorakaiteita

$$R \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots$$

joukossa G siten, että kun

$$I_n = \int\limits_{\partial R_n} f(z)dz\,,$$

niin

$$|I_n| \geq 4^{-1}|I_{n-1}| \geq \cdots \geq 4^{-n}|I|\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

ts.

$$(*) \qquad |I| \leq 4^n |I_n| \quad \text{kaikilla } n = 1, 2, \ldots$$

Olkoon

$$d_n := \text{ suorakaiteen } R_n \text{ halkaisijan pituus } = \sup\{|z - w| : z, w \in R_n\}$$

ja

$$L_n = l(\partial R_n) = \text{ suorakaiteen } R_n \text{ reunan pituus.}$$

Merkitään $d = R$:n halkaisija ja $L = l(\partial R)$. Tällöin

$$d_n = 2^{-n} d\,, \quad L_n = 2^{-n} L\,.$$

Nyt $R_1 \supset R_2 \supset \ldots$ muodostaa vähenevän jonon kompakteja joukkoja ja $d_n \to 0$, joten Cantorin lauseesta seuraa, että on olemassa $z_0 \in R$, jolle

$$\{z_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n.$$

Koska f on derivoituva pisteessä $z_0 \in G$, niin

$$(**) \qquad f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + E(z)\,, \quad z \in G,$$

missä $E : G \to \mathbf{C}$ on sellainen, että

$$\frac{|E(z)|}{|z - z_0|} \to 0 \quad \text{ kun } z \to z_0.$$

Koska f on jatkuva, niin yhtälöstä $(**)$ seuraa, että E on jatkuva joukossa G ja $E(z_0) = 0$.

Olkoon γ suljettu tie joukossa G. Nyt Lauseesta 3.15 seuraa kaavan(**) avulla

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &\overset{(**)}{=} f(z_0) \underbrace{\int_\gamma dz}_{=0} + f'(z_0) \underbrace{\int_\gamma (z - z_0)dz}_{=0} + \int_\gamma E(z)dz \\
&= \int_\gamma E(z)dz.
\end{aligned}$$

Valitaan $\gamma = \partial R_n$, jolloin

$$I_n = \int\limits_{\partial R_n} E(z)dz.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Osoitetaan, että $|I| \leq \varepsilon dL$:

Olkoon $B = B(z_0, \delta) \subset G$ siten, että

$$|E(z)| \leq \varepsilon |z - z_0| \quad \text{kaikilla } z \in B.$$

Valitaan n siten, että $d_n < \delta$. Koska $z_0 \in R_n$ ja $|z - z_0| \leq d_n < \delta$ kaikilla $z \in R_n$, niin $R_n \subset B$. Nyt yhtälöstä $(*)$ seuraa, että

$$|I| \leq 4^n |I_n| = 4^n \left| \int\limits_{\partial R_n} E(z)dz \right|$$

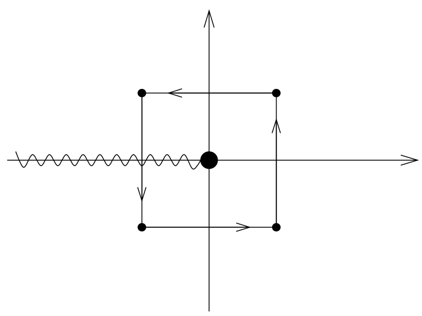
mistä vilkaisemalla huomautusta 3.12 saadaan arvio

$$|I| \leq 4^n \varepsilon d_n L_n = \varepsilon dL.$$

Nyt antamalla $\varepsilon \to 0$ saadaan haluttu tieto: $I = 0$. $\square$

Esimerkki. Integroidaan $\frac{1}{z}$ pitkin tietä

$$\gamma = [1+i, -1+i] * [-1+i, -1-i] * [-1-i, 1-i] * [1-i, 1+i].$$



Merkitään $\gamma_1 = [-1-i, 1-i] * [1-i, 1+i] * [1+i, -1+i]$ ja $\gamma_2 = [-1+i, -1-i]$.

Alueessa $D = \mathbf{C} \setminus \{z \leq 0\}$ funktiolla $\frac{1}{z}$ on primitiivi $\mathrm{Log}(z)$, joten

$$\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \mathrm{Log}(-1+i) - \mathrm{Log}(-1-i).$$

Janan γ_2 yli integroimiseen valitaan joukossa $\mathbf{C} \setminus \{z \geq 0\}$ logaritmin haara

$$L(z) = \begin{cases} \mathrm{Log}\, z\,, & \text{jos } Im(z) \geq 0 \\ \mathrm{Log}\, z + 2\pi i\,, & \text{jos } Im(z) < 0. \end{cases}$$

Tällöin

$$\int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = L(-1-i) - L(-1+i) = \mathrm{Log}(-1-i) + 2\pi i - \mathrm{Log}(-1+i),$$

joten

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

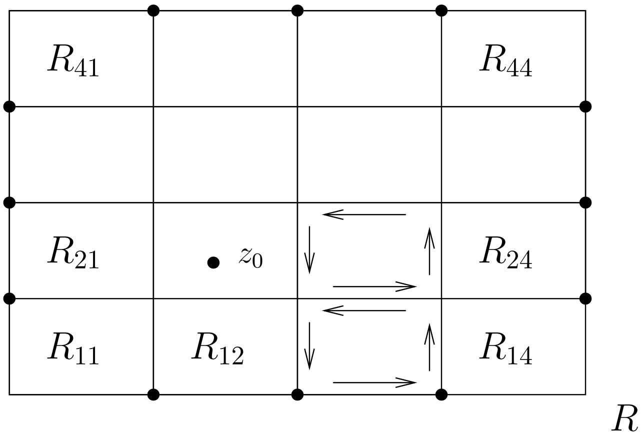
Huomaa, että γ on erään suorakaiteen $R \subset \mathbf{C}$ reuna, mutta $\frac{1}{z}$ ei ole analyyttinen koko suorakaiteessa R. Niinpä analyyttisyysoletusta lemmassa 4.1 ei voida poistaa. Kuitenkin sitä voidaan aavistuksen verran lieventää:

4.2. Lemma. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ jatkuva ja f analyyttinen joukossa $G \setminus \{z_0\}$. Tällöin*

$$\int_{\partial R} f dz = 0$$

kaikilla suljetuilla suorakaiteilla $R \subset G$.

Todistus: Olkoon $R \subset G$ suorakaide. Olkoon $n = 1, 2, \ldots$. Jaetaan suorakaiteen R reunajanat n yhtäsuureen palaseen ja yhdistetään jakopisteet reunojen suuntaisilla janoilla, jolloin saadaan n^2 kongruenttia suorakaidetta R_{kl}, missä $k, l = 1, \ldots, n$.



$n = 4$

Tällöin

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \int_{\partial R_{kl}} f(z)dz.$$

Jos $z_0 \notin R_{kl}$, on lemman 4.1 nojalla

$$\int_{\partial R_{kl}} f(z)dz = 0.$$

Jos $z_0 \in R_{kl}$, niin

$$\left| \int_{\partial R_{kl}} f(z)dz \right| \leq \max_{z \in R} |f(z)| \, l(\partial R_{kl}) = M \frac{L}{n},$$

missä $M = \max_{z \in R} |f(z)| < \infty$, koska f on jatkuva, ja $L = l(\partial R)$. Nyt z_0 kuuluu korkeintaan neljään suljettuun suorakaiteeseen R_{kl}, joten

$$\left| \int_{\partial R} f(z)dz \right| = \left| \sum_{z_0 \in R_{kl}} \int_{\partial R_{kl}} f(z)dz \right| \leq \frac{4ML}{n}.$$

Kun annetaan $n \to \infty$, saadaan

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0.$$

□

4.3. Huomautus (Merkintä). Olkoon γ suunnattu jana $[z_0, z_1]$. Merkitään

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz.$$

Lemma 4.1 johtaa ehtoon kantafunktion eli primitiivin eksistenssille:

4.4. Lemma. *Olkoon $B \subset \mathbf{C}$ avoin kiekko ja $f : B \to \mathbf{C}$ sellainen jatkuva funktio, jolle*

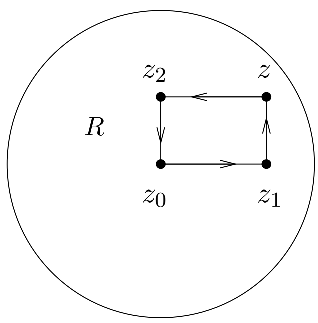
$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0$$

kaikilla suljetuilla suorakaiteilla R, joiden sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset. Tällöin funktiolla f on kantafunktio kiekossa B.

Erityisesti, lauseen 3.15 nojalla

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \text{kaikilla kiekon } B \text{ suljetuilla teillä } \gamma\,.$$

Todistus: Olkoon $z_0 = x_0 + iy_0$ kiekon B keskipiste. Jos $z = x + iy \in B$, niin asetetaan $z_1 = x + iy_0$ ja $z_2 = x_0 + iy$.



Jos $x \neq x_0$, $y \neq y_0$ ja

$$\gamma = [z_0, z_1] * [z_1, z] * [z, z_2] * [z_2, z_0]\,,$$

niin

$$0 = \int_\gamma f(\xi)d\xi = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi)d\xi + \int_{z_1}^{z} f(\xi)d\xi + \int_{z}^{z_2} f(\xi)d\xi + \int_{z_2}^{z_0} f(\xi)d\xi\,.$$

Määritellään nyt

$$F(z) = \int_{z_0}^{z_2} f(\xi) d\xi + \int_{z_2}^{z} f(\xi) d\xi,$$

jolloin siis myös

$$F(z) = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + \int_{z_1}^{z} f(\xi) d\xi.$$

Jatkuvuuden nojalla nämä kaavat pätevät myös, jos $x = x_0$ tai $y = y_0$. Nyt (HT)

$$F(z) = \int_{x_0}^{x} f(t + iy) dt + i \int_{y_0}^{y} f(x_0 + it) dt,$$

josta

$$\begin{aligned} F_x(z) &= \frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^{x} f(t + iy) dt + i \int_{y_0}^{y} f(x_0 + it) dt \right) \\ &= f(x + iy) = f(z). \end{aligned}$$

Samoin

$$F(z) = \int_{x_0}^{x} f(t + iy_0) dt + i \int_{y_0}^{y} f(x + it) dt,$$

josta

$$F_y(z) = if(x + iy) = if(z).$$

Koska f on jatkuva, on F C^1-funktio kiekossa B. Siten Cauchy-Riemannin systeemistä

$$F_x = -iF_y$$

saadaan seurauksen 2.11 nojalla, että F on analyyttinen B:ssä ja $F'(z) = f(z)$ kaikilla $z \in B$. $\square$

Seuraavaa lausetta tarvitaan myöhemmin:

4.5. Lause. *Olkoon $f : D \to \mathbf{C}$ jatkuva ja $D \subset \mathbf{C}$ alue. Tällöin*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \textit{kaikilla suljetuilla teillä } \gamma \subset D$$

jos ja vain jos funktiolla f on primitiivi joukossa D.

Todistus: Ehdon riittävyys todistettiin lauseessa 3.15.

Todistetaan ehdon välttämättömyys. Olkoon $w_0 \in D$. Jos $z \in D$, niin valitaan tie $\gamma : [a, b] \to D$ siten, että $\gamma(a) = w_0$ ja $\gamma(b) = z$. Määritellään

$$F(z) := \int_\gamma f(\xi)d\xi.$$

Tällöin $F : D \to \mathbf{C}$ on hyvin määritelty, koska jos σ on toinen tie pisteestä w_0 pisteeseen z, niin $\gamma * \overleftarrow{\sigma}$ on piiri joukossa D ja

$$0 = \int_{\gamma * \overleftarrow{\sigma}} f(\xi)d\xi = \int_\gamma f(\xi)d\xi - \int_\sigma f(\xi)d\xi,$$

joten $F(z)$ ei riipu tien γ valinnasta.

Väite: F on funktion f kantafunktio.

Todistus: Olkoon $z_0 \in D$ ja valitaan $B = B(z_0, r) \subset D$. Jos γ_0 on tie pisteestä w_0 pisteeseen z_0 ja $z \in B$, niin asetetaan $\gamma = \gamma_0 + [z_0, z]$. Huomaa, että f toteuttaa lemman 4.4 oletukset kiekossa B, joten funktiolla f on kiekossa B primitiivi G. Nyt

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{\gamma_0} f(\xi)d\xi + \int_{z_0}^{z} f(\xi)d\xi \\ &\overset{\text{lause 3.15}}{=} \underbrace{F(z_0) + G(z) - G(z_0)}_{\text{analyyttinen}} \end{aligned}$$

on analyyttinen kiekossa B. Lisäksi

$$F'(z_0) = G'(z_0) = f(z_0).$$

□

Nyt voidaan kirjata Cauchyn lauseen lokaali muoto:

4.6. Lause (Cauchyn lauseen lokaali muoto)**.** *Olkoon f analyyttinen kiekossa B. Tällöin*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

kaikilla suljetuilla teillä γ kiekossa B.

TODISTUS: Lemmasta 4.1 seuraa, että

$$\int_{\partial R} f(z)dz = 0 \text{ kaikilla suljetuilla suorakaiteilla } R \subset B$$

ja lemmasta 4.4, että funktiolla f on kantafunktio B:ssä, joten

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0\,.$$

$\square$

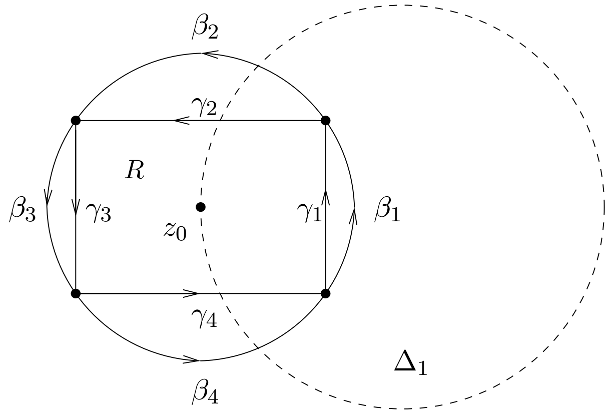
4.7. Huomautus. Lemmasta 4.2 seuraa, että lauseessa 4.6 riittää olettaa, että f on jatkuva kiekossa B ja analyyttinen joukossa $B \setminus \{z_0\}$ jollakin $z_0 \in B$.

Esimerkki. Näytä, että

$$\int_{\partial R} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi i\,,$$

missä R on suorakaide keskipisteenään z_0.

Olkoon $K = K(z_0, r)$ suorakaiteen R ympärille piirretty ympyrä ja olkoot γ_k ja β_k arvoilla $k = 1, 2, 3, 4$ polkuja kuten oheisessa kuvassa on osoitettu.



Nyt tiet

$$\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3 * \gamma_4 \quad \text{ja} \quad \beta = \beta_1 * \beta_2 * \beta_3 * \beta_4$$

jakavat piirit ∂R ja K. Kullekin k voidaan valita avoin kiekko Δ_k, joka sisältää suljetun polun $\gamma_k * \overleftarrow{\beta_k}$ ja jossa

$$F(z) = (z - z_0)^{-1}$$

on analyyttinen. Kuvassa näkyy Δ_1. Lauseen 4.6 mukaan

$$\int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z - z_0} - \int\limits_{\beta_k} \frac{dz}{z - z_0} = \int\limits_{\gamma_k * \overleftarrow{\beta_k}} \frac{dz}{z - z_0} = 0$$

kun $1 \leq k \leq 4$. Siten

$$\begin{aligned} \int\limits_{\partial R} \frac{dz}{z - z_0} &= \sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\beta_k} \frac{dz}{z - z_0} \\ &= \int\limits_{|z - z_0| = r} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}dt}{re^{it}} = 2\pi i. \end{aligned}$$

4.8. Huomautus. Cauchyn lauseen 4.6 oletus, että eletään kiekossa, on liian rajoittava — myöhemmin siitä pyritään pääsemään eroon.

Lauseista 4.5 ja 4.6 saadaan:

4.9. Seuraus. *Kiekossa B analyyttisellä funktiolla f on primitiivi B:ssä, ts. analyyttinen funktio f on aina jonkin kiekossa B analyyttisen funktion F derivaatta.*

□

4.10. Huomautus. Edellinen seuraus ei ole totta, jos kiekko korvataan mielivaltaisella alueella. Esimerkiksi funktiolla $1/z$ ei ole primitiiviä $\mathbf{C} \setminus \{0\}$:ssa.

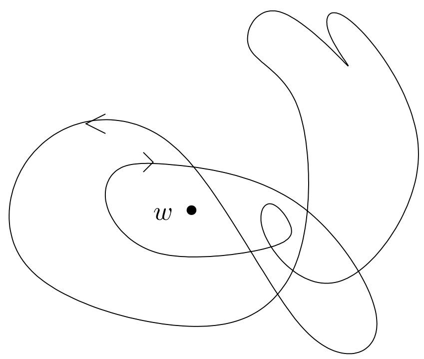
5. Kierrosluvut ja Cauchyn integraalikaava — lokaali versio

5.1. Kierrosluvut

Olkoon γ suljettu tie $\mathbf{C}$:ssä ja $w \in \mathbf{C} \setminus |\gamma|$. Tien γ *kierrosluku pisteen w ympäri* on

$$n(\gamma, w) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - w}.$$

(Lukua $n(\gamma, w)$ kutsutaan myös tien γ *indeksiksi* pisteen w suhteen).



5.1. Lemma. *Olkoon γ suljettu tie ja $w \in \mathbf{C} \setminus |\gamma|$. Tällöin*

$$n(\gamma, w) \in \mathbf{Z}.$$

Todistus: Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$. Määritellään $g : [a, b] \to \mathbf{C}$ asettamalla

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - w} ds.$$

Tällöin g on jatkuva ja $g(a) = 0$, $g(b) = 2\pi i\, n(\gamma, w)$. Lisäksi (HT) g on paloittain jatkuvasti derivoituva ja

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - w}$$

jokaisella $t \in [a,b]$, jossa γ' on jatkuva. Määritellään

$$h(t) = e^{-g(t)}(\gamma(t) - w).$$

Nyt h on jatkuva ja

$$\begin{aligned} h'(t) &= e^{-g(t)}\big(\gamma'(t) - g'(t)(\gamma(t) - w)\big) \\ &= e^{-g(t)}(\gamma'(t) - \gamma'(t)) = 0 \end{aligned}$$

jokaisessa t, jossa γ' on jatkuva. Niinpä $h'(t) = 0$ paitsi äärellisen monella $t \in [a,b]$. Siten, koska h on jatkuva, saadaan

$$h(t) = c = \text{vakio kaikilla } t \in [a,b].$$

Erityisesti, $h(a) = h(b)$ ja siis

$$e^{-g(b)} = \frac{h(b)}{\gamma(b) - w} = \frac{h(a)}{\gamma(a) - w} = e^{-g(a)} = e^0 = 1.$$

Lauseesta 1.26 seuraa, että $-2\pi i\, n(\gamma, w) = -g(b) = 2\pi i k$ jollakin $k \in \mathbf{Z}$, mistä väite seuraa. □

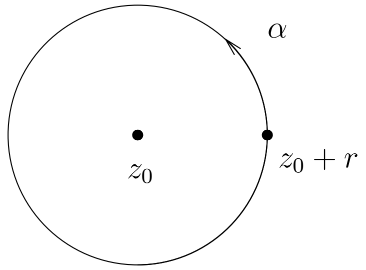
5.2. Huomautus. Jos γ ja σ ovat suljettuja teitä niin

$$n(\gamma * \sigma, w) = n(\gamma, w) + n(\sigma, w), \qquad \text{mikäli } \gamma * \sigma \text{ on määritelty,}$$

ja

$$n(\gamma, w) = -n(\overleftarrow{\gamma}, w)\,.$$

Esimerkki. Olkoon $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, jolloin $n(\alpha, z_0) = 1$.



Olkoon $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_m$, missä jokaisella $k = 1, \ldots, m$ joko $\gamma_k = \alpha$ tai $\gamma_k = \overleftarrow{\alpha}$. Tällöin

$$n(\gamma, z_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{P}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0} + \frac{N}{2\pi i} \int\limits_{\overleftarrow{\alpha}} \frac{dz}{z - z_0} = P - N,$$

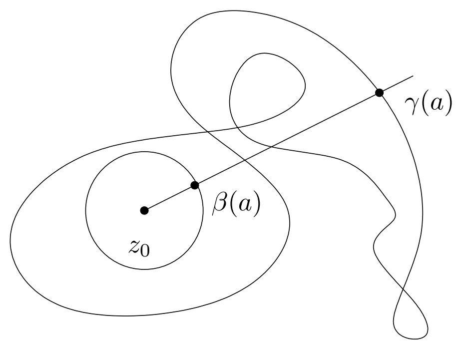
missä

$$P = \#\{k : \gamma_k = \alpha\} \quad \text{"positiiviset kierrokset" ja}$$
$$N = \#\{k : \gamma_k = \overleftarrow{\alpha}\} \quad \text{"negatiiviset kierrokset".}$$

Kierrosluku ottaa siis suunnan huomioon.

5.3. Huomautus. Olkoon $\gamma : [a, b] \to \mathbf{C}$ suljettu tie ja $z_0 \in \mathbf{C} \setminus |\gamma|$. Nyt voidaan valita $r > 0$ siten, että $\overline{B}(z_0, r) \cap |\gamma| = \emptyset$ ja määritellä $\beta : [a, b] \to \mathbf{C}$,

$$\beta(t) = z_0 + r\frac{\gamma(t) - z_0}{|\gamma(t) - z_0|}.$$



Tällöin γ kiertää pisteen z_0 ympäri kerran positiiviseen suuntaan (osavälillä $[c, d] \subset [a, b]$) jos ja vain jos β kiertää kehän $\partial B(z_o, r)$ kerran vastapäivään. Vastaavasti γ kiertää pisteen z_0 ympäri kerran negatiiviseen suuntaan jos ja vain jos β kiertää kehän $\partial B(z_o, r)$ kerran myötäpäivään.

Huomataan, että γ kiertää pisteen z_0 kerran ympäri osavälillä $[c, d]$, jos $\beta(c) = \beta(d) = \beta(a)$, $\beta([c, d]) = \partial B(z_0, r)$ ja $\beta(t) \neq \beta(a)$ kaikilla t, joille $c < t < d$.

Myöhemmin todistetaan, että tästä johtuen tien γ kierrosluku pisteen z_0 ympäri on "selvästi" tien β kierrosluku pisteen z_0 ympäri, mikä on helppo katsoa kuvasta.

5.4. Lemma. *Olkoon γ suljettu tie kompleksitasossa $\mathbf{C}$ ja D joukon $G := \mathbf{C} \setminus |\gamma|$ eräs komponentti. Tällöin*

$$n(\gamma, a) = n(\gamma, b) \quad \textit{kaikilla } a, b \in D\,.$$

Jos D on joukon G rajoittamaton komponentti, on $n(\gamma, z) = 0$ kaikilla $z \in D$.

TODISTUS: Määritellään $f : G \to \mathbf{C}$, $f(z) = n(\gamma, z)$. Osoitetaan, että f on jatkuva, jolloin $f(D)$ on yhtenäinen joukon $\mathbf{Z}$ osajoukko — siis välttämättä yksi piste $\{k\}$ eli $n(\gamma, a) = k$ kaikilla $a \in D$.

Olkoon $z_0 \in G$ ja $r = \operatorname{dist}(z_0, |\gamma|) > 0$. Jos $|z - z_0| < \delta < \frac{1}{2}r$, niin

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(z_0)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0}\right) d\zeta\right| \\
&= \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{z - z_0}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta\right| \\
&\le \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_\gamma \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z||\zeta - z_0|} d\zeta.
\end{aligned}$$

Kun $|z - z_0| < \frac{1}{2}r$ ja $\zeta \in |\gamma|$, niin $|\zeta - z_0| \ge r$ ja

$$|\zeta - z| \ge |\zeta - z_0| - |z - z_0| > r - \frac{1}{2}r = \frac{r}{2}\,.$$

Kiinnitetään $\varepsilon > 0$ ja valitaan $\delta < \frac{r}{2}$ siten, että

$$\delta < \frac{\varepsilon \pi r^2}{2l(\gamma)},$$

jolloin

$$|f(z) - f(z_0)| \le \frac{|z - z_0|}{2\pi} \int_\gamma \frac{|d\zeta|}{\underbrace{|\zeta - z||\zeta - z_0|}_{> \frac{r^2}{2}}} \le \frac{2\delta}{r^2 \pi} l(\gamma) < \varepsilon.$$

Siten f on jatkuva ja siis f on vakio joukossa D.

Jos D on rajoittamaton, valitaan $R > 0$ siten, että $|\gamma| \subset B = B(0, R)$. Jos $z_0 \in D$ ja $|z_0| > R$, on $\frac{1}{z - z_0}$ analyyttinen B:ssä, joten Cauchyn lauseesta 4.6 seuraa, että

$$n(\gamma, z_0) = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = 0\,.$$

Siten todistuksen alkuosasta seuraa, että

$$n(\gamma, w) = n(\gamma, z_0) = 0 \quad \text{kaikilla } w \in D\,.$$

$\square$

5.2. Lokaali Cauchyn integraalikaava

5.5. Lause (Cauchyn integraalikaava — lokaali muoto). *Olkoon B avoin kiekko, $f : B \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja γ suljettu tie kiekossa B. Tällöin*

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

kaikilla $z \in B \setminus |\gamma|$.

Todistus: Kiinnitetään $z \in B \setminus |\gamma|$ ja määritellään $g : B \to \mathbf{C}$,

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{kun } \zeta \neq z \\ f'(z)\,, & \text{kun } \zeta = z. \end{cases}$$

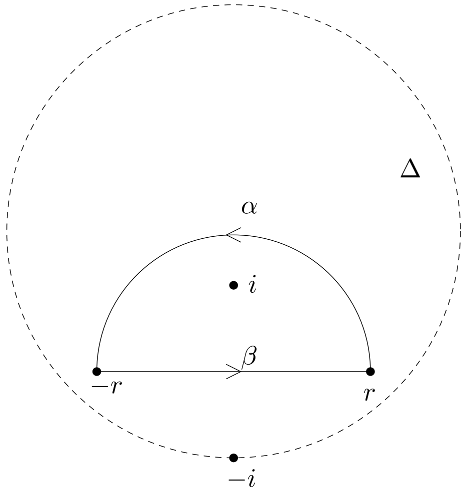
Tällöin g on jatkuva kiekossa B ja analyyttinen joukossa $B \setminus \{z\}$, joten Cauchyn lausetta (ja lemmaa 4.2) voidaan soveltaa funktioon g. Niinpä

$$\begin{aligned} 0 = \int_\gamma g(\zeta)d\zeta &= \int_\gamma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i\, n(\gamma, z)f(z). \end{aligned}$$

□

Esimerkki. Laske integraali

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2 + 1}\, dt\,.$$



Koska integrandi on parillinen funktio ja koska vastaava funktio, jossa $\cos t$ on korvattu funktiolla $\sin t$, on pariton, saadaan kun $r > 0$,

$$(*) \qquad \int_0^r \frac{\cos t \, dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} \frac{\cos t \, dt}{t^2+1} + \frac{i}{2}\int_{-r}^{r} \frac{\sin t \, dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\int_{-r}^{r} \frac{e^{it} \, dt}{t^2+1}.$$

Tämä johtaa ajatukset analyyttiseen funktioon

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+1}.$$

Voidaan myös ajatella, että

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-i}, \qquad \text{missä} \qquad f(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}.$$

Tehtävän ratkaisemisen salaisuus piilee integroinnissa yli polun $\gamma = \beta * \alpha$, missä $\beta(t) = t$, kun $-r \leq t \leq r$ ja $\alpha(t) = re^{it}$, kun $0 \leq t \leq \pi$. Oletetaan, että $r > 1$. Käyttämällä yhtälöä $(*)$ lasketaan

$$\begin{aligned}
\int_0^r \frac{\cos t \, dt}{t^2+1} &= \frac{1}{2}\int_\beta \frac{e^{iz} \, dz}{z^2+1} = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^{iz} \, dz}{z^2+1} - \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{e^{iz} \, dz}{z^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{z-i} - \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{e^{iz} \, dz}{z^2+1} = \pi i \, n(\gamma, i) f(i) - \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{e^{iz} \, dz}{z^2+1} \\
&= \frac{\pi}{2e} - \frac{1}{2}\int_\alpha \frac{e^{iz} \, dz}{z^2+1}.
\end{aligned}$$

Tässä laskelmassa sovellettiin Cauchyn lauseen lokaalia versiota funktioon f ja kiekkoon Δ, johon $|\gamma|$ sisältyy, mutta johon piste $-i$ ei sisälly. Edelleen,

$$\begin{aligned}\left|\int_\alpha \frac{e^{iz}\,dz}{z^2+1}\right| &\le \int_\alpha \frac{|e^{iz}||dz|}{|z^2+1|} \le \int_\alpha \frac{e^{-Im(z)}|dz|}{|z|^2-1} \\ &= \frac{r}{r^2-1}\int_0^\pi e^{-r\sin t}dt = \frac{2r}{r^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\sin t}dt \\ &\le \frac{2r}{r^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2rt}{\pi}}dt = \frac{\pi(1-e^{-r})}{r^2-1} \to 0\,,\end{aligned}$$

kun $r \to \infty$. Niinpä

$$\int_0^\infty \frac{\cos t}{t^2+1}\,dt = \lim_{r\to\infty}\int_0^r \frac{\cos t}{t^2+1}\,dt = \frac{\pi}{2e}.$$

5.3. Lokaalin Cauchyn integraalikaavan seurauksia

Tarvitaan lemma:

5.6. Lemma. *Olkoon γ tie, $h : |\gamma| \to \mathbf{C}$ jatkuva ja $k = 1, 2, \ldots$. Määritellään $H : \mathbf{C} \setminus |\gamma| \to \mathbf{C}$,*

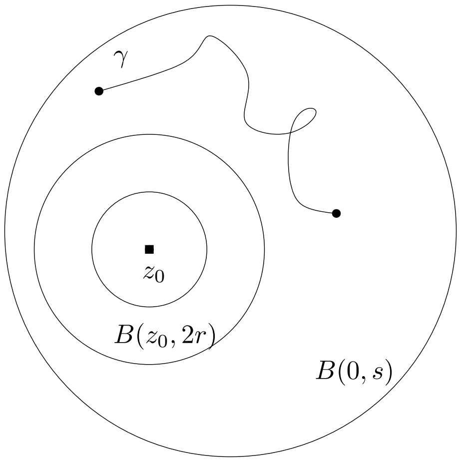
$$H(z) = \int_\gamma \frac{h(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^k}.$$

Tällöin H on analyyttinen joukossa $G = \mathbf{C} \setminus |\gamma|$ ja

$$H'(z) = k\int_\gamma \frac{h(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

Todistus: Todistetaan vain tapaus $k = 1$. (Kun $k = 2$, todistus on samanlainen, mutta monimutkaisempi, HT.)
Väite on siis, että

$$\frac{H(z) - H(z_0)}{z - z_0} \to \int_\gamma \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2}d\zeta.$$



Olkoon $B(z_0,2r) \subset G$.Jos $z \in G$ ja $z \neq z_0$ niin

$$\frac{H(z)-H(z_0)}{z-z_0} = \frac{1}{z-z_0} \int\limits_{\gamma} h(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) d\zeta = \int\limits_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta,$$

mistä saadaan, että

$$\begin{aligned} &\frac{H(z)-H(z_0)}{z-z_0} - \int\limits_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \\ &= \int\limits_{\gamma} h(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} - \frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) d\zeta \\ &= (z - z_0) \int\limits_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2(\zeta - z_0)} d\zeta. \end{aligned}$$

Nyt jos $z \in B(z_0,r) \setminus \{z_0\}$ ja $\zeta \in |\gamma|$, niin $|\zeta - z_0| \geq 2r \geq r$ ja

$$|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| \geq r\,.$$

Tällöin

$$\left| \frac{H(z)-H(z_0)}{z-z_0} - \int\limits_{\gamma} \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq |z - z_0| \underbrace{\int\limits_{\gamma} \frac{|h(\zeta)||d\zeta|}{r^3}}_{<\infty} \to 0,$$

kun $z \to z_0$. $\square$

5.7. Lause. *Olkoon f analyyttinen joukossa G. Silloin f' on myös analyyttinen joukossa G. Erityisesti f' on jatkuva joukossa G.*

TODISTUS: Olkoon $B = B(z_0, r) \subset G$ kiekko. Olkoon $0 < s < r$ ja merkitään $D = B(z_0, s)$. Olkoon $\gamma(t) = z_0 + se^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, jolloin lokaalia Cauchyn integraalikaavaa voidaan soveltaa kiekossa B: koska $n(\gamma, z) = 1$,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$$

kaikilla $z \in D$. Siten lemmasta 5.6 arvolla $k = 1$ seuraa, että

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$$

kaikilla $z \in D$. Kun sovelletaan uudelleen lemmaa 5.6, tällä kertaa arvolla $k = 2$, saadaan että f' on analyyttinen. $\square$

Induktiolla saadaan:

5.8. Seuraus. *Olkoon f analyyttinen joukossa G. Tällöin kaikkien kertalukujen derivatat $f', f'', f''', \ldots, f^{(n)}$ ovat olemassa ja analyyttisiä joukossa G. Erityisesti ne ovat jatkuvia joukossa G.*

TODISTUS: Harjoitustehtävä. $\square$

Seuraava lemma on lemmalle 4.1 käänteinen väite:

5.9. Lause (Morera[4]). *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ jatkuva, $G \subset \mathbf{C}$ avoin. Jos*

$$\int_{\partial R} f(z) dz = 0$$

kaikilla koordinaatiston suuntaisilla suljetuilla suorakaiteilla $R \subset G$, niin f on analyyttinen joukossa G.

TODISTUS: Riittää osoittaa, että f on analyyttinen mielivaltaisessa kiekossa $B \subset G$. Siellä f toteuttaa lemman 4.4 oletukset kiekossa B, joten funktiolla f on primitiivi kiekossa B. Siten f on analyyttisen funktion derivaattana lauseen 5.7 mukaan analyyttinen kiekossa B. $\square$

[4] Morera, 1856–1909

Yhdistämällä Moreran lause lemman 4.2 kanssa saadaan:

5.10. Lause. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ jatkuva ja f analyyttinen joukossa $G \setminus \{z_0\}$. Tällöin f on analyyttinen joukossa G.* □

Seuraavaksi saadaan lokaali Cauchyn integraalikaava derivaatoille:

5.11. Lause. *Olkoon f analyyttinen kiekossa B, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ja γ suljettu tie kiekossa B. Tällöin*

$$n(\gamma, z) f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

kaikilla $z \in B \setminus |\gamma|$.

Todistus: Induktiolla. Kun $k = 0$, $f^{(0)} = f$ ja tapaus on Cauchyn integraalikaavan 5.5 mukainen. OK.

Induktio-oletus: Kaava pätee arvolla k.

Väite: Kaava pätee arvolla $k + 1$.

Todistus: Koska f' on analyyttinen, voidaan induktio-oletusta soveltaa siihen. Saadaan

$$n(\gamma, z) f^{(k+1)}(z) = n(\gamma, z)(f')^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta.$$

Määritellään

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}},$$

kun $\zeta \in B$ ja $\zeta \neq z$. Tällöin g on analyyttinen joukossa $B \setminus \{z\}$ ja

$$g'(\zeta) = \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} - \frac{(k+1) f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}}.$$

Koska g' on jatkuva joukossa $B \setminus \{z\}$ ja g on sen primitiivi, niin

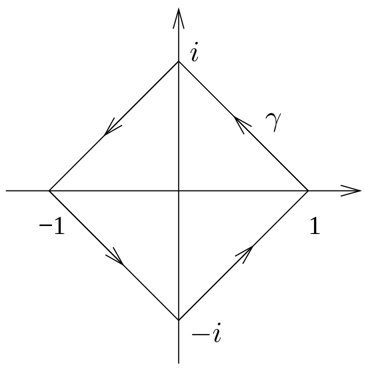
$$\int_\gamma g' \, d\zeta = 0,$$

joten

$$
\begin{aligned}
n(\gamma, z) f^{k+1}(z) &= \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \\
&= \underbrace{\frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} g'(\zeta) d\zeta}_{=0} + \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta \\
&= \frac{(k+1)!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+2}} d\zeta,
\end{aligned}
$$

mistä väite. $\square$

Esimerkki.



Olkoon $\gamma = [1, i] * [i, -1] * [-1, -i] * [-i, 1]$ kuten kuvassa. Laske

$$
I = \int\limits_{\gamma} \frac{e^z + z^2 \sin z}{z^3} dz \,.
$$

Olkoon

$$
f(z) = e^z + z^2 \sin z \,.
$$

Nyt

$$
f'(z) = e^z + 2z \sin z + z^2 \cos z
$$

ja

$$
f''(z) = e^z + 2 \sin z + 4z \cos z - z^2 \sin z \,.
$$

Sovelletaan lauseen 5.11 tapausta $k = 2$, jolloin saadaan

$$I = \frac{2\pi i}{2!} \underbrace{n(\gamma, 0)}_{=1} \underbrace{f''(0)}_{=1} = \pi i.$$

Lauseen 5.11 avulla saadaan analyttisen funktion itsensä arviosta arvio derivaatoille:

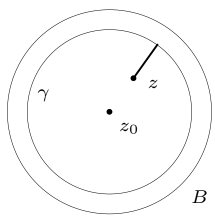
5.12. Lause (Cauchyn estimaatti). *Olkoon f analyyttinen kiekossa $B = B(z_0, r)$. Jos $|f(z)| \le M$ kaikilla $z \in B$, niin*

$$|f^{(k)}(z)| \le \frac{k! M r}{(r - |z - z_0|)^{k+1}}$$

kaikilla $z \in B$, $k = 1, 2, \ldots$. Erityisesti

$$|f^{(k)}(z_0)| \le \frac{k! M}{r^k}.$$

Todistus: Olkoon $z \in B$, $|z - z_0| < s < r$ ja $\gamma(t) = z_0 + se^{it},\ t \in [0, 2\pi]$.



Jos $\zeta \in |\gamma|$, niin

$$|\zeta - z| \ge |\zeta - z_0| - |z - z_0| = s - |z - z_0|,$$

joten käyttämällä lausetta 5.11 saadaan

$$|f^{(k)}(z)| = \frac{k!}{2\pi} \left| \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right|$$
$$\le \frac{k!}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(\zeta)||d\zeta|}{|\zeta - z|^{k+1}} \overset{l(\gamma)=2\pi s}{\le} \frac{k! M s 2\pi}{2\pi (s - |z - z_0|)^{k+1}}.$$

Kun annetaan $s \nearrow r$, väite seuraa. □

5.13. Lause (Liouville[5]). *Rajoitettu kokonainen funktio on vakio.*

TODISTUS: Olkoon f kokonainen ja $|f| \leq M$ jollakin $M \in \mathbf{R}$. Olkoon $z \in \mathbf{C}$ ja $r > 0$. Sovelletaan Cauchyn estimaattia 5.12 kiekkoon $B(z, r)$. Saadaan

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \xrightarrow{r \to \infty} 0.$$

Siten $f'(z) = 0$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$. Niinpä f on vakio. □

5.14. Huomautus. Liouvillen lauseesta seuraa siis, että ei-vakion kokonaisen funktion f kuvajoukko $f(\mathbf{C})$ on rajoittamaton.

Pätee paljon kovempi (ja syvällisempi) tulos, ns. *Picardin*[6] *pieni lause* : "Kokonaiselle ei-vakiolle kuvaukselle $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, joukko $\mathbf{C} \setminus f(\mathbf{C})$ sisältää enintään yhden pisteen."

Mm. seuraava yllättävä Liouvillen lauseen sovellutus osoittaa Liouvillen lauseen tärkeyden:

5.15. Lause (Algebran peruslause). *Olkoon p polynomi,*

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \quad , \quad a_n \neq 0, n \geq 1.$$

Tällöin polynomilla p on juuri kompleksilukujen joukossa $\mathbf{C}$, ts. on olemassa $z \in \mathbf{C}$, jolle $p(z) = 0$.

TODISTUS: *Antiteesi:* $p(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \mathbf{C}$.

Tällöin

$$f(z) = \frac{1}{p(z)}$$

on analyyttinen joukossa $\mathbf{C}$. Nyt

$$|p(z)| = |z|^n \left| \frac{a_0}{z^n} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z} + a_n \right| \geq |z|^n \Big(\underbrace{|a_n|}_{\neq 0} - \underbrace{\frac{|a_0|}{|z|^n} - \ldots - \frac{|a_{n-1}|}{|z|}}_{\to 0} \Big) \to \infty,$$

[5] Liouville, 1809–1882

[6] Picard, 1856–1941

kun $|z| \to \infty$. Siten $|f(z)| \to 0$, kun $|z| \to \infty$, joten on olemassa $r > 0$, jolle

$$|f(z)| \leq 1 \quad \text{kaikilla } z, \text{ joilla } |z| \geq r\,.$$

Toisaalta f on jatkuva ja siis rajoitettu, $|f(z)| \leq M$, suljetussa kiekossa $\overline{B}(0, r)$. Siispä

$$|f(z)| \leq \max(M, 1) \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}\,.$$

Nyt Liouvillen lauseesta seuraa, että f on vakio. Niinpä p on vakio, mikä on ristiriita.

□

5.4. Maksimiperiaate

5.16. Lause (Maksimiperiaate/Maksimimodulilause)**.** *Olkoon $D \subset \mathbf{C}$ alue ja $f : D \to \mathbf{C}$ analyyttinen. Jos on olemassa sellainen $z_0 \in D$, että $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ kaikilla $z \in D$, niin f on vakio alueessa D.*

Todistus: Merkitään $w(z) = |f(z)|$. Lauseen 2.14 nojalla riittää osoittaa, että w on vakio. Olkoon

$$M = w(z_0) = |f(z_0)| = \max_{z \in D} w(z)\,.$$

Olkoon

$$U = \{z \in D : w(z) < M\} \quad \text{ja} \quad V = \{z \in D : w(z) = M\}\,.$$

Tällöin $U \cap V = \emptyset$, $U \cup V = D$ ja $z_0 \in V \neq \emptyset$. Koska w on jatkuva, on U avoin. Siten riittää osoittaa, että V on myös avoin, jolloin alueen D yhtenäisyydestä seuraa, että $U = \emptyset$ eli $w(z) = M$ kaikilla $z \in D$.

Olkoon $z_1 \in V$ ja valitaan $r > 0$, jolle $B = B(z_1, r) \subset D$. Jos $0 < s < r$, niin voidaan soveltaa Cauchyn integraalikaavaa kiekossa B tiehen $\gamma(t) = z_1 + se^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Saadaan

$$M = w(z_1) = |f(z_1)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_1} d\zeta\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|f(\gamma(t))|\,\overbrace{|\gamma'(t)|}^{=s}}{\underbrace{|\gamma(t) - z_1|}_{=s}} dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(z_1 + se^{it})dt.$$

Niinpä

$$0 \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{M - w(z_1 + se^{it})}_{\geq 0} \, dt \geq 0.$$

Koska integroitava funktio $M - w$ on jatkuva ja ei-negatiivinen,

$$w(z_1 + se^{it}) = M \quad \text{kaikilla } t \in [0, 2\pi] \, .$$

Tästä seuraa, että

$$w(z_1 + se^{it}) = M \quad \text{kaikilla } s \in [0, r] \text{ ja } t \in [0, 2\pi] \, ,$$

eli $w(z) = M$ kaikilla $z \in B(z_1, r)$, joten $B(z_1, r) \subset V$. □

5.17. Seuraus. *Olkoon $D \subset \mathbf{C}$ rajoitettu alue ja $f : \overline{D} \to \mathbf{C}$ jatkuva ja f analyyttinen alueessa D. Tällöin on olemassa $w_0 \in \partial D$, jolle $|f(z)| \leq |f(w_0)|$ kaikilla $z \in \overline{D}$.*

TODISTUS: Koska $|f|$ on jatkuva, on sellainen $w_0 \in \overline{D}$, jolle

$$|f(w_0)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)| \, .$$

Jos $w_0 \notin D$, niin $w_0 \in \partial D$ ja asia on selvä. Jos taas $w_0 \in D$, niin lauseen 5.16 nojalla f on vakio joukossa $\overline{D}$. Tällöin kaikilla $w_1 \in \partial D$ pätee

$$|f(w_1)| = \max_{z \in \overline{D}} |f(z)| \, .$$

□

6. Cauchyn lause ja integraalikaava — yleiset versiot

Cauchyn lauseen yleisen muodon todistusta varten tarvitaan vielä joitakin käsitteitä ja ”muistutus” iteroidusta integraaleista:

Jos $R = \{z = x + iy : a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d\}$ on suljettu suorakaide ja $h : R \to \mathbf{C}$ jatkuva, niin Fubinin lauseen nojalla

$$\int_c^d \Big(\int_a^b h(t,s)dt \Big) ds = \int_a^b \Big(\int_c^d h(t,s)ds \Big) dt. \tag{6.1}$$

Edelleen

6.1. Lemma. *Olkoon $\gamma : [a,b] \to \mathbf{C}$ ja $\beta : [c,d] \to \mathbf{C}$ teitä ja $g : |\gamma| \times |\beta| \to \mathbf{C}$ jatkuva.*[7] *Tällöin*

$$\int_\beta \Big(\int_\gamma g(z,\zeta)dz \Big) d\zeta = \int_\gamma \Big(\int_\beta g(z,\zeta)d\zeta \Big) dz.$$

Todistus: Koska g on jatkuva kompaktissa joukossa $|\gamma| \times |\beta|$, on g tasaisesti jatkuva. Siten kuvaukset

$$\zeta \mapsto \int_\gamma g(z,\zeta)dz \quad \text{ja} \quad z \mapsto \int_\beta g(z,\zeta)d\zeta$$

ovat jatkuvia (HT). Niinpä integraalit ovat hyvin määriteltyjä.

Oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että β ja γ ovat jatkuvasti differentioituvia — yleinen tapaus saadaan jakamalla $[a,b]$ ja $[c,d]$ osaväleihin ja summaamalla. Nyt funktio h,

$$h(t,s) := g(\gamma(t), \beta(s))\gamma'(t)\beta'(s),$$

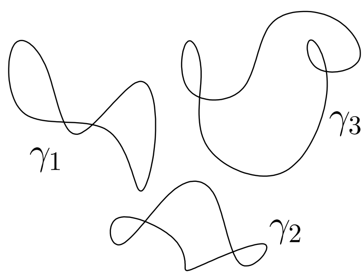
[7] Muista: $|\gamma| \times |\beta| = \{(z,w) \in \mathbf{C}^2 : z \in |\gamma|, w \in |\beta|\}$.

on jatkuva suorakaiteessa $R = [a,b] \times [c,d]$, joten yhtälöstä (6.1) seuraa, että

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\beta} \Big(\int\limits_{\gamma} g(z,\zeta) dz \Big) d\zeta &= \int\limits_{c}^{d} \Big(\int\limits_{a}^{b} g(\gamma(t), \beta(s))\gamma'(t)dt \Big) \beta'(s)ds \\
&= \int\limits_{c}^{d} \Big(\int\limits_{a}^{b} g(\gamma(t), \beta(s))\gamma'(t)\beta'(s)dt \Big) ds = \int\limits_{a}^{b} \int\limits_{c}^{d} h(t,s) ds\, dt \\
&= \int\limits_{a}^{b} \Big(\int\limits_{c}^{d} g(\gamma(t), \beta(s))\beta'(t)ds \Big) \gamma'(s)dt = \int\limits_{\gamma} \Big(\int\limits_{\beta} g(z,\zeta) d\zeta \Big) dz.
\end{aligned}$$

□

6.2. Määritelmä. Kompleksitason *sykli* on äärellinen jono $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$, missä γ_k ovat suljettuja teitä kaikilla $k = 1, 2, \ldots, p$.



6.3. Huomautus. Teiden γ_k järjestyksellä ei ole merkitystä. Usein samastamme esimerkiksi syklit $(\gamma, \beta, \alpha, \overleftarrow{\gamma}, \overleftarrow{\gamma}, \beta)$ ja $(\overleftarrow{\gamma} * \gamma, \beta * \beta, \overleftarrow{\gamma}, \alpha)$.

Jos $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$ on sykli, niin

$$|\sigma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \ldots \cup |\gamma_p|,$$

ja edelleen σ on *sykli joukossa* A, jos $|\sigma| \subset A$.

Jos $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$ on sykli ja $f : |\sigma| \to \mathbf{C}$ on jatkuva, niin

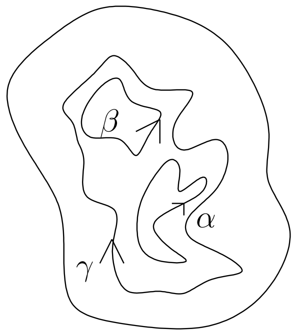
$$\int\limits_{\sigma} f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} \int\limits_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Erityisesti, syklin σ kierrosluku pisteen $z_0 \notin |\sigma|$ ympäri on

$$n(\sigma, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{dz}{z - z_0} = \sum_{k=1}^{p} n(\gamma_k, z_0).$$

6.4. Määritelmä. Olkoon σ sykli avoimessa joukossa $G \subset \mathbf{C}$. Sykli σ on *nollahomologinen* joukossa G, jos

$$n(\sigma, z) = 0 \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C} \setminus G\,.$$



Kaksi sykliä $\sigma_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$ ja $\sigma_1 = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q)$ joukossa G ovat *homologiset* joukossa G, jos sykli

$$\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p, \overleftarrow{\beta_1}, \overleftarrow{\beta_2}, \ldots, \overleftarrow{\beta_q})$$

on nollahomologinen joukossa G, ts. jos

$$n(\sigma_0, z) = n(\sigma_1, z) \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C} \setminus G\,.$$

Lopuksi, joukon G tiet λ_0 ja λ_1 ovat *homologiset* joukossa G, jos niillä on yhteiset alku- ja loppupisteet ja suljettu tie $\lambda = \lambda_0 * \overleftarrow{\lambda_1}$ on nollahomologinen joukossa G.

6.5. Huomautus. Cauchyn lauseen lokaalin version nojalla kaikki syklit ovat nollahomologisia kiekossa B.

6.6. Lause (Cauchyn lause). *Olkoon σ sykli avoimessa joukossa G. Tällöin*

$$\int_\sigma f(z)dz = 0 \quad \textit{kaikilla analyyttisilla funktioilla } f : G \to \mathbf{C}\,,$$

jos ja vain jos σ on nollahomologinen joukossa G.

Todistus: Todistetaan ensin ehdon välttämättömyys. Olkoon $z_0 \in \mathbf{C} \setminus G$. Tällöin

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

on analyyttinen joukossa G, joten

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{dz}{z - z_0} = n(\sigma, z_0).$$

Niinpä σ on nollahomologinen sykli joukossa G.

Käydään sitten ehdon riittävyyden kimppuun. Olkoon σ nollahomologinen sykli joukossa G. Määritellään

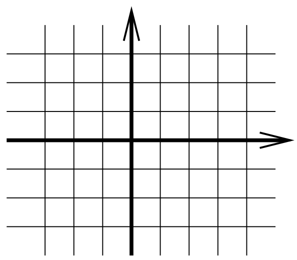
$$V = \{z \in \mathbf{C} \setminus |\sigma| : n(\sigma, z) = 0\}.$$

Koska $n(\sigma, \cdot)$ on vakio joukon $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$ komponenteissa, on V yhdiste joukon $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$ komponentteja. Siten V on avoin. Toisaalta V sisältää joukon $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$ rajoittamattoman komponentin lemman 5.4 nojalla. Oletuksen nojalla $\mathbf{C} \setminus G \subset V$. Siten $K := \mathbf{C} \setminus V \subset G$ on suljettu ja rajoitettu eli kompakti. Lisäksi $|\sigma| \subset K$. Olkoon $\delta < \operatorname{dist}(K, \partial G)$ positiivinen. Tällöin $B(z, \delta) \subset G$ kaikilla $z \in K$.

Jaetaan $\mathbf{C}$ sisuksiltaan pistevieraisiin koordinaatiston suuntaisiin neliöihin, joiden reunat ovat suorilla

$$x = \frac{n\delta}{2} \quad \text{ja} \quad y = \frac{n\delta}{2}, \qquad n \in \mathbf{Z},$$

ts. jokaisen neliön sivun pituus on $\frac{\delta}{2}$ ja neljän kärki on origossa.



Rajoitettu joukko K kohtaa vain äärellisen monta näistä neliöista. Olkoot ne $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r$. Konstruktiosta seuraa, että jos z_j on neliön Q_j keskipiste, niin $B_j := B(z_j, \frac{\delta}{2}) \subset G$, sillä muuten olisi $B(z, \delta) \cap \partial G \neq \emptyset$ kaikilla $z \in Q_j \cap K$, mikä on ristiriita. Edelleen $Q_j \subset B_j$.

Olkoon nyt f analyyttinen joukossa G.
Väite:

$$\int_\sigma f(z)dz = 0\,.$$

Olkoon $k = 1, \ldots, r$ ja kiinnitetään $z \in \operatorname{int} Q_k$. Nyt voidaan soveltaa lokaalia Cauchyn integraalikaavaa kiekossa B_k. Saadaan

$$f(z) = \underbrace{n(\partial Q_k, z)}_{=1} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_k} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

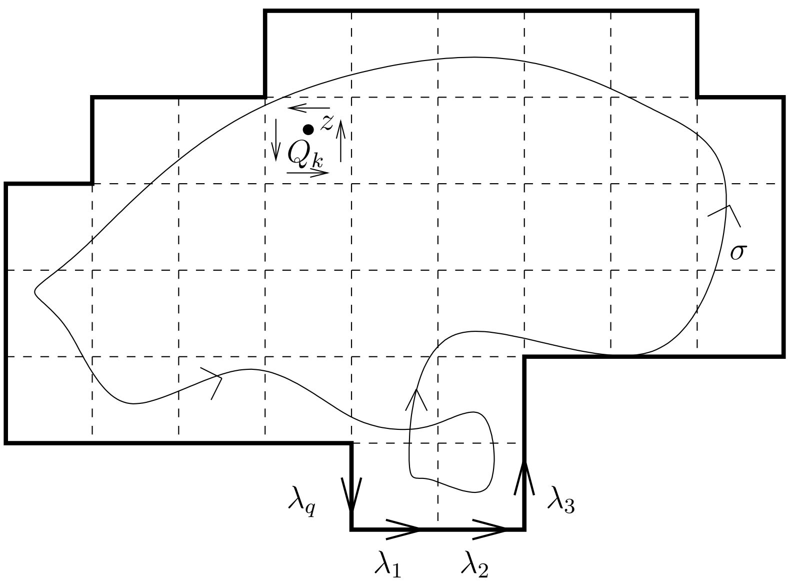
Nyt jos $j \neq k$, niin lokaalista Cauchyn lauseesta ja integraalikaavasta kiekossa B_j seuraa, että

$$0 = \underbrace{n(\partial Q_j, z)}_{=0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_j} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}.$$

Siten

$$(*) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{r} \int_{\partial Q_j} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

kaikilla $z \in \operatorname{int} Q_k$. Yhtälö $(*)$ pätee kaikilla k, joten se pätee kaikilla $z \in \bigcup_{j=1}^{r} \operatorname{int} Q_j$.



Olkoon nyt λ yksi tien ∂Q_j muodostavista suunnatuista janoista. Nyt joko $|\lambda| \cap K = \emptyset$ tai $|\lambda| \cap K \neq \emptyset$.

Jos $|\lambda| \cap K \neq \emptyset$, niin $|\lambda|$ on myös erään toisen neliön Q_k sivu. Tällöin yhtälön $(*)$ oikean puolen integraali käy yli teiden λ ja $\overleftarrow{\lambda}$, jotka integroitaessa kumoavat toisensa. Siten kaikilla $z \in \bigcup_{j=1}^{q} \operatorname{int} Q_j$

$$(**) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{q} \int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z},$$

missä $\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ ovat ne neliöiden Q_j suunnatut reunajanat, joiden jäljet eivät leikkaa joukkoa K. Lemmasta 5.6 saadaan, että

$$H(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

määrittelee analyyttisen funktion, erityisesti siis jatkuvan funktion joukossa $\mathbf{C} \setminus |\lambda_k|$. Siten yhtälön $(**)$ oikea puoli määrittelee jatkuvan funktion joukossa

$$\mathbf{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{q} |\lambda_k| \,.$$

Huomaa, että

$$K \subset \mathbf{C} \setminus \bigcup_{k=1}^{q} |\lambda_k| \,.$$

Koska yhtälön $(**)$ vasen puoli on analyyttisenä jatkuva joukossa G, pätee $(**)$ siis myös niillä neliöiden Q_j reunojen osilla, jotka eivät kuulu janojen λ_j jälkiin. Erityisesti, $(**)$ pätee kaikilla $z \in |\sigma|$.

Todistuksen lopuksi olkoon $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$. Nyt

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma} f(z)dz &\overset{(**)}{=} \int_{\sigma} \left(\sum_{k=1}^{q} \int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \right) dz \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} \int_{\gamma_l} \left(\int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \right) dz
\end{aligned}$$

ja koska integrandi on jatkuva joukossa

$$\bigcup_{k,l} |\gamma_k| \times |\lambda_k| \,,$$

niin lemman 6.1 mukaan edellinen on yhtä suuri kuin

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{p}\int_{\lambda_k}\left(\int_{\gamma_l}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right) dz\, d\zeta &= \sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} f(\zeta)\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_l}\frac{dz}{z-\zeta}\right) d\zeta \\
&= -\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} f(\zeta)\left(\sum_{l=1}^{p}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_l}\frac{dz}{\zeta - z}\right) d\zeta \\
&= -\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} f(\zeta) n(\sigma,\zeta)\, d\zeta = 0,
\end{aligned}$$

koska $n(\sigma,\zeta) = 0$ kaikilla $\zeta \in \lambda_k$, mikä johtuu siitä, että koska $|\lambda_k| \cap K = 0$, niin $|\lambda_k| \subset V$. □

6.7. Seuraus. *Olkoon f analyyttinen joukossa G ja σ_0 ja σ_1 G:ssä homologisia syklejä tai teitä. Tällöin*

$$\int_{\sigma_0} f(z)dz = \int_{\sigma_1} f(z)dz.$$

TODISTUS: Jos $\sigma_0 = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ ja $\sigma_1 = (\beta_1, \ldots, \beta_q)$ syklejä ja homologisia joukossa G, niin sovelletaan Cauchyn lausetta nollahomologiseen sykliin $\sigma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_p, \overleftarrow{\beta_1}, \ldots, \overleftarrow{\beta_q})$, jolloin

$$\int_{\sigma_0} f(z)dz - \int_{\sigma_1} f(z)dz = \int_{\sigma} f(z)\, dz = 0.$$

Jos σ_0 ja σ_1 ovat teitä, niin samoin väite seuraa soveltamalla Cauchyn lausetta nollahomologiseen sykliin $(\sigma_0 * \overleftarrow{\sigma_1})$. □

6.8. Lause (Cauchyn integraalikaava). *Olkoon f analyyttinen joukossa G ja σ nollahomologinen sykli joukossa G. Tällöin*

$$n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

kaikilla $z \in G \setminus |\sigma|$.

Todistus: Vertaa lokaalin version lauseen 5.5 todistukseen.

Olkoon $z \in G \setminus |\sigma|$ ja määritellään $g : G \to \mathbf{C}$,

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \text{kun } \zeta \neq z \\ f'(z), & \text{kun } \zeta = z. \end{cases}$$

Tällöin g on jatkuva joukossa G ja analyyttinen joukossa $G \setminus \{z\}$. Nyt lauseesta 5.10 seuraa, että f on analyyttinen joukossa G. Niinpä Cauchyn lauseen nojalla

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\sigma g(\zeta)d\zeta = \int_\sigma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_\sigma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i\, n(\sigma, z)f(z). \end{aligned}$$

□

6.9. Lause. *Olkoon f analyyttinen ja σ nollahomologinen sykli joukossa G. Tällöin kaikilla $k = 1, 2, \ldots$*

$$n(\sigma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta,$$

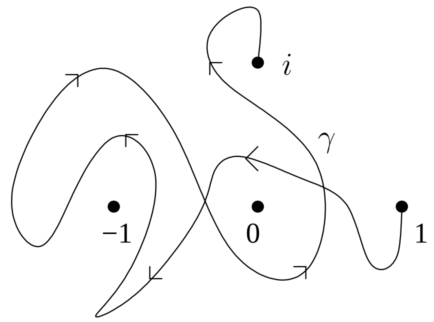
kun $z \in G \setminus |\sigma|$.

Todistus: Kuten lauseen 5.11 todistus, HT. □

Esimerkki. Laske integraali

$$\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2}\,dz$$

pitkin tietä γ, joka on kuvattu oheisessa kuvassa.



Tehdään integrandista osamurtokehitelmä. Saadaan

$$\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2}dz = \int_\gamma \left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z+1}\right)dz = \int_\gamma \frac{dz}{z^2} + \int_\gamma \frac{dz}{z+1}.$$

Koska $F(z) = -z^{-1}$ on funktion $f(z) = z^{-2}$ primitiivi joukossa $\mathbf{C}\setminus\{0\}$, ensimmäinen integraali on helppo laskea:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2} = \Big/_{1}^{i} -\frac{1}{z} = 1+i.$$

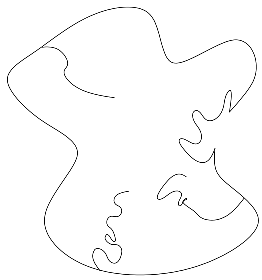
Koska γ on homologinen janan $\beta = [1,i]$ kanssa joukossa $\mathbf{C}\setminus\{-1\}$, jossa myös funktio $g(z) = (z+1)^{-1}$ on analyyttinen, seuraus 6.7 antaa

$$\int_\gamma \frac{dz}{z+1} = \int_\beta \frac{dz}{z+1} = \Big/_{1}^{i} \operatorname{Log}(z+1) = \ln\sqrt{2} + \frac{\pi i}{4} - \ln 2 = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{\pi i}{4}.$$

Tässä on hyödynnetty tietoa, että $G(z) = \operatorname{Log}(z+1)$ on funktion g primitiivi joukossa $\mathbf{C}\setminus(-\infty,-1]$, joka sisältää janan $\beta = [1,i]$. Tulokseksi saadaan siis

$$\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2}dz = 1 - \ln\sqrt{2} + i(1+\frac{\pi}{4}).$$

6.10. Määritelmä. Alue $D \subset \mathbf{C}$ on *yhdesti yhtenäinen*, jos jokainen joukon D suljettu tie γ (ja siten jokainen sykli) on nollahomologinen joukossa D.



6.11. Huomautus. Cauchyn lauseen ja integraalikaavan väitteet pätevät kaikille sykleille yhdesti yhtenäisissä alueissa.

6.12. Huomautus. Rajoitettu alue D on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain jos $\mathbf{C} \setminus D$ on yhtenäinen (HT).

Rajoittamaton alue $D \neq \mathbf{C}$ on yhdesti yhtenäinen, jos ja vain, jos joukon $\mathbf{C} \setminus D$ kaikki komponentit ovat rajoittamattomia (HT).

6.13. Lause. *Olkoon $D \subset \mathbf{C}$ alue. Jokaisella analyyttisellä funktiolla $f : D \to \mathbf{C}$ on primitiivi alueessa D, jos ja vain jos D on yhdesti yhtenäinen.*

Todistus: Olkoon f analyyttinen ja D yhdesti yhtenäinen. Tällöin Cauchyn lauseesta seuraa, että

$$\int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \text{kaikilla suljetuilla teillä } \gamma\,, \quad |\gamma| \subset D\,.$$

Nyt lauseen 4.5 nojalla funktiolla f on primitiivi alueessa D.

Olkoon sitten γ suljettu tie ja $z_0 \in \mathbf{C} \setminus D$. Nyt funktio

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

on analyyttinen alueessa D, joten sillä on primitiivi siellä. Siispä lauseen 3.15 nojalla

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)dz = n(\gamma, z_0).$$

Tie γ on siis nollahomologinen, joten D on yhdesti yhtenäinen. $\square$

6.14. Lause. *Yhdesti yhtenäisessä alueessa D on logaritmin haara, jos $0 \notin D$.*

TODISTUS: Lauseesta 6.13 seuraa, että funktiolla $\frac{1}{z}$ on primitiivi f alueessa D. Kiinnitetään $z_0 \in D$ ja asetetaan

$$\begin{aligned} g(z) &= f(z) - f(z_0) + \operatorname{Log} z_0 \\ F(z) &= ze^{-g(z)} \end{aligned}$$

Nyt g ja F ovat analyyttisiä ja g on funktion $\frac{1}{z}$ primitiivi, koska $g'(z) = \frac{1}{z}$. Edelleen

$$F'(z) = e^{-g(z)}(1 - z\frac{1}{z}) = 0.$$

Siten F on vakio ja koska

$$F(z_0) = z_0 e^{-g(z_0)} = z_0 e^{-\operatorname{Log} z_0} = \frac{z_0}{z_0} = 1,$$

on $F(z) = 1$ kaikilla $z \in D$. Toisin sanoen $z = e^{g(z)}$ kaikilla $z \in D$ eli g on logaritmin haara alueessa D. □

7. Analyyttisen funktion potenssisarjaesitys

7.1. Kompleksisista sarjoista

7.1. Määritelmä. Olkoon $z_n \in \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots$. Kompleksinen sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

suppenee (*kohti lukua* $s \in \mathbf{C}$), jos on olemassa raja-arvo

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} z_n \quad (= s).$$

Tällöin merkitään

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ja sanotaan, että s on sarjan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ summa. Toisin sanoen, jos

$$s_m = \sum_{n=1}^{m} z_n\,,$$

niin

$$\text{sarja} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_n \quad \text{suppenee,}$$

jos ja vain jos osasummien s_m jono suppenee.

Jos sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ ei suppene, se *hajaantuu*.

Sanotaan, että sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *suppenee itseisesti*, jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| \quad \text{suppenee.}$$

7.2. Huomautus (Muutama harjoitustehtävä)**.**

- Jos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ suppenee itseisesti, niin $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ suppenee.
- Jos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ suppenevat ja $c \in \mathbf{C}$, niin $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(cz_n + w_n)$ suppenee kohti lukua $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cz_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$.
- Jos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ ja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ suppenevat itseisesti ja $c \in \mathbf{C}$, niin $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(cz_n+w_n)$ suppenee itseisesti kohti lukua $\sum\limits_{n=1}^{\infty} cz_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$.

Jatkossa tarvitaan muutakin indeksointia kuin $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$. Nämä, esimerkiksi $\sum\limits_{n=-k}^{\infty}$, määritellään luonnollisella tavalla. Lisäksi tarvitaan *tuplasarjoja*:

7.3. Määritelmä. Sarja $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ *suppenee*, jos

$$\text{sekä} \quad \sum_{n=0}^{\infty} z_n \quad \text{että} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n} \quad \text{suppenevat.}$$

Tällöin

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} z_n + \sum_{n=1}^{\infty} z_{-n}.$$

Sarja $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} z_n$ *suppenee itseisesti*, jos sekä $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ että $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_{-n}$ suppenevat itseisesti.

Esimerkki. Tutkitaan geometrista sarjaa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$. Sarjan osasumma on

$$s_n = 1 + z + \cdots + z^n .$$

Jos $z = 1$, niin $s_n = n + 1 \to \infty$ (HT).
Jos $z \neq 1$, niin kaavasta

$$(1 - z^{n+1}) = (1 - z)(1 + z + \cdots + z^n)$$

saadaan

$$s_n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}.$$

Jos $|z| < 1$, niin viimeinen termi

$$\frac{z^{n+1}}{1-z} \to 0\,.$$

Jos $|z| > 1$, niin

$$\left|\frac{z^{n+1}}{1-z}\right| \to \infty\,.$$

Jos $|z| = 1$, $z \neq 1$, niin viimeinen termi kiertää $1/|1-z|$-säteisen kiekon kehällä. Siten raja-arvoa ei ole olemassa, kun $|z| = 1$, $z \neq 1$.

Siis

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{suppenee jos ja vain jos} \quad |z| < 1$$

ja tällöin

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}\,.$$

Harjoitustehtävänä voit osoittaa, että suppeneminen on itseistä.

Funktiosarjat. Olkoon $f_n : A \to \mathbf{C}$, $n = 1, 2, \ldots$. Sanotaan, että funktiosarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee (pisteittäin) joukossa* A, jos sarjat

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \quad \text{suppenevat jokaisella } z \in A\,.$$

Sarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee itseisesti, jos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n|$ suppenee.

Sanotaan, että funktiosarja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ *suppenee tasaisesti joukossa* A, jos osasummien jono

$$s_k(z) = \sum_{n=1}^{k} f_n(z)$$

suppenee tasaisesti joukossa A. Toisin sanoen on olemassa $s : A \to \mathbf{C}$, jolle kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$|s_k(z) - s(z)| < \varepsilon$$

kaikilla $z \in A$, kun $k \geq N$.

7.4. Huomautus. *Muista tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerio:*
Jono $s_n : A \to \mathbf{C}$ suppenee tasaisesti (kohti jotain funktiota $s : A \to \mathbf{C}$) jos ja vain jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on $N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, jolle

$$\sup_{z\in A} |s_n(z) - s_m(z)| < \varepsilon$$

kun $n, m \geq N$.

7.5. Huomautus. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee tasaisesti joukossa A, niin funktiojono f_n suppenee tasaisesti kohti nollafunktiota.

7.6. Huomautus. Jos $f_n : A \to \mathbf{C}$ ovat jatkuvia ja $f_n \to f$ tasaisesti joukossa A, niin f on jatkuva.

7.7. Lause (Weierstrassin M-testi)**.** *Olkoon $f_n : A \to \mathbf{C}$ funktiojono, jolle kaikilla $n \in \mathbf{N}$ on sellainen $M_n < \infty$, että*

$$|f_n(z)| \leq M_n$$

kaikilla $z \in A$. Jos sarja $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, niin funktiosarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ suppenee itseisesti ja tasaisesti joukossa A.

Todistus: Itseinen suppeneminen on helppo harjoitustehtävä. Olkoon

$$s_m(z) = \sum_{n=1}^{m} f_n(z)\,.$$

Nyt kun $k > m$, niin kaikilla $z \in A$

$$\begin{aligned}
|s_m(z) - s_k(z)| &= \left| \sum_{n=m+1}^{k} f_n(z) \right| \\
&\leq \sum_{n=m+1}^{k} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{k} M_n \\
&= \sum_{n=1}^{k} M_n - \sum_{n=1}^{m} M_n < \varepsilon,
\end{aligned}$$

kun $k, m \geq N_\varepsilon$, sillä $\left(\sum_{n=1}^{k} M_n \right)_k$ on Cauchy-jono. Siten $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ toteuttaa tasaisen suppenemisen Cauchyn kriteerion. □

7.8. Määritelmä. Sanotaan, että funktiojono $f_n : A \to \mathbf{C}$ suppenee *lokaalisti tasaisesti* joukossa A (kohti funktiota $f : A \to \mathbf{C}$), jos $f_n \to f$ tasaisesti jokaisessa joukon A kompaktissa osajoukossa K.

7.9. Huomautus. Yksiö $\{z\}$ on kompakti, joten jos $f_n \to f$ lokaalisti tasaisesti, niin $f_n \to f$ pisteittäin.

7.10. Lemma. *Olkoot $f_n : G \to \mathbf{C}$ jatkuvia, joille sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$$

suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa G. Jos γ on tie joukossa G, niin

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z)dz.$$

TODISTUS: Harjoitustehtävä. □

7.11. Lause. *Jos analyyttisten funktioiden $f_n : G \to \mathbf{C}$ jono suppenee lokaalisti tasaisesti kohti funktiota $f : G \to \mathbf{C}$, niin f on analyyttinen ja $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokaalisti tasaisesti joukossa G kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$.*

TODISTUS: Koska $f_n \to f$ lokaalisti tasaisesti, on f jatkuva. Lisäksi tasaisesta suppenemisesta kompaktilla joukolla $|\partial R|$ ja Cauchyn lauseesta seuraa, että

$$\int_{\partial R} f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \int_{\partial R} f_n(z)dz = 0$$

kaikilla suljetuilla suorakaiteilla R joukossa G. Niinpä Moreran lauseen 5.9 nojalla f on analyyttinen.

Derivaattojen lokaalin tasaisen konvergenssin osoittamiseksi riittää osoittaa, että $f_n' \to f'$ lokaalisti tasaisesti. Väite seuraa tästä induktiivisesti. Tätä varten riittää osoittaa, että $f_n' \to f'$ tasaisesti kiekossa $B(z_0, r)$, jolle $\overline{B} = \overline{B}(z_0, 2r) \subset G$. (Miksi?)

Nyt sovelletaan Cauchyn estimaattia 5.12 analyyttiseen funktioon $f_n - f$. Nyt kaikilla $z \in B(z_0, r)$

$$\begin{aligned} |f_n'(z) - f'(z)| &\leq \frac{\sup_{z\in\overline{B}} |f(z) - f_n(z)| 2r}{(2r - |z - z_0|)^2} \\ &\leq \frac{2}{r} \sup_{z\in\overline{B}} |f(z) - f_n(z)| \xrightarrow{n\to\infty} 0, \end{aligned}$$

koska $f_n \to f$ tasaisesti kiekossa $\overline{B}$. Siten $f_n' \to f$ tasaisesti kiekossa $B(z_0, r)$. □

7.12. Huomautus. Lause 7.11 ei päde, jos oletetaan vain, että $f_n \to f$ pisteittäin, vaikka tiedettäisiin f analyyttiseksi. Mikäli jono f_n on lokaalisti tasaisesti rajoitettu, niin Cauchyn estimaatin 5.12 avulla nähdään, että tällöin pisteittäisestä konvergenssista seuraa lokaalisti tasainen konvergenssi (HT).

7.13. Lause. *Olkoon $n = 1, 2, \ldots$ ja olkoot $f_n : G \to \mathbf{C}$ analyyttisiä, ja sellaisia, että sarja*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa G. Tällöin

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

on analyyttinen joukossa G ja kaikilla $k = 1, 2, \ldots$ derivaattojen sarja $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}$ suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa G kohti f:n derivaattaa $f^{(k)}$,

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \qquad \text{kun } z \in G\,.$$

TODISTUS: Harjoitustehtävä. □

7.14. Määritelmä. Jos $a_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \dots$, niin määritellään

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) = \inf_n (\sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) \in [-\infty, \infty]$$

ja

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) = \sup_n (\inf\{a_n, a_{n+1}, \dots\}) \in [-\infty, \infty].$$

7.15. Huomautus. Koska $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, \dots\}$ on vähenevä jono lukuja välillä $[-\infty, \infty]$, on sillä raja-arvo ja $\limsup$ on hyvin määritelty.

Esimerkki. Olkoon

$$a_n = i^{2n}, \qquad \text{jolloin} \qquad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1 < 1 = \limsup_{n\to\infty} a_n\,.$$

7.16. Huomautus. Jos $\lim_{n\to\infty} a_n$ on olemassa, niin

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n\,.$$

7.17. Määritelmä. Olkoon $z_0 \in \mathbf{C}$. Funktiosarjoja tyyppiä

$$(*) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

$a_0, a_1, \dots \in \mathbf{C}$, sanotaan *potenssisarjoiksi pisteen z_0 ympärillä (tai Taylorin sarjoiksi pisteessä z_0)*. Luvut a_n ovat potenssisarjan $(*)$ *kertoimia.* Olkoon

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

jolloin[8] $0 \le \rho \le \infty$ on sarjan $(*)$ *suppenemissäde.* Tällöin kiekkoa $B(z_0, \rho)$ sanotaan sarjan $(*)$ *suppenemiskiekoksi.* Jos $\rho = \infty$, niin $B(z_0, \rho) = \mathbf{C}$.

[8] Määritellään $\frac{1}{0} := \infty$ ja $\frac{1}{\infty} := 0$.

7.18. Lause. *Olkoon ρ potenssisarjan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenemissäde. Tällöin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hajaantuu kaikilla z, joille $|z-z_0| > \rho$.*

Jos $\rho > 0$, niin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti kiekossa $B(z_0,\rho)$ ja siten funktio

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

on analyyttinen kiekossa $B(z_0,\rho)$. Lisäksi

$$f^{(n)}(z_0) = n!a_n. \tag{7.1}$$

7.19. Huomautus. Lause 7.18 ei puhu mitään sarjan suppenemisesta suppenemiskiekon $B(z_0,\rho)$ reunalla.

LAUSEEN 7.18 TODISTUS: **1.** Olkoon $|z-z_0| = r > \rho$ eli $r^{-1} < \rho^{-1}$. Tämä tarkoittaa, että on äärettömän monta indeksiä n, joille

$$\sqrt[n]{|a_n|} > r^{-1} \quad \text{eli} \quad |a_n| > r^{-n},$$

joten

$$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n||z-z_0|^n > r^{-n}r^{-n} = 1$$

äärettömän monella n. Erityisesti

$$|a_n(z-z_0)^n| \not\to 0\,,$$

joten sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ hajaantuu.

2. Olkoon $\rho > 0$ ja $0 < r < \rho$. Riittää osoittaa, että $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenee itseisesti ja tasaisesti suljetussa kiekossa $\bar{B}_r := \overline{B}(z_0,r)$. (Miksi?) Valitaan $s \in (r,\rho)$. Koska $\rho^{-1} < s^{-1}$, on $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$\sqrt[n]{|a_n|} < s^{-1}, \quad \text{kun} \quad n \geq N\,.$$

Olkoon $c = \max\{1, |a_0|, |a_1|s, \dots, |a_N|s^N\}$, jolloin

$$|a_n| \le cs^{-n} \quad \text{kaikilla } n.$$

Toisin sanoen

$$|a_n(z - z_0)^n| \le c\left(\frac{r}{s}\right)^n =: M_n \quad \text{kaikilla } z \in \bar{B}_r.$$

Koska $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ suppenee, sillä $\frac{r}{s} < 1$, seuraa Weierstrassin M-testistä 7.7, että sarja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ suppenee tasaisesti ja itseisesti kiekossa $\bar{B}_r$.

3. Funktion f analyyttisyyttä ja derivaattoja koskeva väite seuraa lauseesta 7.13.

□

Kääntäen, analyyttinen funktio on lokaalisti potenssisarja:

7.20. Lause (Potenssisarjakehitelmä)**.** *Olkoon f analyyttinen joukossa G ja $B = B(z_0, r) \subset G$. Tällöin funktiolla f on potenssisarjaesitys pisteen z_0 ympärillä ja f määrää potenssisarjan yksikäsitteisesti:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad z \in B,$$

missä

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Todistus: *Potenssisarjaesityksen olemassaolo:* Olkoon

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

ja $z \in B$. Olkoon s sellainen, että $|z - z_0| < s < r$. Jos $\zeta \in \partial B(z_0, s)$, niin

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{s} < \frac{s}{s} = 1,$$

joten geometrisen sarjan summan kaavalla saadaan

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n.$$

Kyseinen sarja suppenee ζ:n suhteen tasaisesti kehällä $\partial B(z_0, s)$, joten jos $\gamma(t) = z_0 + se^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, niin Cauchyn integraalikaavasta seuraa, että

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta,$$

mikä edelleen lemman 7.10 nojalla on

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \Big((z - z_0)^n \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \Big), \end{aligned}$$

ja koska Cauchyn integraalikaavan 5.11 mukaan

$$frac11\pi i \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

saadaan edellisestä

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Yksikäsitteisyys: Olkoon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad \text{kaikilla } z \in B\,.$$

Tällöin sarjan suppenemissäde on vähintään yhtä suuri kuin r ja lauseesta 7.18 seuraa, että

$$b_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n\,,$$

mikä todistaa väitteen. □

Esimerkki. Etsitään funktion $f(z) = e^z$ potenssisarjakehitelmä origossa.

Koska $f^{(n)}(z) = e^z$ kaikilla z, on $f^{(n)}(0) = 1$ kaikilla n, joten

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}\,.$$

Potenssisarjakehitelmän sovellutuksena todistamme seuraavan yksikäsitteisyyslauseen:

7.21. Lause. *Olkoon f analyyttinen alueessa D. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

i) $f \equiv 0$ *alueessa* D.

ii) Joukolla

$$N = \{z \in D : \; f(z) = 0\}$$

on kasautumispiste D*:ssä.*

iii) On olemassa piste $z_0 \in D$, *jolle*

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \qquad \textit{kaikilla } k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

TODISTUS: Selvästi i) $\Rightarrow$ ii).

Osoitetaan sitten, että ii) $\Rightarrow$ iii): Olkoon $z_0 \in D$ joukon N kasautumispiste. Koska f on jatkuva, on $f(z_0) = 0$. Ellei

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \qquad \text{kaikilla } k = 1, 2, 3, \ldots$$

niin olkoon

$$k_0 = \min\{k : \; f^{(k)}(z_0) \neq 0\} \in \mathbf{N}.$$

Tällöin f:n potenssisarja pisteessä z_0 on

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \qquad \text{missä } a_{k_0} \neq 0.$$

Jos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k_0} (z - z_0)^n\,,$$

niin g on analyyttinen eräässä z_0:n ympäristössä B ja

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z) \quad \text{kaikilla } z \in B.$$

Koska g on jatkuva ja $g(z_0) = a_{k_0} \neq 0$, on olemassa punkteerattu z_0:n ympäristö U^*, missä

$$g(z) \neq 0 \quad \text{kaikilla } z \in U^*.$$

Erityisesti

$$0 \neq (z - z_0)^{k_0} g(z) = f(z) \text{ kaikilla } z \in U^*,$$

mikä on vastoin tietoa, että z_0 on joukon N kasautumispiste. Väite iii) seuraa.

Lopuksi osoitamme, että iii) $\Rightarrow$ i): Olkoon

$$U = \{z \in D : f^{(k)}(z) = 0 \quad \text{kaikilla } k = 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Koska f:n kaikki derivaatat ovat jatkuvia (5.8) on joukko U suljettu D:ssä. Koska $z_0 \in U$, riittää D:n yhtenäisyyden tähden osoittaa, että U on myös avoin: Olkoon $w \in U$ ja olkoon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - w)^n$$

f:n potenssisarjaesitys, joka suppenee kiekossa $B(w, r) \subset D$. Lauseen 7.20 nojalla

$$a_n = \frac{f^{(n)}(w)}{n!} = 0 \quad \text{kaikilla } n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

joten $f(z) = 0$ kaikilla $z \in B(w, r)$ ja siten $B(w, r) \subset U$, joka on näin ollen avoin joukko. $\square$

Kuvausta f sanotaan *diskreetiksi*, jos jokaisen pisteen alkukuva on diskreetti joukko, ts. sillä ei ole kasautumispistettä f:n määrittelyjoukossa. Lauseen 7.21 mukaan alueen D analyyttinen funktio on diskreetti ellei se ole vakiokuvaus.

Lauseen 7.21 nojalla seuraava määritelmä on hyvin asetettu.

7.22. Määritelmä. Olkoon f analyyttinen G:ssä ja $z_0 \in G$. Jos $f(z_0) = 0$ ja $f \not\equiv \infty$ jokaisessa z_0:n ympäristössä, niin lukua

$$k_0 = \min\{k \in \mathbf{N} : f^{(k)}(z_0) \neq 0\}$$

sanotaan *nollakohdan z_0 kertaluvuksi.*

7.23. Lause. *Olkoon f analyyttinen G:ssä, $z_0 \in G$ ja $k_0 = 1, 2, 3, \ldots$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

i) Piste z_0 on f:n nollakohta, jonka kertaluku on k_0.

ii) On olemassa analyyttinen funktio $g : G \to \mathbf{C}$, jolle $g(z_0) \neq 0$ ja

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z) \quad \textit{kaikilla } z \in G\,.$$

TODISTUS: Olkoon z_0 f:n kertalukua k_0 oleva nollakohta ja olkoon

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

f:n potenssisarjakehitelmä kiekossa $B(z_0, r) \subset G$. Tällöin $a_n = 0$ kaikilla $n < k_0$, joten

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k_0}} = (z - z_0)^{-k_0} \sum_{n=k_0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k_0} (z - z_0)^n\,, \qquad \text{kun } z \in B^*(z_0, r)\,,$$

missä oikea puoli määrittelee kiekossa $B(z_0, r)$ analyyttisen funktion, jonka arvo pisteessä z_0 on

$$a_{k_0} = \frac{f^{(k_0)}(z_0)}{k_0!} \neq 0\,.$$

Siten funktio

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{(z - z_0)^{k_0}}\,, & \text{kun } z \neq z_0 \\ a_{k_0}\,, & \text{kun } z = z_0\,, \end{cases}$$

on etsimämme funktio.

Olkoon kääntäen g analyyttinen funktio, jolle $g(z_0) \neq 0$ ja

$$f(z) = (z - z_0)^{k_0} g(z) \quad \text{kaikilla } z \in G\,.$$

Tällöin $f \not\equiv 0$ jokaisessa pisteen z_0 ympäristössä ja kun $k \leq k_0$, niin

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \frac{k_0!}{(k_0 - k + n)!} (z - z_0)^{k_0 + n - k} g^{(n)}(z)\,,$$

missä

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k - n)!}\,.$$

Siten

$$f^{(k)}(z_0) = \begin{cases} 0\,, & \text{kun } k < k_0 \\ k_0! g(z_0) \neq 0\,, & \text{kun } k = k_0\,, \end{cases}$$

joten z_0 on kertalukua k_0 oleva f:n nollakohta. □

7.2. Laurent-sarjat

7.24. Määritelmä. *Laurent-sarja pisteessä* $z_0 \in \mathbf{C}$ on muotoa

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad , \quad a_n \in \mathbf{C}$$

oleva tuplasarja.[9]

Luku

$$\rho_O = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

on Laurent-sarjan $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *ulkopuolinen suppenemissäde* ja

$$\rho_I = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$$

sen *sisäpuolinen suppenemissäde.* Kun $\rho_I < \rho_O$, sanotaan että

$$D = \{z \in \mathbf{C} : \rho_I < |z - z_0| < \rho_O\}$$

on kyseisen sarjan *suppenemisrengas.* Jos $\rho_I = 0$ ja $\rho_O = \infty$, niin $D = \mathbf{C} \setminus \{0\}$.

7.25. Huomautus. Taylorin sarja eli tavallinen potenssisarja on Laurent-sarja, kun $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$. Sen sisäpuolinen suppenemissäde on 0.

7.26. Lause. *Olkoon* ρ_O *ja* ρ_I *Laurent-sarjan* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *ulko- ja sisäpuoliset suppenemissäteet. Sarja hajaantuu, jos*

$$|z - z_0| > \rho_O \quad \textit{tai} \quad |z - z_0| < \rho_I.$$

[9] Muista, että Laurent-sarja suppenee, jos

$$\text{sekä} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \text{että} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} \quad \text{suppenevat.}$$

Jos $\rho_O > 0$, niin $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)$ suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti kiekossa $B_O = B(z_0, \rho_O)$ ja määrittelee siten analyyttisen funktion f_O kiekossa B_O.

Jos $\rho_I < \infty$, niin $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti avoimessa joukossa

$$\complement B_I = \{z : |z-z_0| > \rho_I\},$$

joten funktio

$$f_I(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

on analyyttinen joukossa $\complement B_I$.

Jos $\rho_I < \rho_O$, niin Laurent-sarja suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti renkaassa

$$D = \{z : \rho_I < |z-z_0| < \rho_O\}$$

ja siten

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0) = f_I(z) + f_O(z)$$

on analyyttinen joukossa D. Lisäksi kaikilla $n \in \mathbf{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\{|z-z_0|=r\}} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \qquad \textit{kunhan } \rho_I < r < \rho_O.$$

Todistus: Koska ρ_O on potenssisarjan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ on suppenemissäde, seuraa sitä ja funktiota f_O koskevat väitteet lauseesta 7.18.

Sitten tarkastellaan sarjaa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n,$$

joka on potenssisarja, jonka suppenemissäde on $1/\rho_I$. Sarja hajaantuu, jos $|\zeta| > \frac{1}{\rho_I}$, ja jos $\rho_I < \infty$, suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti, kun $|\zeta| < \frac{1}{\rho_I}$. Merkitään

$$\zeta = \frac{1}{z-z_0},$$

jolloin potenssisarjan lokaalisti tasaisesta suppenemisesta seuraa (HT) että sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti, kun $|z - z_0| > \rho_I$ ja hajaantuu, kun $|z - z_0| < \rho_I$. Funktiosta f_I tulee siten analyyttinen.

Näistä saadaan, että tuplasarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ hajaantuu, jos

$$\text{joko} \quad |z - z_0| > \rho_O \quad \text{tai} \quad |z - z_0| < \rho_I\,.$$

Jos $\rho_I < \rho_O$ eli $\rho_O > 0$ ja $\rho_I < \infty$, niin yllä olevista tarkasteluista seuraa, että $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ suppenee itseisesti ja lokaalisti tasaisesti joukossa

$$D = B_O \cap \complement B_I$$

ja siellä

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = f_O(z) + f_I(z)$$

on analyyttinen.

Olkoon sitten $\rho_I < r < \rho_O$ ja $k \in \mathbf{Z}$. Merkitään

$$\frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k-1} \quad , \quad z \in D.$$

Olkoon $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Kuten lemmassa 7.10 nähdään, että integraalin ja summauksen järjestys voidaan vaihtaa, koska sarja suppenee tasaisesti joukossa $|\gamma|$, ja saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k-1} dz \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_\gamma (z - z_0)^{n-k-1} dz \\
&= a_k\,,
\end{aligned}$$

koska funktiolla $(z - z_0)^{n-k-1}$ on primitiivi, paitsi jos $n = k$. $\square$

7.27. Lause (Analyyttisen funktion Laurentin sarjakehitelmä)**.** *Olkoot* $0 \le a < b \le \infty$*. Olkoon* f *analyyttinen renkaassa*

$$D = \{z \in \mathbf{C} : a < |z - z_0| < b\}.$$

Tällöin f *voidaan esittää Laurent-sarjana joukossa* D*,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n\,, \quad z \in D.$$

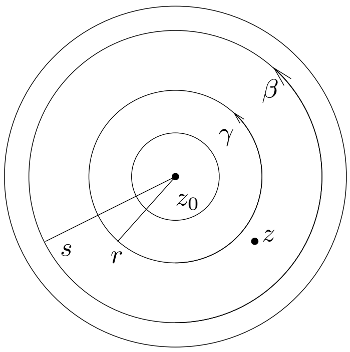
Esitys on yksikäsitteinen: kaikilla $n \in \mathbf{Z}$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \qquad \textit{kunhan } a < r < b\,.$$

Todistus: Valitaan $r_0 \in (a, b)$. Olkoon

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r_0} \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

Huomaa, että Cauchyn lauseen perustella säteen r_0 valinnalla ei ole merkitystä, koska kahden eri säteisen ympäränkehän kiertävät tiet ovat homologisia D:ssä.



Olkoon $z \in D$. Valitaan r, s, joille $a < r < |z - z_0| < s < b$. Olkoon

$$\gamma(t) = z_0 + re^{it}\,, \quad 0 \le t \le 2\pi$$
$$\beta(t) = z_0 + se^{it}\,, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Tällöin sykli $\sigma = (\beta, \overleftarrow{\gamma})$ on nollahomologinen joukossa D ja $n(\sigma, z) = 1$, joten Cauchyn integraalikaavasta 6.8 seuraa, että

$$(*) \qquad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\beta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Nyt jatketaan kuten potenssisarjaesityksen todistuksessa (katso lause 7.20). Jos $\zeta \in |\beta|$, niin

$$\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{s} < 1\,,$$

joten

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\,\frac{1}{1 - \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Huomaa, että Weierstrassin M-testin nojalla suppeneminen on tasaista polun β jäljellä $|\beta|$, joten Lemmasta 7.10 seuraa, että

$$(**) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\beta \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\beta \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta\right)}_{=a_n}(z - z_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Samaan tapaan $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r}{|z - z_0|} < 1$ kaikilla $\zeta \in |\gamma|$ ja

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = -\frac{f(\zeta)}{z - z_0}\,\frac{1}{1 - \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n}.$$

Kuten yllä, suppeneminen on tasaista joukossa $|\gamma|$, joten

$$(***) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = -\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}d\zeta\right)}_{=a_{-n}}(z - z_0)^{-n}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}.$$

Nyt siis tuplasarja $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ suppenee renkaassa D ja yhtälöistä $(*), (**)$ ja $(***)$ seuraa, että

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n - \left(-\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n} \right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \end{aligned}$$

kaikilla $z \in D$.

Yksikäsitteisyys seuraa lauseesta 7.26 kuten potenssisarjan tapauksessa, HT. $\square$

Esimerkki. Olkoon $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, jolloin f on analyyttinen joukossa $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. Koska

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}\,,$$

saamme

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} \frac{z^n}{-n!}. \end{aligned}$$

Tämä on f:n Laurent-sarja, mikä on yksikäsitteinen.

8. Eristetyt erikoispisteet ja residylause

8.1. Erikoispisteet ja residylause

Sanotaan, että funktiolla f on *eristetty erikoispiste* $z_0 \in \mathbf{C}$, jos on olemassa sellainen $r > 0$, että jolle f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa

$$B^* = B^*(z_0, r) = B(z_0, r) \setminus \{z_0\} = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}\,.$$

Sanotaan, että f on *analyyttinen joukossa G lukuunottamatta eristettyjä erikoispisteitä*, jos on eristettyjen erikoispisteiden joukko $E \subset G$ siten, että joukolla E ei ole kasautumispisteitä joukossa G ja f on analyyttinen joukossa $G \setminus E$.

Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0 ja valitaan sellainen $B^* = B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, että f on analyyttinen punkteeratussa kiekossa B^*. Lauseen 7.27 mukaan funktiolla f on yksikäsitteinen Laurent-sarja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

kaikilla $z \in B^*$.

Luokitellaan erikoispisteet:

- z_0 on funktion f *poistuva erikoispiste*, jos $a_n = 0$ kaikilla $n < 0$.
- z_0 on funktion f *napa*, jos on $k < 0$ siten, että $a_k \neq 0$, mutta $a_k \neq 0$ vain äärellisen monella $k < 0$.
- z_0 on funktion f *oleellinen erikoispiste*, jos $a_k \neq 0$ äärettömän monella $k < 0$.

Esimerkki. Origo 0 on

$$\text{funktion} \quad f(z) = \frac{\sin z}{z} \quad \text{poistuva erikoispiste,}$$

$$\text{funktion} \quad g(z) = \frac{1}{z} \quad \text{napa}$$

$$\text{ja funktion} \quad h(z) = e^{\frac{1}{z}} \quad \text{oleellinen erikoispiste.}$$

8.1. Huomautus. Olkoon z_0 funktion f erikoispiste. Sanotaan, että

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

on funktion f Laurent-sarjan

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

singulaariosa. Tällöin S on analyyttinen joukossa $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$.

Lisäksi z_0 on funktion $f - S$ erikoispiste. Se on kuitenkin poistuva, koska

$$f(z) - S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n ,$$

mikä määrittelee analyyttisen funktion.

8.2. Huomautus (Tärkeä!). Piste z_0 on funktion f poistuva erikoispiste jos ja vain jos

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) , & \text{kun } z \neq z_0 \\ a_0 , & \text{kun } z = z_0 , \end{cases}$$

on analyyttinen pisteen z_0 ympäristössä; tässä a_0 on f:n Laurent-sarjan 0. kerroin.

8.3. Huomautus. Pian nähdään, että kerroin a_{-1} on funktion f singulaariosassa erikoisroolissa; sanotaan että

$$\begin{aligned} a_{-1} &=: \mathrm{Res}(f, z_0) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=s} f(z)dz \end{aligned}$$

on funktion f *residy* pisteessä z_0.

8.4. Lause (Residylause). *Olkoon σ nollahomologinen sykli joukossa G ja f analyyttinen joukossa G lukuunottamatta eristettyjen erikoispisteiden joukkoa E, jolle $E \cap |\sigma| = \emptyset$. Tällöin*

$$\int_\sigma f(z)dz = 2\pi i \sum_{a \in E} n(\sigma, a) \operatorname{Res}(f, a).$$

8.5. Huomautus. Cauchyn lauseen todistuksessa todettiin, että jos σ on nollahomologinen sykli joukossa G, niin

$$K_\sigma = |\sigma| \cup \{z \in \mathbf{C} \setminus |\sigma| : n(\sigma, z) \neq 0\}$$

on joukon G kompakti osajoukko. Olkoon $D \subset\subset G$ avoin ja $K_\sigma \subset D$. Tällöin σ on nollahomologinen joukossa D. Koska joukolla E ei ole kasautumispisteitä joukossa G, on joukko $E \cap D = \{z_1, \ldots, z_p\}$ äärellinen. Siten summa väitteessä on hyvin määritelty.

$$\sum_{a \in E} n(\sigma, a) \operatorname{Res}(f, a) = \sum_{j=1}^{p} n(\sigma, z_j) \operatorname{Res}(f, z_j).$$

Todistus: Olkoot $z_1, \ldots, z_p$ kuten huomautuksessa, ja S_k funktion f singulaariosa pisteessä z_k, $k = 1, \ldots, p$. Tällöin S_k on analyyttinen joukossa $\mathbf{C} \setminus \{z_k\}$ lauseen 7.26 perusteella ja siis funktiolla $f - S_k$ on poistuva erikoispiste z_k. Siten

$$g = f - S_1 - S_2 - \cdots - S_p$$

on analyyttinen joukossa D lukuunottamatta poistuvia erikoispisteitä $z_1, \ldots, z_p$. Koska nämä ovat poistuvia, voidaan olettaa, että g on analyyttinen koko D:ssä. Nyt Cauchyn lauseesta seuraa, että

$$0 = \int_\sigma g(z)dz = \int_\sigma f(z)dz - \sum_{k=1}^{p} \int_\sigma S_k(z)dz$$

eli

$$(*) \qquad \int_\sigma f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} \int_\sigma S_k(z)dz.$$

Jos nyt

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$$

on funktion f singulaariosa mielivaltaisessa pisteessä $z_0 \in E$, niin sarja S suppenee lokaalisti tasaisesti joukossa $\mathbf{C} \setminus \{z_0\}$. Erityisesti se suppenee tasaisesti syklin σ jäljellä. Siten

$$\int_\sigma S(z)dz = \int_\sigma \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \int_\sigma \frac{dz}{(z-z_0)^n},$$

missä käytettiin lemmaa 7.10. Koska funktiolla $(z-z_0)^{-n}$ on primitiivi, kun $n > 1$,

$$\int_\sigma (z-z_0)^{-n} dz = 0\,, \qquad \text{kun } n > 1\,,$$

joten saadaan

$$\int_\sigma S(z)dz = a_{-1} \int_\sigma \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_0) n(\sigma, z_0).$$

Nyt yhtälöstä $(*)$ seuraa, että

$$\int_\sigma f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} \int_\sigma S_k(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} n(\sigma, z_k) \operatorname{Res}(f, z_k).$$

□

8.6. Huomautus. Lauseen 7.27 nojalla

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=r} f(z)dz,$$

missä $r > 0$ on tarpeeksi pieni. Residylauseen hyötykäyttö (esim. integraalien laskemiseksi) edellyttää residyjen laskukeinojen kehittämistä.

8.2. Poistuvat erikoispisteet ja navat

Tarkastellaan erikoispisteitä:

8.7. Lause (Riemannin jatkolause)**.** *Olkoon funktiolla f eristetty erikoispiste z_0. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitävät:*

i) Piste z_0 on poistuva erikoispiste.

ii) On $r > 0$, jolle f on rajoitettu punkteeratussa kiekossa

$$B^* = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

iii) Pätee:

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0\,.$$

Todistus: i) $\Rightarrow$ ii). Harjoitustehtävä.

ii) $\Rightarrow$ iii). Olkoon $M, r > 0$ siten, että

$$|f(z)| \le M\,, \qquad \text{kun } z \in B^* = \{z \in \mathbf{C} : 0 < |z - z_0| < r\}\,.$$

Nyt

$$|z - z_0||f(z)| \le M|z - z_0| \xrightarrow{z \to z_0} 0\,.$$

iii) $\Rightarrow$ i). Määritellään

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0) f(z)\,, & \text{kun } z \neq z_0 \\ 0\,, & \text{kun } z = z_0. \end{cases}$$

Koska g on jatkuva kiekossa $B = B(z_0, r)$ pienellä $r > 0$ ja analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0, r)$, seuraa Lauseesta 5.10, että g on analyyttinen koko kiekossa B. Niinpä kun $z \neq z_0$,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z - z_0} g(z) = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \\ &\overset{b_0 = g(z_0) = 0}{=} \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

mikä on Laurentin sarja, jossa singulaarinen osa on 0. Siten z_0 on poistuva. $\square$

8.8. Määritelmä. Olkoon z_0 funktion f napa ja

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Tällöin luku

$$k = -\min\{n < 0 : a_n \neq 0\}$$

on *navan* z_0 *kertaluku.*

8.9. Lause. *Olkoon* $k \in \mathbf{N}$ *ja* f *analyyttinen punkteeratussa kiekossa* $B^* = B^*(z_0, r)$*. Tällöin* z_0 *on funktion* f k*. kertaluvun napa jos ja vain jos on olemassa analyyttinen funktio* g *kiekossa* $B(z_0, r)$ *siten, että* $g(z_0) \neq 0$ *ja*

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^k} \qquad \textit{kaikilla } z \in B^*.$$

Todistus: Todistetaan ensin ehdon välttämättömyys. Kaikilla $z \in B^*$

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_{-k} \neq 0.$$

Määritellään

$$g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z - z_0)^n.$$

Tällöin g on analyyttinen kiekossa $B(z_0, r)$, sillä sarja suppenee kiekossa $B(z_0, r)$. Lisäksi $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$. Nyt

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k} (z - z_0)^n \\ &= (z - z_0)^{-k} g(z). \end{aligned}$$

Seuraavaksi todistetaan ehdon riittävyys. Kun

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n , \quad b_0 \neq 0 ,$$

ja

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z) ,$$

niin

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^n,$$

mikä on funktion f Laurentin sarja, jonka $-k$. kerroin on $= b_0 \neq 0$. □

8.10. Huomautus (Tärkeä!). Olkoon z_0 funktion f k. kertaluvun napa ja g pisteen z_0 ympäristössä analyyttinen siten, että kaikilla $z \in B(z_0, r) \setminus \{z_0\}$

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} g(z).$$

Tällöin

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=-k}^{\infty} b_{n+k} (z - z_0)^{-n}, \end{aligned}$$

mikä on funktion f Laurentin sarja. Tässä termin $(z - z_0)^{-1}$ kerroin on

$$b_{-1+k} = b_{k-1} = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}$$

eli

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!}.$$

Koska f ei ole määritelty pisteessä z_0, on tämä parasta kirjoittaa muodossa: Jos z_0 on funktion f k. kertaluvun napa, niin

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \big((z - z_0)^k f(z) \big). \tag{8.1}$$

Erityisesti, jos z_0 on 1. kertaluvun napa, on

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Esimerkki. Olkoon

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

Tällöin

$$f(z) = \frac{1}{z + \frac{z^2}{2!} + \dots} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots} = \frac{1}{z} g(z),$$

missä g on analyyttinen ja $g(0) \neq 0$. Siten funktiolla f on 1. kertaluvun napa pisteessä 0 ja

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = \frac{1}{\frac{d}{dz}(e^z)|_{z=0}} = 1.$$

8.11. Lause. *Olkoon z_0 funktion f eristetty erikoispiste. Tällöin*

i) piste z_0 on funktion f napa jos ja vain jos $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$.

ii) piste z_0 on k. kertaluvun napa jos ja vain jos k on se positiivinen kokonaisluku, jolle

$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^k |f(z)| \in]0,\infty[.$$

TODISTUS: Olkoon z_0 funktion f k. kertaluvun napa. Tällöin on olemassa pisteen z_0 ympäristössä analyyttinen funktio g siten, että $g(z_0) \neq 0$ ja

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}\,.$$

Niinpä

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \lim_{z\to z_0} \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} = \infty,$$

koska $g(z_0) \neq 0$. Myöskin on

$$|z-z_0|^l |f(z)| = |z-z_0|^{l-k} |g(z)| \to \begin{cases} \infty\,, & \text{jos } l < k \\ |g(z_0)| \in (0,\infty)\,, & \text{jos } l = k \\ 0\,, & \text{jos } l > k. \end{cases}$$

Tämä todistaa molempien väitteiden ”vain jos” puolet.

Olkoon sitten

$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty \quad \text{ja} \quad h = \frac{1}{f}\,.$$

Nyt h on rajoitettu ($|h| \leq 1$) pisteen z_0 ympäristössä, joten z_0 on funktiolle h poistuva erikoispiste ja

$$h(z_0) = \lim_{z\to z_0} h(z) = 0\,.$$

Koska $h \not\equiv 0$, niin jos

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

on funktion h potenssisarjakehitelmä, niin $b_0 = 0$, mutta

$$k := \min\{n \in \mathbf{N} : b_n \neq 0\} \in \{1,2,3,\dots\}.$$

Siten funktio

$$g(z) = \frac{1}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-z_0)^n}$$

on analyyttinen pisteen z_0 ympäristössä ja

$$g(z_0) = \frac{1}{b_k} \neq 0\,.$$

Niinpä

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{\sum\limits_{n=k}^{\infty} b_n(z-z_0)^n} = \frac{1}{(z-z_0)^k \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_{n+k}(z-z_0)^n} = \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}.$$

Lauseen 8.9 mukaan z_0 on funktion f napa, jonka kertaluku on k. mistä seuraa ensimmäisen väitteen "jos" osa.

Lopuksi, jos tiedetään, että

$$\lim_{z\to z_0} |z-z_0|^k |f(z)| = a \in (0,\infty)$$

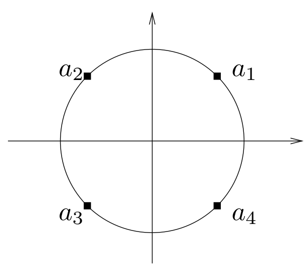
jollakin $k \in \mathbf{N}$, niin

$$|f(z)| \to \infty \text{ , kun } z \to z_0,$$

ja ylläoleva todistus osoittaa, että z_0 on napa, jonka kertaluku on k (huomaa: $|b_k| = a$). □

Esimerkki. Osoita, että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$



Ensiksi todetaan, että integraali suppenee, koska

$$\frac{x^2}{1+x^4} \le \frac{1}{x^2}\,.$$

Olkoon

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}\,,$$

jolloin funktiolla f on navat

$$a_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}\,, \quad a_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}\,, \quad a_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}} \quad \text{ja} \quad a_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}.$$

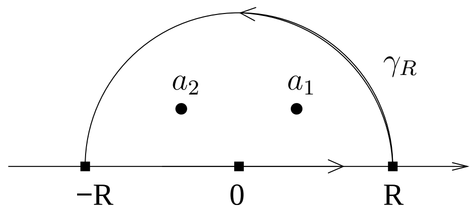
Selvästi navat a_n ovat yksinkertaisia (HT). Niinpä

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f, a_1) &= \lim_{z\to a_1}(z-a_1)f(z) = \lim_{z\to a_1}\frac{z^2}{(z-a_2)(z-a_3)(z-a_4)} \\
&= \frac{a_1^2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)} = \sqrt{2}\frac{2i}{2i\cdot 2(1+i)\cdot 2i} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4(i+1)} = \frac{1-i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{i\pi}{4}}.
\end{aligned}$$

Samoin

$$\operatorname{Res}(f, a_2) = \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{4}e^{-\frac{3i\pi}{4}}.$$

Olkoon $R > 1$ ja γ_R puolipallon $B(0,R) \cap \{z : Im(z) > 0\}$ reuna vastapäivään.



Residylauseesta seuraa, että

$$(*) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)dz = \operatorname{Res}(f, a_1) + \operatorname{Res}(f, a_2) = -\frac{i}{2\sqrt{2}}.$$

Koska

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{x^2}{1+x^4}dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{R^3e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}dt,$$

niin

$$\int_{-R}^{R} \frac{x^2}{1+x^4}dx \overset{(*)}{=} \frac{\pi}{\sqrt{2}} - iR^3 \int_0^{\pi} \frac{e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}dt.$$

Kun $t \in [0,\pi]$, niin $|1-1+R^4e^{4it}| = R^4$, joten kolmioepäyhtälöstä seuraa, että

$$\left|1+R^4e^{4it}\right| \geq R^4 - 1,$$

kun $R > 1$, joten

$$\left| R^3 \int_0^{\pi} \frac{e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}dt \right| \leq \frac{R^3}{R^4-1} \int_0^{\pi} \underbrace{|e^{3it}|}_{=1} dt = \frac{\pi R^3}{R^4-1} \to 0,$$

kun $R \to \infty$. Niinpä

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{x^4+1}dx \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}} - \underbrace{\lim_{R\to\infty} iR^3 \int_0^{\pi} \frac{e^{3it}}{1+R^4e^{4it}}dt}_{=0} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

8.12. Huomautus. Määrättäessä integraaleja kuten edellä raja-arvoin $R \to \infty$, on todettava, että integrandit suppenevat itseisesti! Vertaa huomautukseen tuplasarjojen kohdalla.

8.3. Oleellisista erikoispisteistä

Analyyttisen funktion käyttäytyminen oleellisen erikoispisteen ympäristössä on villiä. Pätee **Picardin (suuri) lause**: *Jos z_0 on analyyttisen funktion f oleellinen erikoispiste, niin joukossa $\mathbf{C} \setminus f(B^*(z_0,r))$ on korkeintaan yksi piste, oli $r > 0$ miten pieni hyvänsä.*

Emme kuitenkaan todista tätä syvällistä lausetta, vaan samansuuntaisen, mutta heikomman (ja helpomman) tuloksen.

8.13. Lause (Casorati-Weierstrass)**.** *Jos z_0 on punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0, r)$ analyyttisen funktion f oleellinen erikoispiste, niin kuvajoukko $f(B^*(z_0, r))$ on tiheä $\mathbf{C}$:ssä, ts.*

$$\overline{f(B^*(z_0, r))} = \mathbf{C}\,.$$

TODISTUS: Jos kuvajoukko ei olisi tiheä, niin sen komplementissa olisi kiekko

$$B(w, \varepsilon) \cap f(B^*(z_0, r)) = \emptyset\,.$$

Silloin funktio

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}$$

olisi analyyttinen punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0, r)$. Lisäksi g on rajoitettu, koska

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{\varepsilon}\,,$$

joten Riemannin jatkolauseen 8.7 nojalla z_0 on g:n poistuva erikoispiste. Siten koska g:llä on raja-arvo z_0:ssa, on z_0 funktion $1/g$ poistuva erikoispiste tai napa. Näin ollen z_0 on funktion

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

erikoispiste, joka on joko poistuva tai napa, mikä on vastoin oletusta, että z_0 oli f:n oleellinen erikoispiste. □

Kokonainen funktio f on joko polynomi tai sitten sitten sillä on olellinen erikoispiste äärettömyydessä:

8.14. Lause. *Olkoon $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ kokonainen. Tällöin funktiolla*

$$g(z) = f(\frac{1}{z})$$

on oleellinen erikoispiste origossa tai f on polynomi.

TODISTUS: Ellei f ole polynomi, niin f:llä on potenssisarjaesitys

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\,, \quad z \in C,$$

missä $a_n \neq 0$ äärettömän monella n. Siten funktion g Laurent-sarja on

$$g(z) = \sum_{n=-\infty}^{0} b_n z^n\,, \quad b_n = a_{-n}\,,\ z \in C \setminus \{0\}\,,$$

joten koska $b_n = a_{-n} \neq 0$ äärettömän monella $n < 0$, on 0 sen oleellinen erikoispiste. □

9. Konformikuvauksista

9.1. Analyyttisen funktion kuvausominaisuuksia

Lauseesta 7.21 seuraa, että ei-vakio analyyttinen funktio f alueessa D on diskreetti, ts. pisteen alkukuva on aina D:ssä diskreetti eli kasautumispisteetön joukko. Tässä kappaleessa analysoidaan lisää analyyttisen funktion lokaalia käyttäytymistä ja osoitetaan mm. että ei-vakio analyyttinen funktio on avoin kuvaus, ts. se kuvaa avoimet joukot avoimiksi joukoiksi.

9.1. Lause. *Olkoon f alueessa D analyyttinen funktio, jonka nollakohdat ovat $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$. Olkoon $k_j \in \mathbf{N}$ nollakohdan a_j kertaluku ja σ nollahomologinen sykli D:ssä. Jos $a_j \notin |\sigma|$ kaikilla j, niin*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{n} k_j\, n(\sigma, a_j)\,.$$

TODISTUS: Lauseen 7.23 nojalla on D:ssä analyyttinen funktio g, jolle $g(z) \neq 0$ kaikilla $z \in D$ ja

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k_1}{z-a_1} + \frac{k_2}{z-a_2} + \cdots + \frac{k_n}{z-a_n} + \frac{g'(z)}{g(z)}\,, \qquad \text{kun } z \neq a_k\,.$$

Koska $g(z) \neq 0$, on g'/g analyyttinen D:ssä, joten edellä olevasta kaavasta ja Cauchyn lauseesta 6.6 seuraa

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{k_j}{z-a_j}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz \\ &= \sum_{j=1}^{n} k_j\, n(\sigma, a_j)\,.\end{aligned}$$

□

Soveltamalla Lausetta 9.1 funktioon $f(z) - w_0$ saadaan:

9.2. Lause. *Olkoon f alueessa D analyyttinen funktio ja olkoot $a_1, a_2, \dots, a_n \in D$ ne pisteet, joilla $f(z) = w_0$. Olkoon $k_j \in \mathbf{N}$ w_0-kohdan a_j kertaluku (so. funktion $f - w_0$ nollakohdan kertaluku) ja σ nollahomologinen sykli D:ssä. Jos $a_j \notin |\sigma|$ kaikilla j, niin*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \, dz = \sum_{j=1}^{n} k_j \, n(\sigma, a_j) \, .$$

□

Esimerkki. Jos $\gamma(t) = 2e^{i2\pi t}$, $t \in [0, 1]$, niin

$$\int\limits_{\gamma} \frac{2z + 1}{z^2 + z + 1} \, dz = 4\pi i \, ,$$

koska nimittäjän molemmat nollakohdat $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$ ovat yksikkökiekon kehällä

9.3. Esimerkki. Olkoon γ nollahomologinen suljettu tie alueessa D ja $f : D \to \mathbf{C}$ analyyttinen. Olkoon $w_0 \in \mathbf{C} \setminus f(|\gamma|)$ ja $a_1, a_2, \dots, a_n$ ne D:n pisteet $z \in D$, joille $f(z) = w_0$. Jos $k_j \in \mathbf{N}$ on w_0-kohdan a_j kertaluku ja $\sigma = f \circ \gamma$, niin σ on suljettu tie ja

$$n(\sigma, w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma} \frac{1}{w - w_0} \, dw = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \, dz = \sum_{j=1}^{n} k_j \, n(\gamma, a_j) \, ,$$

missä keskimmäisen yhtäsuuruuden näkee helposti muuttujanvaihdolla (HT).

Seuraavan lauseen mukaan analyyttinen funktio käyttäytyy nollakohtansa ympäristössä kuten z^n origon ympäristössä, missä n on nollakohdan kertaluku.

9.4. Lause. *Olkoon $f : B(z_0, R) \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja $w_0 = f(z_0)$. Jos z_0 on funktion $f(z) - w_0$ n-kertainen nollakohta, niin on olemassa $\varepsilon > 0$ ja $\delta > 0$ siten, että kun $0 < |w - w_0| < \varepsilon$, niin yhtälöllä*

$$f(z) = w$$

on tasan n yksinkertaista ratkaisua z kiekossa $B(z_0, \delta)$.

Todistus: Koska z_0:n kertaluku on äärellinen, ei f ole vakio. Koska analyyttisen funktion nollakohdat ovat eristettyjä (Lause 7.23), on $0 < \delta < \frac{1}{2}R$, jolle yhtälöllä

$$f(z) = w_0$$

ei ole lainkaan ratkaisuja punkteeratussa kiekossa $B^*(z_0, 2\delta)$ ja lisäksi

$$f'(z) \neq 0 \quad \text{kaikilla } z \in B^*(z_0, 2\delta)\,.$$

Olkoon

$$\gamma(t) = z_0 + \delta e^{2\pi i t}\,, \quad t \in [0,1]$$

ja $\sigma = f \circ \gamma$. Koska $w_0 \notin |\sigma|$ on $\varepsilon > 0$, jolle

$$B(w_0, \varepsilon) \cap |\sigma| = \emptyset.$$

Siten $B(w_0, \varepsilon)$ kuuluu johonkin $\mathbf{C} \setminus |\sigma|$:n komponenttiin, joten Lemman 5.4 nojalla kaikilla $w \in B(w_0, \varepsilon)$

$$n(\sigma, w_0) = n(\sigma, w)\,.$$

Olkoon $w \in B^*(w_0, \varepsilon)$ ja olkoot a_j on funktion $f(z) - w$ k_j-kertaiset nollakohdat. Esimerkin 9.3 nojalla

$$n = n\,n(\gamma, z_0) = n(\sigma, w_0) = n(\sigma, w) = \sum_{j=1}^{p} k_j n(\gamma, a_j)\,.$$

Koska $n(\gamma, a_j)$ on joko $= 0$ tai $= 1$ ja koska $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in B^*(z_0, \delta)$, on yllä olevassa summassa tasan n kappaletta yksinkertaisia yhtälön $f(z) = w$ ratkaisuja $a_j \in B^*(z_0, \delta)$. □

9.5. Huomautus. Lausetta 9.4 kutsutaan englanniksi nimellä ”Branched Covering Principle”, mikä viittaa siihen, että analyyttinen funktio peittää kuvan lokaalisti n kertaa.

Todistusta analysoimalla näemme, että luvuksi $\delta > 0$ kelpaa mikä tahansa sellainen, jolle

$$f(z) \neq w_0 \quad \text{ja} \quad f'(z) \neq 0 \quad \text{kun } 0 < |z - z_0| \leq \delta\,.$$

Sen jälkeen luvulta $\varepsilon > 0$ riittää vaatia, että

$$\varepsilon \leq |w_0 - f(z)| \quad \text{aina, kun } |z - z_0| = \delta\,.$$

Ei-vakio analyyttinen funktio f on *avoin kuvaus* ts. avoimen joukon G kuvajoukko $f(G)$ on aina avoin:

9.6. Lause. *Olkoon f ei-vakio analyyttinen funktio alueessa D. Tällöin f on avoin kuvaus.*

Todistus: Olkoon $G \subset D$ avoin ja $w_0 \in f(G)$. Valitaan $z_0 \in G$, jolle $f(z_0) = w_0$. Koska f ei ole vakio, voidaan Lausetta 9.4 soveltaa ja löydetään $\delta > 0$ ja $\varepsilon > 0$, joille $B(z_0, \delta) \subset G$ ja jokaisella $w \in B(w_0, \varepsilon)$ on (ainakin yksi) alkukuva $z \in B(z_0, \delta)$. Siis

$$B(w_0, \varepsilon) \subset f\big(B(z_0, \delta)\big) \subset f(G)\,,$$

joten $f(G)$ on avoin. $\square$

9.7. Seuraus. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ analyyttinen ja $z_0 \in G$. Jos $f'(z_0) \neq 0$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että*

$$f|_{B(z_0,r)} : B(z_0, r) \to f\big(B(z_0, r)\big)$$

on homeomorfismi.

Todistus: Koska $f'(z_0) \neq 0$, on $z = z_0$ yhtälön $f(z) = f(z_0)$ yksinkertainen juuri. Lauseen 9.4 nojalla f on injektio z_0:n eräässä ympäristössä. Käänteiskuvauksen jatkuvuus seuraa kuvauksen avoimuudesta (Lause 9.6). $\square$

9.8. Seuraus. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ analyyttinen injektio. Tällöin*

$$f'(z) \neq 0 \quad \text{kaikilla } z \in G\,.$$

Todistus: Olkoon $z_0 \in G$ ja $f(z_0) = w_0$. Piste z_0 on tämän yhtälön yksinkertainen juuri, koska muutoin löytäisimme pisteen $w \in f(G)$ (w_0:n läheltä), jolla olisi useampi alkukuvapiste G:ssä (Lause 9.4), mikä olisi vastoin tietoa, että f on injektio. Siten kertaluvun määäritelmän mukaan $f'(z_0) \neq 0$. $\square$

9.9. Määritelmä. Analyyttinen funktio $f : G \to \mathbf{C}$ on *konformikuvaus (univalent, schlicht)* alueessa G, jos se on injektio.

9.10. Huomautus. Monesti käytetään sanontaa: f on konforminen (pisteessä z_0), jolloin tarkoitetaan vain, että f on lokaalisti injektio (ts. sen derivaatta ei häviä). Konformikuvaus kielenkäytössämme on siis globaali injektio. Lauseesta 9.7 seuraa, että jos $f'(z_0) \neq 0$, on z_0:lla ympäristö U, jossa $f|_U : U \to f(U)$ on konformikuvaus.

Klassisessa mielessä konformisuus tarkoittaa sitä, että kulmien suuruudet säilyvät infinitesimaalisessa skaalassa: Jos γ ja σ ovat säännöllisiä polkuja, jotka kulkevat pisteen z_0 kautta ja jos $f'(z_0) \neq 0$, niin käyrien γ ja σ (tangenttien) välinen kulma = kuvakäyrien $f \circ \gamma$ ja $f \circ \sigma$ (tangenttien) välinen kulma. Tämä on helppo uskoa huomautuksen 2.3 valossa: molemmat käyrät γ ja σ kiertyvät kuvauksessa f pisteessä kulman $\arg(f'(z_0))$ verran ja siten niiden välinen kulma säilyy.

Esimerkki. Kuvaus $f(z) = z^2$ on konforminen origon ulkopuolella, mutta ei ole lokaali injektio origossa.

Sen sijaan eksponenttifunktion derivaatta ei häviä missään, joten se määrittelee lokaalisti konformikuvauksen.

Edellä olevista lauseista saamme:

9.11. Lause. *Olkoon $f : G \to \mathbf{C}$ konformikuvaus. Tällöin*

(i) f määrittelee homeomorfismin $f : G \to f(G)$.

(ii) $f'(z) \neq 0$ kaikilla $z \in G$.

(iii) Funktion f käänteiskuvaus $f^{-1} : f(G) \to G$ on myös konformikuvaus ja

$$f^{-1'}(f(z)) = \frac{1}{f'(z)} \, .$$

□

Monia fysikaalisia ilmiöitä, kuten nesteiden virtaus, lämmönjohtuminen yms. mallitetaan matememaattisesti Laplacen yhtälön

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \, , \quad z = (x, y) \in \mathbf{C} \, ,$$

avulla. Tätä yhtälöä on huomattavasti helpompi käsitellä, mikäli tarkasteltava alue on joko puolitaso H tai kiekko B kuin yleinen alue G. Cauchy-Riemannin yhtälöiden avulla nähdään helposti, että konforminen muuttujanvaihto säilyttää Laplace-operaattorin, ts. jos $f : D \to G$ on konformikuvaus ja u toteuttaa Laplace-yhtälön

G:ssä, niin $u \circ f$ toteuttaa Laplace-yhtälön D:ssä. Mm. tästä syystä on tärkeää löytää eri alueiden välille konformikuvauksia. Seuraava Riemannin kuvauslause kertoo, että jokainen yhdesti yhtenäinen alue on konformisesti kiekko (todistus sivuutetaan tällä kurssilla).

9.12. Lause (Riemannin kuvauslause)**.** *Olkoon $G \neq \mathbf{C}$ yhdesti yhtenäinen alue. Tällöin on olemassa konformikuvaus $f : G \to B(0,1)$.*

TODISTUS: Sivuutetaan, ks. esim Palka, s. 420. □

Riemannin kuvauslauseen tunnetut todistukset ovat tyypillisiä eksistenssitodistuksia, mitkä eivät kerro kuinka kuvaus voidaan käytännössä konstruoida. Hetken päästä tarkastellaan lähemmin ensimmäisen kertaluvun rationaalifunktioita, Möbius-kuvauksia, joiden avulla saadaan konstruoiduksi eräitä konformikuvauksia.

Esimerkki. Olkoon

$$G = \{z \in \mathbf{C} : |z| > 1\} \quad \text{ja} \quad D = B^*(0,1).$$

Näiden joukkojen välisen konformikuvauksen antaa

$$f(z) = \frac{1}{z}\,.$$

9.2. Laajennettu kompleksitaso

Usein on kätevää lisätä kompleksitasoon $\mathbf{C}$ äärettömyyspiste $\infty \notin \mathbf{C}$. Näin saatua joukkoa

$$\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

sanotaan *laajennetuksi kompleksitasoksi.* Algebralliset laskutoimitukset $\hat{\mathbf{C}}$:ssa määritellään laajennetun reaalilukujoukon tapaan:

$$\begin{cases} \infty \pm z = z \pm \infty = \infty\,, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \\ \infty \cdot z = z \cdot \infty = \infty\,, & \text{kun } z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\} \\ \frac{z}{\infty} = 0\,, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \\ \frac{z}{0} = \infty\,, & \text{kun } z \in \hat{\mathbf{C}} \setminus \{0\}\,. \end{cases}$$

Huomaa, ettei operaatioita

$$\infty - \infty\,, \quad \frac{\infty}{\infty}\,, \quad \frac{0}{0} \quad \text{eikä} \quad 0 \cdot \infty$$

ole lainkaan määritelty (eikä niitä siis saa käyttää).

Perinteisesti laajennettua kompleksitasoa ajatellaan geometrisesti kolmiulotteisena pallona, *Riemannin pallona* seuraavasti: Olkoon

$$S = \{(u, v, w) \in \mathbf{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 = 1\}$$

$\mathbf{R}^3$:n yksikköpallopinta ja samastetaan kompleksitaso $\mathbf{C}$ tason $\{(x, y, 0) : x, y \in \mathbf{R}\}$ kanssa. Tarkastellaan pallon S 'pohjoisnavan' $N = (0, 0, 1)$ kautta kulkevia suoria L. Jos L ei ole S:n tangenttitasossa, niin se leikkaa pallonkuoren S täsmälleen yhdessä pisteessä $P = (u, v, w) \neq N$ ja tason $\mathbf{C} = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbf{R}\}$ täsmälleen yhdessä pisteessä

$$\pi(P) = \pi(u, v, w) = (\frac{u}{1-w}, \frac{v}{1-w}, 0)\,.$$

Näin saadaan bijektio $\pi : S \setminus \{N\} \to \mathbf{C}$, ns. *stereograafinen projektio*. Tämä antaa vastaavuuden laajennetun kompleksitason $\hat{\mathbf{C}}$ ja pallon S välille, kun asetetaan $\pi(N) = \infty$. Käänteiskuvaus π^{-1} on helppo määrittää:

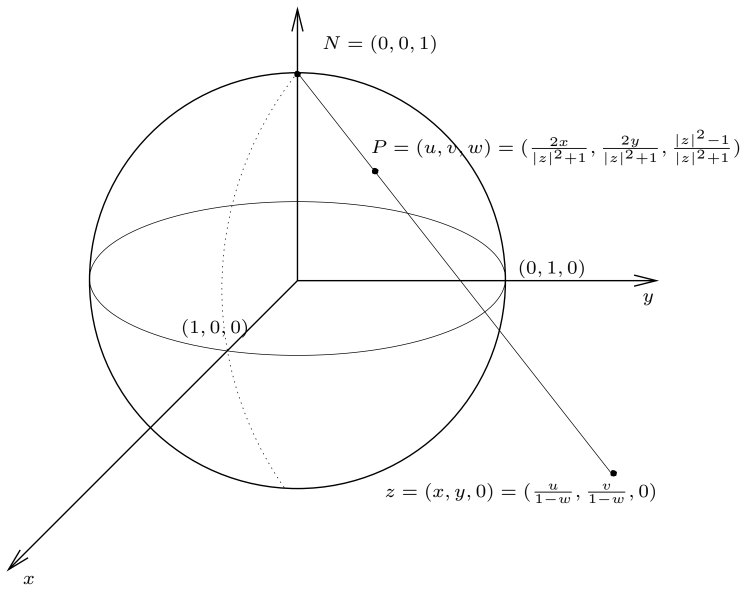
$$\pi^{-1}(z, 0) = (\frac{2Re(z)}{|z|^2+1}, \frac{2Im(z)}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1})\,.$$

Harjoitustehtävänä on melko helppoa todeta, että streograafisessa projektiossa pohjoisnavan kautta kulkevat ympyränkaaret vastaavat kompleksitason suoria ja kompleksitason ympyrät vastaavat pallonkuoren ympyröitä. Tästä syystä $\mathbf{C}$:n ympyröitä ja suoria (lisättynä ääretömyyspisteellä ∞) sanotaan laajennetun kompleksitason $\hat{\mathbf{C}}$ *yleistetyiksi ympyröiksi.*

Puolitasot ja kiekot $\mathbf{C}$:ssä vastaavat ympyrän kalotteja Riemannin pallolla. Lisäksi stereografinen projektio on 'konforminen' ts. se säilyttää kulmien suuruudet.

Huomaa, että äärettömyyspiste ∞ on Riemannin pallolla $S = \hat{\mathbf{C}}$ aivan samassa asemassa kuin muutkin pisteet, joten pyöräyttämällä äärettömyyspisteen toiseen paikkaan saa oivan kuvan laajennetun kompleksitason lokaaleista ominaisuuksista. Topologiasta meille riittänee tietää, että ∞ keskinen kiekko määritellään

$$B(\infty, r) = \infty \cup \{z \in \mathbf{C} : |z| > \frac{1}{r}\}\,.$$



Riemannin pallo ja stereograafinen projektio.

9.3. Möbius-kuvauksista

9.13. Määritelmä. Kuvausta $f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \text{missä } a,b,c,d \in \mathbf{C}\,, \quad ad-bc \neq 0\,,$$

sanotaan *Möbius-kuvaukseksi.* [10] Tässä käytetään sopimuksia:

$$\text{Jos } c = 0\,, \qquad \text{niin } \begin{cases} f(z) = \dfrac{az+b}{d}\,, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \\ f(\infty) = \infty. \end{cases}$$

$$\text{Jos } c \neq 0\,, \qquad \text{niin } \begin{cases} f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}\,, & \text{kun } z \in \mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}, \\ f(-\frac{d}{c}) = \infty \\ f(\infty) = \frac{a}{c}\,. \end{cases}$$

Helposti nähdään:

[10] A.F. Möbius, 1790–1868. Usein Möbius-kuvauksista käytetään nimitystä lineaarinen rationaalikuvaus, linear fractional transformation.

9.14. Lause. *Möbius-kuvaus $f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ on homeomorfismi ja konformikuvaus $\mathbf{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$:ssä (siis koko $\mathbf{C}$:ssä, jos $c = 0$).*

$\square$

9.15. Lause. *Möbius-kuvaukset*

$$\mathcal{G} = \{f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}} : f \text{ on Möbius-kuvaus}\}$$

muodostavat ryhmän, jonka laskutoimitus on kuvausten yhdistäminen.

TODISTUS: Suora lasku (HT). Möbius-kuvauksen

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

käänteiskuvaus on

$$f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}.$$

$\square$

Huomaa, että Möbius-kuvausten ryhmä ei ole kommutatiivinen, ts on olemassa Möbius-kuvaukset f, g, joille $f \circ g \neq g \circ f$ (HT).

9.16. Huomautus. Möbius-kuvaukset

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

ja kompleksiset (2×2)-matriisit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc \neq 0\,,$$

vastaavat toisiaan niin, että kaikki matriisit

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}, \quad \det(\lambda A) = \lambda^2 \det(A) = \lambda^2(ad - bc) \neq 0\,,$$

vastaavat samaa Möbius-kuvausta

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,.$$

$1-1$ vastaavuus saadaan esimerkiksi normittamalla (2×2)-matriisit niin, että vaaditaan, että niiden determinantti on $=1$. Huomaa, että matriisien kertolasku vastaa Möbius-kuvausten yhdistämistä (HT).

9.17. Huomautus (Yksinkertaiset Möbius-kuvaukset). Möbius-kuvausta

$$f(z) = z + w\,, \quad w \in \mathbf{C}$$

sanotaan *siirroksi* eli *translaatioksi*. Se siirtää kompleksitason $\mathbf{C}$ pisteitä luvun w verran ja pitää äärettömyyspisteen paikallaan $f(\infty)=\infty$.

Toinen merkittävä tyyppi yksinkertaisia Möbius-kuvauksia on kuvaukset

$$g(z) = \lambda z\,, \qquad \text{missä } \lambda \in \mathbf{C}\,, \lambda \neq 0\,.$$

Jos $|\lambda| = 1$, kyseessä on kompleksitason *kierto*: ts. g kiertää kompleksitason pisteitä kulman $\arg(\lambda)$ verran ja pitää äärettömyyspisteen paikallaan $g(\infty)=\infty$.

Jos $\lambda \in \mathbf{R}$ ja $\lambda > 0$, niin kuvaus g on *dilaatio*: *venytys* jos $\lambda \geq 1$ ja *kutistus*, jos $0 < \lambda \leq 1$.

Yleinen tapaus $\lambda \in \mathbf{C}$, $\lambda \neq 0$, saadaan yhdistämällä kierto ja dilaatio, sillä

$$\lambda = |\lambda| \frac{\lambda}{|\lambda|}\,.$$

Äärettömyyspiste pysyy paikallaan, $g(\infty)=\infty$.

Kolmas tyyppi alkeellisia Möbius-kuvauksia on *inversio*:

$$h(z) = \frac{1}{z}\,.$$

Inversio vaihtaa äärettömyyspisteen ja origon: $h(\infty) = 0$ ja $h(0) = \infty$. Inversio saadaan heijastamalla piste z yksikkökiekon kehän $\partial B(0,1)$ suhteen ja sitten reaaliakselin suhteen (konjugaatin otto), tai päinvastoin:

$$h(z) = \frac{1}{z} = \overline{\frac{z}{|z|^2}} = \frac{\bar{z}}{|\bar{z}|^2}\,,$$

mistä nähdään, että

$$|h(z)| = \frac{1}{|z|} \quad \text{ja} \quad \arg(h(z)) = \arg(\bar{z}) = -\arg(z)\,.$$

Kaikki Möbius-kuvaukset saadaan yhdistämällä translaatio, dilaatio ja kierto sekä inversio.

9.18. Lause. *Jokainen Möbius-kuvaus saadaan yhdistämällä translaatio $z \mapsto z+w$, kuvaus $z \mapsto \lambda z$ ja inversio $z \mapsto \frac{1}{z}$.*

TODISTUS: Kun $ad - bd \neq 0$, niin

$$\frac{az+b}{cz+d} = \begin{cases} \dfrac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})} + \dfrac{a}{c}\,, & \text{jos } c \neq 0, \\ \dfrac{a}{d}z + \dfrac{b}{d}\,, & \text{jos } c = 0, \end{cases}$$

mitkä ovat vaadittua tyyppiä. □

9.19. Lause. *Möbius-kuvaukset kuvaavat yleistetyt ympyrät yleistetyiksi ympyröiksi.*

TODISTUS: Kompleksitason suorat ovat muotoa

$$Bz + \bar{B}\bar{z} + c = 0\,, \quad \text{missä } B \in \mathbf{C}\,, \quad c \in \mathbf{R}\,, \tag{9.1}$$

minkä näkee sijoittamalla $\mathbf{R}^2$:n suoran $ax + by + c = 0$ yhtälöön $z = x + iy$, jolloin $2B = a - ib$. Edelleen ympyrän

$$|z - z_0| = r$$

yhtälö saadaan muotoon

$$z\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + c = 0\,, \quad \text{missä } B = -z_0 \in \mathbf{C}\,, \quad c = |B|^2 - r^2 \in \mathbf{R}\,. \tag{9.2}$$

Selvästi suorat säilyvät suorina ja ympyrät ympyröinä kuvauksissa $z \mapsto z + w$ ja $z \mapsto \lambda z$. Jos z on suoralla (9.1), niin sen kuvapiste $w = 1/z$ inversiossa $z \mapsto 1/z$ toteuttaa yhtälön

$$cw\bar{w} + B\bar{w} + \bar{B}w = 0\,,$$

mikä arvolla $c = 0$ on origon kautta kulkeva suora. Jos $c \neq 0$, kyseessä on kaavan (9.2) nojalla ympyrä, jonka säde on $|B|/|c|$ ja keskipiste $-B/c$.

Edelleen ympyrällä (9.2) olevan pisteen z kuvapiste $w = 1/z$ inversiossa toteuttaa yhtälön

$$cw\bar{w} + Bw + \bar{B}\bar{w} + 1 = 0\,,$$

mikä arvolla $c = 0$ (jolloin ympyränkehä kulkee origon kautta) antaa suoran yhtälön. Muilla c:n arvoilla tämä on ympyrän yhtälö. □

Koska Möbius-kuvaukset ovat homeomorfismeja, saamme tästä:

9.20. Seuraus. *Möbius-kuvaus kuvaa jokaisen avoimen joukon, joka on joko*

- *kiekko $B(z_0, r)$,*
- *kiekon ulkopuoli $\hat{\mathbf{C}} \setminus \bar{B}(z_0, r)$, tai*
- *jonkin suoran määräämä puolitaso $\mathbf{C}$:ssä,*

joukolle, joka on jotain yllämainittua tyyppiä.

□

Pistettä $z_0 \in \hat{\mathbf{C}}$, jolle $f(z_0) = z_0$ sanotaan kuvauksen f *kiintopisteeksi.*

9.21. Lause. *Möbius-kuvauksella $f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ on joko 1 tai 2 kiintopistettä, ellei f ole identtinen kuvaus $f(z) = z$ kaikilla $z \in \hat{\mathbf{C}}$.*

Todistus: HT: totea toisen asteen yhtälön

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

ratkaisujen lukumäärä (muista varoa tapausta $z = \infty$). Toinen tapa on käyttää lausetta 9.22. alla. □

Möbius-kuvauksen määrittelyssä voidaan määrätä kolmen pisteen kuvapisteet, muttei enempää.

9.22. Lause. *Olkoot* $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbf{C}}$ *kolme eri pistettä. Jos* $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbf{C}}$ *ovat kolme eri pistettä, niin on olemassa täsmälleen yksi Möbius-kuvaus* $f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$, *jolle*

$$f(z_1) = w_1\,, \quad f(z_2) = w_2 \quad \text{ja} \quad f(z_3) = w_3\,.$$

TODISTUS: Voidaan olettaa (miksi?), että

$$w_1 = 1\,, \quad w_2 = 0 \quad \text{ja } w_3 = \infty\,.$$

Olemassaolo: Etsitty kuvaus on (HT: totea!)

$$f(z) = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}$$

Huomaa: jos z_1, z_2 tai z_3 on ∞, niin (vastavasti)

$$f(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3}\,, \quad \frac{z_1 - z_3}{z - z_3} \quad \text{tai} \quad \frac{z - z_2}{z_1 - z_2}.$$

Yksikäsitteisyys: Olkoon g toinen tällainen Möbius-kuvaus. Silloin

$$f \circ g^{-1}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

on Möbius-kuvaus, jolle

$$\begin{cases} f \circ g^{-1}(0) = 0\,, & \text{josta } b = 0 \\ f \circ g^{-1}(\infty) = \infty\,, & \text{josta } c = 0, \\ f \circ g^{-1}(1) = 1\,, & \text{josta } \frac{a}{d} = 1\,. \end{cases}$$

Näin ollen

$$f \circ g^{-1}(z) = z \quad \text{kaikilla } z \in \hat{\mathbf{C}}\,,$$

joten $f = g$ ja väite on todistettu. □

Kuvauksen f määrittelyn kaavaa sanotaan kaksoisuhteeksi:

9.23. Määritelmä. Olkoot $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbf{C}}$ neljä eri pistettä. Lukua

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}$$

sanotaan pisteiden z_1, z_2, z_3, z_4 *kaksoissuhteeksi.*[11]

Kaksoissuhde on invariantti Möbius-kuvauksissa.

9.24. Lause. *Olkoot $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbf{C}}$ neljä eri pistettä ja $f : \hat{\mathbf{C}} \to \hat{\mathbf{C}}$ Möbius-kuvaus. Tällöin*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] .$$

TODISTUS: Olkoon

$$g(z) = [z_1, z_2, z_3, z]$$

se yksikäsitteinen Möbius-kuvaus (Lause 9.22), joka kuvaa pisteet z_1, z_2 ja z_3 (vastaavasti) pisteiksi 1, 0 ja ∞. Tällöin $g \circ f^{-1}$ kuvaa pisteet $f(z_1)$, $f(z_2)$ ja $f(z_3)$ (vastaavasti) pisteiksi 1, 0 ja ∞, joten

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = g(z_4) = g \circ f^{-1}(f(z_4)) = [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] ,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa Lauseen 9.22 yksikäsitteisyyspuolesta. $\square$

9.25. Huomautus. Lauseen 9.24 avulla löydetään nopeasti se (yksikäsitteinen) Möbius-kuvaus f, joka kuvaa annetut kolme eri pistettä $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbf{C}}$ annetuille kolmelle eri pisteelle $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbf{C}}$: ratkaistaan $f(z)$ kaksoissuhteesta

$$[w_1, w_2, w_3, f(z)] = [z_1, z_2, z_3, z] .$$

Esimerkki. Muodostetaan Möbius-kuvaus f, jolle $0 \mapsto 0$, $1 \mapsto 1$ ja $2 \mapsto i$. Lasketaan

$$[1, 0, i, f(z)] = [1, 0, 2, z] \quad \text{eli} \quad \frac{(1-i)(-f(z))}{(i - f(z))} = \frac{(1-2)z}{2-z} ,$$

[11]Varoitus: älä sekoita merkintää murtoviivaan. Kaksoissuhde voidaan kirjoittaa monessa eri järjestyksessä, joten tarkista aina käyttämästäsi lähteestä, mikä on kulloinenkin määritelmä.

josta

$$f(z) = \frac{iz}{z(2-i) - 2 + 2i}\,.$$

Huomaa, että Lauseiden 9.19 ja 9.20 valossa f kuvaa reaaliakselin ympyrälle, jonka määrää pisteet 0, 1 ja i. Edelleen koska $f(-i) = -1/3$ kuvaa f ylemmän puolitason (bijektiivisesti) em. ympyrän rajaamalle kiekolle

$$B(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

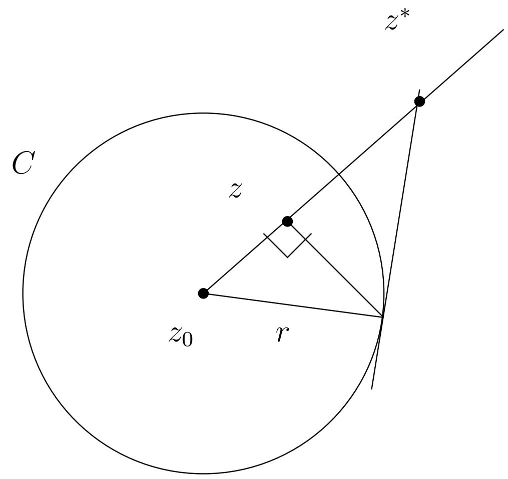
Olkoon

$$C = \{z \in \mathbf{C} : |z - z_0| = r\}$$

z_0-keskinen r-säteinen ympyrä. Jos $z \in \hat{\mathbf{C}}$, niin sen *heijastuspiste kehän C suhteen* on

$$z^* = \begin{cases} z_0 + \dfrac{r^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}\,, & \text{jos } z \neq z_0, \infty \\ \infty\,, & \text{jos } z = z_0 \\ z_0\,, & \text{jos } z = \infty\,. \end{cases}$$

Joskus sanotaan, että pisteet z ja z^* ovat *symmetrisiä* ympyrän C suhteen.



9.26. Lause. *Pisteet z ja w ovat symmetrisiä ympyrän C suhteen, jos ja vain, jos*

$$[w, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]} \quad \textit{kaikilla } z_1, z_2, z_3 \in C\,.$$

Todistus: Ensiksi havaitaan, että

$$z_j^* = z_0 + \frac{r^2}{\bar{z}_j - \bar{z}_0} = z_0 + \frac{(z_j - z_0)(\bar{z}_j - \bar{z}_0)}{\bar{z}_j - \bar{z}_0} = z_j\,, \qquad \text{kun } z_j \in C\,,$$

josta

$$z^* - z_j = \frac{r^2(\bar{z}_j - \bar{z})}{(\bar{z}_j - \bar{z}_0)(\bar{z} - \bar{z}_0}\,,$$

ja siten

$$[z^*, z_1, z_2, z_3] = \overline{[z, z_1, z_2, z_3]}\,.$$

Toinen suunta HT. Huomaa, että mitkä tahansa kolme eri pistettä $z_1, z_2, z_3 \in C$ identifioivat heijastuspisteen. □

9.27. Seuraus. *Olkoon f Möbius-kuvaus ja C yleistetty ympyrä. Tällöin C:n suhteen symmetristen pisteiden z ja z^* kuvapisteet $f(z)$ ja $f(z^*)$ ovat symmetrisiä yleistetyn ympyrän $f(C)$ suhteen.*

□

Esimerkki. Muodostetaan Möbius-kuvaus f, joka kuvaa yksikkökiekon $B(0,1)$ itselleen, $f(0) = 0$, $f(1) = i$. Huomataan, että koska origo pysyy paikallaan, niin sen suhteen symmetrinen piste ∞ pysyy myös paikallaan. Siten

$$[i, 0, \infty, f(z)] = [1, 0, \infty, z]\,,$$

josta

$$\frac{f(z)}{i} = \frac{z}{1} \qquad \text{eli} \qquad f(z) = iz\,.$$

9.4. Möbius-kuvaukset konformikuvauksina

Osoitetaan, että kiekon konformikuvaukset itselleen ovat Möbius-kuvauksen rajoittumia po. kiekkoon.

Aloitetaan seuraavalla tuloksella.

9.28. Lause. *Olkoon $z_0 \in B(0,1)$, $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$. Tällöin Möbius-kuvaus*

$$f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$$

määrää (konformisen) bijektion $f : B(0,1) \to B(0,1)$, jolle $f(z_0) = 0$.

Todistus: Huomaa, että f on Möbius-kuvaus, sillä

$$\lambda(1 - z_0\bar{z}_0) = \lambda(1 - |z_0|^2) \neq 0\,.$$

Siten, koska $f(z_0) = 0$, niin riittää tarkistaa, että

$$f(\partial B(0,1)) \subset \partial B(0,1)\,.$$

Näin onkin, sillä kun $|z| = 1$, niin

$$|f(z)| = |\lambda| \frac{|z - z_0|}{|1 - z\bar{z}_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z||\frac{\bar{z}}{|z|^2} - \bar{z}_0|} = \frac{|z - z_0|}{|\bar{z} - \bar{z}_0|} = \frac{|z - z_0|}{|z - z_0|} = 1\,.$$

□

Tarvitsemme vielä Schwarzin lemmaa:

9.29. Lause. *Jos $f : B(0,1) \to B(0,1)$ on analyyttinen ja $f(0) = 0$, niin*

$$|f'(0)| \leq 1 \quad \text{ja} \quad |f(z)| \leq |z| \quad \text{kaikilla } z \in B(0,1).$$

Lisäksi, jos on $z_0 \in B(0,1)$, $z_0 \neq 0$, jolle $|f(z_0)| = |z_0|$, niin on olemassa $\lambda \in \mathbf{C}$, jolle $|\lambda| = 1$ ja

$$f(z) = \lambda z \quad \text{kaikilla } z \in B(0,1).$$

Todistus: Todistettu demoissa: seuraa hetimmiten, kun maksimiperiaatetta 5.16 sovelletaan funktioon

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}\,, & \text{kun } z \neq 0, \\ f'(0)\,, & \text{kun } z = 0\,, \end{cases}$$

joka on analyyttinen koko kiekossa $B(0,1)$.

□

Kiekon konformiset kuvaukset itselleen ovat Möbius-kuvauksia.

9.30. Lause. *Olkoon $f : B(0,1) \to B(0,1)$ konforminen bijektio ja $z_0 = f^{-1}(0)$. Tällöin on olemassa $\lambda \in \mathbf{C}$, $|\lambda| = 1$, jolle*

$$f(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0} \quad \textit{kaikilla } z \in B(0,1)\,.$$

Todistus: Olkoon

$$g(z) = \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}\,,$$

jolloin Lauseen 9.28 nojalla g määrää kiekon konformikuvauksen itselleen, jolle $g(z_0) = 0$. Siten $h = f \circ g^{-1}$ toteuttaa Schwarzin lemman 9.29 oletukset, joten

$$|h(z)| \leq |z| \quad \text{kaikilla } z \in B(0,1)\,.$$

Kuvaus h^{-1} toteuttaa samoin Schwarzin lemman 9.29 oletukset, joten

$$|h^{-1}(w)| \leq |w| \quad \text{kaikilla } w \in B(0,1)\,.$$

Erityisesti, kun $z = h^{-1}(w)$ on $h(z) = w$ ja

$$|h(z)| \leq |z| = |h^{-1}(w)| \leq |h(z)|$$

eli

$$|h(z)| = |z| \quad \text{kaikilla } z \in B(0,1)\,.$$

Siten Schwarzin lemman erikoistapaus kertoo, että

$$h(z) = \lambda z\,,$$

mistä

$$f(z) = h(g(z)) = \lambda g(z) = \lambda \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}\,,$$

kuten väitettiinkin. □

9.31. Seuraus. *Jos B on kiekko, niin jokainen konformikuvaus $f : B \to B$ on Möbius-kuvauksen rajoittuma kiekkoon B.*

$\square$

Koko tason konformikuvaukset ovat affiineja kuvauksia:

9.32. Lause. *Olkoon $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ kokonainen injektio. Tällöin on olemassa $a, b \in \mathbf{C}$ $a \neq 0$, joille*

$$f(z) = az + b \quad \text{kaikilla } z \in \mathbf{C}\,.$$

Erityisesti siis f on Möbius-kuvaus ja konforminen bijektio.

Todistus: Osoitetaan ensin, että f on polynomi. Jos f ei ole polynomi, on äärettömyyspiste sen oleellinen erikoispiste (Lause 8.14), ts. origo on kuvauksen

$$z \mapsto f(\frac{1}{z})$$

oleellinen erikoispiste. Tällöin Casorati-Weierstrassin lauseesta 8.13 seuraa, että joukko

$$f(\mathbf{C} \setminus B(0,1))$$

on $\mathbf{C}$:ssä tiheä, joten avoin joukko (ks. Lause 9.6) $f(B(0,1))$ leikkaa sitä,

$$f(\mathbf{C} \setminus B(0,1)) \cap f(B(0,1)) \neq \emptyset\,.$$

Siis on pisteet $z_1 \in B(0,1)$ ja $z_2 \notin B(0,1)$, joille vastoin f:n injektiiivisyyttä pätee

$$f(z_1) = f(z_2)\,.$$

Siis f on polynomi.

Algebran peruslauseen 5.15 ja Lauseen 9.4 nojalla injektiivinen polynomi on 1. astetta, mistä väite seuraa. $\square$