# MITTA- JA INTEGRAALITEORIA

Tero Kilpeläinen

2003-04

Teksti sisältää muistiinpanoja vuosina 2003-04 pidetystä kurssista. Tämän paketin tarkoitus on tukea omien muistiinpanojen tekoa, ei korvata niitä. Matematiikkaa oppii parhaiten itse kirjoittaen ja ongelmia ratkoen.

Do not ask permission to understand
Do not wait for the word of authority
Seize reason in your own hand
With your own teeth savor the fruit

Robert S. Strichartz

## Sisällys

| | |
|---|---|
| Naiivi johdanto | 1 |
| 1. Valmisteluja | 2 |
| **A. Mittateoriaa** | |
| 2. Lebesguen ulkomitta | 6 |
| **B. Integraaliteoriaa** | |
| 3. Yksinkertaisen funktion integraali | 21 |
| 4. Mitalliset funktiot | 25 |
| 5. Ei-negatiivisen funktion integraaali | 32 |
| 6. Integroituvat funktiot ja niiden integraaalit | 39 |
| 7. Konvergenssilauseiden sovellutuksia | 44 |
| 8. Fubinin lause Lebesgue-integraaleille | 54 |
| 9. Absoluuttisesti jatkuvat funktiot | 61 |
| 10. $L^p$-avaruuksista | 67 |
| **C. Yleistä mittateoriaa** | |
| 11. Ulkomitta | 74 |
| 12. Ulkomitan konstruointi | 82 |
| 13. Abstraktit mitta-avaruudet | 87 |
| **D. Yleistä integraaliteoriaa** | |
| 14. Integraaliteoriaa | 90 |

Kuten aina matematiikan opiskelussa, määritelmät on opeteltava huolella. Niiden käyttöä ja sisältöä oppii parhaiten todistuksia tarkastelemalla ja harjoitustehtäviä (jotka sisältävät esimerkkejä) tekemällä. Esitietoina on hyvä kerrata differentiaali- ja integraalilaskennan kurssi.

## Naiivi johdanto

Analyysi 2- sekä differentiaali- ja integraalilaskennan kursseilla opittiin Riemannin integraalin käsite yhdessä ja useammassa ulottuvuudessa. Riemannin integraalissa on kuitenkin muutama heikkous: integroituvia funktioita on melko vähän (funktio voi olla epäjatkuva vain mitättömän pienessä joukossa) ja Riemann-integraali soveltuu huonosti rajankäyntiprosesseihin (integroituvien funktioiden rajafunktiot eivät enää yleensä ole integroituvia). Esim. $f = \chi_{\mathbf{Q}}$ ei ole Riemann-integroituva.

Edellä mainitut heikkoudet Riemannin integraalissa johtivat integraalikäsitteen kehittelyihin. Nykyisin standardina käytetään ns. Lebesgue-integraalia, jonka syntyyn merkittävasti vaikuttivat mm. Emilé Borel ja Henri Lebesgue 1900-luvun alkumetreillä. Lebesgue-integraalilla on lukuisia sovellutuskohteita, kuten todennäköisyysteoria ja osittaisdifferentiaaliyhtälöt.

Muistellaanpa aluksi (yksiulotteista) Riemann-integraalia. Funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ Riemann-integraali määritellään usein porrasfunktioiden avulla:

$$\text{ala} \int f = \sup \left\{ \int g : g \, \text{porrasfunktio}, g \le f \right\}$$

ja

$$\text{ylä} \int f = \inf \left\{ \int h : h \, \text{porrasfunktio}, h \ge f \right\},$$

missä $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ on porrasfunktio, jos väli $[a, b]$ voidaan jakaa äärellisen moneen osaväliin siten, että $g$ on vakio kullakin osavälillä; porrasfunktion integraali on helppo määritellä: lasketaan vain porraspalkkien pinta-alat yhteen (portaan suunnan huomioiden): jos $a = x_0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k = b$ ovat sellaisia pisteitä, että $g(x) = c_j$, kun $x \in ]x_{j-1}, x_j[$, $j = 1, 2, \ldots, k$, niin

$$\int g = \sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_{j-1}).$$

Edelleen, $f$ on Riemann-integroituva, jos

$$\text{ylä} \int f = \text{ala} \int f,$$

jolloin tämä yhteinen arvo on $=: \int f$.

Geometrisesti ideana on approksimoida $f$:n graafin (ei-negatiivinen $f$) ja $x$-akselin väliin jäävää alaa äärellisen monen suorakaiteiden yhdisteen muodostaman monikulmion pinta-aloilla (sisältä ja ulkoa).

Lebesgue-integraalia rakennettaessa Riemann-integraalia korjataan karkeasti ilmaisten siten, että porrasfunktioiden määritelmässä oleva äärellisen moneen osaväliin jako korvataan äärettömällä määrällä monimutkaisempia suorakaiteen pohjia (kuin $n$-välit).

Tästä johdutaan ongelmaan: kuinka laskea sellaisen suorakaiteen pinta-ala, jonka pohja ei olekaan väli. Pitäisi ensin kyetä laskemaan pohjan “pituus”. Tehdään tämä matkimalla Riemann-integraalin määritelmää, minkä avulla kyettiin laskemaan erilaisten funktioiden graafien rajoittamia pinta-aloja: Approksimoidaan joukkoa

$A \subset \mathbf{R}^n$ mahdollisimman hyvin $\infty$-kulmiolla, joka koostuu äärettömän monen $n$-välin yhdisteestä. Näiden tilavuuksien avulla saadaan Lebesgue-mitta, minkä jälkeen integraalikäsitteen rakentaminen tapahtuu lähes yllä kuvatulla tavalla.

Tällä kurssilla numeroituvasti äärettömät prosessit ovat lähes aina sallittuja ja harmittomia!

## 1. Valmisteluja

Joukon $X$ osajoukkojen kokoelmaa sanotaan $X$:n *potenssijoukoksi* ja sitä merkitään

$$\mathcal{P}(X) = \{A \colon A \subset X\}.$$

Joukkojen $A$ ja $B$ *leikkaus*, *yhdiste* ja *erotusjoukko* ovat

$$A \cap B \colon = \{x \colon x \in A \text{ ja } x \in B\}, \qquad \text{leikkaus,}$$

$$A \cup B \colon = \{x \colon x \in A \text{ tai } x \in B\}, \qquad \text{yhdiste,}$$

$$A \setminus B \colon = \{x \in A \colon x \notin B\}, \qquad \text{erotusjoukko.}$$

Jos $X$ on (perus)joukko (mikä on tällä kurssilla useinmiten $\mathbf{R}^n$), niin joukon $A \subset X$ *komplementti* on joukko

$$A^c \colon = \complement A \colon = \{x \in X : x \notin A\} = X \setminus A.$$

Edelleen sanotaan, että joukot $A$ ja $B$ ovat *pistevieraita*, jos $A \cap B = \emptyset$.

Tällä kurssilla ksitellään paljon äärettömiä joukkoja ja joukkokokoelmia. Muista (algebra tms.), että joukkojen $A$ ja $B$ sanotaan olevan *yhtä mahtavia*, jos on olemassa bijektio $b \colon A \to B$; tällöin siis joukon $A$ alkiot voidaan "laskea" joukon $B$ alkioiden avulla. Konkreettisesti joukon $A$ alkiot voidaan laskea tai luetella peräkkäin, jos $A$ on *numeroituva*, ts. jos on olemassa luonnollisten lukujen joukon $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ osajoukko $B$, jolle on bijektio $b : A \to B$. Huomaa, että (tällä kurssilla) numeroituva joukko on siis joko äärellinen tai yhtä mahtava $\mathbf{N}$:n kanssa (so. *numeroituvasti ääretön*). Jos joukko $A$ ei ole numeroituva, on se *ylinumeroituva*. Tällä kurssilla numeroituvat joukot ovat yleensä vaarattomia ja "pieniä".

**Esimerkki.** Äärelliset joukot ja $\mathbf{Q}$ ovat numeroituvia. $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}$ ja $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ovat ylinumeroituva.

Jatkossa tarvitsemme äärettömänkin monen joukon yhdisteitä ja leikkauksia: Olkoon $I$ joukko (useinmiten $I$ tulee kuitenkin olemaan numeroituva) ja olkoot $E_i$, $i \in I$ joukkoja. Niiden *yhdiste* ja *leikkaus* ovat

$$\bigcup_{i \in I} E_i = \{x : x \in E_i \text{ jollakin } i \in I\}, \qquad \text{yhdiste,}$$

$$\bigcap_{i \in I} E_i = \{x : x \in E_i \text{ kaikilla } i \in I\}, \qquad \text{leikkaus.}$$

**DeMorgan**in lait on helppo todistaa harjoitustehtävänä:

$$A \setminus \bigcup_{i \in I} E_i = \bigcap_{i \in I} (A \setminus E_i)$$

ja

$$A \setminus \bigcap_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in I} (A \setminus E_i).$$

**Muistutus**. Numeroituvan monen numeroituvan joukon yhdiste on numeroituva. Numeroituvan joukon osajoukot ovat edelleen numeroituvia.

Eräs tärkeimmistä Analyysi 1 -kurssin käsitteistä oli supremum (ja infimum). Muista, että epätyhjän joukon $A \subset \mathbf{R}$ *supremum* $\sup A$ on joukon $A$ pienin yläraja. Ts. $\sup A$ on sellainen luku $M$, jolle pätee

i) $M$ on joukon $A$ yläraja eli $a \le M$ kaikilla $a \in A$, ja
ii) $M$ on joukon $A$ ylärajoista pienin eli jos $G$ on jokin joukon $A$ yläraja, niin $G \ge M$.

Vastaavasti, joukon $A \subset \mathbf{R}$ *infimum* $\inf A$ on joukon $A$ suurin alaraja. Ts. $\inf A$ on sellainen luku $m$, jolle pätee

i) $m$ on joukon $A$ alaraja eli $a \ge m$ kaikilla $a \in A$, ja
ii) $m$ on joukon $A$ alarajoista suurin eli jos $g$ on jokin joukon $A$ alaraja, niin $g \le m$.

Reaalilukujen täydellisyyden nojalla jokaisella ylhäältä rajoitetulla joukolla $A \neq \emptyset$ on $\sup A \in \mathbf{R}$, ts. jos joukolla $A$ ylipäänsä on jokin (reaalinen) yläraja, niin eräs näistä ylärajoista on pienin. Samoin alhaalta rajoitetulla joukolla $A \neq \emptyset$ on $\inf A \in \mathbf{R}$.

Edelleen, $\sup A \in A$ täsmälleen silloin, kun $A$:ssa on suurin alkio, jolloin $\sup A = \max A$. Samoin, $\inf A \in A$ täsmälleen silloin, kun $A$:ssa on pienin alkio, jolloin $\inf A = \min A$.

## $\overline{\mathbf{R}}$ ja sen struktuuri.

**Määritelmä.** Joukko $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ on *laajennettu reaalilukujoukko*. Tässä $-\infty, \infty \notin \mathbf{R}$.

a) $\overline{\mathbf{R}}$:n *järjestys*: määrittelemällä

$$-\infty < a < \infty \text{ kaikilla } a \in \mathbf{R}$$

saadaan reaalilukujen normaali järjestysrelaatio $\le$ laajennetuksi koko $\overline{\mathbf{R}}$:oon (ja usein saatetaan merkitä $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$).

b) $\overline{\mathbf{R}}$:n *algebralliset ominaisuudet*:

$$\begin{aligned} \text{summa:} \qquad & a + \infty = \infty + a = \infty\,, \text{ kun } a \in \overline{\mathbf{R}} \setminus \{-\infty\} \\ & b - \infty = -\infty + b = -\infty\,, \text{ kun } b \in \overline{\mathbf{R}} \setminus \{\infty\} \\ & -(\infty) = -\infty \text{ ja } -(-\infty) = \infty\,. \end{aligned}$$

Laskutoimituksia $\infty - \infty$, $\infty + (-\infty)$ ja $-\infty + \infty$ ei määritellä!

*Tulo:*

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \begin{cases} \infty, & \text{jos } a > 0 \\ -\infty, & \text{jos } a < 0 \\ 0, & \text{jos } a = 0 \text{ (mukavuussyistä)} \end{cases}$$

ja

$$a \cdot (-\infty) = -\infty \cdot a = \begin{cases} -\infty, & \text{jos } a > 0 \\ \infty, & \text{jos } a < 0 \\ 0, & \text{jos } a = 0 \text{ (mukavuussyistä).} \end{cases}$$

Edelleen määritellään

$$\frac{a}{0} = \begin{cases} \infty, & \text{jos } a > 0 \\ -\infty, & \text{jos } a < 0, \end{cases}$$

ja

$$\frac{a}{\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0 \text{ kaikilla } a \in \mathbf{R}.$$

Erityisesti siis laskutoimituksia

$$\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \text{ ja } \frac{0}{0}$$

ei ole määritelty eikä niitä saa siis käyttää.

**Huomautuksia.**

i) Jos $\emptyset \neq A \subset \overline{\mathbf{R}}$, niin on olemassa luvut $\sup A \in \overline{\mathbf{R}}$ ja $\inf A \in \overline{\mathbf{R}}$. (Voidaaan myös sopia, että $\sup \emptyset = -\infty$ ja $\inf \emptyset = \infty$.)

ii) Laajennetun reaaliakselijoukon alkioiden muodostaman jonon suppeneminen määritellään kuten ennenkin, esim. kun $x_j \in \overline{\mathbf{R}}$, niin

$$\lim_{j \to \infty} x_j = -\infty,$$

joss

kaikilla $M \in \mathbf{R}$ on olemassa $j_0 \in \mathbf{N}$ siten, että $x_j < M, \text{ kun } j \geq j_0$.

iii) Nousevalla jonolla $x_j$, $x_j \in \overline{\mathbf{R}}$, on aina raja-arvo $\overline{\mathbf{R}}$:ssä: (nouseva: $x_j \leq x_{j+1}$)

$$\lim_{j \to \infty} x_j = \sup\{x_1, x_2, x_3 \dots\} \in \overline{\mathbf{R}}.$$

Vastaavasti, laskevalla jonolla $x_j$, $x_j \in \overline{\mathbf{R}}$, on aina raja-arvo $\overline{\mathbf{R}}$:ssä: (laskeva: $x_j \geq x_{j+1}$)

$$\lim_{j \to \infty} x_j = \inf\{x_1, x_2, x_3 \dots\} \in \overline{\mathbf{R}}.$$

iv) Tavanomaiset laskulait ovat voimassa $\overline{\mathbf{R}}$:ssä, kunhan ei jouduta määrittelemättömiin muotoihin.

v) Ole varovainen epäyhtälöiden käsittelyssä, jos joku termeistä on 0, $\infty$ tai $-\infty$.

**Katsaus ei-negatiivitermisten sarjojen suppenemiseen.** Olkoon $I$ indeksijoukko, $I \neq \emptyset$, ja $a : I \to [0, \infty]$. Merkitään $a_i := a(i)$. Jos $J \subset I$ on äärellinen, niin määritellään

$$S_J = \sum_{i \in J} a_i \,, \quad (S_\emptyset := 0).$$

Edelleen määritellään

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \in I} a(i) := \sup\{S_J \colon J \subset I \text{ äärellinen}\}.$$

**1.1. Lause.** *Kun $a_i \geq 0$, niin*[1]

$$\sum_{i \in \mathbf{N}} a_i = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{j} a_i.$$

*Todistus.* Olkoon $J_n := \{1, 2, \dots, n\} \subset \mathbf{N}$ äärellinen. Merkitään

$$S := \sum_{i \in \mathbf{N}} a_i \in \overline{\mathbf{R}}.$$

$S_{J_n}$ on nouseva jono $\overline{\mathbf{R}}$:n alkioita, joten

$$\text{on olemassa } S' := \lim_{n \to \infty} S_{J_n}.$$

On näytettävä, että $S' = S$. Koska $S_{J_n} \leq S$ kaikilla $n$, on $S' \leq S$. Toisinpäin: jos $J \subset \mathbf{N}$ on äärellinen, on olemassa $n$ siten, että $n \geq m$ kaikilla $m \in J$. Tällöin $J \subset J_n$, joten $S_J \leq S_{J_n} \leq S'$, joten $S \leq S'$. □

**1.2. Lause.** *Jos $a_i > 0$ ylinumeroituvan monella $i \in I$, niin*

$$\sum_{i \in I} a_i = \infty.$$

*Todistus.* Harjoitustehtävä. (Huomaa: On $\alpha > 0$, jolle $\{i \in I \colon a_i \geq \alpha\}$ on ääretön.) □

**1.3. Lause.** *Kun $a_{ij} \geq 0$, on*

$$\sum_{(i,j) \in I \times I'} a_{ij} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in I'} a_{ij} = \sum_{j \in I'} \sum_{i \in I} a_{ij}.$$

*Todistus.* Harjoitustehtävä. Ei vaikea. □

**1.4. Seuraus.**

$$\sum_{j \in \mathbf{N}} \sum_{i \in \mathbf{N}} a_{ij} = \sum_{i \in \mathbf{N}} \sum_{j \in \mathbf{N}} a_{ij}.$$

[1] Tässä käytetään sopimusta, että $0 \notin \mathbf{N}$.

# A. Mittateoriaa

## 2. Lebesguen ulkomitta

Tavoite: Etsitään keinoa määritellä $\mathbf{R}^n$:n osajoukon $A$ mitta siten, että se yksinkertaisissa tapauksissa vastaa geometristä mittaa. Toisin sanoen

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^1\text{:n janan mitta} &= \text{sen pituus} \\ \mathbf{R}^2\text{:n suorakaiteen mitta} &= \text{sen pinta-ala} \\ \mathbf{R}^3\text{:n suorakulmaisen laatikon mitta} &= \text{sen tilavuus} \end{aligned}$$

jne.

Lisätoiveita:

. onnistutaan määräämään jokaisen joukon mitta $\in [0, \infty]$
. samannäköisillä joukoilla on sama mitta, ts. mitta on invariantti kierroissa ja siirroissa
. mitta on täydellisesti additiivinen, ts. numeroituvan monen pistevieraan joukon $A_1, A_2, \ldots$ yhdisteen mitta on joukkojen $A_j$ mittojen summa.

Tulos: toivottua tavoitetta ei voida saavuttaa; voidaan osoittaa, ettei sellaista mittaa ole, jolla olisi kaikki ym. ominaisuudet. Siksi konstruoidaan aluksi ns. ulkomitta, jolla on muut ominaisuudet paitsi täydellistä additiivisuutta. Sopivasti rajoittamalla tarkasteltavien joukkojen luokkaa (vain hieman) saadaan täysadditiivisuus siellä voimaan.

**Määritelmä.** $\mathbf{R}^n$:n *väli* ($n$-väli) $I \subset \mathbf{R}^n$ on $n$ reaalilukuvälin $I_1, I_2, \ldots, I_n \subset \mathbf{R}$ karteesinen tulo, ts.

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : x_j \in I_j \text{ kaikilla } j = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Muista, että $\mathbf{R}$:n välit ovat muotoa

$$[a, b], \quad [a, b[, \quad ]a, b[, \quad ]a, b]\,,$$

missä avoin päätepiste voi olla $\pm\infty$. $\mathbf{R}^n$:n väliksi sallitaan myös *surkastuneet välit*, joissa jokin $I_j = \{a, \}$ koostuu vain yhdestä pisteestä.

Edelleen sanotaan, että $n$-väli $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ on *avoin*, jos kaikki sen tekijävälit $I_j \subset \mathbf{R}$ ovat avoimia. Siis avoin $n$-väli on muotoa

$$I = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : a_j < x_j < b_j,\ j = 1, 2, \ldots, n\}\,,$$

missä $a_j, b_j \in \overline{\mathbf{R}}$.

**Määritelmä.** Jos

$$I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n\,,$$

missä $I_j \subset \mathbf{R}$ ovat välejä, joiden päätepisteet ovat $a_j \le b_j$, niin luku

$$\begin{aligned} v(I) &= (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j)\,, \\ v(\emptyset) &= 0 \end{aligned}$$

on $I$:n *geometrinen mitta*.

**Huom.** Jos $n = 1$, on geometrinen mitta välin pituus; jos $n = 2$, suorakaiteen pinta-ala; jos $n = 3$, laatikon tilavuus.

**Määritelmä.** Olkoon $\mathcal{K}$ $\mathbf{R}^n$ avointen $n$-välien ja $\emptyset$:n muodostama joukko ja $A \subset \mathbf{R}^n$. Lukua

$$m^*(A) = m_n^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \colon I_k \in \mathcal{K}, \quad A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

sanotaan joukon $A$ (*$n$-ulotteiseksi*) *Lebesguen ulkomitaksi.*[2]

On saatu joukkofunktio $m^* \colon \mathcal{P}(\mathbf{R}^n) \to [0, \infty]$, jolla on ominaisuudet:

**2.1. Lause.** *Lebesguen ulkomitalle $m^*$ pätee:*

i) $m^*(\emptyset) = 0$

ii) *Jos $A \subset B \subset \mathbf{R}^n$, niin $m^*(A) \leq m^*(B)$.* *(monotonisuus)*

iii) *Jos $A_1, A_2, \dots \subset \mathbf{R}^n$, niin*

$$m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j). \qquad \textit{(subadditiivisuus)}$$

*Todistus.* i): Koska $v(\emptyset) = 0$, on $m^*(\emptyset) = 0$.

ii): Monotonisuus seuraa infimumin ominaisuuksista.

iii): Olkoot $A_1, A_2, \dots \subset \mathbf{R}^n$. Voidaan selvästi olettaa, että $m^*(A_j) < \infty$ kaikilla $j$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan avoimet $n$-välit $I_{k,j} \in \mathcal{K}$ siten, että

$$A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,j}$$

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(I_{k,j}) \leq m^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon\,.$$

Tällöin

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{k,j} = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} I_{k,j}\,,$$

mikä on numeroituva yhdiste, joten

$$\begin{aligned} m^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) &\leq \sum_{k,j=1}^{\infty} v(I_{k,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} v(I_{k,j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty}(m^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) + \varepsilon. \end{aligned}$$

□

[2]Huomaa, että välejä $I_k$ on oltava äärettömän monta.

**Huomautus.**

(1) Jokaisen yksiön mitta on nolla, $m^*(\{x\}) = 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$. (Harjoitustehtävä).

(2) Jos $A_1, A_2, \ldots, A_k \subset \mathbf{R}^n$, niin

$$m^*(\bigcup_{j=1}^{k} A_j) \leq \sum_{j=1}^{k} m^*(A_j).$$

(Syy: $m^*(\emptyset) = 0$.)

(3) Olkoon $N \subset \mathbf{R}^n$ numeroituva. Tällöin $m^*(N) = 0$, koska $N = \{x_1, x_2 \ldots\}$ tai $N = \{x_1, x_2 \ldots, x_k\}$, missä $x_j \in \mathbf{R}^n$; joten

$$m^*(N) \leq \sum_j \underbrace{m^*(\{x_j\})}_{=0} = 0.$$

Lebesguen mitta väleillä yhtyy geometriseen mittaan:

**2.2. Lause.** *Olkoon $I \subset \mathbf{R}^n$ $n$-väli. Tällöin*

$$m^*(I) = v(I),$$

*toisin sanoen jos $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, missä $I_j$:den päätepisteet ovat $a_j$ ja $b_j$, $a_j \leq b_j$, niin*

$$m^*(I) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j).$$

*Todistus.*

(1) Olkoon $I$ suljettu. Voidaan olettaa, että $I$ on kompakti (Harjoitustehtävä).

a) $m^*(I) \leq v(I)$:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Jos $I = [a_1, b_1] \times \ldots [a_n, b_n]$, niin

$$I \subset \underset{\text{avoin}}{I_\varepsilon} = ]a_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon[ \times \cdots \times ]a_n - \varepsilon, b_n + \varepsilon[$$

ja siis

$$m^*(I) \leq v(I_\varepsilon) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i + 2\varepsilon);$$

väite seuraa, kun $\varepsilon \to 0$. (Huom: $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ tässä tapauksessa.) $\square_{a)}$

b) $m^*(I) \geq v(I)$:

Olkoon $I \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$, missä $I_j$ avoin, $n$-väli. Väite:

$$v(I) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(I_k).$$

Koska $I$ on kompakti, on olemassa sellainen $k$, että $I \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$. Nyt

$$v(I) \leq \sum_{j=1}^{k} v(I_j) \qquad \text{(miksi?, HT)},$$

joten

$$v(I) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j)$$

ja ottamalla infimum yli kaikkien sellaisten välien

$$v(I) \leq \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} v(J_i) \colon J_i \in \mathcal{K}, \quad I \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\} = m^*(I).$$

$\square_{(1)}$

(2) Olkoon $I$ avoin.
Määritelmän nojalla $m^*(I) \leq v(I)$.

Olkoon $I = ]a_1, b_1[ \times \cdots \times ]a_n, b_n[$, kun $a_j \in \overline{\mathbf{R}}$, ja olkoon $a_j < \tilde{a}_j < \tilde{b}_j < b_j$. Tällöin monotonisuuden ja kohdan (1) avulla

$$\begin{aligned} m^*(I) &\geq m^*([\tilde{a}_1, \tilde{b}_1] \times \cdots \times [\tilde{a}_n, \tilde{b}_n]) \\ &= (\tilde{b}_1 - \tilde{a}_1)(\tilde{b}_2 - \tilde{a}_2) \cdots (\tilde{b}_n - \tilde{a}_n) \\ &\to (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n) \\ &= v(I)\,, \end{aligned}$$

kun $\tilde{b}_j \to b_j$ ja $\tilde{a}_j \to a_j$.

$\square_{(2)}$

(3) Olkoon $I$ mielivaltainen $n$-väli.
Tällöin $\operatorname{int} I \subset I \subset \overline{I}$ ja

$$\begin{aligned} v(I) &= v(\operatorname{int} I) = m^*(\operatorname{int} I) \\ &\leq m^*(I) \leq m^*(\overline{I}) = v(\overline{I}) = v(I). \end{aligned}$$

$\square$

**Huomautus.** Lebesguen $n$-ulkomitta on siirto- ja kiertoinvariantti: jos $T$ on siirto,

$$Tx = x + b, \quad b \in \mathbf{R}^n$$

tai jos $\mathcal{O} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ on kierto, ts. $\mathcal{O}x_0 = x_0$ ja

$$|\mathcal{O}x - \mathcal{O}y| = |x - y| \quad \text{kaikilla } x, y \in \mathbf{R}^n,$$

niin

$$m^*(A) = m^*(T(A)) = m^*(\mathcal{O}(A)) \quad \text{kaikilla } A \subset \mathbf{R}^n$$

(harjoitustehtävä).

Yleisemmin pätee: Jos $L : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ on lineaarinen, niin

$$m_n^*(L(A)) = |\det L| m_n^*(A)$$

(todistus tekninen).

**Huomautus.** Kaikille $A \subset \mathbf{R}^n$ ja $t > 0$ on

$$m^*(\{tx : x \in A\}) = |t|^n m^*(A) \quad \text{(harjoitustehtävä).}$$

Nyt tiedämme, että Lebesguen ulkomitta $m^*$ täyttää sille asetetut ehdot paitsi (ehkä) numeroituvan additiivisuutta, joka valitettavasti ei ole aina voimassa.

Tutkitaan seuraavassa mitattavissa olevia joukkoja, jotka ovat sellaisia, joille numeroituva additiivisuus saadaan voimaan.

**Määritelmä.** Joukko $A \subset \mathbf{R}^n$ on *Lebesgue-mitallinen*, jos

$$m^*(E) = m^*(A \cap E) + m^*(E \setminus A) \quad \text{kaikilla } E \subset \mathbf{R}^n. \quad \text{(Carathéodoryn ehto)}$$

Huomaa, että $E$ on mielivaltainen!

Merkitään

$$\mathcal{M} := \mathcal{M}_n := \{A \subset \mathbf{R}^n : A \text{ on Lebesgue-mitallinen}\}.$$

Mitallisen joukon avulla minkä tahansa joukon mitta voidaan laskea kahdessa osassa, $A$:n kohtaavien ja väistävien pisteiden mittojen summana.

**Huomautus.** Subadditiivisuuden nojalla

$$m^*(E) \le m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \quad \text{kaikilla } E \subset \mathbf{R}^n,$$

joten $A$ on mitallinen, jos ja vain, jos

$$m^*(E) \ge m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \quad \text{kaikilla } E \subset \mathbf{R}^n.$$

**2.3. Lemma.** *Joukko $A$ on mitallinen, jos ja vain jos*

$$m^*(S \cup U) = m^*(S) + m^*(U) \quad \text{kaikilla } S \subset A \text{ ja } U \subset \mathbf{R}^n \setminus A.$$

*Todistus.* "$\Leftarrow$" pätee, koska

$$E = (\underbrace{A \cap E}_{\text{"S"}}) \cup (\underbrace{E \setminus A}_{\text{"U"}}).$$

"$\Rightarrow$": Kun $S \subset A$ ja $U \subset \mathbf{R}^n \setminus A$, niin

$$\begin{aligned} m^*(\overbrace{S \cup U}^{=E}) &= m^*(\overbrace{A \cap (S \cup U)}^{=S\cap A=S}) + m^*(\overbrace{A^C \cap (S \cup U)}^{A^C\cap U=U}) \\ &= m^*(S) + m^*(U). \end{aligned}$$

□

**Huom.** Mitallisten joukkojen luokka ei ole tyhjä: triviaalisti $\emptyset$ ja $\mathbf{R}^n$ ovat mitallisia (itse asiassa lähes kaikki konstruoitavissa olevat joukot ovat mitallisia, kuten myöhemmin tulemme näkemään). Lisäksi nollamittaiset joukot ovat Lebesgue-mitallisia:

**2.4. Lemma.** *Jos $m^*(A) = 0$, niin $A$ on Lebesgue-mitallinen.*

*Todistus.* Kun $E \subset \mathbf{R}^n$, on mitan $m^*$ monotonisuuden nojalla

$$m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \le m^*(A) + m^*(E \setminus A) = m^*(E \setminus A) \le m^*(E),$$

kun huomataan, että $m^*(A) = 0$. □

**Varoitus.** Yleensä siitä, että $m^*(A) = 0$ ei seuraa, että $A = \emptyset$. Esim. surkastunut väli $A = \{(x, 0) \in \mathbf{R}^2 : x \in \mathbf{R}\} = \mathbf{R} \times \{0\}$ on nollamittainen, $m^*(A) = 0$.

**2.5. Lause.**

i) *Jos $A$ ja $B$ ovat Lebesgue-mitallisia, niin myös $A \setminus B$ on Lebesgue-mitallinen. Erityisesti $A^C$ on Lebesgue-mitallinen.*

ii) *Jos $A_1, A_2, \dots \subset \mathbf{R}^n$ ovat mitallisia, on yhdiste $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mitallinen.*

iii) *Jos $A_1, A_2 \dots \subset \mathbf{R}^n$ ovat Lebesgue-mitallisia ja pareittain pistevieraita, (so. $A_j \cap A_i = \emptyset$, kun $i \ne j$), niin*

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A_i).$$

*Todistus.* Käytetään Lemmaa 2.3.

i): Olkoon $S \subset A \setminus B$, $U \subset (A \setminus B)^C = A^C \cup B$. Nyt

$$\begin{aligned}
m^*(S) + m^*(U) &= m^*(S) + m^*((U \cap B) \cup (U \setminus B)) \qquad (U = (U \cap B) \cup (U \setminus B)) \\
&= m^*(S) + m^*(U \cap B) + m^*(U \setminus B) \qquad \text{(koska } B \text{ on mitallinen)} \\
&= m^*(U \cap B) + m^*(S \cup (U \setminus B)) \\
&\qquad \text{koska } A \text{ on mitallinen, } S \subset A \text{ ja } U \setminus B \subset A^C \text{ (Lemma 2.3)} \\
&= m^*(\underbrace{(U \cap B) \cup (S \cup (U \setminus B)}_{S \cup U})) = m^*(S \cup U), \\
&\qquad \text{koska } B \text{ on mitallinen, } U \cap B \subset B \text{ sekä } S \cup (U \setminus B) \subset B^C.
\end{aligned}$$

Siispä $A \setminus B$ on mitallinen.

Huomaa, että $\mathbf{R}^n$ ja $A$ ovat mitallisia, joten $A^C = \mathbf{R}^n \setminus A$ on mitallinen. $\square_{i)}$

ii): Olkoon $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_n$. Olkoon

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\
B_k &= A_k \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{k-1} A_j\right), \quad k = 2, 3, \dots .
\end{aligned}$$

Joukot $B_k$ ovat pareittain pistevieraita ja

$$\dot{\bigcup_{i=1}} A_i = \dot{\bigcup_{k=1}} B_k,$$

oli yhdiste äärellinen tai ääretön. Edelleen

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k.$$

**Apuväite.** *Jos* $S_k = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$, *niin* $S_k \in \mathcal{M}$ *ja*

$$m^*(E) \geq \sum_{j=1}^{k} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap S_k^C) \quad \text{kaikilla } E \subset \mathbf{R}^n.$$

*Apuväitteen todistus.* Induktio: ok, kun $k = 1$.

Induktioaskel $k \to k+1$: Koska $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus S_k \in \mathcal{M}$ kohdan i) nojalla, saadaan käyttämällä tätä, $S_k$:n mitallisuutta, induktio-oletusta sekä ulkomitan subadditiivisuutta:

$$\begin{aligned}
m^*(E) &= m^*(E \cap B_{k+1}) + m^*(\underbrace{E \setminus B_{k+1}}_{E \cap B_{k+1}^C}) \\
&= m^*(E \cap B_{k+1}) + m^*(\underbrace{E \cap B_{k+1}^C \cap S_k}_{E \cap S_k}) + m^*(\underbrace{E \cap B_{k+1}^C \cap S_k^C}_{E \cap S_{k+1}^C}) \\
&\geq \sum_{j=1}^{k+1} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap S_{k+1}^C) \\
&\geq m^*(E \cap S_{k+1}) + m^*(E \setminus S_{k+1}),
\end{aligned}$$

joten $S_{k+1}$ on Lebesgue-mitallinen ja apuväitten epäyhtälö on tosi. $\square_{\text{Apuväite}}$

Nyt saamme apuväitteen epäyhtälöstä

$$\begin{aligned}
m^*(E) &\geq \sum_{j=1}^{k} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap S_k^C) \\
&\geq \sum_{j=1}^{k} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap A^C),
\end{aligned}$$

joten antamalla $k \to \infty$ seuraa subadditiivisuudesta

$$\begin{aligned}
m^*(E) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(E \cap B_j) + m^*(E \cap A^C) \\
&\geq m^*(E \cap A) + m^*(E \cap A^C).
\end{aligned}$$

Siispä $A$ on Lebesgue-mitallinen. $\square_{ii)}$

Valitsemalla edellisessä kaavassa $E = A$ saamme

$$\begin{aligned} m^*(A) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} m^*(\underbrace{A \cap B_j}_{=B_j}) + m^*(\underbrace{A \cap A^C}_{=\emptyset}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m^*(B_j). \end{aligned}$$

Näin ollen väite iii) seuraa tästä ja subadditiivisuudesta, sillä $A_j = B_j$, mikäli joukot $A_j$ ovat pareittain pistevieraita. □

**2.6. Seuraus.** *Jos $A_1, A_2, \dots \subset \mathbf{R}^n$ ovat mitallisia, on leikkaus $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ myös mitallinen.*

*Todistus.* DeMorganin kaavojen nojalla

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbf{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} (\mathbf{R}^n \setminus A_i)\,,$$

mikä on Lauseen 2.5 nojalla mitallinen. □

Lauseen 2.5 nojalla mitallisten joukkojen kokoelma muodostaa ns. $\sigma$-algebran, minkä määrittelemme tässä myöhempää käyttöä varten.

**Määritelmä.** Kokoelma $\Gamma$ joukon $X$ osajoukkoja on *$\sigma$-algebra* $X$:ssä, jos seuraavat kolme ehtoa toteutuvat:

i) $\emptyset \in \Gamma$.
ii) Jos $A \in \Gamma$, niin $X \setminus A \in \Gamma$.
iii) Jos $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$, niin $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Gamma$.

Lauseen 2.5 avulla saadaan seuraava merkittävä tulos:

**2.7. Lause.** *Määritellään joukkofunktio $m = m_n \colon \mathcal{M}_n \to [0, \infty]$ asettamalla*

$$m(A) = m^*(A).$$

*Tällöin joukkofunktio $m$ on (täysadditiivinen) mitta Lebesgue-mitallisten joukkojen muodostamalla $\sigma$-algebralla $\mathcal{M}$, ts*

i) $m(\emptyset) = 0$*, ja*
ii) *Jos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ ovat pareittain pistevieraita, niin*

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i).$$

□

Tavoitteemme on saavutettu Lebesgue-mitallisten joukkojen luokassa $\mathcal{M}$: on konstruoitu täysadditiivinen mitta, joka yhtyy geometriseen mittaan geometrisesti yksinkertaisilla joukoilla. Emme vielä valitettavasti tiedä, kuinka paljon mitallisia joukkoja on (on niitä!). Seuraavaksi tutkiskelemme tätä ja aloitamme toteamalla, että kaikki joukot eivät ole Lebesgue-mitallisia.

**2.8. Lause.** *On olemassa joukko $A \subset \mathbf{R}$, joka ei ole Lebesgue-mitallinen.*

*Todistus.* Määritellään ekvivalenssirelaatio

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{Q}\,.$$

(On ekvivalenssi!) Valitaan jokaisesta ekvivalenssiluokasta tasan yksi edustaja, joka kuuluu välille $[0,1]$. Näin valitut edustajat muodostavat joukon[3], jota merkitään kirjaimella $A$.

**Väite**: $A$ ei ole Lebesgue-mitallinen.

**Antiteesi**: onpas.

Merkitään jokaisella $r \in \mathbf{Q}$

$$A + r = \{x + r \colon x \in A\}\,,$$

jolloin $A + r$ on mitallinen ja $A + r \cap A + s = \emptyset$, kun $r, s \in \mathbf{Q}$, $r \neq s$. Sillä, jos

$$y \in A + r \cap A + s,$$

niin

$$y = x + r = z + s \text{ joillakin } x, z \in A.$$

Tällöin

$$x - z = r - s \in \mathbf{Q} \text{ eli } x \sim z$$

ja joukon $A$ määritelmän nojalla $x = z$, mistä edelleen seuraa, että $r = s$.

Edelleen,

$$[0,1] \subset \bigcup_{r \in \mathbf{Q} \cap [-1,1]} (A + r) \subset [-1,2],$$

joista jälkimmäinen inkluusion on selvä koska $A \subset [0,1]$. Edellisen inkluusion perustelu: jos $x \in [0,1]$, niin on $y \in A$, jolle $x \sim y$ (miksi?). Siten $r = x - y \in \mathbf{Q}$, mutta koska $x, y \in [0,1]$, on $r = x - y \in [-1,1]$ ja $x \in A + r$. Koska joukot $A + r$ olivat pareittain pistevieraita ja mitallisia, saamme nyt

$$m^*\Big(\bigcup_{r \in \mathbf{Q} \cap [-1,1]} A + r\Big) = \sum_{r \in \mathbf{Q} \cap [-1,1]} \underbrace{m^*(A + r)}_{= m^*(A)} = \begin{cases} 0\,, & \text{jos } m^*(A) = 0 \\ \infty\,, & \text{jos } m^*(A) > 0. \end{cases}$$

Toisaalta

$$0 < 1 = m^*([0,1]) \le m^*\Big(\bigcup_{r \in \mathbf{Q} \cap [-1,1]} A + r\Big) \le m^*([-1,2]) = 3 < \infty\,,$$

mikä on ristiriita. Siis $A$ ei voi olla mitallinen. □

**Huomautus.** Vastaava konstruktio voidaan tehdä jokaisessa dimensiossa.

Edelleen, yo. konstruktiota hieman korjaamalla nähdään (HT): *Jos $A \subset \mathbf{R}^n$ on sellainen, että $m^*(A) > 0$, niin on olemassa $B \subset A$ siten, että $B$ ei ole Lebesgue-mitallinen.* (ks. myös Wheeden s. 39.)

Seuraavaksi pyrimme osoittamaan, että mitallisia joukkoja on paljon. Aloitetaan havainnolla, jonka avulla voidaan oleellisesti rajoittaa niiden joukkojen määrää, joilla testataan Carathéodoryn mitallisuusehtoa.

[3] Tämän todistamiseksi tarvitaan ns. *valinta-aksioomaa*, joka on riippumaton joukko-opin tavanomaisista aksioomista.

**2.9. Lemma.** *Joukko $A \subset \mathbf{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen, jos ja vain, jos*

$$m^*(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \setminus A) \quad \textit{jokaiselle avoimelle } n\textit{-välille } I.$$

*Todistus.* Ehdon välttämättömyys on selvä. Toisen suuntaan pitää osoittaa, että

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \quad \text{kaikilla } E \subset \mathbf{R}^n\,,$$

kun tiedetään, että se pätee, jos $E$ on avoin $n$-väli. Olkoon siis $E \subset \mathbf{R}^n$ ja $\varepsilon > 0$. Lebesguen ulkomitan määritelmän mukaan on on olemassa avoimet $n$-välit $I_1, I_2, \ldots$, joille

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j) \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

Nyt käyttämällä ulkomitan subadditiivisuutta ja monotonisuutta

$$\begin{aligned}
m^*(E) &\leq m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A) \\
&\leq m^*((\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j) \cap A) + m^*((\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j) \setminus A) \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} (m^*(I_j \cap A) + m^*(I_j \setminus A)) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} m^*(I_j) = \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j) \\
&\leq m^*(E) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen, ovat epäyhtälöt yhtäsuuruuksia ja siten

$$m^*(E) = m^*(E \cap A) + m^*(E \setminus A).$$

Siten $A \in \mathcal{M}_n$. □

**2.10. Lause.** *Jokainen $n$-väli $J \subset \mathbf{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen.*

*Todistus.* Olkoon $I$ avoin $n$-väli. Lemman 2.9 nojalla riitttää osoittaa, että

$$m^*(I) = m^*(I \cap J) + m^*(I \setminus J).$$

Havaitaan, että $I \cap J$ on myös $n$-väli. Lisäksi havaitaan helposti, että

$$I \setminus J = \bigcup_{i=1}^{k} I_i\,,$$

missä $I_i$:t ovat pareittain sisuksiltaan pistevieraita $n$-välejä. Siten käyttämällä subadditiivisuutta

$$\begin{aligned}
m^*(I) &\leq m^*(I \cap J) + m^*(I \setminus J) \\
&= m^*(I \cap J) + m^*(\bigcup_{i=1}^{k} I_i) \\
&\leq m^*(I \cap J) + \sum_{i=1}^{k} m^*(I_i) \\
&= v(I \cap J) + \sum_{i=1}^{k} v(I_i) \\
&= v(I) = m^*(I)\,,
\end{aligned}$$

koska $I = (I \cap J) \cup \bigcup_{i=1}^{k} I_i$ ja välit ovat pareittain melkein pistevieraita (HT). Väite seuraa. $\square$

Lauseiden 2.5 ja 2.10 avulla nähdään, että mitallisia joukkoja on huikea määrä: jokainen avoin joukko $G \subset \mathbf{R}^n$ voidaan helposti lausua numeroituvana yhdisteenä avoimista $n$-väleistä, joten $G$ on mitallinen. Edelleen, suljetut joukot ovat avoimien joukkojen komplementteina mitallisia. Samoin näiden numeroituvat yhdisteet. Joskus joukkokokoelmaa

$$\mathcal{B} = \bigcap \{\Gamma \colon \Gamma \text{ on } \sigma\text{-algebra, joka sisältää } \mathbf{R}^n : n \text{ avoimet joukot}\}$$

sanotaan $\mathbf{R}^n$:n *Borel-joukkojen $\sigma$-algebraksi* ja sen joukkoja *Borel-joukoiksi* (siis $\mathcal{B}$ on suppein $\mathbf{R}^n$:n avoimet joukot sisältävä $\sigma$-algebra). Tällöin $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$.

**2.11. Seuraus.** *$\mathbf{R}^n$:n Borel-joukot ovat Lebesgue-mitallisia. Erityisesti avoimet ja suljetut joukot sekä näiden numeroituvat yhdisteet ja leikkaukset ovat Lebesgue-mitallisia.* $\square$

**Esimerkki.** Lebesgue-mitallisia joukkoja on muitakin kuin Borel-joukot: olkoon $E \subset \mathbf{R}$ ei-Lebesgue mitallinen. Tällöin $E$ ei ole Borel-joukko ja siten joukko

$$F = \{(x, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n \colon x \in E\}$$

ei ole Borel-joukko. Se on kuitenkin, mitallinen, kun $n \geq 2$, koska $m^*(F) = 0$.

Lebesguen mitta on oikealta ja vasemmalta jatkuva mitallisten joukkojen luokassa. Edelleen, mitalllisten joukkojen mitta voidaan laskea osissa:

**2.12. Lause.** *Olkoot $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}_n$.*

i) *Jos $A_1 \subset A_2$ ja $m(A_1) < \infty$, niin*

$$m(A_2 \setminus A_1) = m(A_2) - m(A_1).$$

ii) *Jos $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, niin*

$$m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{k \to \infty} m(A_k).$$

iii) *Jos $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ ja $m(A_{k_0}) < \infty$ jollain $k_0$, niin*

$$m\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \lim_{k \to \infty} m(A_k).$$

*Todistus.* Huomaa, että kaikki Lauseessa esiintyvät joukot ovat mitallisia.

*i)*: Koska $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ ja molemmat osat ovat mitallisia, niin

$$m(A_2) = m(A_2 \setminus A_1) + m(A_1).$$

$\square_i$

*ii)*: Voidaan hyvin olettaa, että $m(A_k) < \infty$ kaikilla $k$. Esitetään väitteen yhdiste pareittain pistevieraana yhdisteenä mitalllisista joukoista:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup ( \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{k+1} \setminus A_k));$$

huomaa, että joukkojono $A_k$ on nouseva. Tällöin additiivisuuden ja kohdan i) avulla

$$\begin{aligned} m(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) &= m(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} m(A_{k+1} \setminus A_k) \\ &= m(A_1) + \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} (m(A_{k+1}) - m(A_k)) \\ &= m(A_1) + \lim_{j\to\infty} (m(A_{j+1}) - m(A_1)) \\ &= \lim_{j\to\infty} m(A_{j+1}). \end{aligned}$$

$\square_{ii)}$

*iii)*: Tutkimalla tarvittaessa joukkoja $\tilde{A}_k = A_k \cap A_{k_0}$ voidaan olettaa, että $m(A_k) < \infty$ kaikilla $k$. Koska joukkojono $A_k$ on vähenevä, on

$$A_1 \setminus A_k \subset A_1 \setminus A_{k+1},$$

joten kohdasta ii) seuraa

$$\begin{aligned} m(\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_k)) &= \lim_{k\to\infty} m(A_1 \setminus A_k) \\ &= m(A_1) - \lim_{k\to\infty} m(A_k)\,, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} m(A_k) &= m(A_1) - m(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_k)}_{=A_1 \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}) \\ &= m(A_1) - m(A_1) + m(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \\ &= m(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k). \end{aligned}$$

$\square$

**Esimerkki.** Konstruoidaan suljettu (kompakti) joukko $C$, jolle $m(C) > 0$, mutta $C$:llä ei ole yhtään sisäpistettä (toisin sanoen, $C$ ei sisällä ainoatakaan avointa palloa). Koska $m(\mathbf{Q}) = 0$, on $\mathbf{R}$:n avoin joukko $D \subset ]0,1[$, jolle

$$\mathbf{Q} \cap ]0,1[ \subset D \quad \text{ja} \quad m(D) < \frac{1}{2}. \qquad \text{(HT)}$$

Nyt $C = [0,1] \setminus D$ on $\mathbf{R}$:n kompakti joukko ja Lauseen 2.12 i) nojalla

$$m(C) = m([0,1]) - m(D) \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} > 0.$$

Joukolla $C$ ei ole sisäpisteitä, sillä sen komplementti sisältää rationaaliluvut väliltä $]0,1[$. Myöhemmin konstruoimme tällaisen joukon hieman konkreettisemmin.

Esimerkki saadaan nostetuksi $\mathbf{R}^n$:ään, määrittelemällä

$$\tilde{C} = C \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]\,,$$

jolloin on helppo todeta, että $\tilde{C} \subset \mathbf{R}^n$ on kompakti joukko ilman sisäpisteitä ja[4]

$$m_n(\tilde{C}) = m_1(C) > 0\,.$$

**Huomautus.** Lebesguen mitta on säännöllinen: jokaiselle $A \subset \mathbf{R}^n$ on olemassa mitallinen $B$ siten, että $A \subset B$ ja

$$m^*(A) = m^*(B).$$

Syy: määritelmän mukaan jokaisella $\varepsilon > 0$ avoimet $n$-välit $I_j$, joille

$$A \subset G_\varepsilon := \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$$

ja

$$m^*(G_\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j) \leq m^*(A) + \varepsilon;$$

koska $G_\varepsilon$ on avoimena joukkona mitallinen, joukko

$$B = \bigcap_{j=1}^{\infty} G_{1/j}$$

on etsimämme.

Lebesgue-mitalle saadaan useita mitallisten joukkojen karakterisointeja.[5]

**2.13. Lause.** *Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$. Seuraavat ovat yhtäpitäviä.*

i) $A \in \mathcal{M}_n$.
ii) *Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa avoin $G \supset A$, jolle $m^*(G \setminus A) < \varepsilon$.*
iii) *On olemassa mitallinen joukko[6] $B \supset A$, jolle $m^*(B \setminus A) = 0$.*
iv) *Kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa suljettu $F \subset A$, jolle $m^*(A \setminus F) < \varepsilon$.*
v) *On olemassa mitallinen joukko[7] $E \subset A$, jolle $m^*(A \setminus E) = 0$.*

---

[4]Huomaa, että $\mathbf{R}^n \setminus \tilde{C}$ on polkuyhtenäinen ja siten joukko

$$G = ]0,2[^n \setminus \tilde{C}$$

on $\mathbf{R}^n$:n alue, jonka reunajoukko $\partial G \supset \tilde{C}$ on suuri, $m(\partial G) > 0$.

[5]**Varoitus**: Lauseiden 2.13 ja 2.14 vastineet myöhemmin käsiteltäville yleisille ulkomitoille ovat yleensä vääriä.

[6]$B$ voidaan valita numeroituvaksi leikkaukseksi avoimia joukkoja.

[7]$E$ voidaan valita numeroituvaksi yhdisteeksi suljettuja joukkoja.

*Todistus.* *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: *a)*: Oletetan ensin, että $m^*(A) < \infty$.

Valitaan avoimet välit $I_1, I_2, \ldots$ siten, että

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \text{ ja } \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j) \le m^*(A) + \varepsilon.$$

Tällöin $G = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$ on etsitty joukko, sillä Lauseen 2.12i) nojalla

$$m^*(G \setminus A) = m^*(G) - m^*(A) \le \sum_{j=1}^{\infty} v(I_j) - m^*(A) < \varepsilon.$$

*b)*: Jos $m^*(A) = \infty$, niin määritellään

$$A_k = A \cap B(0, k), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

jolloin $A_k$ on mitallinen ja äärellismittainen, joten a)-kohtaa voidaan soveltaa: on olemassa avoimet joukot $G_k \supset A_k$ siten, että

$$m^*(G_k \setminus A_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}\,.$$

Nyt joukko $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ on etsimämme avoin joukko, sillä $A \subset G$ ja

$$m^*(G \setminus A) \le m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (G_k \setminus A_k)) \le \sum_{k=1}^{\infty} m^*(G_k \setminus A_k) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon\,.$$

$\square_{i) \Rightarrow ii)}$

Implikaatiot *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* ja *i)* $\Rightarrow$ *iv)* jätetään harjoitustehtäväksi.

*iii)* $\Rightarrow$ *i)*: Seuraa, kun huomataan, että

$$A = B \setminus (B \setminus A)$$

ja molemmat oikealla olevat joukot ovat mitallisia. $\square_{iii) \Rightarrow i)}$

Implikaatio *iv)* $\Rightarrow$ *v)* menee samoin kuin *ii)* $\Rightarrow$ *iii)* ja *v)* $\Rightarrow$ *i)* seuraa havainnosta:

$$A = E \cup (A \setminus E).$$

$\square$

**2.14. Lause.** *Olkoon $B \in \mathcal{M}_n$ siten, että $m^*(B) < \infty$. Tällöin joukko $A \subset B$ on Lebesgue-mitallinen, jos ja vain, jos*

$$m^*(A) = m^*(B) - m^*(B \setminus A).$$

*Todistus.* Ehdon välttämättömyys seuraa Lauseesta 2.12. Oletetaan sitten, että

$$m^*(A) = m^*(B) - m^*(B \setminus A)$$

ja osoitetaan, että $A$ on mitallinen. Sitä varten valitaan mitalliset $E_1, E_2 \subset B$, joille

$$\begin{aligned} &A \subset E_1\,, \qquad\qquad B \setminus A \subset E_2, \\ &m^*(A) = m^*(E_1) \text{ ja } m^*(B \setminus A) = m^*(E_2). \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} m^*(B) &= m^*(A) + m^*(B \setminus A) = m^*(A) + m^*(E_2) \\ &= m^*(E_1) + m^*(E_2 \setminus E_1) + m^*(E_1 \cap E_2) \\ &= m^*(\underbrace{E_2 \cup E_1}_{=B}) + m^*(E_1 \cap E_2) \\ &= m^*(B) + m^*(E_1 \cap E_2)\,, \end{aligned}$$

joten $m^*(E_1 \cap E_2) = 0$. Siten $A$ on mitallinen Lauseen 2.13 nojalla, koska

$$m^*(E_1 \setminus A) \leq m^*(E_1 \cap E_2) = 0\,,$$

onhan $E_1 \setminus A \subset E_1 \cap (B \setminus A) \subset E_1 \cap E_2$. $\square$

## B. Integraaliteoriaa

### 3. Yksinkertaisen funktion integraali

Lebesgue-integraalissa Riemannin integraalin määrittelyssä käytetyt porrasfunktiot korvataan yksinkertaisilla funktioilla.

**Määritelmä.** Funktio $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ on *yksinkertainen*, merk. $f \in \mathcal{Y}$, jos $f$ saa vain äärellisen monta arvoa ja joukot

$$\{x \in \mathbf{R}^n \colon f(x) = c\}$$

ovat mitallisia kaikilla $c \in \mathbf{R}$.

**Esimerkki.** Porrasfunktiot ovat yksinkertaisia. Edelleen, jos $A \subset \mathbf{R}^n$, niin $\chi_A \in \mathcal{Y}$, jos ja vain, jos $A \in \mathcal{M}_n$.

**3.1. Lemma.** *Olkoon $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

i) $f \in \mathcal{Y}$.

ii) *On olemassa joukot $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{M}$ ja luvut $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R}$, joille*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \chi_{A_j}(x) \qquad \textit{kaikilla } x \in \mathbf{R}^n.$$

iii) *On olemassa epätyhjät, pareittain pistevieraat joukot $B_1, B_2, \ldots, B_\ell \in \mathcal{M}$ ja luvut $b_1, b_2, \ldots, b_\ell \in \mathbf{R}$ siten, että $b_i \neq b_j$, kun $i \neq j$,*

$$\bigcup_{j=1}^{\ell} B_j = \mathbf{R}^n$$

*ja*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \chi_{B_j}(x) \qquad \textit{kaikilla } x \in \mathbf{R}^n.$$

*Todistus.* Implikaatiot $iii) \Rightarrow ii) \Rightarrow i)$ ovat selviä.

$i) \Rightarrow iii)$: Olkoon

$$f(\mathbf{R}^n) = \{b_1, b_2, \ldots, b_\ell\}, \quad b_i \neq b_j, \text{ kun } i \neq j.$$

Tällöin väite seuraa asettamalla

$$B_j = \{x \colon f(x) = b_j\}.$$

□

**Määritelmä.** Lemman 3.1 kohdan iii) antamaa muotoa sanotaan *yksinkertaisen funktion $f$ normaaliesitykseksi.*

Normaaliesitys on yksikäsitteinen. Huomaa, että normaaliesityksen summassa

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \chi_{B_j}(x)$$

on jokaista $x$ kohti korkeintaan yksi nollasta poikkeava termi.

Merkitään

$$\mathcal{Y}^+ = \{f \in \mathcal{Y} \colon f(x) \geq 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbf{R}^n\}.$$

**Määritelmä.** Olkoon $f \in \mathcal{Y}^+$ ja[8]

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j}(x)$$

sen normaaliesitys. Jos $E \in \mathcal{M}$, niin

$$I(f, E) := \sum_{j=1}^{k} a_j m(A_j \cap E)$$

on $f$:n *(Lebesgue-)integraali yli joukon* $E$.

**3.2. Lemma.** *Jos*

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j},$$

*missä* $a_j \geq 0$ *ja* $A_j \in \mathcal{M}$ *ovat sellaisia, että* $A_j \cap A_i = \emptyset$, *kun* $i \neq j$, *niin*

$$I(f, E) = \sum_{j=1}^{k} a_j m(A_j \cap E)$$

*kaikilla* $E \in \mathcal{M}$.

*Todistus.* harjoitustehtävä. □

**3.3. Lemma.** *Olkoot $f$ ja $g$ yksinkertaisia, ei-negatiivisia funktioita ja $A$ sekä $E$ mitallisia joukkoja. Tällöin*

i) $I(\chi_A, E) = m(A \cap E)$.
ii) $\lambda I(f, E) = I(\lambda f, E)$ *kaikilla* $\lambda \geq 0$.
iii) $I(f + g, E) = I(f, E) + I(g, E)$.
iv) *Jos* $f \leq g$ *E:ssä, niin* $I(f, E) \leq I(g, E)$.
v) *Jos* $A \subset E$, *niin* $I(f, A) \leq I(f, E)$.

*Todistus.* Kohdat i) ja ii) selviä. iv) ja v) jätetään harjoitustehtäviksi.
*iii)*: Olkoot

$$f = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j} \text{ ja } g = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \chi_{B_j}$$

normaaliesitykset Nyt yhdisteet

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{\ell} (A_i \cap B_j) \quad \text{ja} \quad B_j = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap B_j)$$

koostuvat pareittain pistevieraista joukoista. Siten

$$\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{\ell} \chi_{A_i \cap B_j} \quad \text{ja} \quad \chi_{B_j} = \sum_{i=1}^{k} \chi_{A_i \cap B_j}$$

[8] Yksinkertaisen funktion integraalin määritelyssä pitää tyytyä ei-negatiivisiin funktioihin, jotta integraalin määrittelevässä summassa ei tule laskettavaksi $\infty - \infty$ tapaisia määrittelmättömiä laskuja.

ja edelleen

$$f + g = \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_j) \chi_{A_i \cap B_j},$$

joten Lemman 3.2 nojalla

$$\begin{aligned} I(f+g, E) &= \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_j) m(A_i \cap B_j \cap E) \\ &= \sum_{j,i} a_i m(A_i \cap B_j \cap E) + \sum_{j,i} b_j m(A_i \cap B_j \cap E) \\ &= \sum_{i} a_i m(A_i \cap E) + \sum_{j} b_j m(B_j \cap E) \\ &= I(f, E) + I(g, E). \end{aligned}$$

□

**3.4. Huomautus.** Jos $f \in \mathcal{Y}^+$, niin $I(f, \cdot)$ on vain äärellinen summa Lebesgue-mittoja. Siten mitan ominaisuudet periytyvät ei-negatiivisen yksinkertaisen funktion integraalille. Erityisesti Lauseesta 2.12 saadaan: *Olkoot $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{M}$ ja $f \in \mathcal{Y}^+$. Tällöin*

$$I(f, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \begin{cases} \leq \sum_{k=1}^{\infty} I(f, E_k) & \textit{kaikille } E_k \in \mathcal{M}, \\ = \sum_{k=1}^{\infty} I(f, E_k), & \textit{jos joukot } E_k \textit{ ovat pareittain pistevieraita}, \end{cases}$$

*ja edelleen, jos $E_1 \supset E_2 \supset \dots$ ja $I(f, E_1) < \infty$, niin*

$$I(f, \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k \to \infty} I(f, E_k).$$

*Lopuksi, jos $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, niin*

$$I(f, \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) = \lim_{k \to \infty} I(f, E_k).$$

Jos matkisimme Riemann-integraalin määrittelyä, niin nyt määrittelisimme $f$:n ylä- ja alaintegraalit sellaisten yksinkertaisten funktioiden infimumina ja vastaavasti supremumina, jotka ovat $f$:n ylä- tai alapuolella. Tämän jälkeen tutkisimme, mille funktioille ylä- ja alaintegraalit ovat samat.

Oikaisemme tässä hieman ja tutkimme ensin niitä funktioita, joille integraali voidaan hyvin määritellä ja menemme sitten varsinaiseen integraalin määrittelyyn.

**Heuristinen idea**: Tarkastellaan ei-negatiivista funktiota $f\colon \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$. Jos $f$:n graafin alle jäävan alueen tilavuutta (mittaa) voidaan approksimoida yhtä hyvin ala- kuin yläpuoleltakin yksinkertaisten funktioiden integraaleilla, niin on uskottavan tuntuista, että funktio $f$ itse saadaan raja-arvona yksinkertaisista funktioista, jotka kaikki ovat $f$:n alapuolella (tai vastaavasti yläpuolella). Ts.

$$f(x) = \lim_{j \to \infty} g_j(x) \quad \text{lähes kaikilla } x,$$

missä $g_j \in \mathcal{Y}^+$, $g_j \leq f$. Huomaa, että koska $0 \leq g_j \leq f$, voidaan jonosta $g_j$ tehdä nouseva määrittelemällä

$$h_j(x) = \max\{g_1(x), g_2(x), \dots, g_j(x)\}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Tällöin $h_j \in \mathcal{Y}^+$, $h_1, \leq h_2 \leq \cdots \leq f$ ja

$$f(x) = \lim_{j \to \infty} h_j(x) \quad \text{lähes kaikilla } x,$$

Siten $I(h_j, E)$ on nouseva jono (kaikilla $E \in \mathcal{M}$), joten sillä on raja-arvo – tämän raja-arvon on oltava $f$:n integraali. Edelleen, koska $g_j \to f$ ja $g_j \leq f$, on kaikilla $c \in \mathbf{R}$

$$\{x \colon f(x) > c\} = \mathbf{R}^n \setminus \{x \colon f(x) \leq c\} = \mathbf{R}^n \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} \{x \colon g_j(x) \leq c\},$$

mikä on mitallisten joukkojen leikkauksen komplementtina mitallinen. Tämä antaa aiheen seuraavassa luvussa esitettävään mitallisen funktion määritelmään.

## 4. Mitalliset funktiot

**Määritelmä.** Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ Lebesgue-mitallinen. Funktion $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ sanotaan olevan *(Lebesgue-)mitallinen*, jos jokaisella $a \in \mathbf{R}$ alkukuva

$$f^{-1}(]a,\infty]) = \{x \in A\colon f(x) > a\}$$

on mitallinen.

**Tärkeä huomautus.** Joukko $A \subset \mathbf{R}^n$ on Lebesgue-mitallinen, jos ja vain, jos sen karakteristinen[9] funktio $\chi_A$ on mitallinen. Syy:

$$\{x\colon \chi_A(x) > a\} = \begin{cases} \mathbf{R}^n\,, & \text{jos } a < 0,\\ A\,, & \text{jos } 0 \le a < 1,\\ \emptyset\,, & \text{jos } a \ge 1. \end{cases}$$

**Esimerkki.** Mitallisilla joukoilla määritellyt jatkuvat funktiot ovat Lebesgue-mitallisia. Yksinkertaiset funktiot ovat Lebesgue-mitallisia.

**4.1. Lause.** *Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

i) *$f$ on mitallinen.*
ii) *$\{x \in A\colon f(x) \ge a\}$ on mitallinen kaikilla $a \in \mathbf{R}$.*
iii) *$\{x \in A\colon f(x) < a\}$ on mitallinen kaikilla $a \in \mathbf{R}$.*
iv) *$\{x \in A\colon f(x) \le a\}$ on mitallinen kaikilla $a \in \mathbf{R}$.*

*Todistus.* Seuraa mitallisten joukkojen struktuurilauseesta 2.5:

*i) ⇒ ii):*

$$f^{-1}([a,\infty]) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}(]a - \frac{1}{i},\infty]) \in \mathcal{M}.$$

*ii) ⇒ iii):*

$$f^{-1}([-\infty,a[) = A \setminus f^{-1}([a,\infty]) \in \mathcal{M}.$$

*iii) ⇒ iv):*

$$f^{-1}([-\infty,a]) = \bigcap_{i=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty,a + \frac{1}{i}[) \in \mathcal{M}.$$

*iv) ⇒ i):*

$$f^{-1}(]a,\infty]) = A \setminus f^{-1}([-\infty,a]) \in \mathcal{M}.$$

□

**4.2. Lause.** *Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$. Tällöin*

i) *Jos $f^{-1}(-\infty) \in \mathcal{M}$ ja $f^{-1}(]a,b[) \in \mathcal{M}$ kaikilla $a,b \in \mathbf{R}$, $a < b$, niin $f$ on mitallinen.*
ii) *Jos $f$ on mitallinen, niin alkukuvat $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(\infty)$ ja $f^{-1}(B)$ ovat mitallisia jokaisella $B \subset \mathbf{R}$, joka on numeroituva yhdiste tai leikkaus suljetuista tai avoimista joukoista.*[10]

[9] Muista:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{jos } x \in A\\ 0\,, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

[10] $B$:ksi voidaan ottaa mikä hyvänsä $\mathbf{R}$:n Borel-joukko.

*Todistus.* i): Kaikilla $a \in \mathbf{R}$

$$f^{-1}([-\infty, a[) = f^{-1}(-\infty) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} f^{-1}(]a-k, a[) \in \mathcal{M},$$

joten $f$ on mitallinen Lauseen 4.1 nojalla. $\square_{i)}$

ii): Ensiksi huomataan, että

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, k]) \in \mathcal{M}$$

ja

$$f^{-1}(\infty) = \bigcap_{k=1}^{\infty} f^{-1}([k, \infty]) \in \mathcal{M}.$$

Olkoon sitten

$$\Gamma = \{E \subset \mathbf{R} \colon f^{-1}(E) \in \mathcal{M}\}.$$

Nyt $\Gamma$ sisältää avoimet reaalilukuvälit Lauseen 4.1 nojalla, sillä

$$f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]a, \infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b[) \in \mathcal{M}\,.$$

Edelleen, $\Gamma$ on $\sigma$-algebra, ts. sillä on ominaisuudet (HT)

a) $\emptyset, \mathbf{R}^n \in \Gamma$.
b) Jos $A, B \in \Gamma$, niin $A \setminus B \in \Gamma$.
c) Jos $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$, niin $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Gamma$.

Tästä seuraa, että $\Gamma$:ssa on avoimet joukot $G \subset \mathbf{R}$ (koska ne ovat numeroituvia yhdisteitä avoimista väleistä) ja suljetut joukot (avoimien komplementteina) sekä näiden numeroituvat yhdisteet ja leikkaukset. Väite seuraa tästä. $\square$

**Huomautus.** Jos $f$ on mitallinen, niin mv. mitallisen joukon $A \subset \mathbf{R}$ alkukuva ei ole välttämättä mitallinen (edes silloin kun $f$ on jatkuva).

**Huomautus.** Jatkossa käytetään usein funktion *nollajatkoa*, joka määritellään seuraavasti: jos $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ (missä $A \in \mathcal{M}$), niin nollajatko on kuvaus $\tilde{f}\colon \mathbf{R}^n \to \overline{\mathbf{R}}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{jos } x \in A \\ 0\,, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Tällöin $f$ on mitallinen jos ja vain, jos $\tilde{f}$ on mitallinen.

**Muistutus.** Olkoon $f\colon A \to \mathbf{R}$. Tällöin $f$:n positiiviosa on funktio

$$f^+(x) = \max(f, 0)(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{jos } f(x) \ge 0 \\ 0\,, & \text{jos } f(x) \le 0. \end{cases} = \max(f(x), 0)$$

Samoin $f$:n negatiiviosa on funktio

$$f^-(x) = -\min(f, 0)(x) = \begin{cases} -f(x)\,, & \text{jos } f(x) \le 0 \\ 0\,, & \text{jos } f(x) \ge 0. \end{cases}$$

Tällöin

$$f = f^+ - f^- \qquad \text{ja} \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

**4.3. Lemma.** *Olkoon $A \subset \mathbf{R}^n$ mitallinen ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$. Tällöin $f$ on mitallinen, jos ja vain, jos sekä $f^+$ että $f^-$ ovat mitallisia.*

*Todistus.* Välttämättömyys seuraa, koska

$$\{f^+ > a\} = \begin{cases} \{f > a\}\,, & \text{jos } a \geq 0 \\ A\,, & \text{jos } a < 0\,, \end{cases}$$

mitkä ovat mitallisia, mikäli $f$ on mitallinen. Edelleen $f^- = (-f)^+$.

Riittävyys seuraa taas, koska

$$\{f > a\} = \begin{cases} \{f^+ > a\}\,, & \text{jos } a \geq 0 \\ \{f^- < -a\}\,, & \text{jos } a < 0\,. \end{cases}$$

□

Seuraavaa Lemmaa tarvitaan osoitettaessa, että mitallisten funktioiden summa on edelleen mitallinen (mikäli hyvin määritelty).

**4.4. Lemma.** *Jos $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ ja $g\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ ovat mitallisia, niin joukko*

$$E = \{x \in A\colon f(x) < g(x)\}$$

*on mitallinen.*

*Todistus.* Seuraa Lauseesta 2.5, sillä

$$E = \bigcup_{q \in \mathbf{Q}} \left(\{x\colon f(x) < q\} \cap \{x\colon g(x) > q\}\right) \in \mathcal{M}\,.$$

□

**4.5. Lause.** *Olkoot $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ ja $g\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallisia. Tällöin summa $f+g$ (mikäli määritelty) ja tulo $fg$ ovat mitallisia.*[11]

*Todistus.* $\underline{f+g}$: Ensiksi joukko

$$(f+g)^{-1}(-\infty) = f^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(-\infty)$$

on mitallinen. Olkoon $a \in \mathbf{R}$. Koska

$$\{a - f > \lambda\} = \{a - \lambda > f\} \quad \text{kaikilla } \lambda \in \mathbf{R}\,,$$

on funktio $a - f$ mitallinen. Siten joukko

$$\{f + g > a\} = \{g > a - f\}$$

on Lemman 4.4 nojalla mitallinen. $\square_{f+g}$

[11] Summa $f+g$ on määritelty mitallisessa joukossa

$$A \setminus \left((f^{-1}(\infty) \cap g^{-1}(-\infty)) \cup (f^{-1}(-\infty) \cap g^{-1}(\infty))\right).$$

$\underline{fg}$: Seuraa siitä, että äärettömyysjoukkojen ulkopuolella

$$fg = \frac{1}{4}\big((f+g)^2 - (f-g)^2\big)$$

mitkä ovat mitallisia, koska $h^2$ on mitallinen aina, kun $h$ on sitä (harjoitustehtävä.) □

**Huomautus.** Jos $f$ on mitallinen, niin $|f| = f^+ + f^-$ on myös mitallinen, mutta käänteinen väite ei päde.

Jos $f\colon A \to \mathbf{R}$ ja $g\colon \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ ovat mitallisia, niin $g \circ f$ ei yleensä ole mitallinen. Lauseesta 4.2 seuraa kuitenkin (harjoitustehtävä):

**4.6. Lause.** *Jos $f\colon A \to \mathbf{R}$ on mitallinen ja $g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on jatkuva, niin yhdistetty funktio $g \circ f$ on mitallinen.* □

**Ala- ja yläraja-arvot, limes inferior ja limes superior.** Lukujonoilla ei ole yleensä raja-arvoa. Kuitenkin jokaisella $\overline{\mathbf{R}}$:n lukujonolla on osajono, jolla on raja-arvo. Osoittautuu hyödylliseksi tarkastella näiden osajonojen raja-arvojen ääritapauksia, pieninpiä ja suurinpia mahdollisia, joita tullaan kutsumaan jonon ala- ja yläraja-arvoiksi.

**Määritelmä.** Olkoon $a_k \in \overline{\mathbf{R}}$, $k = 1, 2, \ldots$. Jonon $a_k$ *yläraja-arvo* eli *limes superior* on

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k = \lim_{k\to\infty} \sup_{j\geq k} a_j = \lim_{k\to\infty} \sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots\}\,.$$

Jonon $a_k$ *alaraja-arvo* eli *limes inferior* on

$$\liminf_{k\to\infty} a_k = \underline{\lim_{k\to\infty}}\, a_k = \lim_{k\to\infty} \inf_{j\geq k} a_j = \lim_{k\to\infty} \inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, \ldots\}\,.$$

**Huomautus.** Ala- ja yläraja-arvojen määritelmä on hyvä, sillä ne ovat aina olemassa: jono

$$b_k = \sup_{j\geq k} a_j$$

on laskeva ja jono

$$c_k = \inf_{j\geq k} a_j$$

on nouseva, joten niillä on raja-arvot $\overline{\mathbf{R}}$:ssä. Edelleen,

$$\limsup_{k\to\infty} a_k = \inf_k \sup_{j\geq k} a_j \quad \text{ja} \quad \liminf_{k\to\infty} a_k = \sup_k \inf_{j\geq k} a_j\,.$$

Aina

$$\liminf_{k\to\infty} a_k \leq \limsup_{k\to\infty} a_k$$

ja yhtäsuuruus pätee (HT), jos ja vain, jos jonolla $a_k$ on raja-arvo, jolloin

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \liminf_{k\to\infty} a_k = \limsup_{k\to\infty} a_k\,.$$

**Esimerkkejä.** i) Jos $a_k = (-1)^k$, niin

$$\liminf_{k\to\infty} a_k = -1 \quad \text{ja } \limsup_{k\to\infty} a_k = 1\,.$$

Koska

$$\inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\} = \inf\{1, -1\} = -1$$

ja

$$\sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\} = \sup\{1, -1\} = 1.$$

ii) Jos $a_k = (-k)^k$, niin

$$\liminf_{k\to\infty} a_k = -\infty \quad \text{ja } \limsup_{k\to\infty} a_k = \infty\,.$$

Koska

$$\inf\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\} = \inf\{(-k)^k, (-k-1)^{k+1}, \dots\} \le -k \to -\infty$$

ja

$$\sup\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots\} = \sup\{(-k)^k, (-k-1)^{k+1}, \dots\} \ge k \to \infty.$$

Funktiojonojen $f_k\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ ala- ja ylärajafunktiot

$$\liminf_{k\to\infty} f_k = \varliminf_{k\to\infty} f_k \text{ ja } \limsup_{k\to\infty} f_k = \varlimsup_{k\to\infty} f_k$$

määritellään luonnollisesti pisteittäin:

$$(\liminf_{k\to\infty} f_k)(x) = \liminf_k f_k(x) \text{ ja } (\limsup_{k\to\infty} f_k)(x) = \limsup_k f_k(x).$$

Mitallisuus säilyy näissä rajankäyntioperaatioissa:

**4.7. Lause.** *Jos funktiot $f_k\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$, $k = 1, 2, \dots$, ovat mitallisia niin myös funktiot*

$$\sup_k f_k, \quad \inf_k f_k, \quad \liminf_{k\to\infty} f_k \quad \textit{ja} \quad \limsup_{k\to\infty} f_k$$

*ovat mitallisia.*

*Todistus.* Kaikilla $a \in \mathbf{R}$

$$\{x\colon \sup_k f_k(x) \le a\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x\colon f_k(x) \le a\} \in \mathcal{M}\,,$$

joten $\sup_k f_k$ on mitallinen. Siis myös

$$\inf_k f_k = -\sup_k(-f_k) \quad \text{on mitallinen,}$$

ja edelleen

$$\liminf_{k\to\infty} f_k = \sup_k(\inf_{j\ge k} f_j) \quad \text{sekä} \quad \limsup_{k\to\infty} f_k = \inf_k(\sup_{j\ge k} f_j)$$

ovat mitallisia. □

**4.8. Seuraus.** *Jos funktiot* $f_k\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$, $k = 1, 2, \ldots$, *ovat mitallisia ja ne suppenevat kohti funktiota* $f$, *niin* $f$ *on mitallinen*

*Todistus.* Tällöin $f = \limsup f_k = \liminf f_k$. □

**Esimerkki.** Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivoituva. Siten $f$ on jatkuvana mitallinen. Edelleen erotusosamääräfunktiot

$$g_j(x) = \frac{f(x + \frac{1}{j}) - f(x)}{\frac{1}{j}}$$

ovat mitallisia. Näin ollen derivaatta

$$f' = \lim_{j\to\infty} g_j$$

on mitallinen.

Rajankäynnin avulla saadaan seuraava tärkeä tulos:

**4.9. Lause.** *Olkoon* $A \in \mathcal{M}$ *ja* $f\colon A \to [0, \infty]$. *Tällöin* $f$ *on mitallinen, jos ja vain, jos on olemassa nouseva jono* $f_k \in \mathcal{Y}^+$ *siten, että*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \textit{kaikilla } x \in A.$$

*Todistus.* Seurauksen 4.8 nojalla ehto on riittävä. Konstruoidaan jono $f_k \in \mathcal{Y}^+$ seuraavasti: Kiinnitetään $k \in \mathbf{N}$ ja määritellään joukot

$$E = \{x \in A\colon f(x) \geq k\}$$

ja

$$E_j = \{x \in A\colon \frac{j-1}{2^k} \leq f(x) < \frac{j}{2^k}\},$$

mitkä ovat Lemman 4.1 nojalla mitallisia, joten asettamalla

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{k2^k} \frac{j-1}{2^k} \chi_{E_j}(x) + k\chi_E(x)$$

sadaan yksinkertainen, ei-negatiivinen funktio. Koska joukot $E_j$ ja $E$ ovat pareittain pistevieraita (kun $j \leq k2^k$), on helppo havaita, että

$$0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x) \qquad \text{kaikilla } x \in A.$$

Edelleen,

$$|f(x) - f_k(x)| \leq 2^{-k}, \qquad \text{kun } x \in \bigcup_{j=1}^{k2^k} E_j = \{x\colon f(x) < k\}$$

ja

$$f_k(x) = k \qquad \text{kun } x \in \{x\colon f(x) \geq k\},$$

joten

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \text{kaikilla } x \in A.$$

□

**4.10. Seuraus.** *Olkoon $A \in \mathcal{M}$ ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$. Tällöin $f$ on mitallinen, jos ja vain, jos on olemassa jono $f_k \in \mathcal{Y}$ siten, että*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \qquad \textit{kaikilla } x \in A.$$

*Todistus.* Lauseen 4.9 nojalla on jonot $g_k$ ja $h_k$ yksinkertaisia funktioita, joille

$$g_k \to f^+ \quad \text{ja} \quad h_k \to f^- .$$

Tällöin $f_k = g_k - h_k$ on etsitty. □

## 5. Ei-negatiivisen funktion integraaali

Koska sallimme mitallisten funktioiden saavan arvoikseen myös $+\infty$ ja $-\infty$ ja koska haluamme integroida yli rajoittamattomien joukkojen, meidän on syytä paloitella integroinnin käsite erikseen funktion positiivi- ja negatiiviosien integroinniksi.

**Määritelmä.** Olkoon $f\colon A \to [0,\infty]$ mitallinen. Tällöin $f$:n *(Lebesgue-)integraali yli joukon* $A$ on

$$\int_A f\,dm = \int_A f\,dx = \sup\{I(u,A)\colon u \in \mathcal{Y}^+\,, \quad u \le f \quad A\text{:ssa}\}.$$

Selvästi

$$0 \le \int f\,dm \le \infty\,.$$

Edelleen, Lauseen 3.3 iv) nojalla kaikilla yksinkertaisilla $f \in \mathcal{Y}^+$

$$\int_A f\,dm = I(u,A)\,.$$

**Huomautus.** Jos $f\colon A \to [0,\infty]$ on mitallinen, niin sen nollajatko $\tilde{f}\colon A \to [0,\infty]$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{jos } x \in A \\ 0\,, & \text{jos } x \notin A, \end{cases}$$

on mitallinen ja

$$\int_B \tilde{f}\,dm = \int_{B\cap A} f\,dm\,. \qquad \text{(miksi?)}$$

Näin ollen voimme jatkossa olettaa, että integroitavat funktiot ovat määritellyt koko $\mathbf{R}^n$:ssä.

**Huomautus.** On erittäin hyödyllistä huomata, että jos $m(A) = 0$, niin

$$\int_A f\,dm = 0 \quad \text{kaikilla } f\,.$$

On helppo nähdä, että ei-negatiivisen funktion integraalilla on ulkomitan ominaisuudet (Lause 2.1), kuten yksinkertaisen funktion integraalillakin oli (ks. Huomautus 3.4).

**5.1. Lemma.** *Olkoon $f\colon \mathbf{R}^n \to [0,\infty]$ mitallinen. Tällöin*

i) *Jos $A, B \in \mathcal{M}$, $B \subset A$, niin*

$$\int_B f\,dm \le \int_A f\,dm\,.$$

ii) *Jos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$, niin*

$$\int_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} f\,dm \le \sum_{i=1}^\infty \int_{A_i} f\,dm.$$

iii) *Jos $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ ovat pareittain pistevieraita, niin*

$$\int_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} f\,dm = \sum_{i=1}^\infty \int_{A_i} f\,dm.$$

*Todistus.* harjoitustehtävä. □

**5.2. Lause.** *Olkoot $f$ ja $g$ ei-negatiivisia ja mitallisia ja $A \in \mathcal{M}$. Tällöin*

i)

$$\int_A (\lambda f)\, dm = \lambda \int_A f\, dm \qquad \textit{kaikilla } \lambda \in \mathbf{R}\,, \quad \lambda \geq 0\,.$$

ii) *Jos $f \leq g$ joukossa $A$, niin*

$$\int_A f\, dm \leq \int_A g\, dm\,.$$

iii) *(Tsebyshevin epäyhtälö) Kaikilla $0 < \lambda < \infty$*

$$m(\{x \in A \colon f(x) > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda} \int_A f\, dm\,.$$

*Todistus.* (i) Jos $\lambda = 0$, niin

$$\int_A (0\, f)\, dm = \int_A 0\, dm = 0 = 0 \int_A f\, dm\,.$$

Olkoon sitten $0 < \lambda < \infty$. Tällöin, jos $u \in \mathcal{Y}^+$, $u \leq f$, niin $\lambda u \in \mathcal{Y}^+$ja $\lambda u \leq \lambda f$, joten

$$\lambda I(u, A) = I(\lambda u, A) \leq \int_A (\lambda\, f)\, dm$$

ja ottamalla supremum

$$\lambda \int_A f\, dm \leq \int_A (\lambda\, f)\, dm.$$

Soveltamalla tätä epäyhtälöä, sadaan

$$\int_A (\lambda\, f)\, dm = \lambda(\frac{1}{\lambda} \int_A \lambda\, f\, dm) \leq \lambda \int_A (\frac{1}{\lambda} \lambda\, f\, dm) = \lambda \int_A f\, dm\,.$$

(ii) Seuraa suoraan integraalin määritelmästä.

(iii) Koska $f \geq \lambda \chi_{\{x \in A \colon f(x) > \lambda\}}$, seuraa edellä olevasta

$$\lambda m(\{x \in A \colon f(x) > \lambda\}) = \int_A \lambda \chi_{\{x \in A \colon f(x) > \lambda\}}\, dm \leq \int_A f\, dm\,.$$

□

**Määritelmä.** Sanotaan, että ominaisuus $P = P(x)$ pätee *melkein kaikilla* (lyh. *m.k.*) $x \in A$ (tai *melkein kaikkialla* $A$:ssa), jos on olemassa joukko $N$ siten, että $m(N) = 0$ ja $P(x)$ pätee kaikilla $x \in A \setminus N$.

**Huomautus.** Jos $f \colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ on mitallinen ja $g(x) = f(x)$ m.k. $x \in A$, niin $g$ on mitallinen.

**5.3. Lause.** *Olkoon $f\colon A \to [0,\infty]$ mitallinen. Tällöin*

i)

$$\int_A f\,dm = 0\,, \qquad \textit{jos ja vain, jos} \qquad f(x) = 0 \ \textit{m.k.}\ x \in A.$$

ii)

$$\textit{Jos} \qquad \int_A f\,dm < \infty\,, \qquad \textit{niin} \qquad f(x) < \infty \ \textit{m.k.}\ x \in A.$$

*Todistus.* i) "⇒": Olkoon

$$E_k = \{x \in A\colon f(x) > \frac{1}{k}\}\,,$$

jolloin Tsebyshevin epäyhtälön avulla

$$0 = \int_A f\,dm \geq \int_{E_k} f\,dm \geq \frac{1}{k} m(E_k) \geq 0\,,$$

joten $m(E_k) = 0$ kaikilla $k$ ja edelleen

$$m\big(\{x \in A\colon f(x) > 0\}\big) = m\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\Big) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = 0\,.$$

"⇐": Koska $m\big(\{x \in A\colon f(x) > 0\}\big) = 0$, on Lauseen 5.2 nojalla

$$0 = \int_{\{x\in A\colon\, f(x)>0\}} \infty\,dm = \int_A \infty \chi_{\{x\in A\colon\, f(x)>0\}}\,dm \geq \int_A f\,dm \geq 0\,,$$

joten

$$\int_A f\,dm = 0\,.$$

ii) Tsebyshevin epäyhtälön 5.2 nojalla kaikilla $0 < \lambda < \infty$

$$m(\{x \in A\colon f(x) = \infty\}) \leq m(\{x \in A\colon f(x) > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_A f\,dm \to 0\,,$$

kun $\lambda \to \infty$, koska

$$\int_A f\,dm < \infty\,.$$

□

Seuraava Lemma vahvistaa sen, että nollamittaiset joukot eivät vaikuta integraaleihin.

**5.4. Lemma.** *Olkoot $f, g\colon A \to [0,\infty]$ mitallisia. Jos $f(x) = g(x)$ m.k. $x \in A$, niin*

$$\int_A f\,dm = \int_A g\,dm\,.$$

*Todistus.* Olkoon

$$N = \{x \in A\colon f(x) \neq g(x)\}\,.$$

Koska $m(N) = 0$, niin

$$\int_N f\,dm = 0 = \int_N g\,dm$$

ja siten

$$\begin{aligned}\int_A f\,dm &= \int_{A\setminus N} f\,dm + \int_N f\,dm = \int_{A\setminus N} f\,dm\\ &= \int_{A\setminus N} g\,dm = \int_{A\setminus N} g\,dm + \int_N g\,dm\\ &= \int_A g\,dm\,.\end{aligned}$$

□

Seuraava lause on yksi integraaliteorian keskeisimmistä lauseista.

**5.5. Lause.** (Lebesguen monotonisen konvergenssin lause) *Olkoon $f_k : A \to [0,\infty]$ nouseva jono (ts. $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ kaikilla $x$ ja $k$) mitallisia funktioita. Jos*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,, \quad x \in A,$$

*niin*

$$\int_A f\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm\,.$$

*Todistus.* Huomaa, että $f$ on mitallinen (Seuraus 4.8). Koska

$$\int_A f_k\,dm \leq \int_A f_{k+1}\,dm \leq \int_A f\,dm \quad \text{kaikilla } k\,,$$

on integraalien raja-arvo olemassa ja

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm \leq \int_A f\,dm\,.$$

Olkoon $0 < \lambda < 1$ ja $u \in \mathcal{Y}^+$, $u \leq f$ $A$:ssa. Olkoon

$$A_k = \{x \in A\colon f_k(x) \geq \lambda u(x)\}\,, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Tällöin $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \ldots$ ovat mitallisia ja

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A\,,$$

koska kaikilla $x$ joko $\lambda u(x) < f(x)$ tai $f(x) = 0$. Siten

$$\int_A f_k\,dm \geq \int_{A_k} f_k\,dm \geq \int_{A_k} \lambda u\,dm = \lambda \int_{A_k} u\,dm \to \lambda \int_A u\,dm\,,$$

kun $k \to \infty$, koska yksinkertaisen funktion integraalilla on mitan jatkuvuusominaisuudet (ks. huomautus 3.4). Siispä

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm \geq \lambda \int_A u\,dm\,.$$

Ottamalla supremum yli yksinkertaisten $u$ saamme

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm \geq \lambda \int_A f\,dm\,,$$

mistä väite seuraa, kun $\lambda \to 1$. □

**5.6. Seuraus.** *Olkoon $f\colon A \to [0,\infty]$ mitallinen. Tällöin on olemassa nouseva jono yksinkertaisia funktioita $u_k \in \mathcal{Y}^+$ siten, että*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x)\,, \qquad \textit{kaikilla } x \in A$$

*ja*

$$\int_A f\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_A u_k\,dm\,. \tag{$*$}$$

*Kääntäen, (*) on voimassa jokaiselle nousevalle jonolle $u_k$ mitallisia, ei-negatiivisia funktioita, joille $f = \lim_{k\to\infty} u_k$.*

*Todistus.* Seuraa monotonisen konvergenssin lauseesta 5.5 ja Lauseesta 4.9. □

**Huomautus.** Monotonisen konvergenssin lauseesta ja yksinkertaisen funktion integraalin lineaarisuudesta saamme helposti:

$$\int_A (f+g)\,dm = \int_A f\,dm + \int_A g\,dm \text{ kaikilla mitallisilla } f,g : A \to [0,\infty]\,,$$

kun valitaan $u_k, v_k \in \mathcal{Y}^+$, $u_k \nearrow f$ ja $v_k \nearrow g$, jolloin

$$\int_A (f+g)\,dm \leftarrow I(u_k+v_k, A) = I(u_k, A) + I(v_k, A) \to \int_A f\,dm + \int_A g\,dm.$$

Tämä yleistyy äärettömille summille monotonisen konvergenssin lauseen avulla:

**5.7. Seuraus.** *Olkoot $f_k : A \to [0,\infty]$ mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int_A \sum_{k=1}^{\infty} f_k\,dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_A f_k\,dm\,.$$

□

Seuraava tärkeä lause, Fatoun lemma, todistetaan käyttämällä monotonisen konvergenssin lausetta. Olisimme voineet toimia toisinkin päin: todistaa ensin Fatoun lemma ja sitten sen avulla monotonisen konvergenssin lause – ne ovat tässä mielessä ekvivalentteja.

**5.8. Lause.** (Fatoun lemma) *Olkoot $f_k : A \to [0, \infty]$ mitallisia funktioita. Tällöin*

$$\int_A \varliminf_{k\to\infty} f_k \, dm \le \varliminf_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm.$$

*Todistus.* Muista, että ala-raja-arvon määritelmän nojalla

$$\varliminf_{k\to\infty} f_k = \lim_{j\to\infty} g_j \,,$$

missä funktiot

$$g_j = \inf_{k\ge j} f_k$$

muodostavat nousevan jonon mitallisia funktioita. Siten monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\int_A \varliminf_{k\to\infty} f_k \, dm = \int_A \lim_{j\to\infty} g_j \, dm = \lim_{j\to\infty} \int_A g_j \, dm \le \varliminf_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm \,,$$

missä viimeisin epäyhtälö seuraa, koska $g_k \le f_k$. □

**Huomautus.** Fatoun lemmassa raja-arvojen

$$\lim_{k\to\infty} f_k \qquad \text{tai} \qquad \lim_{k\to\infty} \int_A f_k \, dm$$

ei tarvitse olla olemassa. Lemman epäyhtälö voi olla aito, kuten seuraava esimerkki näyttää.

**Esimerkki.** Olkoot $f_k \colon [0, \infty[ \to [0, 1]$,

$$f_k(x) = \frac{1}{k}\chi_{[0,k]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}\,, & \text{kun } 0 \le x \le k \\ 0\,, & \text{kun } x > k. \end{cases}$$

Tällöin $f_k \to 0$ (tasaisesti) $\mathbf{R}$:ssä, mutta

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_k \, dm = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} m([0, k]) = 1 > 0 = \int_{[0,\infty[} 0 \, dm = \int_{[0,\infty[} \lim_{k\to\infty} f_k \, dm.$$

Edellä olevaa esimerkkiä muuntamalla on helppo nähdä, että monotonisen konvergenssin lausetta vastaava väite ei päde väheneville jonoille. Kuitenkin saamme:

**5.9. Lause.** *Olkoon $f_k : A \to [0,\infty]$ laskeva jono (ts. $f_k(x) \geq f_{k+1}(x)$ kaikilla $x$ ja $k$) mitallisia funktioita ja*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)\,, \quad x \in A.$$

*Jos*

$$\int_A f_{k_0}\,dm < \infty \qquad \textit{jollain } k_0\,,$$

*niin*

$$\int_A f\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm\,.$$

*Todistus.* Indeksointia muuttamalla voidaan olettaa, että

$$\int_A f_1\,dm < \infty\,.$$

Siten joukko

$$N = \{x \in A \colon f_1(x) = \infty\}$$

on Lauseen 5.3 ii) nojalla nollamittainen. Tällöin funktiot

$$f_1(x) - f_k(x)\,, \text{ kun } x \in A \setminus N\,,$$

muodostavat $A \setminus N$:ssa nousevan jonon, ei-negatiivisia mitallisia funktioita. Monotonisen konvergenssin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_{A\setminus N} f_1\,dm - \int_{A\setminus N} f\,dm &= \int_{A\setminus N} (f_1 - f)\,dm\\ &= \lim_{k\to\infty} \int_{A\setminus N} (f_1 - f_k)\,dm\\ &= \int_{A\setminus N} f_1\,dm - \lim_{k\to\infty} \int_{A\setminus N} f_k\,dm,\end{aligned}$$

josta

$$\int_A f\,dm = \int_{A\setminus N} f\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_{A\setminus N} f_k\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm\,,$$

koska $m(N) = 0$ ja koska

$$\int_A f_1\,dm < \infty\,.$$

$\square$

## 6. Integroituvat funktiot ja niiden integraaalit

Tässä laajennamme integraalin käsitteen merkkiänsä vaihtaviin funktioihin.

**Määritelmä.** Olkoon $A \in \mathcal{M}$ ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Jos joko

$$\int_A f^+ \, dm < \infty \quad \text{tai} \quad \int_A f^- \, dm < \infty ,$$

niin funktion $f$ *(Lebesgue-)integraali yli joukon* $A$ on

$$\int_A f \, dm = \int_A f^+ \, dm - \int_A f^- \, dm .$$

Edelleen sanotaan, että $f$ on *integroituva* $A$:ssa, merkitään $f \in \mathcal{L}^1(A)$, jos sekä

$$\int_A f^+ \, dm < \infty \quad \text{että} \quad \int_A f^- \, dm < \infty .$$

**Huomautus.** Integroida voidaan siis muitakin kuin integroituvia funktioita mikäli joko positiivi- tai negatiiviosan integraali on äärellinen – integroituvalle funktiolle nämä molemmat ovat äärellisiä.

Joskus on hyvä kirjoittaa muuttujat näkyviin integraaleihin:

$$\int_A f \, dm = \int_A f(x) \, dm(x) = \int_A f(x) \, dx .$$

**6.1. Lemma.** *Olkoon $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

i) *$f$ on integroituva A:ssa (eli $f^+ \in \mathcal{L}^1(A)$ ja $f^- \in \mathcal{L}^1(A)$).*
ii) *On olemassa integroituvat $u \geq 0$ ja $v \geq 0$ siten, että $f = u - v$.*
iii) *On olemassa integroituva $g$ siten, että $|f| \leq g$ A:ssa.*
iv) *$|f|$ on integroituva A:ssa.*

*Todistus.* "i)⇒ ii)": Valitse $u = f^+$ ja $v = f^-$. $\square_{i)\Rightarrow ii)}$

"ii)⇒ iii)": Valitaan $g = u + v$, jolloin $g$ on integroituva ja

$$|f| = |u - v| \leq u + v = g .$$

$\square_{ii)\Rightarrow iii)}$

"iii)⇒ iv)": Koska $|f|$ on mitallinen ja $|f|^+ = |f|$, on

$$\int_A |f|^+ \, dm \leq \int_A g \, dm < \infty \quad \text{ja} \quad \int_A |f|^- \, dm = \int_A 0 \, dm = 0 < \infty .$$

$\square_{iii)\Rightarrow iv)}$

"iv)⇒ i)": Koska $f^+ \leq |f|$ ja $f^- \leq |f|$, on

$$\int_A f^+ \, dm \leq \int_A |f| \, dm < \infty \quad \text{ja} \quad \int_A f^- \, dm = \int_A |f| \, dm < \infty ,$$

joten $f \in \mathcal{L}^1(A)$. $\square$

Integroituvalle funktiolle $f \in \mathcal{L}^1(A)$ pätee $|f| < \infty$ m.k. $A$:ssa (Lemma 5.3). Käänteinen, ei ole totta.

**Huomautuksia.** a) Lemmassa 6.1 kaikki epäyhtälöt voidaan korvata vastaavilla m.k. voimassa olevilla epäyhtälöillä.

b) Jos, kuten Lemman 6.1 kohdassa ii), on integroituvat $u, v \in \mathcal{L}^1(A)$, joille $f = u - v$, niin

$$f = u - v = f^+ - f^- \quad \text{eli} \quad u + f^- = f^+ + v$$

ja siten Seurauksen 5.7 nojalla

$$\int_A u\,dm + \int_A f^-\,dm = \int_A f^+\,dm + \int_A v\,dm\,,$$

josta edelleen

$$\int_A f\,dm = \int_A f^+\,dm - \int_A f^-\,dm = \int_A u\,dm - \int_A v\,dm\,.$$

**6.2. Lause.** (Integraalin lineaarisuus) *Olkoot $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$. Tällöin jokaisella $\lambda \in \mathbf{R}$ funktiot*[12] *$\lambda f$ ja $f + g$ ovat integroituvia $A$:ssa ja*

$$\int_A \lambda f\,dm = \lambda \int_A f\,dm \quad \textit{sekä} \quad \int_A (f+g)\,dm = \int_A f\,dm + \int_A g\,dm\,.$$

*Todistus.* Koska $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ ja $(\lambda f)^- = \lambda f^-$, jos $\lambda \geq 0$ sekä $(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$ ja $(\lambda f)^- = -\lambda f^+$, jos $\lambda < 0$, seuraa funktiota $\lambda f$ koskeva väite Lauseesta 5.2.

Summafunktiota $f + g$ koskeva väite seuraa Lemmasta 6.1 ja sen jälkeisestä huomautuksesta b), sillä

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)\,.$$

□

**Huomautus.** Integroituvat funktiot muodostavat hilan: jos $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$, niin $\max(f, g) \in \mathcal{L}^1(A)$ ja $\min(f, g) \in \mathcal{L}^1(A)$. (harjoitustehtävä)

**6.3. Lemma.** *Olkoot $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$. Jos $f \leq g$ m.k. $A$:ssa, niin*

$$\int_A f\,dm \leq \int_A g\,dm \quad \textit{ja} \quad \left|\int_A f\,dm\right| \leq \int_A |f|\,dm\,.$$

*Todistus.* Olkoon

$$N = \{x \in A \colon f(x) > g(x)\}\,.$$

Koska $m(N) = 0$ ja

$$f^+ \leq g^+ \quad \text{ja} \quad f^- \geq g^- \quad A \setminus N : \text{ssä},$$

[12] Huomaa, että koska $|f| < \infty$ ja $|g| < \infty$ m.k., on summafunktio $f + g$ on määritely m.k. $A$:ssa. Koska nollamittaiset joukot eivät vaikuta integroituvuuteen eikä integraaleihin, meidän ei tarvitse välittää, vaikka $f + g$ ei olisikaan määritelty koko $A$:ssa – tarkastele vaikka nollajatkoa.

seuraa Lauseesta 5.2

$$\begin{aligned}\int_A f\,dm &= \int_{A\setminus N} f\,dm = \int_{A\setminus N} f^+\,dm - \int_{A\setminus N} f^-\,dm \\ &\le \int_{A\setminus N} g^+\,dm - \int_{A\setminus N} g^-\,dm = \int_{A\setminus N} g\,dm \\ &= \int_A g\,dm\,.\end{aligned}$$

Toinen epäyhtälö seuraa tästä, koska $f \le |f|$ ja $-f \le |f|$. □

**Huomautus.** Integroituvien funktioiden joukko $\mathcal{L}^1(A)$ ei ole vektoriavaruus, koska summafunktio $f+g$ ei ole määritelty kaikilla $f, g \in \mathcal{L}^1(A)$. Tämä vaikeus on kuitenkin näennäinen, koska funktiot ovat m.k. äärellisiä, jolloin voitaisiin huoletta olettaa, että integroituvat funktiot ovat äärellisiä. Myöhemmin tulemme kiertämään tämän vaikeuden samastamalla sellaiset kaksi $\mathcal{L}^1(A)$:n funktiota, jotka ovat m.k. samat.

Erittäin hyödyllinen integraalin ominaisuus on sen $\sigma$-additiivisuus:

**6.4. Lause.** *Olkoot $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$ pareittain pistevieraita ja*

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

*Jos $f \in \mathcal{L}^1(A)$, niin*

$$\int_A f\,dm = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f\,dm.$$

*Todistus.* Seuraa soveltamalla Lemmaa 5.1 funktioihin $f^+$ ja $f^-$. □

Seuraava konvergenssilause on Lebesgue-integraalin tärkeimpiä ominaisuuksia.

**6.5. Lause.** (Lebesguen dominoidun konvergenssin lause) *Olkoot $f, f_k : A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallisia funktioita siten, että $f_k(x) \to f(x)$ m.k. $x \in A$. Jos on olemassa $g \in \mathcal{L}^1(A)$, jolle*

$$\text{kaikilla } k \quad |f_k(x)| \le g(x) \quad \text{m.k. } x \in A,$$

*niin $f$ ja $f_k$ ovat integroituvia sekä*

$$\int_A f\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm\,.$$

*Todistus.* Olkoon

$$\begin{aligned}N = \{x \in A\colon \varliminf_{k\to\infty} f_k(x) \ne f(x)\} \cup \{x \in A\colon \varlimsup_{k\to\infty} f_k(x) \ne f(x)\} \cup \\ \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in A\colon |f_k(x)| > g(x)\}.\end{aligned}$$

Tällöin $m(N) = 0$ ja

$$|f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_k(x)| \le g(x) \quad \text{kaikilla } x \in A \setminus N,$$

joten $f \in \mathcal{L}^1(A \setminus N)$ (Lemma 6.1) ja edelleen $f \in \mathcal{L}^1(A)$. Samoin $f_k \in \mathcal{L}^1(A)$. Olkoon

$$g_k(x) = \begin{cases} |f_k(x) - f(x)|\,, & \text{kun } x \in A \setminus N \\ 0\,, & \text{kun } x \in N \end{cases}$$

ja $h = |f| + g$. Tällöin $h \in \mathcal{L}^1(A)$ ja kolmioepäyhtälön avulla m.k. $x \in A$

$$\begin{aligned} h(x) - g_k(x) &= |f(x)| + g(x) - |f_k(x) - f(x)| \\ &\geq |f(x)| + g(x) - (|f_k(x)| + |f(x)|) = g(x) - |f_k(x)| \\ &\geq 0\,, \end{aligned}$$

joten Fatoun lemmaa 5.8 voidaan soveltaa:

$$\begin{aligned} \int_A h\,dm &= \int_A \varliminf_{k\to\infty} (h - g_k)\,dm \leq \varliminf_{k\to\infty} \int_A (h - g_k)\,dm \\ &= \int_A h\,dm - \varlimsup_{k\to\infty} \int_A g_k\,dm\,. \end{aligned}$$

Koska

$$\int_A h\,dm < \infty\,,$$

seuraa tästä

$$\varlimsup_{k\to\infty} \int_A g_k\,dm \leq 0\,.$$

Mutta koska $g_k \geq 0$, saadaan edelleen

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int_A g_k\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_A |f_k - f|\,dm\,,$$

josta Lemman 6.3 avulla

$$\left|\int_A f_k\,dm - \int_A f\,dm\right| = \left|\int_A f_k - f\,dm\right| \leq \int_A |f_k - f|\,dm \to 0\,.$$

□

**Huomautuksia.** a) Yllä todistettiin (näennäisesti) vahvempikin tulos: Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen oletuksin

$$\lim_{k\to\infty} \int_A |f_k - f|\,dm = 0\,.$$

b) Huomaa, että edellä saman dominantin $g$ pitää dominoida koko itseisarvojonoa $|f_k|$.

Jos $A$ on äärellismittainen, ovat vakiofunktiot integroituvia, jolloin saamme ns. *rajoitetun konvergenssin lauseen*:

**6.6. Seuraus.** *Olkoon $m(A) < \infty$ ja $f, f_k\colon A \to \mathbf{R}$ mitallisia funktioita siten, että $f_k \to f$ m.k. $A$:ssa. Jos on olemassa vakio $M < \infty$, jolle*

$$|f_k(x)| \leq M \qquad \textit{melkein kaikilla } x \in A\,,$$

*niin $f \in \mathcal{L}^1(A)$ ja*

$$\int_A f\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm\,.$$

□

**6.7. Seuraus.** *Olkoon* $m(A) < \infty$ *ja* $f_k \in \mathcal{L}^1(A)$ *siten, että* $f_k \to f$ *tasaisesti* $A$*:ssa. Tällöin* $f \in \mathcal{L}^1(A)$ *ja*

$$\int_A f\,dm = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\,dm\,.$$

*Todistus.* harjoitustehtävä. □

Seuraavan lauseen ominaisuutta kutsutaan integraalin *absoluuttiseksi jatkuvuudeksi.*

**6.8. Lause.** *Olkoon* $f \in \mathcal{L}^1(A)$*. Tällöin jokaisella* $\varepsilon > 0$ *on* $\delta > 0$ *siten, että jos* $m(E) < \delta$*, niin*

$$\int_{A\cap E} |f|\,dx < \varepsilon\,.$$

*Todistus.* **Antiteesi**: On olemassa $\varepsilon > 0$ ja jono $E_j \in \mathcal{M}$ siten, että $m(E_j) \le 2^{-j}$ ja

$$\int_{A\cap E_j} |f|\,dx \ge \varepsilon \quad \text{kaikilla } j.$$

Olkoon

$$B_k = \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j$$

jolloin $B_1 \supset B_2 \subset B_3 \supset \dots$ ja

$$m(B_k) \le \sum_{j=k}^{\infty} m(E_j) \le \sum_{j=k}^{\infty} 2^{-j} = 2^{1-k}.$$

Siten

$$\chi_{B_k} \to 0 \quad \text{m.k. } A\text{:ssa.}$$

Edelleen, koska $|f|\chi_{B_k} \le |f|$, seuraa dominoidun konvergenssin lauseesta

$$\lim_{k\to\infty} \int_{A\cap B_k} |f|\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_A \chi_{B_k} |f|\,dm = 0\,.$$

Tämä on vastoin antiteesiä, koska

$$\int_{A\cap B_k} |f|\,dx \ge \int_{A\cap E_k} |f|\,dx \ge \varepsilon\,.$$

□

## 7. Konvergenssilauseiden sovellutuksia

### Riemannin ja Lebesguen integraalit R:ssä.

Tarkastellaan[13] kompaktia $\mathbf{R}$:n väliä $I = [a, b]$, missä $a, b \in \mathbf{R}$. Riemannin integraali määritellään porrasfunktioiden avulla. Funktio $u : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on porrasfunktio, jos $u$ on yksinkertainen ja jokaisella $c \in \mathbf{R}$ joukko

$$\{x\colon u(x) = c\}$$

on joko $\emptyset$ tai äärellisen monen välin yhdiste. Porrasfunktion $u$ Riemann-integraali yli välin $[a, b]$ on $I(u, [a, b])$, mikä on yksinkertaisen funktion $u$ Lebesgue-integraali yli joukon $[a, b]$.

Edelleen, rajoitetun funktion $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *Riemannin alaintegraali* on

$$\text{ala}\int_a^b f := \sup\{I(g, [a, b]) : g \text{ porrasfunktio ja } g \le f \text{ välillä } [a, b]\}$$

ja $f$:n *Riemannin yläintegraali* on

$$\text{ylä}\int_a^b f := \inf\{I(h, [a, b]) : g \text{ porrasfunktio ja } h \ge f \text{ välillä } [a, b]\}.$$

Edelleen, $f$ on *(Riemann-)integroituva*, jos

$$\text{ala}\int_a^b f = \text{ylä}\int_a^b f\,;$$

tällöin $f$:n *(Riemann-)integraali* yli välin $[a, b]$ on

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x)\,dx := \text{ala}\int_a^b f = \text{ylä}\int_a^b f\,.$$

**Huomautus.** On helppo havaita, että rajoitettu funktio $f$ on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, jos ja vain, jos

$$\text{ala}\int_a^b f = -\text{ala}\int_a^b (-f)\,.$$

Huomaa, että jos rajoitettu $f$ on mitallinen, niin Lebesguen integraalin määritelmästä seuraa helposti, että

$$\text{ala}\int_a^b f \le \int_{[a,b]} f\,dm \le \text{ylä}\int_a^b f\,.$$

[13]Samantapainen tarkastelu toimii $\mathbf{R}^n$:ssä, mutta rajoitamme tarkastelun yksinkertaisuuden vuoksi yksiulotteiseen tapaukseen.

Siten Riemann-integroituvalle funktiolle funktiolle $f$ Riemannin ja Lebesguen integraalit ovat samat,

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f\,dm\,,$$

mikäli $f$ on mitallinen ($f$ on aina mitallinen, minkä todistamme seuraavassa lauseessa).

Lebesguen integraali laajentaa Riemann-integraalin käsitteen:

**7.1. Lause.** *Jos rajoitettu funktio $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ on Riemann-integroituva, niin $f$ on Lebesgue-integroituva ja*

$$\int_a^b f = \int_{[a,b]} f\,dm\,.$$

*Todistus.* Koska $f$ on rajoitettu, niin vakion lisäämällä voimme olettaa, että $f \geq 0$ (miksi?).

Riemannin integraalin määritelmän avulla löydämme helposti porrasfunktiojonot $u_k \geq 0$ ja $v_k \geq 0$ siten, että

$$u_k \leq f\,, \quad \lim_{k\to\infty} I(u_k,[a,b]) = \text{ala}\int_a^b f\,,$$

$$v_k \geq f \quad \text{ja} \quad \lim_{k\to\infty} I(v_k,[a,b]) = \text{ylä}\int_a^b f\,.$$

Voidaan olettaa (tutkimalla tarvittaessa funktioita $\tilde{u}_k = \max(u_1,u_2,\ldots,u_k)$ ja $\tilde{v}_k = \min(v_1,v_2,\ldots,v_k)$), että jono $u_k$ on nouseva ja jono $v_k$ laskeva. Olkoot

$$u = \lim_{k\to\infty} u_k \quad \text{ja} \quad v = \lim_{k\to\infty} v_k.$$

Tällöin monotonisen konvergenssin lauseen 5.5 ja sen laskevan version 5.9 nojalla

$$\text{ala}\int_a^b f = \lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]} u_k\,dm = \int_{[a,b]} u\,dm$$

ja

$$\text{ylä}\int_a^b f = \lim_{k\to\infty}\int_{[a,b]} v_k\,dm = \int_{[a,b]} v\,dm.$$

Koska $v - u \geq 0$ ja

$$\int_{[a,b]}(v-u)\,dm = \int_{[a,b]} v\,dm - \int_{[a,b]} u\,dm = \text{ylä}\int_a^b f - \text{ala}\int_a^b f = 0\,,$$

seuraa, että $v = u = f$ m.k. $[a,b]$:llä. Siten $f$ on mitallinen ja siten rajoitettuna integroituva rajoitetulla välillä $[a,b]$. Edelleen

$$\int_{[a,b]} f\,dm = \text{ala}\int_a^b f = \int_a^b f\,,$$

ja väite on todistettu. $\square$

**7.2. Lause.** (Lebesguen ehto) *Rajoitettu funktio $f$ on Riemann-integroituva välillä $[a,b]$, jos ja vain, jos $f$ on jatkuva m.k. $x \in [a,b]$.*

*Todistus.* Olkoon $f$ ensin Riemann-integroituva. Lauseen 7.1 todistuksessa löysimme porrasfunktiojonot $u_k \le f$ ja $v_k \ge f$ siten, että $u_k \nearrow f$ ja $v_k \searrow f$ m.k. välillä $[a,b]$. Koska porrasfunktiot ovat jatkuvia paitsi äärellisen monessa pisteessä, on joukko

$$N_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{x \in [a,b] \colon u_k \text{ tai } v_k \text{ on epäjatkuva pisteessä } x\}$$

nollamittainen, $m(N_1) = 0$. Samoin joukko

$$N_2 = \{x \in [a,b] \colon \lim_{k\to\infty} u_k(x) < f(x)\} \cup \{x \in [a,b] \colon \lim_{k\to\infty} v_k(x) > f(x)\}$$

on nollamittainen. Siten $m(N_1 \cup N_2) = 0$. Funktio $f$ on jatkuva joukon $N_1 \cup N_2$ ulkopuolella Lemman 7.3 nojalla, ts. $f$ on jatkuva m.k. $x \in [a,b]$.

Olkoon, kääntäen $f$ on jatkuva m.k. $x \in [a,b]$. Tällöin on olemassa porrasfunktiojonot $u_k \le f$ ja $v_k \ge f$ siten, että $u_k \nearrow f$ ja $v_k \searrow f$ m.k. välillä $[a,b]$ (ks. Lemma 7.4). Nyt

$$\text{ala} \int_a^b f \ge \int_{[a,b]} u_k \, dm \to \int_{[a,b]} f \, dm$$

ja

$$\text{ylä} \int_a^b f \le \int_{[a,b]} v_k \, dm \to \int_{[a,b]} f \, dm \,,$$

joten

$$\text{ylä} \int_a^b f \le \text{ala} \int_a^b f$$

ja $f$ on siten Riemann-integroituva. □

Seuraavia kahta lemmaa käytettiin Lauseen 7.2 todistuksessa.

**7.3. Lemma.** *Olkoon $u_k$ nouseva jono ja $v_k$ vähenevä jono ja $f$ sellainen funktio, että*

$$u_k(x) \le f(x) \le v_k(x) \qquad \textit{kaikilla } k \,.$$

*Jos funktiot $u_k$ ja $v_k$ ovat jatkuvia pisteessä $x_0$ ja jos*

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x_0) = f(x_0) = \lim_{k\to\infty} v_k(x_0) \,,$$

*on $f$ jatkuva pisteessä $x_0$.*

*Todistus.* Olkoon $x_j \to x_0$. Tällöin

$$u_k(x_j) \le f(x_j) \le v_k(x_j) \qquad \text{kaikilla } j \,,$$

joten jatkuvuuden nojalla

$$u_k(x_0) = \liminf_{j\to\infty} u_k(x_j) \le \liminf_{j\to\infty} f(x_j) \le \limsup_{j\to\infty} f(x_j) \le \limsup_{j\to\infty} v_k(x_j) = v_k(x_0),$$

mistä

$$f(x_0) = \sup_k u_k(x_0) \le \liminf_{j\to\infty} f(x_j) \le \limsup_{j\to\infty} f(x_j) \le \inf_k v_k(x_j) = f(x_0).$$

Siis

$$f(x_0) = \lim_{j\to\infty} f(x_j),$$

joten $f$ on jatkuva pisteessä $x_0$. □

**7.4. Lemma.** *Olkoon $f$ rajoitettu ja jatkuva m.k. $x \in [a,b]$. Tällöin on olemassa nouseva porrasfunktiojono $u_k$ siten, että*

$$u_k(x) \le f(x) \qquad \textit{kaikilla } k$$

*ja*

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = f(x) \qquad \textit{m.k. } x \in [a,b]\,.$$

*Todistus.* Voidaan olettaa, että $f \ge 0$. Olkoon

$$N = \{x \in [a,b] \colon f \text{ on epäjatkuva pisteessä } x\}$$

ja valitaan avoimet joukot $G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset N$ siten, että

$$m(G_j) \le \frac{1}{j}\,.$$

Kiinnitetään $j$. Koska $f$ jatkuva $[a,b] \setminus G_j$:ssä, on jokaisella $x \in [a,b] \setminus G_j$ avoin väli $I_x \ni x$, jolle

$$|f(x) - f(y)| < \frac{1}{j} \qquad \text{kaikilla } y \in I_x \cap [a,b].$$

Koska $[a,b] \setminus G_j$ on kompakti, äärellinen määrä em. välejä $I_{x_1}, I_{x_2}, \dots, I_{x_m}$ peittää $[a,b] \setminus G_j$:n. Näitä välejä pilkkomalla saadaan pareittain pistevieraat (ei välttämättä enää avoimet) välit $I_1, I_2, \dots I_k$, jotka peittävät $[a,b] \setminus G_j$:n ja joille $x_i \in I_i$ ja

$$|f(x_i) - f(y)| < \frac{1}{j} \qquad \text{kaikilla } y \in I_i \cap [a,b].$$

Olkoon

$$u_j(x) = \sum_{i=1}^{k} (f(x_i) - \frac{1}{j})\chi_{I_i}(x).$$

Tällöin $u_j$ on porrasfunktio, $u_j \le f$ ja

$$|u_j(x) - f(x)| \le \frac{2}{j} \qquad \text{kaikilla } x \in [a,b] \setminus G_j.$$

Siten

$$u_j \to f \quad [a,b] \setminus \bigcap_{j=1}^{\infty} G_j\text{:ssa}.$$

Koska $m(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j) = 0$, saamme $u_j \to f$ m.k. välillä $[a,b]$.

Porrasfunktiojonosta $u_j$ tehdään nouseva asettamalla, tavalliseen tapaan,

$$\tilde{u}_j(x) = \max(u_1(x), u_2(x), \dots, u_j(x))\,.$$

□

**Huomautus.** Lebesgue-integroituvia funktioita on tosi paljon enemmän kuin Riemann-integroituvia, esimerkiksi $\chi_{\mathbf{Q}}$ on tällainen.

**7.5. Seuraus.** *Olkoon* $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ **ei-negatiivinen** *ja Riemann-integroituva kaikilla suljetuilla väleillä* $[a,b] \subset \mathbf{R}$. *Tällöin* $f$ *on Lebesgue-integroituva* $\mathbf{R}$*:ssä, jos ja vain, jos*

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{-k}^{k} f$$

*on olemassa ja äärellinen. Tällöin ko. raja-arvo on epäoleellinen integraali*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f = \int_{\mathbf{R}} f\,dm\,.$$

*Todistus.* Koska $f$ on Riemann-integroituva kaikilla suljetuilla väleillä $[a,b] \subset \mathbf{R}$, on $f$ Lauseen 7.1 nojalla mitallinen ja

$$\int\limits_{-k}^{k} f = \int_{[-k,k]} f\,dm = \int_{\mathbf{R}} f\chi_{[-k,k]}\,dm \to \int_{\mathbf{R}} f\,dm\,,$$

missä konvergenssin takaa monotonisen konvergenssin lause. $\square$

**Huomautus.** Ositusta $f = f^+ - f^-$ käyttämällä saadaan 7.5:n yleistyksenä tulos myös vaihtuvamerkkisille funktioille. Tällöin pitää kuitenkin olettaa, että epäoleellinen Riemann-integraali

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f|$$

on olemassa eli, että

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f$$

suppenee itseisesti (harjoitustehtävä: formuloi ja todista!).

**Esimerkki.** Vaihtuvamerkkisille funktioille epäoleellinen Riemann-integraali voi olla olemassa, vaikkei funktio olisikaan Lebesgue integroituva: olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{, kun } x > 0, \\ 0 & \text{, kun } x \le 0. \end{cases}$$

Tällöin epäoleellinen Riemann-integraali suppenee,

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{2}. \qquad \text{(katso kompleksianalyysi)}$$

Kuitenkaan $f$ ei ole ole Lebesgue-integroituva, koska

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty[} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dm &\geq \sum_{k=1}^{n} \int_{[(k-1)\pi,k\pi[} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dm \\ &\geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\pi} \int_{[(k-1)\pi,k\pi[} |\sin x|\, dm \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \int_{[0,\pi[} |\sin x|\, dm \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{[0,\pi[} |\sin x|\, dm \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\ &\to \infty\,,\end{aligned}$$

kun $n \to \infty$.

**Integraalin esityslause (Lebesguen määritelmä).**

**7.6. Lause.** *Olkoon $f\colon A \to [0,\infty]$ mitallinen, $A \in \mathcal{M}_n$. Tällöin*

$$\int_A f\, dm = \int_0^\infty m(\{x \in A\colon f(x) > t\})\, dt\,.$$

**Huomautus.** Väitteessä olevaa integrandia

$$g(t) = m(\{x \in A\colon f(x) > t\})\,, \quad t > 0,$$

sanotaan $f$:n *distribuutiofunktioksi.* Se on vähenevä, joten $g$ on Riemann-integroituva suljetuilla $[0,\infty[$:n osaväleillä. Siten Lauseen 7.6 oikeanpuoleinen integraali voidaan tulkita joko epäoleellisena Riemann-integraalina tai Lebesgue-integraalina $\mathbf{R}$:ssä.

*Todistus.* Todistuksen perusrakenne on tavanomainen: havaitaan, että väite on selvä mitallisen joukon karakteristiselle funktiolle, helppo yksinkertaisille funktioille ja yleinen tilanne seuraa konvergenssilauseesta.

**1.** Olkoon $u \in \mathcal{Y}^+$,

$$u(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j \chi_{A_j}(x)\,,$$

missä $A_j \in \mathcal{M}$ ovat pareittain pistevieraita ja $0 = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_k$. Nyt näemme induktiolla

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty m(\{x \in A\colon u(x) > t\})\,dt &= \int_0^{c_k} m(\{x \in A\colon u(x) > t\})\,dt \\
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{c_{j-1}}^{c_j} m(\{x \in A\colon u(x) > t\})\,dt \\
&= \sum_{j=1}^{k} (c_j - c_{j-1}) m(\bigcup_{i=j}^{k} A_i \cap A) \\
&= \sum_{j=1}^{k} (c_j - c_{j-1}) \sum_{i=j}^{k} m(A_i \cap A) \\
&= \sum_{j=1}^{k} m(A_j \cap A) \sum_{i=1}^{j} (c_i - c_{i-1}) \\
&= \sum_{j=1}^{k} c_j\, m(A_j \cap A) \\
&= \int_A u\, dm\,.
\end{aligned}
$$

**2.** Valitaan $u_j \in \mathcal{Y}^+$ siten, että $u_j \nearrow f$ (Lause 4.9). Jos merkitään

$$g_j(t) = m(\{x \in A\colon u_j(x) > t\})\,,$$

niin $g_j$:t muodostavat nousevan jonon, ei-negatiivisia, mitallisia funktioita ja

$$g_j(t) \to g(t) = m(\{x \in A\colon f(x) > t\})$$

Lauseen 2.12 nojalla. Siispä monotonisen konvergenssin lauseesta 5.5 saamme kohtaa 1. käyttämällä

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty m(\{x \in A\colon f(x) > t\})\,dt &= \lim_{j\to\infty} \int_0^\infty m(\{x \in A\colon u_j(x) > t\})\,dt \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_A u_j\, dm \\
&= \int_A f\, dm\,.
\end{aligned}
$$

□

Muuttujanvaihdolla saamme:

**7.7. Seuraus.** *Olkoon* $0 < p < \infty$ *ja* $f\colon A \to [0,\infty]$ *mitallinen. Tällöin*

$$\int_A f^p\, dm = p \int_0^\infty t^{p-1} m(\{x \in A\colon f(x) > t\})\,dt =: \int_0^\infty m(\{x \in A\colon f(x) > t\})\,dt^p\,.$$

□

**Parametristä riippuvat integraalit.**

**7.8. Lemma.** (Jatkuvuuslemma) *Olkoon $X \in \mathcal{M}_n$ ja $Y \in \mathcal{M}_m$ sekä $f\colon X \times Y \to \mathbf{R}$ sellainen funktio, jolle*

a) *Kaikilla $y \in Y$ funktio $x \mapsto f(x,y)$ on integroituva $X$:ssä.*
b) *Kaikilla $x \in X$ funktio $y \mapsto f(x,y)$ on jatkuva pisteessä $y_0 \in Y$.*
c) *On olemassa integroituva funktio $h\colon X \to [0,\infty]$, jolle*

$$|f(x,y)| \le h(x) \qquad \textit{kaikilla } (x,y) \in X \times Y.$$

*Tällöin funktio*

$$\varphi(y) = \int_X f(x,y)\,dx$$

*on jatkuva pisteessä $y_0$.*

*Todistus.* Olkoon $y_j \to y_0$ ja tarkastellaan funktioita

$$f_j(x) = f(x, y_j).$$

Tällöin $f_j \in \mathcal{L}^1(X)$, $f_j(x) \to f(x,y_0)$ kaikilla $x \in X$ ja $|f_j(x)| \le h(x)$. Näin ollen Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseesta 6.5 seuraa

$$\varphi(y_j) = \int_X f_j(x)\,dx \to \int_X f(x,y_0)\,dx = \varphi(y_0),$$

joten $\varphi$ on jatkuva pisteessä $y_0$. □

**7.9. Lemma.** (Differentiointilemma) *Olkoon $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ avoin ja $Y \in \mathcal{M}_m$ sekä $f\colon \Omega \times Y \to \mathbf{R}$ sellainen funktio, jolle*

a) *Kaikilla $x \in \Omega$ funktio $y \mapsto f(x,y)$ on integroituva $Y$:ssä.*
b) *Kaikilla $y \in Y$ funktiolla $x \mapsto f(x,y)$ on i. osittaisderivaatta*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x,y) \qquad \textit{jokaisella } x \in \Omega.$$

c) *On olemassa integroituva funktio $h\colon Y \to [0,\infty]$, jolle*

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_i} f(x,y)\right| \le h(y) \qquad \textit{kaikilla } (x,y) \in \Omega \times Y.$$

*Tällöin funktiolla $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}$,*

$$\varphi(x) = \int_Y f(x,y)\,dy$$

*on i. osittaisderivaatta $\Omega$:ssa. Lisäksi funktio $y \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} f(x,y)$ on integroituva ja*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x) = \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} f(x,y)\,dy$$

*Todistus.* Olkoon $x \in \Omega$ ja $t_j \in \mathbf{R}$, $t_j \to 0$. Olkoon $e_i$ $i$. kantavektori. Funktiot

$$g_j(y) = \frac{f(x + t_j e_i, y) - f(x, y)}{t_j}$$

ovat mitallisia ja

$$g_j(y) \to \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, y)\,.$$

Siten osittaisderivaatta on mitallinen ja c)-kohdan ja Lebesguen dominoidun konvergenssin lauseen 6.5 nojalla

$$\frac{\varphi(x + t_j e_i) - \varphi(x)}{t_j} = \int_Y g_j(y)\, dy \to \int_Y \frac{\partial}{\partial x_i} f(x, y)\, dy\,.$$

□

**7.10. Esimerkki.**

Lasketaan

$$\int_0^1 \frac{\log x}{1 + x}\, dx.$$

Geometrisesta sarjasta saadaan

$$\frac{1}{1 + x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k\,, \qquad \text{kun } x \in ]0, 1[.$$

Jos

$$f_j(x) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k x^k \log x\,,$$

niin $f_j$:t integroituvia ja

$$|f_j(x)| \le -\sum_{k=0}^{\infty} x^k \log x \qquad (\, x \in ]0, 1[\,)$$

ja monotonisen konvergenssin lauseen avulla

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} x^k |\log x|\, dx = -\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 x^k \log x\, dx \underset{14}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^2} < \infty\,.$$

Näin ollen voimme soveltaa Lebesguen dominoidun konvergenssin lausetta 6.5 ja

[14] Osittaisintegroimalla

$$\int_0^1 x^k \log x\, dx = \frac{1}{k+1} \Big/_0^1 x^{k+1} \log x - \frac{1}{k+1} \int_0^1 x^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = -\frac{1}{(k+1)^2} \Big/_0^1 x^{k+1}.$$

saamme

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\log x}{1+x}\,dx &= \lim_{j\to\infty}\int_0^1 f_j\,dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int_0^1 x^k\log x\,dx \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} = -\frac{\pi^2}{12}\,,\end{aligned}$$

missä sarjan summa saadaan (esimerkisi) Fourier-sarjan avulla.

## 8. Fubinin lause Lebesgue-integraaleille

Tässä luvussa todistetaan iteroitujen integraalien kaava eli Fubinin lause Lebesgue-integraaleille.

**8.1. Lause.** (Fubini) *Olkoon* $n = p + q$, *missä* $p, q \in \mathbf{N}$, *ja* $f\colon \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to [0,\infty]$ *mitallinen* $\mathbf{R}^n$*:ssä. Tällöin*

i) $m_q$*-m.k.* $y \in \mathbf{R}^q$ *funktio* $x \mapsto f(x,y)$ *on mitallinen* $\mathbf{R}^p$*:ssä.*
ii) $m_p$*-m.k.* $x \in \mathbf{R}^p$ *funktio* $y \mapsto f(x,y)$ *on mitallinen* $\mathbf{R}^q$*:ssä.*
iii) *Funktio*

$$y \mapsto \int_{\mathbf{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x) \quad \text{\textit{on mitallinen} } \mathbf{R}^q\text{\textit{:ssä.}}$$

iv) *Funktio*

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y) \quad \text{\textit{on mitallinen} } \mathbf{R}^p\text{\textit{:ssä.}}$$

v)

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} f(x,y)\,dm_n &= \int_{\mathbf{R}^q}\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x)\,dm_q(y)\\ &= \int_{\mathbf{R}^p}\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\,dm_q(y)\,dm_p(x)\,.\end{aligned}$$

*Todistus*[15]. Symmetriasyistä riittää osoittaa, että kohdat i), iii) ja v):n ensimmäinen yhtäsuuruus ovat voimassa.

Olkoon

$$Q = \{f\colon \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to [0,\infty] \text{ mitallinen} : i), iii) \text{ ja } v)_a \text{ ovat voimassa } f\text{:lle}\}.$$

Osoitetaan, että $Q$ sisältää kaikki mitalliset $f\colon \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to [0,\infty]$.

**A.** Olkoot $I \subset \mathbf{R}^p$ ja $J \subset \mathbf{R}^q$ välejä. Tällöin on selvää, että $f = \chi_I\,\chi_J \in Q$.

**B.** Olkoon $f_j \in Q$ nouseva jono ja $f_j \to f$. Tällöin $f \in Q$:
Selvästi $f$ on mitallinen. Olkoon $E_j \subset \mathbf{R}^q$ sellainen, että $m(E_j) = 0$ ja funktio

$$x \mapsto f_j(x,y) \text{ on mitallinen } \mathbf{R}^p\text{:ssä kaikilla } y \in \mathbf{R}^q \setminus E_j\,.$$

Nyt jos $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, niin $m(E) = 0$ ja funktiot

$$x \mapsto f_j(x,y) \text{ ovat mitallisia } \mathbf{R}^p\text{:ssä kaikilla } j \text{ ja kaikilla } y \in \mathbf{R}^q \setminus E\,,$$

josta antamalla $j \to \infty$ saamme, että

$$x \mapsto f(x,y) \text{ on mitallinen } \mathbf{R}^p\text{:ssä m.k. } y \in \mathbf{R}^q\,,$$

[15] Todistus on pitkällinen, mutta suoraviivainen: tarkistetaan, että mitallisten joukkojen karakteristiset funktiot toteuttavat väitteen ja että rajankäynnit sujuvat toivotulla tavalla.

eli i) funktiolle $f$. Ominaisuus iii) seuraa, sillä monotonisen konvergenssin lauseen 5.5 nojalla

$$\varphi_j(y) = \int_{\mathbf{R}^p} f_j(x,y)\,dm_p(x) \to \int_{\mathbf{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x) = \varphi(y)\,,$$

joten $\varphi$ on mitallinen $\mathbf{R}^q$:ssa. Edelleen, monotonisen konvergenssin lause 5.5 antaa

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} f(x,y)\,dm_n \leftarrow \int_{\mathbf{R}^n} f_j(x,y)\,dm_n &\\ &= \int_{\mathbf{R}^q}\int_{\mathbf{R}^p} f_j(x,y)\,dm_p(x)\,dm_q(y)\\ &= \int_{\mathbf{R}^q} \varphi_j(y)\,dm_q(y)\\ &\to \int_{\mathbf{R}^q} \varphi(y)\,dm_q(y)\\ &= \int_{\mathbf{R}^q}\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y)\,dm_p(x)\,dm_q(y)\,,\end{aligned}$$

eli kohta v). Siis $f \in Q$. $\square_B$

Seuraavaksi havaitaan:

**C.** Jos $f, g \in Q$, niin $\alpha f + \beta g \in Q$, kun $\alpha, \beta \in [0,\infty[$. Edelleen, jos $0 \le g \le f$ ja $g \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$, niin $f - g \in Q$. (harjoitustehtävä)

**D.** Olkoot $E_j \in \mathcal{M}_n$, $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$. Jos $\chi_{E_j} \in Q$ ja $m(E_1) < \infty$, niin $\chi_E \in Q$, missä $E = \bigcap\limits_{j=1}^{\infty} E_j$:

Ominaisuus i) saadaan kuten kohdassa B edellä. Koska $m(E_j) < \infty$, seuraa v):stä, että

$$m_q\text{-m.k. } y \in \mathbf{R}^q : \quad m_p(\{x \in \mathbf{R}^p \colon (x,y) \in E_j\} < \infty,$$

joten Lauseesta 5.9 saadaan, että $m_q$-m.k. $y \in \mathbf{R}^q$

$$\varphi_j(y) = \int_{\mathbf{R}^p} \chi_{E_j}(x,y)\,dx \to \int_{\mathbf{R}^p} \chi_E(x,y)\,dx = \varphi(y)$$

ja siten $\varphi$ on mitallinen $\mathbf{R}^q$:ssa. Edelleen

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n} \chi_E(x,y)\,dm_n \leftarrow \int_{\mathbf{R}^n} \chi_{E_j}(x,y)\,dm_n &\\ &= \int_{\mathbf{R}^q}\int_{\mathbf{R}^p} \chi_{E_j}(x,y)\,dm_p(x)\,dm_q(y)\\ &= \int_{\mathbf{R}^q} \varphi_j(y)\,dm_q(y)\\ &\to \int_{\mathbf{R}^q} \varphi(y)\,dm_q(y)\\ &= \int_{\mathbf{R}^q}\int_{\mathbf{R}^p} \chi_E(x,y)\,dm_p(x)\,dm_q(y)\,,\end{aligned}$$

eli kohta v). Siis $\chi_E \in Q$. $\square_D$

**E.** Jos $G \subset \mathbf{R}^n$ on avoin, niin $\chi_G \in Q$:
Alla olevan Lemman 8.2 nojalla

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k,$$

missä $I_k$ ovat pareittain pistevieraita $\mathbf{R}^n$:n välejä. Tällöin

$$\chi_G = \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} \chi_{I_k}\,,$$

joten kohtien A ja C nojalla $\chi_G$ on $Q$:n funktioiden muodostaman nousevan jonon rajafunktio ja siten $Q$:ssa kohdan B nojalla. $\square_E$

**F.** Olkoon $B \subset \mathbf{R}^n$ rajoitettu $G_\delta$-joukko, ts.

$$B = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$$

missä $G_1 \supset G_2 \supset \dots$ ovat rajoitettuja, avoimia $\mathbf{R}^n$:n osajoukkoja. Tällöin $\chi_B \in Q$.
Tämä seuraa E:sta ja D:stä. $\square_F$

**G.** Jos $m_n^*(N) = 0$, niin $\chi_N \in Q$:
Lebesgue-mitan määritelmän nojalla on olemassa $G_\delta$-joukko $B \subset \mathbf{R}^n$, jolle $N \subset B$ ja $m(B) = 0$. Tällön kohdan $F$ nojalla $\chi_B \in Q$ ja siten

$$0 = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_B(x,y)\,dm_n = \int_{\mathbf{R}^q} (\int_{\mathbf{R}^p} \chi_B(x,y)\,dx)\,dy\,,$$

joten

$$\int_{\mathbf{R}^p} \chi_B(x,y)\,dx = 0 \quad \text{m.k. } y \in \mathbf{R}^q$$

ja edelleen

$$\text{m.k. } y \in \mathbf{R}^q : \quad \chi_B(x,y)\,dx = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbf{R}^p\,.$$

Koska $0 \le \chi_N \le \chi_B$, seuraa tästä

$$\text{m.k. } y \in \mathbf{R}^q : \quad \chi_N(x,y)\,dx = 0 \quad \text{m.k. } x \in \mathbf{R}^p\,,$$

mistä on selvää, että $\chi_N \in Q$. $\square_G$

**H.** Jos $E \subset \mathbf{R}^n$ on mitallinen ja rajoitettu, niin $\chi_E \in Q$:
Lauseen 2.13 (todistuksen) nojalla on rajoitettu $G_\delta$-joukko $B \supset E$, jolle $m(B \setminus E) = 0$. Siten kohtien F ja G valossa $\chi_B, \chi_{B\setminus E} \in Q$, joten kohdan C nojalla

$$\chi_E = \chi_B - \chi_{B\setminus E} \in Q\,,$$

koska $0 \le \chi_{B\setminus E} \le \chi_B$. $\square_H$

**I.** Yleinen tapaus: jos $f\colon \mathbf{R}^n \to [0,\infty]$ on mitallinen, niin $f \in Q$:
Olkoon $f_j \in \mathcal{Y}^+$ nouseva jono, jolle $f_j \to f$ (Lause 4.9). Tällöin

$$g_j = f_j \chi_{B(0,j)} = \sum_{k=1}^{n_j} a_{k,j} \chi_{A_{k,j} \cap B(0,j)} \in Q$$

kohtien C ja H nojalla. Koska $g_j \nearrow f$, saamme kohdasta B, että $f \in Q$. □

**8.2. Lemma.** *Jos $G \subset \mathbf{R}^n$ on avoin, niin $G$ on numeroituva yhdiste pareittain pistevieraista muotoa*

$$I = [a_1, b_1[ \times \cdots \times [a_n, b_n[$$

*olevista väleistä.*

*Todistus.* Olkoon $k \in \mathbf{N}$. Jaetaan $\mathbf{R}^n$ koordinaattihypertasojen suuntaisilla $(n-1)$-tasoilla "puoliavoimiin" kuutioihin, joiden sivusärmien pituudet ovat $2^{-k}$; saadut kuutiot ovat muotoa

$$[\frac{j_1}{2^k}, \frac{j_1+1}{2^k}[ \times [\frac{j_2}{2^k}, \frac{j_2+1}{2^k}[ \times \cdots \times [\frac{j_n}{2^k}, \frac{j_n+1}{2^k}[\,,$$

missä $j_1, j_2, \ldots j_n \in \mathbf{Z}$. Olkoon $\mathcal{N}_k$ näin saatujen kuutioiden joukko[16].
Määritellään

$$P_1 = \{I \in \mathcal{N}_1 \colon I \subset G\}\,,$$
$$P_2 = \{I \in \mathcal{N}_2 \colon I \subset G \text{ ja } I \cap J = \emptyset \text{ kaikilla } J \in P_1\}\,,$$

ja edelleen rekursiivisesti

$$P_j = \{I \in \mathcal{N}_j \colon I \subset G \text{ ja } I \cap J = \emptyset \text{ kaikilla } J \in \bigcup_{i=1}^{j-1} P_i\}\,,$$

Tällöin

$$P = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$$

on numeroituva kokoelma pareittain pistevieraita "puoliavoimia" kuutioita.
Osoitetaan, että

$$G = \bigcup_{I \in P} I\,.$$

Selvästi

$$G \supset \bigcup_{I \in P} I\,.$$

Jos $x \in G$, niin on pallo $B(x,r) \subset G$. Kun $k$ on niin iso, että

$$\sqrt{n}2^{-k} < r,$$

on $I \in \mathcal{N}_k$, jolle $x \in I \subset B(x,r) \subset G$. Tällöin joko $I \in P_k$ tai $I \in P_j$ jollain $j < k$. Molemmissa tapauksissa

$$x \in I \subset \bigcup_{J \in P} J\,,$$

joten

$$G = \bigcup_{J \in P} J\,.$$

□

[16] Joukkoa $\mathcal{N}_k$ kutsutaan $\mathbf{R}^n$:n $k$. sukupolven dyadisiksi kuutioiksi.

**Esimerkkejä.** 1. Jos $A \subset \mathbf{R}^2$ on mitallinen, niin

$$m_2(A) = \int_{\mathbf{R}^2} \chi_A \, dm_2 = \int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}} \chi_A(x,y)\, dx)\, dy = \int_{\mathbf{R}} m_1(A_y)\, dy\,,$$

missä (kun $y \in \mathbf{R}$)

$$A_y = \{x \in \mathbf{R} \colon (x,y) \in A\}. \qquad (A\text{:n } y\text{-sektio})$$

Erityisesti, jos $m_2(A) = 0$ on $m_1(A_y) = 0$ m.k. $y \in \mathbf{R}$. Ja jos $m_2(A) < \infty$, niin $m_1(A_y) < \infty$ m.k. $y \in \mathbf{R}$.

2. Olkoot $A \subset \mathbf{R}^p$ ja $B \subset \mathbf{R}^q$ mitallisia. Tällöin $A \times B \in \mathcal{M}_n$, $n = p + q$ (harjoitustehtävä. Varoitus: $\mathbf{R}^n$:ssä mitallisia joukkoja on kasapäin muitakin kuin tulomuotoa olevat.) ja Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
m_n(A \times B) &= \int_{\mathbf{R}^n} \chi_{A\times B}\, dm_n = \int_{\mathbf{R}^n} \chi_A(x)\chi_B(y)\, dm_n \\
&= \int_{\mathbf{R}^q} (\int_{\mathbf{R}^p} \chi_A(x)\chi_B(y)\, dx)\, dy \\
&= (\int_{\mathbf{R}^p} \chi_A(x)\, dx)(\int_{\mathbf{R}^q} \chi_B(y)\, dy) \\
&= m_p(A) m_q(B)\,.
\end{aligned}$$

Soveltamalla Lausetta 8.1 funktion positiivi- ja negatiiviosiin saamme (HT):

**8.3. Lause.** (Fubini) *Olkoon $n = p + q$, missä $p, q \in \mathbf{N}$, ja $f \colon \mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^q \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen $\mathbf{R}^n$:ssä siten, että ainakin yksi integraaleista*

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f|\, dm_n\,, \qquad \int_{\mathbf{R}^q}\int_{\mathbf{R}^p} |f(x,y)|\, dx\, dy \qquad \textit{tai} \int_{\mathbf{R}^p}\int_{\mathbf{R}^q} |f(x,y)|\, dy\, dx$$

*on äärellinen. Tällöin*

i) *$m_q$-m.k. $y \in \mathbf{R}^q$ funktio $x \mapsto f(x,y)$ on integroituva $\mathbf{R}^p$:ssä.*
ii) *$m_p$-m.k. $x \in \mathbf{R}^p$ funktio $y \mapsto f(x,y)$ on integroituva $\mathbf{R}^q$:ssä.*
iii) *Funktio*

$$y \mapsto \int_{\mathbf{R}^p} f(x,y)\, dm_p(x) \qquad \textit{on integroituva } \mathbf{R}^q\textit{:ssä.}$$

iv) *Funktio*

$$x \mapsto \int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y) \qquad \textit{on integroituva } \mathbf{R}^p\textit{:ssä.}$$

v) *$f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^n)$ ja*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}^n} f(x,y)\, dm_n &= \int_{\mathbf{R}^q}\int_{\mathbf{R}^p} f(x,y)\, dm_p(x)\, dm_q(y) \\
&= \int_{\mathbf{R}^p}\int_{\mathbf{R}^q} f(x,y)\, dm_q(y)\, dm_p(x)\,.
\end{aligned}$$

□

**Huomautus.** Vaihtuvamerkkiselle funktiolle Fubinin lauseen soveltamisessa pitää olla tarkkana, että integroituvuusehto täyttyy. Esimerkiksi funktiolle

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin x\,, & \text{kun } x \in [0,2\pi]\,, y \in \mathbf{R} \\ 0\,, & \text{muutoin,} \end{cases}$$

integraali

$$\int_{\mathbf{R}} \Big( \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dx \Big)\,dy = \int_{\mathbf{R}} 0\,dy = 0\,,$$

mutta integraali

$$\int_{\mathbf{R}} \Big( \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dy \Big)\,dx$$

ei ole järkevä, koska

$$\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \infty\,, & \text{kun } x \in ]0,\pi[ \\ -\infty\,, & \text{kun } x \in ]\pi, 2\pi[ \\ 0\,, & \text{muutoin.} \end{cases}$$

Integraalilaskennan kurssilla on käsitelty Fubinin lauseen sovelluksia. Seuraavassa pari esimerkkiä.

**Esimerkki.** Olkoon

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \colon 0 \le z \le 2 - x^2 - y^2\}.$$

Jos $z \in \mathbf{R}$, niin

$$\begin{aligned} A_z &= \{(x,y) \colon (x,y,z) \in A\} \\ &= \begin{cases} \{(x,y) \colon x^2 + y^2 \le 2 - z) \in A\}\,, & \text{jos } 0 \le z \le 2 \\ \emptyset\,, & \text{jos } z < 0 \text{ tai } z > 2\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Fubinin lauseen avulla

$$m_3(A) = \int_{-\infty}^{\infty} m_2(A_z)\,dz = \pi \int_0^2 2 - z\,dz = 2\pi\,.$$

**Esimerkki.** Olkoon

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy - x^2 - y^2}{(x+y)^4}\,, & \text{jos } x > 0 \text{ ja } y > 0, \\ 0\,, & \text{jos } x \le 0 \text{ tai } y \le 0. \end{cases}$$

Jos $y > 0$, niin kaikilla $a > 0$:

$$\int_0^a f(x,y)\,dx = \frac{a^2 - ay}{(a+y)^3}\,.$$

Koska

$$|f(x,y)| \leq \begin{cases} \dfrac{4y+1+y^2}{y^4}\,, & \text{jos } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{4y+1+y^2}{x^2}\,, & \text{jos } x > 1, \end{cases}$$

ja $x^{-2} \in \mathcal{L}^1([1,\infty[)$, on

$$\int_0^\infty |f(x,y)|\,dx < \infty\,,$$

joten

$$\int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a f(x,y)\,dx = 0\,.$$

Koska $f(x,y) = f(y,x)$, saadaan

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = 0 = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dy\,dx\,.$$

Kuitenkaan $f \notin \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^2)$, sillä jos olisi, niin Fubinin lauseesta 8.3 seuraisi, että

$$\int_{\mathbf{R}^2} f\,dm_2 = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} f(x,y)\,dx\,dy = 0\,.$$

Toisaalta tällöin olisi myös $|g_j f| \leq |f| \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R}^2)$, missä

$$g_j = \chi_{[0,j]\times[0,j]}\,,$$

joten dominoidun konvergenssin lauseen ja Fubinin lauseen nojalla

$$\begin{aligned}
0 = \int_{\mathbf{R}^2} f\,dm_2 &= \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbf{R}^2} g_j f\,dm_2 \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_0^j \int_0^j f(x,y)\,dx\,dy \\
&= \lim_{j\to\infty} \int_0^j \frac{j^2 - jy}{(j+y)^3}\,dy \\
&= \lim_{j\to\infty} \Big/_0^j \frac{jy}{(j+y)^2} \\
&= \lim_{j\to\infty} \frac{j^2}{4j^2} \\
&= \frac{1}{4} \neq 0\,.
\end{aligned}$$

## 9. Absoluuttisesti jatkuvat funktiot

Analyysin peruslauseen mukaan jatkuvasti derivoituva reaaliakselin funktio saadaan derivaatastaan integroimalla takaisin. Väliarvolausetta käyttämällä on melko helppo nähdä, että myös derivoituvalla funktiolla, jonka derivaatta on rajoitettu on sama ominaisuus. Klassinen kysymys on, millä funktioluokalla on tämä ominaisuus: funktio palautuu derivaatasta integroimalla. Osoittautuu, että oikea funktioluokka on absoluuttisesti jatkuvat funktiot.

**Määritelmä.** Funktio $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on *absoluuttisesti jatkuva*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$

$$\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon$$

aina, kun $]a_j, b_j[$, $j = 1, 2, \dots, k$, ovat välin $[a,b]$ pareittain pistevieraita osavälejä, joille

$$m_1\Big(\bigcup_{j=1}^{k} ]a_j, b_j[\Big) = \sum_{j=1}^{k} |b_j - a_j| < \delta.$$

Selvästi absoluuttisesti jatkuva funktio on jatkuva. On myös helppo nähdä, että jos $f$ ja $g$ ovat absoluuttisesti jatkuvia, niin myös funktiot $\lambda f$, $\lambda \in \mathbf{R}$, $f+g$ ja $fg$ ovat sitä. Huomaa, että määritelmän ehto on voimassa myös numeroituvan monelle pistevieraalle välille.

**9.1. Lause.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$. Tällöin $f$ on absoluuttisesti jatkuva, jos ja vain, jos $f$ on derivoituva m.k. $x \in ]a,b[$, $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$ ja*

$$f(x) = f(a) + \int_{[a,x]} f'(y)\,dy \qquad \textit{kaikilla } x \in [a,b]\,.$$

*Todistus.* "$\Leftarrow$" Tämä on helpompi puoli: olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $f' \in \mathcal{L}^1([a,b])$, seuraa integraalin absoluuttisesta jatkuvuudesta (Lause 6.8), että on $\delta > 0$, jolle

$$\int_E |f'|\,dx < \varepsilon$$

aina kun $E \subset [a,b]$ on sellainen, että $m_1(E) < \delta$. Erityisesti, jos $]a_j, b_j[$, $j = 1, 2, \dots, k$, ovat välin $[a,b]$ pareittain pistevieraita osavälejä, joille

$$m_1\Big(\bigcup_{j=1}^{k} ]a_j, b_j[\Big) = \sum_{j=1}^{k} |b_j - a_j| < \delta,$$

saamme

$$\sum_{j=1}^{k} |f(b_j) - f(a_j)| = \sum_{j=1}^{k} \Big|\int_{[a_j,b_j]} f'(y)\,dy\Big| \le \int_{\bigcup_{j=1}^{k} ]a_j,b_j[} |f'|\,dy < \varepsilon,$$

joten $f$ on absoluuttisesti jatkuva.

"$\Rightarrow$" Toinen suunta on huomattavasti syvällisempi emmekä todista sitä tässä (katso esim Bruckner, Bruckner & Thomson tai Rudin: Real and complex analysis).

$\square$

Ei ole kovin vaikeaa nähdä, että absoluuttisesti jatkuva funktio $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on esitettävissä kahden kasvavan funktion erotuksena:

**9.2. Lause.** *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ absoluuttisesti jatkuva. Tällöin on kasvavat funktiot $\varphi$ ja $\psi$, joille*

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) \qquad \textit{kaikilla } x \in [a,b].$$

*Todistus.* Olkoon ($x \in [a,b]$)

$$V_f(a,x) = \sup\{\sum_{j=1}^{k} |f(x_j) - f(x_{j-1})|\colon k \in \mathbf{N}, \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = x\}\,.$$

Tällöin $\varphi(x) = V_f(a,x)$ on välillä $[a,b]$ kasvava ja rajoitettu[17] funktio: Kasvavuus on selvä, mikäli $\varphi$ on reaaliarvoinen. Rajoittuneisuus: Valitaan absoluuttisesti jatkuvan funktion määritelmässä lukua $\varepsilon = 1$ vastaava luku $\delta$ ja olkoon $n \in \mathbf{N}$ niin suuri, että

$$\frac{b-a}{n} < \delta\,.$$

Olkoon $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = b$ välin $[a,b]$ jako; lisäämällä tarvittaessa jakopisteitä voidaan olettaa, että pisteet

$$x_{k_j} = a + j\frac{b-a}{n}, \quad j = 0,1,2,\ldots,n$$

ovat mukana jaossa. Tällöin

$$\sum_{j=1}^{k} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \le \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1+k_{i-1}}^{k_i} |f(x_j) - f(x_{j-1})|}_{<\varepsilon=1} \le n\,,$$

joten $V_f(a,x) \le n < \infty$. $\square_{V_f \text{ rajoitettu}}$

Nyt

$$f(x) = V_f(a,x) - (V_f(a,x) - f(x))\,,$$

missä myös $\psi(x) = V_f(a,x) - f(x)$ on kasvava: jos $x_1 < x_2$, niin

$$\begin{aligned}
\psi(x_2) - \psi(x_1) &= V_f(a,x_2) - f(x_2) - (V_f(a,x_1) - f(x_1)) \\
&= V_f(x_1,x_2) - (f(x_2) - f(x_1)) \\
&\ge |f(x_2) - f(x_1)| - (f(x_2) - f(x_1)) \ge 0\,.
\end{aligned}$$

$\square$

[17] Sanotaan, että $f$ on *rajoitetusti heilahteleva.*

Alla (9.3) konstruoimme jatkuvan, kasvavan funktion (jopa aidosti kasvavan), joka ei ole absoluuttisesti jatkuva. Absoluuttisesti jatkuvan funktion derivoituvuus m.k. nähdään esimerkiksi näyttämällä ensin, että monotoninen funktio on derivoituva m.k. ja käyttämällä sitten lausetta 9.2.

**Huomautus.** Lauseen 9.2 todistuksessa näytettiin, että absoluuttisesti jatkuva funktio on rajoitetusti heilahteleva:

Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$. Sanotaan, että $f$ on *rajoitetusti heilahteleva*, jos

$$V_f(a,b) := \sup\{\sum_{j=1}^{k} |f(x_j) - f(x_{j-1})| \colon k \in \mathbf{N},\ a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = x\} < \infty\,.$$

Lauseen 9.2 todistuksen avulla todetaan helposti seuraavat ominaisuudet (HT):

i) Jos $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ ja $a < c < b$, niin $V_f(a,b) = V_f(a,c) + V_f(c,b)$.
ii) Rajoitetusti heilahteleva funktio $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on rajoitettu.
iii) Kasvava funktio $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on rajoitetusti heilahteleva.
iv) Funktio $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on rajoitetusti heilahteleva, jos ja vain, jos on olemassa kasvavat $\varphi, \psi\colon [a,b] \to \mathbf{R}$, joille

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x) \quad \text{kaikilla } x \in [a,b].$$

**Huomautus.** Jos $f\colon [a,b] \to \mathbf{R}$ on absoluuttisesti jatkuva, niin

$$m(f(E)) = 0 \quad \text{aina, kun } E \subset [a,b] \text{ ja } m(E) = 0\,.$$

Nimittäin, jos $\varepsilon > 0$, niin joukko $E$ voidaan peittää numeroituvan monella pareittain pistevieraalla avoimella välillä $]a_j, b_j[$, joille

$$m(\bigcup_{j=1}^{\infty} ]a_j, b_j[) < \delta\,,$$

missä $\delta$ on absoluuttisen jatkuvuuden määritelmän antama. Nyt

$$(*) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} |f(y_j) - f(x_j)| < \varepsilon$$

olivatpa pisteet $x_j, y_j \in [a_j, b_j]$ valittu kuinka hyvänsä. Erityisesti näin on, mikäli

$$f(x_j) = \min_{[a_j,b_j]} f \quad \text{ja} \quad f(y_j) = \max_{[a_j,b_j]} f\,.$$

Näille

$$f(E) \subset f(\bigcup_{j=1}^{\infty} ]a_j, b_j[) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} [f(x_j), f(y_j)]$$

ja oikealla olevan joukon mitta on $\varepsilon$ epäyhtälön (*) nojalla.

**9.3. Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko ja Cantorin funktio.**

Olkoon $I = [0,1]$. Poistetaan välin $I$ keskeltä avoin väli $I_{1,1}$, jonka pituus on $\frac{1}{3}$ (siis $I_{1,1} = ]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$). Tällöin jäljelle jää kaksi suljettua väliä $J_{1,1}$ ja $J_{1,2}$, joiden molempien pituus on $\frac{1}{3}$ (huomaa: $J_{1,1} = [0, \frac{1}{3}]$ ja $J_{1,2} = [\frac{2}{3}, 1]$). Merkitään

$$C_1 = J_{1,1} \cup J_{1,2} \quad \text{jolloin } m(C_1) = \frac{2}{3}.$$

Jatketaan samaan tapaan: Poistetaan välien $J_{1,1}$ ja $J_{1,2}$ keskeltä avoimet välit $I_{2,1} \subset J_{1,1}$ ja $I_{2,2} \subset J_{1,2}$, joiden kummankin pituus on kolmannes emovälin pituudesta,

$$m(I_{2,i}) = \frac{1}{3} m(J_{1,i}) = 3^{-2}\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Jäljelle jää neljä suljettua väliä $J_{2,j}$, $j = 1, 2, 3, 4$, joiden kunkin pituus on

$$m(J_{2,j}) = 3^{-2}\,, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

ja merkitään

$$C_2 = \bigcup_{j=1}^{4} J_{2,j} \quad \text{jolloin } m(C_2) = 4\, 3^{-2} = (\frac{2}{3})^2\,.$$

Jatketaan rekursiivisesti: $j$. vaiheessa joukko $C_j$ koostuu $2^j$ pistevieraasta suljetusta välistä $J_{j,i}$, $i = 1, 2 \ldots, 2^j$, joille

$$m(J_{j,i}) = 3^{-j}\,.$$

Konstruoidaan joukko $C_{j+1}$: otetaan jokaisen välin $J_{j,i}$, $i = 1, 2 \ldots 2^j$, keskeltä pois avoin väli $I_{j+1,i}$, jonka pituus on

$$m(I_{j+1,i}) = \frac{1}{3} m(J_{j,i}) = 3^{-j-1}\,.$$

Kullekin välille jää kaksi suljettua väliä $J_{j+1,2i-1}, J_{j+1,2i} \subset J_{j,i}$, joille

$$J_{j,i} \setminus I_{j+1,i} = J_{j+1,2i-1} \cup J_{j+1,2i}.$$

Olkoon

$$C_{j+1} = \bigcup_{i=1}^{2^{j+1}} J_{j+1,i} \quad \text{jolloin } m(C_{j+1}) = 2^{j+1}\, 3^{-j-1} = (\frac{2}{3})^{j+1}\,.$$

Havaitaan, että $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$, jolloin

$$C = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$$

on suljettu joukko ja

$$m(C) = \lim_{j\to\infty} m(C_j) = \lim_{j\to\infty} (\frac{2}{3})^j = 0\,.$$

Huomaa, että $C \neq \emptyset$, koska esimerkiksi välien $J_{j,i}$ päätepisteet kuuluvat selvästi sinne. Kohta näemme, että $C$ on ylinumeroituva. Joukkoa $C$ sanotaan *Cantorin* $\frac{1}{3}$-*joukoksi.* Se on kompakti, ylinumeroituva joukko, jolla ei ole sisäpisteitä (koska se on nollamittainen). Voidaan myös osoittaa, että jokainen $C$:n piste on sen kasautumispiste.

**Huomautus.** Tämänkaltaiset joukkokonstruktiot ovat tavallisia nykyanalyysissä. Pienentämällä poisotettavia joukkoja sopivasti saataisiin jäljelle jäävästä joukosta positiivimittainen (harjoitustehtävä).

Samantapainen konstruktio voidaan tehdä myös $\mathbf{R}^n$:ssä.

Määritellään seuraavaksi *Cantorin funktio* $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$,

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{jos } x = 0 \\ \frac{2i-1}{2^j} & \text{kun } x \in I_{j,i} \\ \sup\{\psi(t)\colon t \in I \setminus C,\, t < x\} & \text{jos } x \in C \setminus \{0\}\,, \end{cases}$$

ts. $\psi$ on jokaisella konstruktiossa poisotetulla avoimella välillä vakio ja loppuosassa $\psi$ täydennetään jatkuvaksi. Ei ole kovin vaikeaa nähdä suoraan konstruktiosta, että

i) $\psi$ on kasvava.
ii) $\psi$ on jatkuva.[18]
iii) $\psi([0,1]) = [0,1]$.

Näistä viimeinen seuraa Bolzanon lauseesta ja $\psi$:n jatkuvuudesta, sillä $\psi(0) = 0$ ja $\psi(1) = 1$.

Koska $\psi$ saa vain numeroituvan monta arvoa $C$:n ulkopuolella, mutta sen kuvajoukko on ylinumeroituva, on $C$:n oltava ylinumeroituva.

Huomaa, että $\psi$ on derivoituva m.k. $x \in [0,1]$ ja jokaisella $x \in ]0,1[ \setminus C$

$$\psi'(x) = 0\,.$$

Funktio $\psi$ ei ole absoluuttisesti jatkuva, koska[19]

$$m(\psi(C)) \geq m(\{y \in [0,1]\colon x \neq \frac{2i-1}{2^j},\, j \in \mathbf{N}, i = 1, 2, \ldots, 2^{j-1}\}) = 1 > 0,$$

tai koska (vrt 9.1)

$$\psi(1) \neq 0 = \psi(0) + \int_{[0,1]} \psi'\, dm\,.$$

**Huomautus.** Olkoon $\psi\colon [0,1] \to [0,1]$ Cantorin funktio. Määrittelemällä

$$f(x) = x + \psi(x)$$

[18] $\psi$:n jatkuvuuden saa helposti todistetuksi myös konstruoimalla jonon $\psi_j$, joka koostuu paloittain lineaarisista funktioista, joille $\psi_j(0) = 0$, $\psi_j(1) = 1$ ja $\psi_j(x) = \frac{2i-1}{2^k}$, jos $k \leq j$ ja $x \in I_{k,i}$. Tällöin $\psi_j \to \psi$ tasaisesti.

[19] On helppo nähdä, että itse asiassa $\psi(C) = [0,1]$.

saadaan aidosti kasvava, jatkuva bijektio $f\colon [0,1] \to [0,2]$, joka ei kuitenkaan ole absoluuttisesti jatkuva.

**Huomautus.** Cantorin joukko $C$ voidaan hahmottaa myös "osoitekoodin" avulla: Pisteen $x \in C$ osoite saadaan kertomalla Cantorin konstruktion joka vaiheessa, kumpaanko jäljellejäävään osaväliin piste kuuluu. Ts. 1. vaiheessa $x \in J_{1,1}$ tai $x \in J_{1,2}$. Jos $x$ kuuluu vasemman puoleiseen osaväliin ($x \in J_{1,1}$) laitetaan koodin 1. merkiksi 0; jos taas oikean puoleiseen osaväliin ($x \in J_{1,2}$) laitetaan koodin 1. merkiksi 1. Jatketaan näin: koodijonon $j$. merkki on 0 jos $x$ kuuluu osavälin $J_{j-1,i}$ jäljellejäävistä osaväleistä vasemman puoleiseen ($x \in J_{j,2k-1}$); koodijonon $j$. merkki on 1 jos $x$ kuuluu osavälin $J_{j-1,i}$ jäljellejäävistä osaväleistä oikean puoleiseen ($x \in J_{j,2k}$). Näin saadaan merkkijono

$$x \approx 01110000111100000111\dots$$

jonka avulla $x$ voidaan identifioida.

Cantorin joukon piste voidaan myös laskea seuraavalla tavalla: Havaitaan, että 1. vaiheessa jäljelle jäävien välien päätepisteet ovat

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 = 0\,3^{-1}\\
\frac{1}{3} &= 2\sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k} = a_0 + \sum_{k=2}^{\infty} 2\,3^{-k}\\
b_1 &= \frac{2}{3} = 2\frac{1}{3} = a_0 + 2\,3^{-1}\\
1 &= 2\sum_{k=1}^{\infty} 3^{-k} = b_1 + \sum_{k=2}^{\infty} 23^{-k},
\end{aligned}$$

ts. 1. vaiheessa jäljelle jäävien osavälien vasemmanpuoleiset päätepisteet ovat

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_0 = 0 = 0\,3^{-1} + 0\,3^{-2} \quad \text{ja}\\
b_1 &= a_0 + 2\,3^{-1} = a_1 + 2\,3^{-1},
\end{aligned}$$

oikeat päätepisteet ovat

$$a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} 2\,3^{-k} \quad \text{ja} \quad b_1 + \sum_{k=2}^{\infty} 2\,3^{-k},$$

Koska konstruktion seuraava vaihe on aina edellisen kaltainen, mutta pienemmässä skaalassa, näemme, että ne Cantorin joukon pisteet, jotka ovat poisotettujen välien päätepisteitä ovat

$$\{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, 3^{-k} \colon \alpha_k \in \{0,2\} \text{ ja on olemassa } i_0 \text{ jolle } \alpha_{i_0+k} = \alpha_{i_0} \text{ kaikilla } k\}.$$

Edelleen

$$C = \{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, 3^{-k} \colon \alpha_k \in \{0,2\}\,\}$$

## 10. $L^p$-avaruuksista

Funktioiden keskimääräistä kokoa voidaan mitata paitsi itseisarvon integraalilla, myös itseisarvon eri potenssien integraaleilla.

**Määritelmä.** Olkoon $1 \le p < \infty$ ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Sanotaan, että funktion $f$ *p-normi* $A$:ssa (tai $L^p(A)$-*normi*) on luku

$$||f||_p = ||f||_{\mathcal{L}^p(A)} = \left(\int_A |f|^p \, dm\right)^{1/p} .$$

Merkitään

$$\mathcal{L}^p(A) = \{f\colon A \to \overline{\mathbf{R}} : f \text{ mitallinen ja } ||f||_{\mathcal{L}^p(A)} < \infty\}.$$

**Huomautus.** Huomaa, että

$$||f||_p = 0, \quad \text{jos ja vain, jos} \quad f = 0 \text{ m.k. } A\text{:ssa},$$

joten $p$-normi ei ole ihan normi. Tämä ongelma poistetaan myöhemmin.

Katsotaan integraalin esityskaavaa 7.6 ja sen seurausta 7.7: niiden avulla

$$\begin{aligned} ||f||_p^p = \int_A |f|^p \, dm &= p \int_0^\infty t^{p-1} m(\{x \in A\colon |f(x)| > t\}) \, dt \\ &= p \int_0^\infty t^p m(\{x \in A\colon |f(x)| > t\}) \, \frac{dt}{t} . \end{aligned}$$

Koska $t^p \le t^q$, jos $t \ge 1$ ja $q \ge p \ge 1$, saamme tästä:

$$\mathcal{L}^q(A) \subset \mathcal{L}^p(A) \,, \text{ mikäli } m(A) < \infty \text{ ja } q \ge p. \tag{10.1}$$

Inkluusio on aito, jos $m(A) \in ]0, \infty[$ ja $q > p$ (harjoitustehtävä). Jos $m(A) = \infty$, ei ylläoleva inkluusio ole voimassa.

Tarkasteltaessa $p$-normia em. tavalla integraaliesityslausetta käyttäen havaitsemme, että normin äärellisyys edellyttää, että funktion $|f|$ distribuutiofunktio

$$t \mapsto m(\{x \in A\colon |f(x)| > t\})$$

vähenee nollaan sitä nopeammin mitä suurempi eksponentti $p$ on. Onkin luonnollista tarkastella rajatapausta $p \to \infty$ ja vaatia, että em. distribuutiofunktio häviää jo äärellisellä $t$:n arvolla. Tämä johtaa määritelmään:

**Määritelmä.** Olkoon $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Sanotaan, että funktion $f$ $\infty$-*normi* $A$:ssa (tai $L^\infty(A)$-*normi*) on luku[20]

$$||f||_\infty = ||f||_{\mathcal{L}^\infty(A)} = \sup\{t \ge 0\colon m(\{x \in A\colon |f(x)| \ge t\}) > 0\} .$$

[20] Tässä käytetään sopimusta

$$\sup\{t \ge 0\colon t \in \emptyset\} = 0.$$

Merkitään

$$\mathcal{L}^\infty(A) = \{f\colon A \to \overline{\mathbf{R}} : f \text{ mitallinen ja } ||f||_{\mathcal{L}^\infty(A)} < \infty\}.$$

ja sanotaan sitä *oleellisesti rajoitettujen funktioiden joukoksi.*

**Huomautuksia.** 1. Huomaa, että

$$\begin{aligned} ||f||_\infty &= \inf\{t \geq 0\colon m(\{x \in A\colon |f(x)| > t\}) = 0\} \\ &= \inf\{t \geq 0\colon |f(x)| \leq t\} \text{ m.k. } x \in A\} \end{aligned}$$

2. Kaikilla $p \geq 1$ pätee

$$\int_A |f|^p \, dm \leq ||f||_\infty^p \, m(A) \qquad \text{kaikilla mitallisilla } f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}.$$

Siispä

(10.2) $$\mathcal{L}^\infty(A) \subset \mathcal{L}^p(A)\,, \text{ mikäli } m(A) < \infty$$

ja inkluusio on aito, kunhan $m(A) > 0$.

**Esimerkki.** Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\,, \quad x \in ]0,1[\,.$$

Tällöin

$$||f||_\infty = \infty\,,$$

koska

$$m(\{x \in A\colon |f(x)| \geq t\}) = m(]0, t^{-2}]) = t^{-2} > 0$$

kaikilla $t > 0$. Edellleen

$$\begin{aligned} ||f||_p^p &= \int_0^1 |f(x)|^p \, dx \\ &= p \int_0^1 x^{-p/2} \, dx \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{jos } p \geq 2 \\ \frac{2}{2-p}, & \text{jos } 1 \leq p < 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Tähän mennessä määritellyt avaruudet $\mathcal{L}^p(A)$ ja $\mathcal{L}^\infty(A)$ eivät muodosta vektoriavaruuksia (koska kahden funktion summaus voi johtaa määrittelemättömyyksiin, kuten laskuihin $\infty - \infty$). Tosin vaikeus keskittyy vain nollamittaisiin joukkoihin. Toisaalta $p$-normi tai $\infty$-normi eivät erottele funktioita, jotka ovat m.k. samoja. Korjataan nämä molemmat puutteet samastamalla funktiot, jotka yhtyvät melkein kaikkialla. Seuraavaksi tämä tehdään tarkasti.

**$L^p$-avaruudet.** Olkoon $1 \le p \le \infty$ ja $A \in \mathcal{M}_n$. Määritellään joukkoon $\mathcal{L}^p(A)$ ekvivalenssirelaatio $\sim$ asettamalla

$$f \sim g \quad \overset{\text{määr.}}{\Leftrightarrow} f(x) = g(x) \text{ m.k. } x \in A\,.$$

Tällöin $\sim$ on ekvivalenssirelaatio $\mathcal{L}^p(A)$:ssä. Merkitään funktion $f \in \mathcal{L}^p(A)$ määräämää ekvivalenssiluokkaa

$$[f] = \{g \in \mathcal{L}^p(A) \colon g \sim f\}$$

ja tekijäavaruutta

$$L^p(A) = \mathcal{L}^p(A)/\sim = \{[f] \colon f \in \mathcal{L}^p(A)\}$$

kutsutaan $L^p$-*avaruudeksi.* Siellä käytetään normia

$$||[f]||_p = ||f||_p\,;$$

tämä on hyvä määritelmä, koska $p$-normi on riippumaton valitusta edustajasta. Koska jokainen $f \in \mathcal{L}^p(A)$ on äärellinen m.k. ja koska $||f||_p = 0$ jos ja vain jos $f = 0$ m.k. näin määritelty pari

$$(L^p(A), ||\cdot||_p)$$

on *normiavaruus*, ts. $L^p(A)$ on vektoriavaruus ja kuvaus $||\cdot||_p \colon L^p(A) \to \mathbf{R}$ on *normi* eli

i) $||[f]||_p \ge 0$ kaikilla $f \in L^p(A)$.
ii) $||[f]||_p = 0$, jos ja vain, jos $[f] = [0]$.
iii) $||\lambda[f]||_p = |\lambda|||[f]||_p$ kaikilla $\lambda \in \mathbf{R}$.
iv) $||[f] + [g]||_p \le ||[f]||_p + ||[g]||_p$ kaikilla $f, g \in L^p(A)$.

Muut normin ominaisuudet ovat helppoja paitsi kolmioepäyhtälö, kun $p < \infty$; se todistetaan lauseessa 10.6 alla, mistä myös vektoriavaruusominaisuus seuraa.

**Varoitus:** Jatkossa ei (yleensä) tehdä eroa ekvivalenssiluokan $[f]$ ja edustajan $f$ välillä, vaan $L^p$-avaruuksien alkioita käsitellään aivan kuin ne olisivat tavallisia funktioita; niitä saatetaan tosin muuttaa nollamittaisessa joukossa ilman eri mainintaa. Samoin luovumme myös merkinnöistä $\mathcal{L}^p(A)$ ja $\mathcal{L}^\infty(A)$ ja käytämme niiden tilalla avaruuksia $L^p(A)$ ja $L^\infty(A)$.

Tutkiessamme $L^p$-avaruuksien välisiä suhteita eri $p$:n arvoilla tarvitsemme (muutenkin erittäin hyödyllistä) Hölderin epäyhtälöä:

**10.3. Lause.** (Hölderin epäyhtälö) *Olkoot* $f, g \colon \ \to [0, \infty]$ *mitallisia,* $p > 1$ *ja* $q = \frac{p}{p-1}$. *Tällöin*

$$\int_A fg\,dm \le (\int_A f^p\,dm)^{1/p}(\int_A g^q\,dm)^{1/q}\,.$$

**Huomautus.** 1. Lukuja $p, q \in [1, \infty]$ sanotaan toistensa *konjugoiduiksi eksponenteiksi*, jos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,.$$

Tämän kanssa yhtäpitäviä ehtoja ovat

$$p = \frac{q}{q-1} \qquad \text{ja} \qquad p + q = pq\,.$$

Huomaa parit $p = 1$, $q = \infty$ ja $p = 2 = q$. Edelleen

$$p \in ]1, 2[ \Leftrightarrow q \in ]2, \infty[\,.$$

2. Hölderin epäyhtälössä käytetään *Youngin epäyhtälöä*: Jos $a, b \in [0, \infty[$ ja $p, q > 1$ ovat konjugoituja eksponentteja, niin

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,,$$

mikä seuraa helposti esimerkiksi minimoimalla funktion

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{b^q}{q} - xb\,.$$

*Hölderin epäyhtälön todistus.* Olkoon

$$\alpha = (\int_A f^p\,dm)^{1/p} \qquad \text{ja} \qquad \beta = (\int_A g^q\,dm)^{1/q}\,.$$

Jos $\alpha = 0$, niin $f = 0$ m.k. ja väite seuraa (samoin jos $\beta = 0$). Voidaan siten olettaa, että $0 < \alpha, \beta < \infty$. Soveltamalla Youngin epäyhtälöä lukuihin

$$a = \frac{f(x)}{\alpha} \qquad \text{ja} \qquad b = \frac{g(x)}{\beta}$$

saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha\beta}\int_A fg\,dm &= \int_A \frac{f(x)}{\alpha}\frac{g(x)}{\beta}\,dm \\
&\le \int_A \left(\frac{1}{p}(\frac{f(x)}{\alpha})^p + \frac{1}{q}(\frac{g(x)}{\beta})^q\right)dm \\
&= \frac{1}{p}\frac{\int_A f(x)^p\,dm}{\alpha^p} + \frac{1}{q}\frac{\int_A g(x)^q\,dx}{\beta^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,,
\end{aligned}$$

joten

$$\int_A fg\,dm \le \alpha\beta = (\int_A f^p\,dm)^{1/p}(\int_A g^q\,dm)^{1/q}\,.$$

$\square$

**10.4. Seuraus.** (Hölderin epäyhtälö) *Olkoot* $p, q \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Jos* $f \in L^p(A)$ *ja* $g \in L^q(A)$, *niin* $fg \in L^1(A)$ *ja*

$$||fg||_1 \le ||f||_p ||g||_q\,.$$

$\square$

**10.5. Seuraus.** *Olkoot $m(A) < \infty$ ja $1 \le p < q \le \infty$. Tällöin*

$$L^q(A) \subset L^p(A)$$

*ja*

$$||f||_p \le \big(m(A)\big)^{\frac{q-p}{qp}} ||f||_q \quad \textit{kaikilla } f \in L^q(A)\,.$$

*Todistus.* Sovella Seurausta 10.4 funktioihin $|f|^p$ ja $\chi_A$ ja eksponenttiin $\frac{q}{p}$. (harjoitustehtävä). □

**10.6. Lause.** (Minkowskin epäyhtälö) *Olkoon $p \ge 1$ ja $f, g \in L^p(A)$. Tällöin $f + g \in L^p(A)$ ja*

$$||f + g||_p \le ||f||_p + ||g||_p\,.$$

*Todistus.* Tapaukset $p = 1$ ja $p = \infty$ eivät ole vaikeita (harjoitustehtävä). Olkoon sitten $1 < p < \infty$. Osoitetaan ensin, että $f + g \in L^p(A)$: käyttämällä alkeellista epäyhtälöä[21] saamme

$$||f+g||_p^p = \int_A |f(x)+g(x)|^p\,dx \le 2^p \int_A |f(x)|^p+|g(x)|^p\,dx = 2^p||f||_p^p+2^p||g||_p^p < \infty\,.$$

Normiepäyhtälön todistamiseksi havaitsemme ensin kolmioepäyhtälön avulla, että

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1} \le |f||f + g|^{p-1} + |g||f + g|^{p-1}\,,$$

joten Hölderin epäyhtälöstä seuraa

$$\begin{aligned}||f + g||_p^p &\le \int_A |f||f + g|^{p-1}\,dm + \int_A |g||f + g|^{p-1}\,dm\\ &\le ||f||_p\Big(\int_A |f + g|^p\,dm\Big)^{\frac{p-1}{p}} + ||g||_p\Big(\int_A |f + g|^p\,dm\Big)^{\frac{p-1}{p}}\\ &= ||f||_p||f + g||_p^{p-1} + ||g||_p||f + g||_p^{p-1}\,,\end{aligned}$$

josta väitteen epäyhtälö seuraa jakamalla molemmat puolet luvulla

$$||f + g||_p^{p-1} < \infty\,.$$

□

Normiavaruus $(X, ||\cdot||)$ tulkitaan metriseksi avaruudeksi käyttämällä metriikkana normin antamaa etäisyyttä,

$$d(x, y) = ||x - y||\,.$$

Normiavaruutta sanotaan *Banach-avaruudeksi*, jos se on metrisenä avaruutena täydellinen, ts. jos jokainen $X$:n Cauchy-jono suppenee $X$:ssä. Muista, että $x_j \in X$ on *Cauchy-jono*, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$||x_j - x_k|| < \varepsilon \quad \text{kun } j, k \ge N.$$

Edelleen, jono $x_k$ suppenee $X$:ssä, jos on olemassa $x_0 \in X$, jolle[22]

$$\lim_{k\to\infty} ||x_k - x_0|| = 0.$$

[21] Kaikilla $a, b \ge 0$: $(a+b)^p \le 2^p(a^p+b^p)$, kun $p \ge 1$, sillä $(a+b)^p \le (2\max(a, b))^p \le (2(a+b))^p$.

[22] Huomaa, että $||f_k - f||_\infty \to 0$ tarkoittaa, että $f_k \to f$ tasaisesti jonkin nollamittaisen joukon ulkopuolella.

**10.7. Lause.** *Olkoon $p \in [1,\infty]$. Tällöin $L^p(A)$ on Banach-avaruus.*

*Todistus.* Olkoon $f_j \in L^p(A)$ Cauchy-jono. Riittää löytää $f \in L^p(A)$, jolle

$$\lim_{j\to\infty} ||f_j - f||_p = 0.$$

**1. Olkoon $1 \le p < \infty$.** Koska $f_j$ on Cauchy-jono, voidaan valita sen osajono $f_{j_k}$ siten, että

$$||f_{j_{k+1}} - f_{j_k}||_p \le 2^{-k} \quad \text{kaikilla } k = 0,1,2,\dots.$$

Tällöin funktio

$$g = \sum_{k=1}^{\infty} |f_{j_{k+1}} - f_{j_k}|$$

on mitallinen ja käyttämällä Fatoun lemmaa 5.8 ja Minkowskin epäyhtälöä 10.6 saamme

$$\begin{aligned} ||g||_p &= ||\sum_{k=1}^{\infty} |f_{j_{k+1}} - f_{j_k}|\,||_p \\ &\le \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} ||f_{j_{k+1}} - f_{j_k}||_p \\ &\le \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} \le 1\,. \end{aligned}$$

Siten $0 \le g(x) < \infty$ m.k. $x \in A$, joten m.k. $x \in A$ sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x))$$

suppenee itseisesti. Näin ollen funktio

$$f(x) = f_{j_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{j_{k+1}}(x) - f_{j_k}(x)) = \lim_{m\to\infty} f_{j_{m+1}}(x)$$

on m.k. $A$:ssa määritelty mitallinen funktio. Koska

$$|f(x)| \le |f_{j_1}(x)| + g(x) \in L^p(A),$$

on $f \in L^p(A)$. Osoitetaan, vielä, että

$$\lim_{j\to\infty} ||f_j - f||_p = 0\,.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan $N_\varepsilon$, jolle

$$||f_j - f_i||_p < \varepsilon \quad \text{kaikilla } j, i \ge N_\varepsilon.$$

Nyt Fatoun lemmasta seuraa, että kaikilla $j \ge N_\varepsilon$

$$||f_j - f||_p^p \le \liminf_{k\to\infty} \int_A |f_j - f_{j_k}|^p \, dm < \varepsilon^p\,.$$

$\square_{p<\infty}$

**2. Olkoon** $p = \infty$**.** Jos

$$A_j = \{x \in A\colon |f_j(x)| > |||f_j||_\infty\}$$

ja

$$B_{j,k} = \{x \in A\colon |f_j(x) - f_k(x)| > ||f_j - f_k||_\infty\}\,,$$

niin

$$m(E) = 0\,, \qquad \text{kun} \quad E = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cup \bigcup_{j,k=1}^{\infty} B_{j,k}\,.$$

Nyt jono $f_j$ totetuttaa tasaisen suppenemisen Cauchy-kriteerion $A \setminus E$:ssä, joten on olemassa rajoitettu funktio $\tilde{f}\colon A \setminus E \to \mathbf{R}$, jolle

$$f_j \to \tilde{f} \quad \text{tasaisesti} \quad A \setminus E\text{:ssä.}$$

Nyt $\tilde{f}$:n nollajatko

$$f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x), & \text{kun } x \in A \setminus E \\ 0, & \text{kun } x \in E \end{cases}$$

kuuluu $L^\infty(A)$:han ja

$$||f_k - f||_\infty \to 0\,.$$

□

Eo. todistus antaa sivutuotteena:

**10.8. Lause.** *Olkoon $p \geq 1$ ja $f, f_j \in L^p(A)$ siten, että*

$$\lim_{j\to\infty} ||f_j - f||_p = 0\,. \qquad \textit{(eli } f_j \to f \ L^p(A)\textit{:ssa)}$$

*Tällöin jonolla $f_j$ on osajono $f_{j_k}$, jolle*

$$f_{j_k}(x) \to f(x) \quad \textit{m.k. } x \in A\,.$$

□

**Erityistapaus** $p = 2$**.** Luvun 2 konjugoitu eksponentti on luku 2 itse. Tästä ja muista syistä avaruus $L^2(A)$ on helpommin käsitettävä, kun muut $L^p$-avaruudet. Se on geometrialtaan eräänlainen $\mathbf{R}^n$:n $\infty$-ulotteinen vastine. Perussyynä geometriaan on se, että $L^2$-normi tulee *sisätulosta*: muodolla

$$\langle f, g\rangle = \int_A fg\,dm\,, \qquad \text{kun } f, g \in L^2(A)$$

on ominaisuudet: kun $f, g, h \in L^2(A)$ ja $\lambda, \gamma \in \mathbf{R}$,

i) $\langle \lambda f + \gamma h, g\rangle = \lambda\langle f, g\rangle + \gamma\langle h, g\rangle$,
ii) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$,
iii) $\langle f, f\rangle \geq 0$, ja
iv) $\langle f, f\rangle = 0$ jos ja vain, jos $f = 0$.

Tällöin

$$\langle f, f\rangle = ||f||_2$$

ja sanotaan, että $L^2(A)$ on *Hilbert-avaruus.* Jos $p \neq 2$, niin ei ole sisätuloa, joka antaisi $p$-normin, joten muut $L^p$-avaruudet eivät ole Hilbert-avaruuksia.

## C. Yleistä mittateoriaa

### 11. Ulkomitta

Tässä luvussa yleistetään Lebesguen ulkomitan käsite. Otamme lähtökohdaksi Lebesguen ulkomitan ominaisuudet, jotka on todistettu lauseessa 2.1.

Olkoon $X$ joukko. Tällöin $X$:n osajoukkojen joukko on sen *potenssijoukko*

$$\mathcal{P}(X) = \{A\colon\ A \subset X\}.$$

**Määritelmä.** Olkoon $X$ epätyhjä joukko. Joukkofunktio $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ on *ulkomitta* $X$:ssä, jos

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) Jos $A \subset B \subset X$, niin $\mu^*(A) \le \mu^*(B)$. (monotonisuus)

iii) Jos $A_1, A_2, \dots \subset X$, niin

$$\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j). \quad \text{(subadditiivisuus)}$$

**Esimerkkejä.** 1. Lebesguen ulkomitta $m^*$ on ulkomitta $\mathbf{R}^n$:ssä (Lause 2.1).

2. Olkoon $f\colon A \to [0,\infty]$ Lebesgue-mitallinen. Tällöin

$$\mu^*(E) = \inf\{\int_{A\cap B} f\,dm\colon\ B \in \mathcal{M}_n,\ E \subset B\}$$

määrittelee ulkomitan $\mathbf{R}^n$:ään.

3. Olkoon $x_0 \in X$. Määrittelemällä

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1\,, & \text{jos } x_0 \in A \\ 0\,, & \text{jos } x_0 \notin A\,, \end{cases}$$

saadaan ulkomitta joukkoon $X$. Sanotaan, että $\delta_{x_0}$ (pisteeseen $x_0$ keskittynyt) *Dirac-mitta.* Huomaa, että yksiön ulkomitta ei ole välttämättä nolla!

4. Olkoon

$$\mu^*(A) = \begin{cases} \#A\,, & \text{jos } A \text{ äärellinen} \\ \infty\,, & \text{jos } A \text{ ei ole äärellinen}\,. \end{cases}$$

Tällöin $\mu^*$ on ulkomitta, ns. *lukumäärämitta.*

5. Jos $\mu_1^*$ ja $\mu_2^*$ ovat ulkomittoja $X$:ssä ja $0 \le \lambda < \infty$, niin $\lambda\mu_1^*$ ja $\mu^* = \mu_1^* + \mu_2^*$ ovat myös ulkomittoja $X$:ssä.

Mitallisen joukon käsite määritellään kuten luvussa 2.

**Määritelmä.** Joukko $A \subset X$ on $\mu^*$-*mitallinen*, jos

$$\mu^*(E) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{kaikilla } E \subset X.$$

Huomaa, että $E$ on mielivaltainen!

Merkitään

$$\Gamma_{\mu^*} := \{A \subset X : A \text{ on } \mu^*\text{-mitallinen}\}.$$

Mitallisen joukon avulla minkä tahansa joukon mitta voidaan laskea kahdessa osassa, $A$:n kohtaavien ja väistävien pisteiden mittojen summana.

**Huomautus.** Subadditiivisuuden nojalla

$$\mu^*(E) \le \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{kaikilla } E \subset X,$$

joten $A$ on $\mu^*$-mitallinen, jos ja vain, jos

$$\mu^*(E) \ge \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \quad \text{kaikilla } E \subset X.$$

**11.1. Lemma.** *Joukko $A$ on $\mu^*$-mitallinen, jos ja vain jos*

$$\mu^*(S \cup U) = \mu^*(S) + \mu^*(U) \qquad \textit{kaikilla } S \subset A \textit{ ja } U \subset X \setminus A.$$

*Todistus.* (vrt. 2.3.) "$\Leftarrow$" pätee, koska

$$E = (\underbrace{A \cap E}_{\text{"S"}}) \cup (\underbrace{E \setminus A}_{\text{"U"}}).$$

"$\Rightarrow$": Kun $S \subset A$ ja $U \subset X \setminus A$, niin

$$\begin{aligned} \mu^*(\overbrace{S \cup U}^{=E}) &= \mu^*(\overbrace{A \cap (S \cup U)}^{=S \cap A = S}) + \mu^*(\overbrace{A^C \cap (S \cup U)}^{A^C \cap U = U}) \\ &= \mu^*(S) + \mu^*(U). \end{aligned}$$

□

**Huom.** Mitallisten joukkojen luokka ei ole tyhjä: triviaalisti $\emptyset$ ja $X$ ovat $\mu^*$-mitallisia. Voi tosin käydä, ettei muita $\mu^*$-mitallisia joukkoja olekaan. Esimerkiksi, jos

$$\mu^*(A) = \begin{cases} 1\,, & \text{jos } A \neq \emptyset \\ 0\,, & \text{jos } A = \emptyset, \end{cases}$$

niin vain $\emptyset$ ja $X$ ovat $\mu^*$-mitallisia. Lukumäärämitalle ja Dirac-mitalle taas kaikki joukot ovat mitallisia. Nollamittaiset joukot ovat aina $\mu^*$-mitallisia.

**11.2. Lemma.** *Jos $\mu^*(A) = 0$, niin $A$ on $\mu^*$-mitallinen.*

*Todistus.* (vrt. 2.4.) Kun $E \subset X$, on mitan $\mu^*$ monotonisuuden nojalla

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(A) + \mu^*(E \setminus A) = \mu^*(E \setminus A) \leq \mu^*(E),$$

kun huomataan, että $\mu^*(A) = 0$. □

**Varoitus.** Yleensä siitä, että $\mu^*(A) = 0$ ei seuraa, että $A = \emptyset$.

**11.3. Lause.**

i) *Jos $A$ ja $B$ ovat $\mu^*$-mitallisia, niin myös $A \setminus B$ on $\mu^*$-mitallinen. Erityisesti $A^C$ on $\mu^*$-mitallinen.*

ii) *Jos $A_1, A_2, \dots \subset X$ ovat mitallisia, on yhdiste $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ mitallinen.*

iii) *Jos $A_1, A_2 \dots \subset X$ ovat $\mu^*$-mitallisia ja pareittain pistevieraita, niin*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

*Todistus.* (vrt. 2.5.) Käytetään Lemmaa 11.1.

i): Olkoon $S \subset A \setminus B$, $U \subset (A \setminus B)^C = A^C \cup B$. Nyt

$$\begin{aligned}
\mu^*(S) + \mu^*(U) &= \mu^*(S) + \mu^*((U \cap B) \cup (U \setminus B)) \qquad (U = (U \cap B) \cup (U \setminus B)) \\
&= \mu^*(S) + \mu^*(U \cap B) + \mu^*(U \setminus B) \qquad (\text{koska } B \text{ on mitallinen}) \\
&= \mu^*(U \cap B) + \mu^*(S \cup (U \setminus B)) \\
&\qquad \text{koska } A \text{ on mitallinen, } S \subset A \text{ ja } U \setminus B \subset A^C \text{ (Lemma 11.1)} \\
&= \mu^*(\underbrace{(U \cap B) \cup (S \cup (U \setminus B)}_{S \cup U})) = \mu^*(S \cup U), \\
&\qquad \text{koska } B \text{ on mitallinen, } U \cap B \subset B \text{ sekä } S \cup (U \setminus B) \subset B^C.
\end{aligned}$$

Siispä $A \setminus B$ on mitallinen.

Huomaa, että $X$ ja $A$ ovat mitallisia, joten $A^C = X \setminus A$ on mitallinen. $\square_{i)}$

ii): Olkoon $A_1, A_2, \dots \in \Gamma_{\mu^*}$. Olkoon

$$\begin{aligned}
B_1 &= A_1 \\
B_2 &= A_2 \setminus A_1 \\
B_k &= A_k \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \right), \quad k = 2, 3, \dots .
\end{aligned}$$

Joukot $B_k$ ovat pareittain pistevieraita ja

$$\dot{\bigcup_{i=1}} A_i = \dot{\bigcup_{k=1}} B_k,$$

oli yhdiste äärellinen tai ääretön.

**Apuväite.** *Jos* $S_k = \bigcup_{j=1}^{k} B_j$, *niin* $S_k \in \Gamma_{\mu^*}$ *ja*

$$\mu^*(E) \geq \sum_{j=1}^{k} \mu^*(E \cap B_j) + \mu^*(E \cap S_k^C) \qquad \textit{kaikilla } E \subset X.$$

*Apuväitteen todistus.* Induktio: ok, kun $k = 1$.

Induktioaskel $k \to k+1$: Havaitaan, että $B_{k+1} = A_{k+1} \setminus S_k \in \Gamma_{\mu^*}$ induktio-oletuksen ja kohdan i) nojalla. Siten käyttämällä tätä ja $S_k$:n mitallisuutta saadaan induktio-oletuksen avulla

$$\begin{aligned}
\mu^*(E) &= \mu^*(E \cap B_{k+1}) + \mu^*(\underbrace{E \setminus B_{k+1}}_{E \cap B_{k+1}^C}) \\
&= \mu^*(E \cap B_{k+1}) + \mu^*(\underbrace{E \cap B_{k+1}^C \cap S_k}_{E \cap S_k}) + \mu^*(\underbrace{E \cap B_{k+1}^C \cap S_k^C}_{E \cap S_{k+1}^C}) \\
&\geq \sum_{j=1}^{k+1} \mu^*(E \cap B_j) + \mu^*(E \cap S_{k+1}^C) \\
&\geq \mu^*(E \cap S_{k+1}) + \mu^*(E \setminus S_{k+1}),
\end{aligned}$$

missä viimeinen epäyhtälö seuraa subadditiivisuudesta. Niinpä $S_{k+1}$ on $\mu^*$-mitallinen ja apuväitten epäyhtälö on tosi (kun $k \to k+1$). $\square_{\text{Apuväite}}$

Nyt saamme apuväitteen epäyhtälöstä

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \sum_{j=1}^{k} \mu^*(E \cap B_j) + \mu^*(E \cap S_k^C)\\ &\geq \sum_{j=1}^{k} \mu^*(E \cap B_j) + \mu^*(E \cap A^C)\,,\end{aligned}$$

joten antamalla $k \to \infty$ seuraa subadditiivisuudesta

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap B_j) + \mu^*(E \cap A^C)\\ &\geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^C)\,.\end{aligned}$$

Siispä $A$ on $\mu^*$-mitallinen. $\square_{ii)}$

Valitsemalla edellisessä kaavassa $E = A$ saamme

$$\begin{aligned}\mu^*(A) &\geq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(\underbrace{A \cap B_j}_{=B_j}) + \mu^*(\underbrace{A \cap A^C}_{=\emptyset})\\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j).\end{aligned}$$

Näin ollen väite iii) seuraa tästä ja subadditiivisuudesta, sillä $A_j = B_j$, mikäli joukot $A_j$ ovat pareittain pistevieraita. $\square$

**11.4. Seuraus.** *$\mu^*$-mitalliset joukot muodostavat $\sigma$-algebran $X$:ssä. Erityisesti, jos $A_1, A_2, \dots \subset X$ ovat mitallisia, on myös leikkaus $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ mitallinen.*

$\square$

Siis aivan kuten Lebesgue-mitan tapauksessa, $\mu^*$-mitallisten joukkojen kokoelma muodostaa $\sigma$-algebran ja ulkomitan $\mu^*$ rajoittuma mitallisiin joukkoihin on täysadditiivinen joukkofunktio. Tätä rajoittumaa on tapana kutsua *mitaksi* ja merkitään

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \text{jos } A \in \Gamma_{\mu^*},$$

ts.

$$\mu = \mu^*\big|_{\Gamma_{\mu^*}} : \Gamma_{\mu^*} \to [0, \infty].$$

**11.5. Lause.** *Joukkofunktio $\mu$ on täysadditiivinen mitta $\mu^*$-mitallisten joukkojen muodostamalla $\sigma$-algebralla $\Gamma_{\mu^*}$, ts.*

i) $\mu(\emptyset) = 0$, *ja*
ii) *Jos $A_1, A_2, \dots \in \Gamma_{\mu^*}$ ovat pareittain pistevieraita, niin*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

$\square$

Voi käydä niin, että ulkomitalla $\mu^*$ ei ole muita mitallisia joukkoja kuin $\emptyset$ ja $X$. Kuitenkin on hyödyllistä tietää, että mitalliset joukot muodostavat $\sigma$-algebran. Myöhemmin tarkastelemme keinoja osoittaa monien joukkojen mitallisuus. Esitämme ensin kuitenkin ensin mitan jatkuvuusominaisuudet. Huomaa, että seuraavassa lauseessa esiintyvät joukot ovat kaikki $\mu^*$-mitallisia.

**11.6. Lause.** *Olkoot* $A_1, A_2, \dots \in \Gamma_{\mu^*}$.

i) *Jos* $A_1 \subset A_2$ *ja* $\mu^*(A_1) < \infty$, *niin*

$$\mu^*(A_2 \setminus A_1) = \mu^*(A_2) - \mu^*(A_1).$$

ii) *Jos* $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, *niin*

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k).$$

iii) *Jos* $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ *ja* $\mu^*(A_{k_0}) < \infty$ *jollain* $k_0$, *niin*

$$\mu^*(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k\to\infty} \mu^*(A_k).$$

*Todistus.* (vrt. 2.12.) Huomaa, että kaikki Lauseessa esiintyvät joukot ovat mitallisia.

*i)*: Koska $A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1)$ ja molemmat osat ovat mitallisia, niin

$$\mu^*(A_2) = \mu^*(A_2 \setminus A_1) + \mu^*(A_1).$$

$\square_i$

*ii)*: Voidaan hyvin olettaa, että $\mu^*(A_k) < \infty$ kaikilla $k$. Esitetään väitteen yhdiste pareittain pistevieraana yhdisteenä mitalllisista joukoista:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup (\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{k+1} \setminus A_k));$$

huomaa, että joukkojono $A_k$ on nouseva. Tällöin additiivisuuden ja kohdan i) avulla

$$\begin{aligned}
\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) &= \mu^*(A_1) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_{k+1} \setminus A_k) \\
&= \mu^*(A_1) + \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} (\mu^*(A_{k+1}) - \mu^*(A_k)) \\
&= \mu^*(A_1) + \lim_{j\to\infty} (\mu^*(A_{j+1}) - \mu^*(A_1)) \\
&= \lim_{j\to\infty} \mu^*(A_{j+1}).
\end{aligned}$$

$\square_{ii)}$

*iii)*: Tutkimalla tarvittaessa joukkoja $\tilde{A}_k = A_k \cap A_{k_0}$ voidaan olettaa, että $\mu^*(A_k) < \infty$ kaikilla $k$. Koska joukkojono $A_k$ on vähenevä, on

$$A_1 \setminus A_k \subset A_1 \setminus A_{k+1},$$

joten kohdasta ii) seuraa

$$\begin{aligned}\mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_k)) &= \lim_{k\to\infty}\mu^*(A_1 \setminus A_k)\\ &= \mu^*(A_1) - \lim_{k\to\infty}\mu^*(A_k)\,,\end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\mu^*(A_k) &= \mu^*(A_1) - \mu^*(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_1 \setminus A_k)}_{=A_1\setminus\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k})\\ &= \mu^*(A_1) - \mu^*(A_1) + \mu^*(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k)\\ &= \mu^*(\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k).\end{aligned}$$

□

**Huomautus.** Nyt voidaan integrointiteoria mitan $\mu$ suhteeen kehittää aivan samoin kuin Lebesgue-mitalle tehtiin aiemmin, Lebesgue mitalliset joukot korvataan vain $\mu^*$-mitallisilla ja Lebesgue-mitta mitalla $\mu$. (harjoitustehtävä, joka kannattaa tehdä).

### 11.7. Metrinen ulkomitta.

**Määritelmä.** Olkoon $X$ metrinen avaruus, metriikkana $d$. Ulkomitta $\mu^*$ on *metrinen ulkomitta* $X$:ssä, jos

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$$

kaikille $A, B \subset X$, joilla

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A,\ b \in B\} > 0\,.$$

Kohta osoitamme, että avoimet ja suljetut (siis myös kaikki Borel-joukot) ovat mitallisia metriselle ulkomitalle.

**Esimerkki.** Lebesguen ulkomitta $m^*$ on metrinen ulkomitta $\mathbf{R}^n$:ssä. (harjoitustehtävä, todistettiin demoissa).

**11.8. Lause.** *Jos $\mu^*$ on metrinen ulkomitta metrisessä avaruudessa $X$, niin $X$:n suljetut joukot ovat $\mu^*$-mitallisia.*

*Todistus.* Olkoon $C \subset X$ suljettu. Riittää osoittaa, että

$$\mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C) \quad \text{kaikilla } E \subset X.$$

Epäyhtälön todistamiseksi voimme olettaa, että $\mu^*(E) < \infty$. Olkoon

$$C_j = \{x \in X\colon \operatorname{dist}(x, C) \leq \frac{1}{j}\}, \quad j = 1, 2, \dots,$$

(joukon $C$ $\frac{1}{j}$-pullistuma). Tällöin

$$C = \bigcap_{j=1}^{\infty} C_j,$$

koska $C$ on suljettu; edelleen

$$\operatorname{dist}(E \setminus C_j, E \cap C) \geq \frac{1}{j} > 0.$$

Siksi

$$\mu^*(E) \geq \mu^*((E \cap C) \cup (E \setminus C_j)) = \mu^*(E \cap C) + \mu^*(E \setminus C_j),$$

joten väite seuraa, mikäli osoitamme, että[23]

$$\lim_{j\to\infty} \mu^*(E \setminus C_j) = \mu^*(E \setminus C). \tag{11.8.1}$$

Huomaa, että epäyhtälö $\leq$ kaavassa (11.8.1) seuraa ulkomitan monotonisuudesta. Toisen epäyhtälön toteamiseksi olkoon

$$T_j = E \cap (C_j \setminus C_{j+1})$$

Koska $C$ on suljettu joukko, on

$$E \cap (C_j \setminus C) = \bigcup_{k=j}^{\infty} T_k$$

ja siten

$$E \setminus C = (E \setminus C_j) \cup \bigcup_{k=j}^{\infty} T_k.$$

Näin ollen

$$\mu^*(E \setminus C) \leq \mu^*(E \setminus C_j) + \sum_{k=j}^{\infty} \mu^*(T_k),$$

joten (11.8.1) pätee, mikäli todennamme, että

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(T_k) < \infty. \tag{11.8.2}$$

[23] Koska joukkojen mitallisuudesta ei ole tietoa, ei Lausetta 11.6 voida käyttää.

Sarja (11.8.2) suppenee, koska, kun $|k-j| \geq 2$, on

$$\operatorname{dist}(T_j, T_k) > 0 \quad \text{mikäli } T_j, T_k \neq \emptyset\,,$$

ja siten koska $\mu^*$ on metrinen ulkomitta, on

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(T_{2k}) = \mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_{2k}) \leq \mu^*(E) < \infty$$

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(T_{2k-1}) = \mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}) \leq \mu^*(E) < \infty\,.$$

□

Kuten $\mathbf{R}^n$:n tapauksessa, metrisen avaruuden $X$ suppeinta $X$:n avoimet joukot sisältävää $\sigma$-algebraa $\mathcal{B}$ sanotaan $X$:n *Borel-joukkojen* kokoelmaksi. Erityisesti $X$:n avoimet ja suljetut joukot ovat Borel-joukkoja. Metriselle ulkomitalle ne ovat mitallisia.

**11.9. Seuraus.** *Metrinen ulkomitta $\mu^*$ on Borel-mitta, ts. $X$:n Borel-joukot ovat $\mu^*$-mitallisia.* □

## 12. Ulkomitan konstruointi

Tässä luvussa esitellään kaksi mentelmää ulkomittojen konstruoimiseksi, yleinen metodi ja toinen ns. Carathéodoryn konstruktio, jolla saadaan metrinen ulkomitta.

Olkoon $\mathcal{K}$ kokoelma joukon $X$ osajoukkoja $\mathcal{K} \subset \mathcal{P}(X)$. Sanotaan, että $\mathcal{K}$ on *peiteluokka* $X$:ssä, jos $\emptyset \in \mathcal{K}$ ja jos $X$ voidaan peittää numeroituvan monella $E_j \in \mathcal{K}$, ts. on olemassa $E_j \in \mathcal{K}$ siten, että

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \,.$$

Olkoon $\tau\colon \mathcal{K} \to [0,\infty]$ funktio, jolle $\tau(\emptyset) = 0$ (funktiota $\tau$ sanotaan joskus *esimitaksi*) ja määritellään $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$,

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \tau(E_j)\colon E_j \in \mathcal{K} \text{ ja } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\}\,,$$

(Huomaa, että äärelliset yhdistet ovat sallituja, koska $\tau(\emptyset) = 0$.)

Näinhän Lebesgue-mitta konstruoitiin. Kopioimalla Lauseen 2.1 todistus saadaan:

**12.1. Lause.** *Yllä määritelty $\mu^*$ on ulkomitta $X$:llä.* □

*Todistus.* i): Koska $\tau(\emptyset) = 0$, on $\mu^*(\emptyset) = 0$.

ii): Monotonisuus seuraa infimumin ominaisuuksista.

iii): Olkoot $A_1, A_2, \dots \subset X$. Voidaan selvästi olettaa, että $\mu^*(A_j) < \infty$ kaikilla $j$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan joukot $E_{k,j} \in \mathcal{K}$ siten, että

$$A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k,j}$$

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_{k,j}) \le \mu^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon\,.$$

Tällöin

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k,j} = \bigcup_{j,k=1}^{\infty} E_{k,j}\,,$$

mikä on numeroituva yhdiste, joten

$$\begin{aligned}\mu^*(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) &\le \sum_{k,j=1}^{\infty} \tau(E_{k,j}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_{k,j}) \le \sum_{j=1}^{\infty}(\mu^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) + \varepsilon.\end{aligned}$$

□

**Esimerkki.** Selvästi $\mu^*(E) \leq \tau(E)$ jokaisella $E \in \mathcal{K}$, mutta epäyhtälö voi olla aito: Olkoon $X = \mathbf{R}$ ja

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \mathbf{R}, ]-\infty, 0[, ]0, \infty[, ]-1, 1[\}$$

ja asetetaan

$$\tau(A) = \begin{cases} 0\,, & \text{jos } A = \emptyset, ]-\infty, 0[ \text{ tai } ]0, \infty[, \\ 1\,, & \text{jos } A = ]-1, 1[, \\ 21\,, & \text{jos } A = \mathbf{R}. \end{cases}$$

Tällöin on helppo nähdä, että yo. konstruktion antama $\mu^* = \delta_0$, mutta

$$\mu^*(\mathbf{R}) = \delta_0(\mathbf{R}) = 1 < 21 = \tau(\mathbf{R})\,.$$

Päättely, jolla nähtiin, että Lebesguen ulkomitta on metrinen, nojasi siihen, että Lebesguen mittaa laskettaessa voidaan käyttää pieniä joukkoja. Seuraavaksi yleistämme tämän idean:

**Carathéodoryn konstruktio (metrisen ulkomitan konstruktio).**
Olkoon $X$ metrinen avaruus ja $\mathcal{K}$ peiteluokka $X$:ssä. Olkoon

$$\mathcal{K}_n = \{E \in \mathcal{K} \colon \operatorname{diam}(E) \leq \frac{1}{n}\}.$$

Jos $\mathcal{K}_n$ on $X$:n peiteluokka jokaisella $n \in \mathbf{N}$, niin sanotaan, että $\mathcal{K}$ on $X$:n *hieno peiteluokka.*

Olkoon sitten $\mathcal{K}$ avaruuden $X$ hieno peiteluokka ja $\mathcal{K}_n$ kuten edellä. Olkoon $\tau\colon \mathcal{K} \to [0, \infty]$ funktio, jolle $\tau(\emptyset) = 0$. Lauseen 12.1 nojalla saamme ulkomitan asettamalla

$$\mu_n^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \tau(E_j) \colon E_j \in \mathcal{K}_n \text{ ja } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\}\,, \quad n \in \mathbf{N}\,.$$

Lisäksi

$$\mu_n^*(A) \leq \mu_{n+1}^*(A) \quad \text{kaikilla } A \text{ ja } n\,,$$

joten voimme määritellä

$$\mu^*(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n^*(A) \quad (= \sup_{n\in\mathbf{N}} \mu_n^*(A)).$$

Sanotaan, että $\mu^*$ on *esimitasta $\tau$ Carathéodoryn konstruktiolla saatu ulkomitta.*

**12.2. Lause.** *Yllä olevin oletuksin Carathéodoryn konstruktiolla saatu ulkomitta $\mu^*$ on metrinen ulkomitta $X$:llä.*

*Todistus.* harjoitustehtävä. □

**Huomautuksia.** 1. Oletus peiteluokan $\mathcal{K}$ hienoudesta on hieman epäoleellinen ja siitä voitaisiin luopua sopimalla, että $\inf \emptyset = \infty$.

2. Aina pätee $\mu^*(A) \geq \mu_n^*(A)$, mutta epäyhtälö voi olla aito (HT). Propositiossa 12.3 alla on ehto, jolla $\mu^* = \mu_n^*$

**12.3. Propositio.** *Olkoon sitten $\mathcal{K}$ avaruuden $X$ hieno peiteluokka ja $\mathcal{K}_n$ kuten edellä. Olkoon $\tau\colon \mathcal{K} \to [0,\infty]$ funktio, jolle $\tau(\emptyset) = 0$. Olkoon $\mu^*$ esimitasta $\tau$ Carathéodoryn konstruktiolla saatu ulkomitta ja olkoon $\mu_0^*$ yleisen konstruktion antama ulkomitta.*

*Jos jokaisella $E \in \mathcal{K}$, $\varepsilon > 0$ ja $n \in \mathbf{N}$ on olemassa jono $E_{k,n} \in \mathcal{K}_n$ siten, että*

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k,n}$$

*ja*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_{k,n}) \le \tau(E) + \varepsilon\,,$$

*niin*

$$\mu^*(A) = \mu_0^*(A) \qquad \textit{kaikilla } A \subset X.$$

*Todistus.* Olkoon $A \subset X$. Riittää osoittaa, että $\mu^*(A) \le \mu_0^*(A)$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan joukot $A_j \in \mathcal{K}$, joille

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

ja

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(A_j) \le \mu_0^*(A) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kiiinnitetään $j$ ja valitaan oletuksen mukaiset joukot $E_{j,k} \in \mathcal{K}_n$ siten, että

$$A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}$$

ja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tau(E_{j,k}) \le \tau(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\,.$$

Tällöin

$$A \subset \bigcup_{j,k=1}^{\infty} E_{j,k}\,,$$

joten

$$\begin{aligned}\mu_n^*(A) &\le \sum_{j,k=1}^{\infty} \tau(E_{j,k}) \le \sum_{j=1}^{\infty}(\tau(A_j) + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}})\\ &\le \mu_0^*(A) + \frac{\varepsilon}{2} + + \frac{\varepsilon}{2}\\ &= \mu_0^*(A) + \varepsilon\,,\end{aligned}$$

josta antamalla $\varepsilon \to 0$

$$\mu_n^*(A) \le \mu_0^*(A) \qquad \text{kaikilla } n\,.$$

Siten

$$\mu^*(A) \le \mu_0^*(A).$$

$\square$

**12.4. Seuraus.** *Lebesguen ulkomitta $m^*$ saadaan Carathéodoryn konstruktiolla geometrisesta mitasta $v$.* □

**Esimerkki: Hausdorff-mitat.** Carathéodoryn konstruktio on erittäin tärkeä, koska sillä saadaan heti ns. Borel-mitta eli ulkomitta, jolle Borel-joukot ovat mitallisia. Eräs merkittävä esimerkki konstruktiolla saaduista mitoista on ns. *Hausdorff-mitat*:

Olkoon $X$ metrinen avaruus (esimerkiksi $\mathbf{R}^n$). Olkoon $s > 0$ ja koostukoon $\mathcal{K}$ kaikista $X$:n suljetuista osajoukoista. Olkoon

$$\tau(C) = \operatorname{diam}(C)^s\,.$$

Tällöin Carathéodoryn konstruktiolla saatua ulkomittaa sanotaan *Hausdorffin s-ulotteiseksi mitaksi*[24] ja merkitään

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A)\,,$$

missä

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_j)^s \colon E_j \subset X \text{ suljettu, } \operatorname{diam}(E_j) \le \delta \text{ ja } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\}.$$

Ulkomittaa $\mathcal{H}^s_\delta$ sanotaan usein *Hausdorff-sisällöksi* (Hausdorff content), koska sille mitallisia joukkoja on yleensä varsin vähän.

On helppo nähdä, että $\mathbf{R}^n$:ssä

$$2^{-n} m_n(A) \le \mathcal{H}^n(A) \le n^{\frac{n}{2}} m_n(A)$$

voidaan osoittaa, että on olemassa vakio $c = c_n > 0$, jolle

$$\mathcal{H}^n(A) = c_n m_n^*(A) \quad \text{kaikilla } A \subset \mathbf{R}^n\,.$$

Hausdorff-mitoilla $\mathcal{H}^s(A)$ on se ominaisuus, että se on positiivinen ja äärellinen korkeintaan yhdellä eksponentin $s$ arvolla:

**12.5. Lemma.** *Olkoon $A \subset X$.*

i) *Jos $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, niin $\mathcal{H}^\beta(A) = 0$ kaikilla $\beta > s$.*
ii) *Jos $\mathcal{H}^s(A) > 0$, niin $\mathcal{H}^\alpha(A) = \infty$ kaikilla $0 < \alpha < s$.*

*Todistus.* Jos

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\,, \qquad \text{missä } \operatorname{diam}(E_j) \le \delta\,,$$

niin

$$\delta^{s-\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_j)^\beta \le \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_j)^s \le \delta^{s-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{diam}(E_j)^\alpha$$

kun $\alpha < s < \beta$, joten

$$\delta^{s-\beta}\mathcal{H}^\beta_\delta(A) \le \mathcal{H}^s_\delta(A) \le \delta^{s-\alpha}\mathcal{H}^\alpha_\delta(A)\,,$$

mistä väite seuraa antamalla $\delta \to 0$. □

[24] Kirjallisuudessa käytetään Hausdorff-mittojen määritelmässä käytetään usein myös muita peiteluokkia ja muita normalisointeja. Usein näillä ei ole suurempaa merkitystä, koska suurin kiinnostus yleensä kohdistuu vain dimensioon. Hurjapäisimmät määrittelevät myös Hausdorffin 0-ulotteisen mitan, mutta on helppo nähdä, että $\mathcal{H}^0$ = lukumäärämitta.

**Määritelmä.** Joukon $A \subset X$ *Hausdorff-dimensio* on

$$\begin{aligned} \dim_H(A) &= \sup\{\alpha \geq 0 : H^\alpha(A) = \infty\} \\ &= \inf\{\beta \geq 0 : H^\beta(A) = 0\}\,. \end{aligned}$$

**Esimerkki.** Jos $A \subset \mathbf{R}^n$, niin $\dim_H(A) \in [0, n]$.

$\mathbf{R}^n$:n $k$-ulotteisen lineaarialiavaruuden Hausdorff-dimensio on $k$.

Cantorin $\frac{1}{3}$-joukon Hausdorff-dimensio on $s = \log 2/\log 3$: Laskemalla suoraan osavälien pituudet näemme, että

$$\mathcal{H}^s_{3^{-j}}(C_j) \leq 1,$$

josta

$$\mathcal{H}^s(C) \leq \lim_{j\to\infty} \mathcal{H}^s_{3^{-j}}(C_j) \leq 1,$$

joten

$$\dim_H(C) \leq s = \frac{\log 2}{\log 3}\,.$$

Epäyhtälö toiseen suuntaan on hieman hankalampi (kompaktisuusargumentti) ja jätetään harjoitustehtäväksi.

## 13. Abstraktit mitta-avaruudet

Tässä luvussa otetaan abstrakti lähtökohta mittateoriaan.

**Määritelmä.** Olkoon $X$ epätyhjä joukko ja $\Gamma$ $\sigma$-algebra $X$:ssä. Joukkofunktio $\mu\colon \Gamma \to [0,\infty]$ on (täysadditiivinen) *mitta* $\Gamma$:ssa, jos

i) $\mu(\emptyset) = 0$, ja

ii) Jos $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$ ovat pareittain pistevieraita, niin

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Kolmikkoa $(X, \Gamma, \mu)$ sanotaan *mitta-avaruudeksi* ja $\Gamma$:n alkioita ($\Gamma$-)*mitallisiksi* joukoiksi.

Mittaa (mitta-avaruutta) sanotaan *äärelliseksi*, jos $\mu(X) < \infty$ ja $\sigma$-*äärelliseksi*, jos on olemassa $E_j \in \Gamma$ siten, että

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \quad \text{ja} \quad \mu(E_j) < \infty \quad \text{kaikilla } j.$$

**Huomautus.** Olkoon $\mu^*$ ulkomitta $X$:ssä Lauseen 11.3 nojalla $\mu^*$-mitallisten joukkojen kokoelma $\Gamma_{\mu^*}$ on $\sigma$-algebra $X$:ssä ja rajoittuma $\mu^*|_{\Gamma_{\mu^*}}$ on mitta $\mu$:llä.

Olkoon $\Gamma \subset \Gamma_{\mu^*}$ mikä hyvänsä $\sigma$-algebra $X$:ssä. Tällöin kolmikko $(X, \Gamma, \mu^*|_\Gamma)$ on mitta-avaruus ja $\Gamma$:n joukkoja kutsutaan mitallisiksi, vaikka ne eivät sisältäisikään kaikkia $\mu^*$-mitallisia joukkoja.

**Esimerkki.** 1. Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus, jolle $\mu(X) = 1$. Tällöin mittaa $\mu$ sanotaan *todennäköisyysmitaksi*, mitta-avaruutta $(X, \Gamma, \mu)$ *todennäköisyyskentäksi* ja $\Gamma$:n jäseniä *tapahtumiksi.*

2. Olkoon $A \in \mathcal{M}_n$ ja $f\colon A \to [0,\infty]$ Lebesgue-mitallinen, jolle

$$\int_A f\,dm = 1\,.$$

Olkoon

$$\Gamma = \{B \subset A\colon B \text{ on Borel-joukko}\}\,.$$

Jos

$$\mu(B) := \int_B f\,dm\,,$$

niin kolmikko $(A, \Gamma, \mu)$ on todennäköisyyskenttä.

Mitta on monotoninen ja subadditiivnen:

**13.1. Lemma.** *Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus.*

i) *Jos $A, B \in \Gamma$ ja $A \subset B$, niin $\mu(A) \le \mu(B)$.*

ii) *Jos $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$, niin*

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j).$$

*Todistus.* i): Koska $B \setminus A \in \Gamma$, seuraa additiivisuudesta

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)\,,$$

koska $\mu(E) \geq 0$ kaikilla $E \in \Gamma$.

ii): Koska

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \cup \bigcup_{j=2}^{\infty} (A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k)$$

ja yhdisteen joukot ovat pareittain pistevieraita $\Gamma$:n alkioita, niin

$$\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \mu(A_1) + \sum_{j=2}^{\infty} \mu(A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\,,$$

koska

$$A_j \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} A_k \subset A_j\,.$$

Ulkomitan rajoittuma mitallisia joukkoja sisältävään $\sigma$-algebraan antaa aina mitta-avaruuden. Käänteinenkin pätee:

**13.2. Lause.** *Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus. On olemassa ulkomitta $\mu^*$ $X$:ssä, jolle jokainen $A \in \Gamma$ on $\mu^*$-mitallinen ja*

$$\mu(A) = \mu^*(A) \quad \textit{kaikilla } A \in \Gamma\,.$$

*Todistus.* Määritellään

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\colon A_j \in \Gamma\,, \quad A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\}.$$

Koska $\Gamma$ on $X$:n peiteluokka, on $\mu^*$ ulkomitta (Lause 12.1). Mitan monotonisuudesta (Lemma 13.1) seuraa, että $\mu^*|_\Gamma = \mu$. Riittää siis näyttää, että jokainen $A \in \Gamma$ on $\mu^*$-mitallinen: Olkoon $\varepsilon > 0$ ja $E \subset X$. Valitaan joukot $A_j \in \Gamma$ siten, että

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) &\leq \mu^*\big((\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap A\big) + \mu^*\big((\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \setminus A\big) \\
&\leq \mu\big((\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \cap A\big) + \mu\big((\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \setminus A\big) \\
&= \mu(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \\
&\leq \mu^*(E) + \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

josta antamalla $\varepsilon \to 0$ seuraa, että $A$ on $\mu^*$-mitallinen. □

Koska jokainen mitta $\Gamma$:lla on jonkin ulkomitan $\mu^*$ rajoittuma ja $\Gamma$:n joukot ovat edelläolevan lauseen nojalla $\mu^*$-mitallisia, saadaan ulkomittojen jatkuvuusominaisuudet (Lause 11.6) abstrakteille mitoillekin:

**13.3. Lause.** *Olkoon* $(X, \Gamma, \mu)$ *mitta-avaruus ja* $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$.

i) *Jos* $A_1 \subset A_2$ *ja* $\mu(A_1) < \infty$, *niin*

$$\mu(A_2 \setminus A_1) = \mu(A_2) - \mu(A_1).$$

ii) *Jos* $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, *niin*

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

iii) *Jos* $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ *ja* $\mu(A_{k_0}) < \infty$ *jollain* $k_0$, *niin*

$$\mu(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

□

Ulkomitalle $\mu^*$ nollamittaiset joukot ovat aina $\mu^*$-mitallisia. Mitta-avaruudessa $(X, \Gamma, \mu)$ voi käydä niin, ettei $\Gamma$ sisälläkään kaikkia $\mu$-nollamittaisten joukkojen osajoukkoja. Jos tällaista epäkohtaa ei ole, sanotaan mitta-avaruutta (mittaa) *täydelliseksi*, ts. mitta-avaruus $(X, \Gamma, \mu)$ on täydellinen, jos ehdoista $A \in \Gamma$, $E \subset A$ ja $\mu(A) = 0$ seuraa, että myös $E \in \Gamma$.

**Esimerkki.** Olkoon $\mathcal{B}$ $\mathbf{R}^n$:n Borel-joukot. Tällöin mitta-avaruus $(\mathbf{R}^n, \mathcal{B}, m)$ ei ole täydellinen.

Jos $\mu^*$ on ulkomitta ja $\Gamma_{\mu^*}$ $\mu^*$-mitallisten joukkojen $\sigma$-algebra, on mitta-avaruus $(X, \Gamma_{\mu^*}, \mu^*)$ täydellinen.

Mitta-avaruuksien epätäydellisyys ei ole kovin vaarallinen ominaisuus. Kyseiseen $\sigma$-algebraan voidaan liittää nollamittaisten joukkojen osajoukot ja mitta-avaruus laajenee melko huomaamatta täydelliseksi:

**13.4. Lause.** *Olkoon* $(X, \Gamma, \mu)$ *mitta-avaruus. Määrittelemällä*

$$\bar{\Gamma} = \{A \cup N \colon A \in \Gamma \ \text{ ja on } B \in \Gamma\,, \ \text{jolle } N \subset B \text{ ja } \mu(B) = 0\}$$

*ja*

$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \qquad \text{kaikilla } A \cup N \in \bar{\Gamma}$$

*kolmikko* $(X, \bar{\Gamma}, \bar{\mu})$ *on täydellinen mitta-avaruus (mitta-avaruuden* $(X, \Gamma, \mu)$ *täydellistymä).*

*Todistus.* Ainoa lievästi epäilyttävä seikka $\bar{\Gamma}$:n $\sigma$-algebra -ominaisuuden tiellä on komplementin otto. Sekin hoituu: jos $A, B \in \Gamma$ ja $\mu(B) = 0$, niin jokaiselle $N \subset B$

$$(A \cup N)^c = (A \cup B)^c \cup (B \setminus N) \in \bar{\Gamma}\,,$$

koska $(A \cup B) \in \Gamma$ ja $B \setminus N \subset B$. On helppo nähdä, että $\mu$ on täydellinen mitta, kunhan havaitaan, että se on hyvin määritelty. Näin on, sillä jos

$$A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2 \in \bar{\Gamma}\,,$$

niin on $B_j \in \Gamma$, joille $\mu(B_j) = 0$ ja $N_j \subset B_j$, $j = 1, 2$. Silloin $A_1 \subset A_2 \cup B_2$ ja

$$\bar{\mu}(A_1 \cup N_1) = \mu(A_1) \le \mu(A_2 \cup B_2) \le \mu(A_2) + \mu(B_2) = \mu(A_2) = \bar{\mu}(A_2 \cup N_2)$$

epäyhtälö toiseen suuntaan nähdään samoin. □

# D. Yleistä integraaliteoriaa

## 14. Integraaliteoriaa

Tässä luvussa yleistetään Lebesguen integraali mv. mitta-avaruudelle.

Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus. Strategiana on kopioida Lebesgue-integraalin käsite muuttamalla Lebesgue-mitallisten joukkojen luokka $\mathcal{M}$ $\sigma$-algebraksi $\Gamma$ ja Lebesgue-mitta $m$ annetuksi mitaksi $\mu$. Muunnos onnistuu melko kivuttomasti.

**Mitalliset funktiot.** Aloitetaan mitallisen funktion käsitteestä. Ainoa huomattava asia on, että alkukuvat pitää kuulua mitta-avaruuden (annettuun) $\sigma$-algebraan $\Gamma$ eikä tutkita mitan suhteen mitallisia joukkoja, ts. *mitallisuus on $\sigma$-algebraan $\Gamma$ eikä itse mittaan $\mu$ liittyvä ominaisuus.*

**Määritelmä.** Olkoon $A \in \Gamma$. Funktion $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ sanotaan olevan $(\Gamma$-$)$*mitallinen*, jos jokaisella $a \in \mathbf{R}$ alkukuva

$$f^{-1}(]a, \infty]) = \{x \in A \colon f(x) > a\}$$

on $\Gamma$-mitallinen, ts.

$$f^{-1}(]a, \infty]) \in \Gamma.$$

Jos $\Gamma = \mathcal{B}$ on metrisen avaruuden $X$ Borel-joukkojen $\sigma$-algebra, niin sanotaan, että $f$ on *Borel-mitallinen* tai *Borel-funktio.*

Seuraavat mitallisten funktioiden ominaisuudet todistetaan täsmälleen samoin kuin vastaavat lauseet luvussa 4 (harjoitustehtävä):

**14.1. Lause.** *Olkoon $A \in \Gamma$ mitallinen ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

i) *$f$ on $\Gamma$-mitallinen.*
ii) *$\{x \in A \colon f(x) \geq a\} \in \Gamma$ kaikilla $a \in \mathbf{R}$.*
iii) *$\{x \in A \colon f(x) < a\} \in \Gamma$ kaikilla $a \in \mathbf{R}$.*
iv) *$\{x \in A \colon f(x) \leq a\} \in \Gamma$ kaikilla $a \in \mathbf{R}$.*

□

**14.2. Lause.** *Olkoon $A \in \Gamma$ ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$.*

i) *Jos $f^{-1}(-\infty) \in \Gamma$ ja $f^{-1}(]a, b[) \in \Gamma$ kaikilla $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, niin $f$ on mitallinen.*
ii) *Jos $f$ on mitallinen, niin $f^{-1}(-\infty) \in \Gamma$, $f^{-1}(\infty) \in \Gamma$ ja $f^{-1}(B) \in \Gamma$ jokaisella Borel-joukolla $B \subset \mathbf{R}$.*

□

**Huomautus.** Funktion *nollajatko* määritellään kuten aiemmin: jos $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ (missä $A \in \Gamma$), niin nollajatko on kuvaus $\tilde{f}\colon X \to \overline{\mathbf{R}}$,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{jos } x \in A \\ 0\,, & \text{jos } x \notin A. \end{cases}$$

Tällöin $f$ on mitallinen jos ja vain, jos $\tilde{f}$ on mitallinen.

**14.3. Lemma.** *Olkoon $A \in \Gamma$ mitallinen ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$. Tällöin $f$ on mitallinen, jos ja vain, jos sekä $f^+$ että $f^-$ ovat mitallisia.* □

**14.4. Lause.** *Olkoot $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ ja $g\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallisia. Tällöin summa $f+g$ (mikäli määritelty) ja tulo $fg$ ovat mitallisia.* □

**14.5. Lause.** *Jos funktiot $f_k\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$, $k = 1, 2, \ldots$, ovat mitallisia niin myös funktiot*

$$\sup_k f_k, \quad \inf_k f_k, \quad \liminf_{k\to\infty} f_k \quad \textit{ja} \quad \limsup_{k\to\infty} f_k$$

*ovat mitallisia.* □

Yksinkertaiset funktiot ja niiden normaaliesitykset määritellään kuten luvussa 3

**Määritelmä.** Funktio $f\colon X \to \mathbf{R}$ on *yksinkertainen*, merk. $f \in \mathcal{Y}_\Gamma$, jos $f$ saa vain äärellisen monta arvoa ja joukot

$$\{x \in \mathbf{R}^n : f(x) = c\} \in \Gamma \quad \text{kaikilla } c \in \mathbf{R}.$$

*Yksinkertaisen funktion $f$ normaaliesitykseksi* sanotaan muotoa

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\ell} b_j \chi_{B_j}(x) \quad \text{kaikilla } x \in X\,,$$

missä joukot $B_1, B_2, \ldots, B_\ell \in \Gamma$ ovat epätyhjiä, pareittain pistevieraita siten, että

$$\bigcup_{j=1}^{\ell} B_j = X$$

ja vakiot $b_1, b_2, \ldots, b_\ell \in \mathbf{R}$ ovat sellaisia, että $b_i \neq b_j$, kun $i \neq j$.

Normaaliesityksen olemassaolo seuraa kuten Lemmassa 3.1. Edelleen pätee:

**14.6. Lause.** *Olkoon $A \in \Gamma$ ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$. Tällöin $f$ on mitallinen, jos ja vain, jos on olemassa jono $f_k \in \mathcal{Y}_\Gamma$ siten, että*

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \textit{kaikilla } x \in A.$$

*Jos $f$ on ei-negatiivinen, voidaan funktiot $f_k$ valita ei-negatiivisiksi ja jono $f_k$ nousevaksi.* □

**Integraali.** Integraalin yleistäminen menee myös lähes sanasta sanaan kopioimalla Lebesgue-mitan tapauksessa tehty. Muista pysyvä oletus: $(X, \Gamma, \mu)$ on mitta-avaruus.

**Määritelmä.** Olkoon $f \in \mathcal{Y}_\Gamma$ ei-negatiivinen ja

$$f(x) = \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{A_j}(x)$$

sen normaaliesitys. Jos $E \in \Gamma$, niin

$$I(f, E; \mu) := \sum_{j=1}^{k} a_j \mu(A_j \cap E)$$

on $f$:n *integraali yli joukon $E$ mitan $\mu$ suhteen.*

Edelleen määritellään ei-negatiivisen funktion ja yleisen funktion integraalit.

**Määritelmä.** Olkoon $f\colon A \to [0,\infty]$ mitallinen. Tällöin $f$:n *integraali yli joukon $A$ mitan $\mu$ suhteen* on

$$\int_A f\, d\mu = \sup\{I(u,A;\mu)\colon u \in \mathcal{Y}_\Gamma\,, \quad 0 \le u \le f \quad A\text{:ssa}\}.$$

**Määritelmä.** Olkoon $A \in \Gamma$ ja $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ mitallinen. Jos joko

$$\int_A f^+\, d\mu < \infty \qquad \text{tai} \qquad \int_A f^-\, d\mu < \infty\,,$$

niin funktion $f$ *integraali yli joukon $A$ mitan $\mu$ suhteen* on

$$\int_A f\, d\mu = \int_A f^+\, d\mu - \int_A f^-\, d\mu\,.$$

Edelleen sanotaan, että $f$ on *$\mu$-integroituva* $A$:ssa, merkitään $f \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$, jos sekä

$$\int_A f^+\, d\mu < \infty \qquad \text{että} \qquad \int_A f^-\, d\mu < \infty\,.$$

Seuraava havainto on helppo, mutta tärkeä. Sen avulla saadaan helposti lukuisia esimerkkejä mitoista.

**14.7. Lause.** *Olkoon $(X,\Gamma,\mu)$ mitta-avaruus ja $f\colon X \to [0,\infty]$ mitallinen. Tällöin integraali*

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu$$

*määrää $\sigma$-algebraan $\Gamma$ mitan $\nu$, joka on absoluuttisesti jatkuva mitan $\mu$ suhteen, ts.*

$$\nu(A) = 0 \qquad \text{aina, kun } \mu(A) = 0\,.$$

*Erityisesti*

i) *Jos $A, B \in \Gamma$, $B \subset A$, niin*

$$\int_B f\, d\mu \le \int_A f\, d\mu\,.$$

ii) *Jos $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$, niin*

$$\int_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} f\, d\mu \le \sum_{i=1}^\infty \int_{A_i} f\, d\mu.$$

iii) *Jos $A_1, A_2, \dots \in \Gamma$ ovat pareittain pistevieraita, niin*

$$\int_{\bigcup_{i=1}^\infty A_i} f\, d\mu = \sum_{i=1}^\infty \int_{A_i} f\, d\mu.$$

□

**Esimerkkejä.** 1. Olkoon $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), \mu)$ mitta-avaruus, missä $\mu$ on lukumäärämitta. Tällöin kaikki funktiot $f\colon \mathbf{N} \to \overline{\mathbf{R}}$ ovat mitallisia. Ne voidaan samastaa $\overline{\mathbf{R}}$:n lukujonojen kanssa:

$$a_n = f(n)\,.$$

Tällöin $f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{N}; \mu)$, jos ja vain, jos sarja

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

suppenee itseisesti, jolloin

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{j \in A} a_j \qquad \text{kaikilla } A \subset \mathbf{N}.$$

2. Olkoon $(X, \mathcal{P}(X), \delta_{x_0})$, mitta-avaruus, missä $x_0 \in X$ ja $\delta_{x_0}$ on Dirac-mitta $x_0$:ssa. Tällöin kaikilla $f\colon A \to \overline{\mathbf{R}}$ $(A \subset X)$

$$\int_A f\, d\delta_{x_0} = f(x_0)\,.$$

**Määritelmä.** Olkoon $(X, \Gamma, \mu)$ mitta-avaruus. Sanotaan, että ominaisuus $P = P(x)$ pätee *mitan $\mu$ suhteen melkein kaikilla* (lyh. *$\mu$-m.k.*) $x \in A$ (tai *$\mu$-melkein kaikkialla* $A$:ssa), jos on olemassa joukko $N \in \Gamma$ siten, että $\mu(N) = 0$ ja $P(x)$ pätee kaikilla $x \in A \setminus N$.

**Huomautus.** Huomaa, että mikäli mitta-avaruus ei ole täydellinen, ts. $\sigma$-algebra $\Gamma$ ei sisällä kaikkia nollamittaisten joukkojen osajoukkoja, niin termin m.k. käytössä pitää olla hieman varovainen. Esimerkiksi (jos $f_j$:t eivät ole $\Gamma$-mitallisia, niin)

$$\lim_{j \to \infty} |f_j(x)| = 0 \quad \mu\text{-m.k. } x \tag{14.8}$$

**ei tarkoita samaa kuin**

$$\mu(\{x\colon \limsup_{j \to \infty} |f_j(x)| > 0\}) = 0,$$

koska mahdollisesti joukko

$$\{x\colon \limsup_{j \to \infty} |f_j(x)| > 0\} \notin \Gamma,$$

jolloin sen $\mu$-mittaa ei ole määritelty. Sen sijaan (14.8) on yhtäpitävä lauselle: "On olemassa $N \in \Gamma$, jolle

$$\mu(N) = 0 \quad \text{ ja } \{x\colon \limsup_{j \to \infty} |f_j(x)| > 0\} \subset N\,."$$

Tämä ilmiö aiheuttaa integraalien ominaisuuksien todistuksiin pieniä teknisluonteisia korjaustarpeita, jotka kaikki voitaisiin hoidella korvaamalla mitta-avaruus sen täydellistymällä (Lause 13.4) ja huomaamalla, että integraalitasolla mikään ei muuttuisi.

Lebesgue-integraalien perusominaisuudet periytyvät yleisen mitta-avaruuden tapaukseen. Jätetään niiden tutkiminen harjoitustehtäväksi. Seuraaviin lauseisiin on koottu tärkeimmät tulokset:

**14.9. Lause.** (Integraalin lineaarisuus) *Olkoot* $f, g \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$. *Tällöin jokaisella* $\lambda, \gamma \in \mathbf{R}$ *funktio* $\lambda f + \gamma g$ *on integroituvia* $A$*:ssa ja*

$$\int_A (\lambda f + \gamma g)\, d\mu = \lambda \int_A f\, d\mu + \gamma \int_A g\, d\mu\,.$$

□

**14.10. Lause.** *Olkoot* $f, g \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$.

i) *Tällöin* $|f(x)| < \infty$ $\mu$*-m.k.* $x \in A$.

ii) *Jos* $f \le g$ $\mu$*-m.k.* $A$*:ssa, niin*

$$\int_A f\, d\mu \le \int_A g\, d\mu \quad \text{ja} \quad \left|\int_A f\, d\mu\right| \le \int_A |f|\, d\mu\,.$$

iii) *(Tsebyshevin epäyhtälö) Kaikilla* $0 < \lambda < \infty$

$$\mu(\{x \in A\colon |f(x)| > \lambda\} \le \frac{1}{\lambda} \int_A |f|\, d\mu\,.$$

iv)

$$\int_A |f|\, d\mu = 0\,, \quad \text{jos ja vain, jos} \quad f(x) = 0 \quad \mu\text{-m.k. } x \in A.$$

**14.11. Lause.** *Olkoon* $(X, \Gamma, \mu)$ *mitta-avaruus ja* $f_k : A \to [0, \infty]$ *jono ei-negatiivisia, mitallisia funktioita.*

i) (Fatoun lemma) *Tällöin*

$$\int_A \varliminf_{k\to\infty} f_k\, d\mu \le \varliminf_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu.$$

ii) (Lebesguen monotonisen konvergenssin lause) *Jos* $f_k$ *on nouseva jono, niin*

$$\int_A \lim_{k\to\infty} f_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu\,.$$

□

**14.12. Lause.** (Lebesguen dominoidun konvergenssin lause) *Olkoon* $(X, \Gamma, \mu)$ *mitta-avaruus ja* $f, f_k : A \to \overline{\mathbf{R}}$ *jono mitallisia funktioita siten, että* $f_k(x) \to f(x)$ $\mu$*-m.k.* $x \in A$. *Jos on olemassa* $g \in \mathcal{L}^1(A;\mu)$*, jolle*

$$\text{kaikilla } k \quad |f_k(x)| \le g(x) \quad \mu\text{-m.k. } x \in A,$$

*niin* $f$ *ja* $f_k$ *ovat integroituvia sekä*

$$\int_A f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu\,.$$

□

**14.13. Lause.** *Olkoon* $(X, \Gamma, \mu)$ *mitta-avaruus ja* $f\colon A \to [0, \infty]$. *Jos* $0 < p < \infty$, *niin*

$$\int_A f^p \, d\mu = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{x \in A\colon f(x) > t\}) \, dt =: \int_0^\infty \mu(\{x \in A\colon f(x) > t\}) \, dt^p \, .$$

□

Fubinin lauseen yleistäminen on hieman konstikkaampaa. Sitä varten tarvittaisiin tulomitan käsite ja sivuutamme sen tässä yhteydessä. Sen sijaan $L^p$-avaruudet yleisessä mitta-avaruudessa $(X, \Gamma, \mu)$ voidaan tehdä ihan kuten Lebesguen mitan tapauksessa tehtiin luvussa 10. Näitä avaruuksia merkitään yleensä symbolein

$$L^p(A; \mu) \quad \text{ja} \quad L^\infty(A; \mu) \, .$$

**Huomautus.** Todennäköisyyslaskenta on osa mittateoriaa. Siinä vain käytetään hieman eri nimityksiä: Todennäköisyyskenttä on mitta-avaruus $(\Omega, \Gamma, \mu)$, missä $\mu(\Omega) = 1$; tällöin mittaa $\mu$ sanotaan *todennäköisyydeksi* (sitä merkitää usein $\mathbf{P}$:llä)ja $\Gamma$:n jäseniä *tapahtumiksi*; $\Omega$ on perusavaruus. Mitallisia funktioita kutsutaan *satunnaismuuttujiksi* ja niiden integraaleja *odotusarvoiksi*. Näitä merkitään yleensä myös eri symboleilla: satunnaismuuttujaa merkitään usein isoilla kirjaimilla $X, Y, Z$ ja odotusarvoja $\mathbf{E}$:llä, ts.

$$\mathbf{E}X = \int_\Omega X(\omega) \, d\mu \, , \text{ missä } \mu = \mathbf{P}.$$