JOHDATUS MATEMATIIKKAAN

Petri Juutinen

14.8.2003

Sisältö

Alkulause

Käsissäsi on puhtaaksi kirjoitettu versio allekirjoittaneen vuosina 2001 ja 2002 Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella luennoiman "Johdatus matematiikkaan" -kurssin luentomuistiinpanoista. Kurssi on tarkoitettu ensimmäiseksi opintojaksoksi kaikille matematiikkaa opiskeleville ja sen ensisijaisena tavoitteena on ollut madaltaa kynnystä lukion ja yliopisto-opintojen välillä. Keskeisimmän sisällön kurssilla muodostavat todistamisen ja joukko-opin alkeiden opettelu sekä kuvauksiin liittyviin peruskäsitteisiin tutustuminen. Osaan kurssilla käsiteltävistä aiheista opiskelijat ovat saattaneet tutustua jo lukiosta, mutta näidenkin kohdalla lähestymis- ja esitystapa poikkeavat siitä mihin koulussa on yleensä totuttu.

Näiden luentojen pohjana on toiminut kurssia aikaisemmin luennoineiden kollegojen muistiinpanojen lisäksi Lauri Kahanpään, Harri Högmanderin ja Matti Hannukaisen luentomoniste "Johdatus matematiikkaan" vuodelta 1992. Kiitos omien muistiinpanojeni puhtaaksi kirjoittamisesta kuuluu Juha Inkeroiselle, silti kaikista tekstissä olevista virheistä vastuu on tekijällä.

Petri Juutinen

Luku 1

Todistamisen ja matemaattisen päättelyn alkeita

Tässä luvussa käsitellään lyhyesti päättelemistä sekä ns. maalaisjärkeä vaativissa tehtävissä että matemaattisten käsitteiden yhteydessä. Molemmissa tapauksissa pätevät samat perusperiaatteet ja toimivat samankaltaiset ajattelumallit. Aiheeseen syvennytään tarkemmin logiikan kurssilla.

1.1 Maalaisjärjellä päätteleminen

Esimerkki 1.1.1. Tiedetään, että jos aurinko paistaa, niin järven rannalla on uimareita. Lisäksi tiedetään, että uimarit pelottelevat kaikki paikalla olevat sorsat pois. Mitkä seuraavista päättelyistä ovat *yksinomaan näiden tietojen perusteella* oikein?

(a) Aurinko paistaa. Siispä rannalla ei ole sorsia.

(b) Rannalla ei ole sorsia. Siispä rannalla on uimareita.

(c) Rannalla ei ole uimareita. Siispä rannalla on sorsia ja aurinko ei paista.

(d) Rannalla on uimareita. Siispä aurinko paistaa.

(e) Rannalla on sorsia. Siispä aurinko ei paista.

Ratkaisu: oikein ovat (a) ja (e).

Esimerkki 1.1.2. (Rehdit ja retkut)
Oletetaan, että on olemassa saari, jolla asuu tasan kahdenlaisia ihmisiä - rehtejä ja retkuja. Rehdit puhuvat aina totta, retkut puolestaan valehtelevat aina. Päälle päin näitä tyyppejä ei voi erottaa toisistaan. Kohtaat kolme saaren asukkia (A, B ja C) ja kysyt heiltä:

”Montako rehtiä on joukossanne?”
A vastaa epäselvästi, joten kysyt B:ltä:
”Mitä A sanoi?”
B vastaa:
”A sanoi, että joukossamme on tasan yksi rehti”,
johon C:
”Älä usko B:tä, hän valehtelee!”
Kumpaa tyyppiä B ja C ovat?

Ratkaisu: Tarkastellaan eri vaihtoehtoja ja suljetaan mahdottomat pois. Voisimme listata ja käydä läpi kaikki mahdolliset kombinaatiot (joita on tässä tapauksessa 8 kpl) yksi kerrallaan, mutta helpommalla pääsee kun huomaa, että B ja C ovat välttämättä eri tyyppiä:

- Jos B on rehti, niin C on retku, sillä hän väittää B:n valehtelevan.
    - Jos tässä tapauksessa A on rehti, niin koska hän on silloin puhunut totta, on joukossa vain yksi rehti. Mutta tämä on mahdotonta, sillä näillä oletuksilla rehtejä ovat A ja B.
    - Jos taas A on retku, hän valehtelee ja siten joukossa on rehtejä 0, 2 tai 3 kappaletta. Tämäkin on ristiriita, sillä tässä tilanteessa rehtejä olisi tasan yksi eli B.
- Koska kaikki vaihtoehdot johtavat ristiriitaan, ei B voi olla rehti. Siten B on retku ja näin ollen C on rehti, sillä B todellakin valehtelee.

Tiedetäänkö A:sta mitään?

Esimerkki 1.1.3. (Äijät ja tonnikalapurkit)
Piirissä istuu viisi äijää, A, B, C, D ja E. Jokaisella heistä on taskussaan joko yksi tai ei yhtään tonnikalapurkkia. Jokainen äijä kertoo, kuinka monta purkkia hänellä ja kahdella hänen vieressään istuvalla äijällä on yhteensä. Myötäpäivään kiertäen luvut ovat järjestyksessä: 2,2,2,2,1. Kenellä on purkki ja kenellä ei?

Ratkaisu: B:llä, C:llä ja E:llä on purkit, muilla ei. Tämä on ainoa vaihtoehto, johon päädytään sulkemalla pois mahdottomat tilanteet.

1.2 Todistamisen alkeita

Väitelause eli *propositio* on lause, joka väittää jotain ja josta voidaan sanoa (tai ainakin kysyä) onko se totta vai ei. Tällainen määrittely ei ehkä vaikuta kovin täsmälliseltä, mutta se riittää tällä kurssilla. Seuraava esimerkki toivottavasti valaisee asiaa.

Esimerkki 1.2.1. Väitelauseita ja lauseita, jotka eivät ole väitelauseita:

(a) $4 > 13$ (epätosi)

(b) Hauki on kala. (tosi)

(c) $3 \geq 3$ (tosi)

(d) 1729 on pienin kokonaisluku, joka voidaan esittää kahdella eri tavalla kahden kokonaisluvun kuutioiden summana. (totta vai ei?)

(e) $1 + 3 - \sqrt{2}$ (ei ole väitelause)

(f) Tämä lause on epätosi. (ei ole väitelause)

Matematiikassa vastaan tulevat väitelauseet ovat varsin usein esitettävissä muodossa

$$\text{Jos P on totta, niin Q on totta.} \tag{1.2.1}$$

Tässä P ja Q ovat kumpikin väitelauseita, ja niistä käytetään seuraavia nimityksiä:

P = oletus

Q = väite

Jos väitelause (1.2.1) on tosi, niin sanotaan, että *P:stä seuraa Q,* tai että *P on riittävä ehto Q:lle,* ja merkitään:

$$P \Rightarrow Q$$

Esimerkki 1.2.2. Tyypillisiä matemaattisia väitelauseita:

(a) Jos $|x| \leq 2$ (oletus), niin $x^2 \leq 4$. (väite)

(b) Jos kolmio ΔABC on suorakulmainen (oletus), niin sen hypotenuusan neliö on yhtäsuuri kuin sen kateettien neliöiden summa (väite).

(c) Olkoon $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio siten, että $f(0) = 0$ ja $f(1) = 2$. (Tässä tuli oletus tai oikeastaan oletukset) Tällöin on olemassa $x \in]0,1[$ siten, että $f(x) = 1$. (Tämä on väite)

Huomaa, että Esimerkin 1.2.2 kohdan (c) väitelause voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi:

Jos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva funktio siten, että $f(0) = 0$ ja $f(1) = 2$, niin on olemassa $x \in]0,1[$ siten, että $f(x) = 1$.

Näin ollen sekin on siis muotoa (1.2.1).

1.2.1 Suora todistus

Tarkastellaan seuraavaa väitelausetta:

$$\text{Jos luonnollinen luku } n \text{ on pariton, niin myös } n^2 \text{ on pariton.} \tag{1.2.2}$$

Tällöin siis
Oletus: n pariton.
Väite: n^2 pariton.

Onko väitelause (1.2.2) tosi vai epätosi? Tämän selvittäminen on mahdollista vain jos ensin sovitaan tarkasti, mitä väitelauseessa esiintyvät käsitteet "luonnollinen luku" ja "pariton" tarkoittavat, eli *määritellään* ko. käsitteet.

Määritelmä 1.2.3. Luonnollisten lukujen joukko $\mathbb{N}$ on joukko

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Luonnollinen luku n on *parillinen,* jos $n = 2l$ jollakin luonnollisella luvulla $l \in \mathbb{N}$, ja *pariton,* jos $n = 2k + 1$ jollakin luonnollisella luvulla $k \in \mathbb{N}$.

Merkintä $l \in \mathbb{N}$ tarkoittaa, että l kuuluu joukkoon $\mathbb{N}$, eli että l on luonnollinen luku.

Huomautus 1.2.4. Parittomuutta (tai parillisuutta) osoitettaessa on näytettävä, että määritelmän ehto on voimassa. Nyt voidaan siis esimerkiksi todeta, että koska $7 = 2 \cdot 3 + 1$, niin luku 7 on yllä asetetun määritelmän mukaan pariton.

Väitelause (1.2.2) on totta, mille esitämme seuraavassa *todistuksen.* Todistus kertoo, miksi ja miten väite seuraa oletuksista. Se on loogisesti pitävä ja aukoton perustelu sille, että väitelause on tosi.

TODISTUS. Oletuksen mukaan n on pariton eli $n = 2k + 1$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Haluamme osoittaa tästä välttämättä seuraavan, että n^2 on pariton, eli että on olemassa jokin $l \in \mathbb{N}$ siten, että $n^2 = 2l + 1$. Tällainen l löytyy laskemalla, oletusta apuna käyttäen:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2l + 1,$$

missä $l = 2k^2 + 2k$. Siten luvulla n^2 on parittomuuden määritelmässä vaadittu ominaisuus, joten se on pariton. Väitelause on todistettu. $\square$

Todistuksessa käytettiin siis seuraavaa päättelyketjua:

$$\begin{aligned} n \text{ pariton } &\Rightarrow n = 2k + 1 \text{ jollakin } k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow n^2 = (2k + 1)^2 \text{ jollakin } k \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1 \\ &\Rightarrow n^2 = 2l + 1 \text{ eräällä } l \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow n^2 \text{ on pariton.} \end{aligned}$$

Todistuksessa edetään vaiheittain oletuksista väitteeseen, mistä johtuu nimitys *suora todistus*. Päättelyn jokainen vaihe on pystyttävä perustelemaan ja mahdollisen lukijan on voitava vakuuttautua todistuksen pitävyydestä. Esimerkiksi ensimmäinen vaihe (ensimmäinen $\Rightarrow$-merkki) saadaan parittomuuden määritelmästä, toinen ja kolmas vaihe ovat suoria laskuja ja niin edelleen.

Todistuksen lopussa oleva $\square$ on yksinkertaisesti todistuksen loppumerkki, joka ilmaisee, että väitelauseen todistava päättely on saatu päätökseen.

Huomautus 1.2.5. Seuraava "perustelu" ei riitä todistukseksi.

n	n^2
1	1
3	9
5	25
7	49
9	81
$\vdots$	$\vdots$
33	1089
$\vdots$	$\vdots$

Väitelause näyttäisi kyllä olevan totta, koska jokaisen yllä valitun parittoman luvun n neliö n^2 on pariton. Mutta tämä ei vielä todista yhtään mitään, sillä kaikkia mahdollisia parittomia lukuja ei ole käyty (eikä voidakaan käydä) läpi! Väitelauseessa vaaditaan nimenomaan, että *minkä tahansa* parittoman luvun neliö on pariton.

Esimerkin väitelause on kuitenkin "keksitty" tällaisten havaintojen perusteella. Laskettuaan useiden parittomien lukujen neliöitä ja todettuaan ne kaikki parittomiksi matemaatikko on päättänyt selvittää onko ilmiö aina totta ja päätynyt siten tutkimaan yo. väitelauseen totuusarvoa.

Harjoitustehtävä 1.2.6. Todista seuraavat väitelauseet:

1. Jos n on parillinen, niin n^2 on parillinen.
2. Jos n ja m ovat parittomia luonnollisia lukuja, niin myös tulo nm on pariton.

1.2.2 Epäsuora todistus

Suora todistus eli suora päättely on käytetyin ja yleensä helpoin todistusmenetelmä. Joissakin tilanteissa on kuitenkin edullista käyttää toisenlaista ajattelua. *Epäsuorassa todistuksessa* oletetaan, että väite ei pidäkään paikkaansa ja osoitetaan, että tästä seuraa tehdyt oletukset huomioiden mahdoton tilanne eli ristiriita. Niinpä väitteen on pakko olla totta. Tämänkaltaista päättelyä harrastettiin jo Rehtien ja Retkujen saarella sekä äijien ja tonnikalapurkkien yhteydessä.

Esimerkki 1.2.7. Osoita, että jos n on parillinen, niin n ei ole pariton.

TODISTUS. Haluamme siis osoittaa, että luvulla n *ei* ole parittomuuden määritelmässä esitettyä ominaisuutta. On varsin luontevaa tehdä tämä toteamalla, että jos sillä olisi tämä ominaisuus, niin seuraisi mahdoton tilanne.

Jos siis n olisi pariton, olisi olemassa jokin $k \in \mathbb{N}$ siten, että $n = 2k + 1$. Toisaalta oletuksen mukaan n on parillinen, joten $n = 2l$ jollakin $l \in \mathbb{N}$. Nyt

$$0 = n - n = (2l) - (2k + 1) = 2(l - k) - 1$$

eli

$$l - k = \frac{1}{2}.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä l ja k ovat luonnollisia lukuja ja siksi niiden erotus on kokonaisluku. Niinpä väitteen "n ei ole pariton" on pakko olla totta. □

Esimerkki 1.2.8. Todista väitelause

"Jos n^2 on pariton, niin n on pariton."

TODISTUS. Käytetään epäsuoraa päättelyä eli tutkitaan, mitä tapahtuisi, jos väite ei olisikaan totta. Tehdään niin sanottu *antiteesi* (vastaväite, väitteen negaatio): Eipäs, n ei olekaan pariton. Tällöin n on välttämättä parillinen ja siten Harjoitustehtävän 1.2.6 nojalla myös n^2 on parillinen. Mutta tämä on mahdotonta, sillä oletimme, että n^2 on pariton. Siten antiteesin on pakko olla epätosi ja luvun n on siis oltava pariton. □

Huomautuksia. Epäsuora päättely on useissa tilanteissa hyvin näppärä todistusmenetelmä, mutta sitä käytettäessä on tiedettävä mitä on tekemässä:

(1) Epäsuorassa päättelyssä on oltava tarkkana antiteesin muodostamisessa, eli on mietittävä tarkkaan, mitä tarkoittaa se, että väite ei olisikaan totta. Asiaan palataan myöhemmin.

(2) Epäsuorassa päättelyssä ei ole etukäteen selvää mistä ja miten ristiriita löydetään.

Edellä on todistettu, että

$$n \text{ pariton } \Rightarrow n^2 \text{ pariton}$$

ja

$$n^2 \text{ pariton } \Rightarrow n \text{ pariton.}$$

Nämä kaksi väitelausetta voidaan yhdistää ja kirjoittaa lyhyemmin muodossa

$$n \text{ pariton } \iff n^2 \text{ pariton.}$$

Tämä luetaan: n on pariton jos ja vain jos[1] n^2 on pariton. Toinen usein käytetty tapa lukea tämä on: n pariton ja n^2 pariton ovat yhtäpitäviä. Merkintä $P \iff Q$ tarkoittaa siis

$$\begin{cases} P \Rightarrow Q \text{ ja} \\ Q \Rightarrow P. \end{cases}$$

Esimerkki 1.2.9.

(i) Osoita, että n parillinen $\iff$ n^2 parillinen. (Todistus harjoitustehtävä)

(ii) Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$. (Siis a ja b ovat reaalilukuja.) Tällöin

$$a < b \iff (a \leq b \text{ ja } a \neq b).$$

1.2.3 Todistamisen harjoittelua: jaollisuus

Jatkamme todistusmenetelmien harjoittelua käyttäen apuna jaollisuuden käsitettä. Tämän kappaleen asioita käsitellään aikanaan tarkemmin Algebran ja Lukuteorian kursseilla.

Määritelmä 1.2.10. Olkoot n ja m positiivisia luonnollisia lukuja. Sanotaan, että m on *jaollinen* luvulla n, jos

$$m = kn$$

jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin n on luvun m *tekijä*. Luonnollinen luku m on *alkuluku*, jos $m \geq 2$ ja jos m on jaollinen ainoastaan luvuilla 1 ja m.

Esimerkki 1.2.11. Luku 10 on jaollinen kullakin luvuista 1, 2, 5 ja 10, sillä $10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$. Sen sijaan 5:lla ei ole muita tekijöitä kuin 1 ja 5, joten se on alkuluku. Huomaa, että määritelmämme mukaan 1 <u>ei</u> ole alkuluku.

Tavalla tai toisella merkitykselliset ja todeksi näytettävissä olevat väitelauseet on matematiikassa tapana muotoilla *teoreemoiksi* eli *lauseiksi*.

Lause 1.2.12. *Luonnollinen luku n on jaollinen 6:lla jos ja vain jos ($\iff$) n on jaollinen sekä 2:lla että 3:lla.*

[1] Sanoille "jos ja vain jos" käytetään joskus lyhennystä "joss".

Todistus. Koska väitelause koostuu itse asiassa kahdesta erillisestä väitelauseesta, on syytä kirjoittaa todistuskin kahdessa osassa:

1° n jaollinen 6:lla $\Rightarrow$ n jaollinen 2:lla ja 3:lla.
Oletus: n jaollinen 6:lla eli $n = 6k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$.
Väite: n jaollinen 2:lla ja 3:lla.

Käytetään jaollisuuden määritelmää:

$$n = 6k = 2(3k) = 2l, \text{ missä } l = 3k \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; n \text{ jaollinen } 2 : \text{lla}.$$

$$n = 6k = 3(2k) = 3m, \text{ missä } m = 2k \in \mathbb{N}. \;\Rightarrow\; n \text{ jaollinen } 3 : \text{lla}.$$

Siten oletuksesta seuraa, että n on jaollinen sekä 2:lla että 3:lla.

2° n jaollinen 2:lla ja 3:lla $\Rightarrow$ n jaollinen 6:lla.
Oletus: n jaollinen 2:lla eli $n = 2l$ jollakin $l \in \mathbb{N}$ ja n jaollinen 3:lla eli $n = 3m$ jollakin $m \in \mathbb{N}$.
Väite: n jaollinen 6:lla.

Nyt oletuksen mukaan $n = 2l$, joten n on parillinen. Jos m olisi pariton, niin Esimerkin 1.2.6 mukaan myös $3m = n$ olisi pariton, mikä on ristiriita. Siten luvun m on pakko olla parillinen, eli $m = 2k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tästä saamme

$$n = 3m = 3(2k) = 6k,$$

joten n on jaollinen 6:lla.

1° ja 2° yhdessä todistavat väitteen.
□

Lause 1.2.13. *(Eukleides n. 300 eKr.) Alkulukuja on ääretön määrä.*

Todistus. Antiteesi: Alkulukuja on vain äärellinen määrä, olkoon niitä k kappaletta ja olkoot kyseiset alkuluvut $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Tarkastellaan lukua

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k + 1.$$

(a) Jos n on alkuluku, niin on löydetty uusi alkuluku, joka ei selvästikään ole mikään luvuista $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Kuitenkin listassa $n_1, n_2, \ldots, n_k$ oli jo kaikki alkuluvut, ristiriita.

(b) Jos n ei ole alkuluku, niin se voidaan esittää (järjestystä vaille yksikäsitteisesti) alkulukujen tulona (Miksi?). Mutta suoralla jakolaskulla nähdään, että n ei ole jaollinen millään alkuluvuista $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Jälleen päädytään ristiriitaan.

Siispä antiteesi on väärin ja väite totta. □

Huomautus 1.2.14. Lauseen 1.2.13 todistuksessa on varsin luonnollista käyttää epäsuoraa päättelyä, sillä antiteesin mukaista äärellistä lukujoukkoa on yleensä helpompi käsitellä kuin ääretöntä joukkoa. Mieti mitä vaadittaisiin suoraan todistukseen.

1.2.4 Todistamisen harjoittelua: rationaali- ja irrationaaliluvuista

Tällä kurssilla reaalilukuja ajatellaan yksinkertaisesti lukusuoran pisteinä eikä niitä määritellä sen tarkemmin. Syvällisemmin tähän epätriviaaliin asiaan tutustutaan kurssilla Analyysi 1.

Määritelmä 1.2.15. Reaaliluku x on *rationaaliluku*, jos on olemassa kokonaisluvut n ja m siten, että $n \neq 0$ ja $x = \frac{m}{n}$. Rationaalilukujen joukkoa merkitään symbolilla $\mathbb{Q}$. *Irrationaaliluku* on reaaliluku, joka ei ole rationaaliluku.

Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on selvästikin epätyhjä, sillä esimerkiksi kaikki kokonaisluvut ovat rationaalilukuja. Sen sijaan irrationaalilukujen löytäminen onkin hieman hankalampaa, vaikka todellisuudessa "melkein kaikki" reaaliluvut ovatkin irrationaalilukuja.

Seuraavassa esitämme todistuksen sille, että $\sqrt{2}$, eli se positiivinen luku, jonka neliö on 2, on irrationaalinen. Tällainen reaaliluku todella on olemassa, sillä se tulee vastaan esimerkiksi geometriassa.

Lause 1.2.16. *$\sqrt{2}$ on irrationaaliluku.*

TODISTUS. (Pythagoraan koulukunta n.550 eKr)
Koska on osoitettava, että luvulla $\sqrt{2}$ *ei* ole rationaaliluvut määrittelevää ominaisuutta, on luontevaa käyttää epäsuoraa todistusta:
ANTITEESI: Väite ei ole totta, eli $\sqrt{2}$ onkin rationaaliluku. On siis olemassa luonnolliset luvut ($\sqrt{2} > 0$) n ja m siten, että $n \neq 0$ ja

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

Voidaan olettaa, että osamäärää $\frac{m}{n}$ ei voida supistaa, sillä jos voidaan, supistetaan niin kauan kuin voidaan, ja valitaan näin saadut uudet luvut m:ksi ja n:ksi. Nyt

$$2 = (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$$

eli

$$m^2 = 2n^2.$$

Siten m^2 on parillinen ja Esimerkin 1.2.9 nojalla myös m on parillinen, toisin sanoen $m = 2k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Näin ollen

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

mistä seuraa, että $n^2 = 2k^2$. Siten n^2 on parillinen ja (jälleen Esimerkin 1.2.9 nojalla) myös n on parillinen.

Koska sekä m että n ovat parillisia, voidaan osamäärää $\frac{m}{n}$ nyt supistaa 2:lla, mikä on ristiriita. □

Huomautus 1.2.17. Tämä todistus on hyvä esimerkki siitä, että joskus ristiriita voi löytyä hyvinkin kummallisesta paikasta.

Esimerkki 1.2.18. Jos $x \in \mathbb{Q}$ ja $y \in \mathbb{Q}$, niin $x + y \in \mathbb{Q}$.

TODISTUS. Oletuksen mukaan on olemassa kokonaisluvut m, n, k ja l siten, että $n \neq 0$, $l \neq 0$, $x = \frac{m}{n}$ ja $y = \frac{k}{l}$. Siten

$$x + y = \frac{m}{n} + \frac{k}{l} = \frac{ml}{nl} + \frac{nk}{nl} = \frac{ml + nk}{nl},$$

missä $ml + nk$ ja nl ovat kokonaislukuja ja $nl \neq 0$. Näin ollen $x + y \in \mathbb{Q}$. □

1.2.5 Antiteesin muodostamisesta

Antiteesi eli vastaväite on loogisesti väitteen negaatio. Väitteen ja antiteesin tulee yhdessä sisältää kaikki mahdolliset tilanteet. Antiteesi toimii epäsuorassa todistuksessa ikään kuin ylimääräisenä oletuksena, jota saa ja pitääkin käyttää apuna ristiriitaan pyrittäessä. Väitteelle ja antiteesille pätee:

väite tosi $\iff$ antiteesi epätosi.

antiteesi epätosi $\iff$ väite tosi.

Esimerkki 1.2.19. Yksinkertaisia väitelauseita ja niitä vastaavia antiteeseja. Huomaa erityisesti miten väitelauseiden osia toisiinsa sitovat “ja” ja “tai” käyttäytyvät.

(a) väite: Sataa.

antiteesi: Ei sada.

(b) väite: Sataa ja tuulee.

antiteesi: Ei sada tai ei tuule.

(c) väite: Elvis elää tai hauki on lintu.

antiteesi: Elvis ei elä ja hauki ei ole lintu.

(d) väite: Jokainen kala on hauki tai ahven.

antiteesi: On olemassa kala, joka ei ole hauki eikä ahven.

Esimerkki 1.2.20. Samaa hieman matemaattisemmin. Olkoon seuraaavassa $x \in \mathbb{R}$.

(a) väite: $x \geq 3$.

antiteesi: $x < 3$.

(b) väite: $0 \leq x \leq 1$.

antiteesi: $x < 0$ tai $x > 1$.

(c) väite: $x = 3k + 1$ jollekin $k \in \mathbb{N}$ (eli on olemassa $k \in \mathbb{N}$ siten, että $x = 3k + 1$).

antiteesi: ei ole olemassa lukua $k \in \mathbb{N}$ siten, että $x = 3k + 1$ ts. kaikille luvuille $k \in \mathbb{N}$ pätee $x \neq 3k + 1$.

(d) väite: on olemassa täsmälleen yksi luku $x \in \mathbb{R}$ siten, että $x^2+4x-7 = 0$.

antiteesi: yhtälöllä $x^2 + 4x - 7 = 0$ ei ole (reaalisia) ratkaisuja tai sitten ratkaisuja on ainakin 2.

(e) väite: kaikille $a \in \mathbb{N}$ on olemassa $b \in \mathbb{N}$ siten, että $\sqrt{ab + 1} \in \mathbb{N}$.

antiteesi: on olemassa $a \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $b \in \mathbb{N}$ pätee $\sqrt{ab + 1} \notin \mathbb{N}$.

Esimerkki 1.2.21. Suoran ja epäsuoran päättelyn eroista. Tutkitaan väitelausetta

$$\text{Jos reaaliluvulle } x \text{ on } x^2 - 3x + 2 < 0, \text{ niin } x > 0.$$

Siis

Oletus: $x \in \mathbb{R}$ ja $x^2 - 3x + 2 < 0$

Väite: $x > 0$

Todistus.

1. tapa (suora päättely): Koska $x^2 - 3x + 2 < 0$, niin $3x > x^2 + 2$. Siten

$$x = \frac{1}{3}(3x) > \frac{1}{3}(x^2 + 2) \geq \frac{1}{3}(0 + 2) = \frac{2}{3} > 0.$$

2. tapa (epäsuora päättely): Tehdään antiteesi: väite onkin epätosi ja on $x \leq 0$. Tällöin $-3x \geq 0$, joten

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0, \text{ sillä kaikki termit ovat } \geq 0.$$

Tämä on kuitenkin ristiriidassa oletuksen kanssa, joten antiteesin on oltava epätosi. Siis väite on totta. □

1.2.6 Kvanttoreista

Kvanttoreiden

$\forall$ - Kaikille, jokaiselle (muistisääntö: All)

$\exists$ - On olemassa (muistisääntö: Exists)

avulla voidaan tiivistää matemaattista tekstiä. Parhaiten asia selviää esimerkkien avulla.

Esimerkkejä. Väitelauseita ilmaistuna kvanttoreiden avulla ja ilman kvanttoreita:

(a) $\forall\, n \in \mathbb{N} : 2n$ on parillinen.

"Jokaiselle luonnolliselle luvulle n luku $2n$ on parillinen."

(b) $\exists\, x \in \mathbb{Q} : x^2 = 3$.

"On olemassa rationaaliluku x, jonka neliö on 3."

(c) $\forall\, a \in \mathbb{N}\; \exists\, b \in \mathbb{N} : a \neq b$ ja $\sqrt{ab} \in \mathbb{N}$.

"Kaikille luonnollisille luvuille a on olemassa luonnollinen luku b siten, että $a \neq b$ ja $\sqrt{ab} \in \mathbb{N}$."

Väite on tosi: voidaan valita $b = 4a$, jos $a \neq 0$ ja $b = 1$, jos $a = 0$.

(d) Kvanttoreiden järjestys on oleellinen: (vrt. kohta (c))

$\exists\, b \in \mathbb{N}\; \forall\, a \in \mathbb{N} : a \neq b$ ja $\sqrt{ab} \in \mathbb{N}$.

"On olemassa luku $b \in \mathbb{N}$ siten, että kaikille $a \in \mathbb{N}$ on voimassa $a \neq b$ ja $\sqrt{ab} \in \mathbb{N}$."

Väite on epätosi: Mikään $b \in \mathbb{N}$ ei toteuta ehtoja, sillä jos otetaan $a = b$, niin ei ole totta, että $a \neq b$.

(e) Muodostetaan edellisen väitteen antiteesi:

$\forall\, b \in \mathbb{N}\; \exists\, a \in \mathbb{N} : a = b$ tai $\sqrt{ab} \notin \mathbb{N}$.

"Kaikilla luonnollisilla luvuilla b on olemassa luonnollinen luku a siten, että $a = b$ tai $\sqrt{ab} \notin \mathbb{N}$."

Muista. Matemaatikon "tai" ei ole "joko-tai". Siis

"P tosi tai Q tosi" pitää sisällään seuraavat vaihtoehdot:

(i) P tosi, Q epätosi

(ii) P epätosi, Q tosi

(iii) P tosi, Q tosi

1.2.7 Induktiotodistus

Induktio on kätevä, ja joskus ainoa mahdollinen tapa todistaa luonollisia lukuja koskevia väitteitä, jotka ovat muotoa

$$\text{Kaikille } n = 1, 2, 3, \dots \text{ pätee } P(n).$$

Todistuksessa on kaksi vaihetta:

(1) $P(1)$, eli osoitetaan, että väite pätee arvolla $n = 1$.

(2) Jos $P(k)$ on tosi, niin $P(k+1)$ on tosi, eli oletetaan, että väite pätee arvolla $n = k$ ja osoitetaan, että tällöin väite pätee myös arvolla $n = k+1$.

Kohdista (1) ja (2) yhdessä seuraa, että $P(n)$ on totta kaikille $n = 1, 2, 3, \dots$. Syy: (1):n nojalla $P(1)$ pätee, joten (2):n nojalla tällöin $P(2)$ pätee, joten (2):n nojalla tällöin $P(3)$ pätee ja niin edelleen loputtomiin.

Eräs tapa havainnollistaa induktiota on niin kutsuttu dominonappulamalli. Kuvittele äärettömän pitkää (!) jonoa dominonappuloita, jotka on aseteltu pystyyn peräkkäin. Koko jonon pitäisi kaatua, kun ensimmäinen nappula kaadetaan. Tämähän tapahtuu niin, että tarkastetaan että ensimmäinen nappula todella kaatuu (vrt vaihe 1) ja varmistetaan, että kukin nappula kaatuessaan kaataa myös sitä seuraavan (vaihe 2). Jos kumpi tahansa vaihe epäonnistuu, koko jono ei kaadu, vaan jotkin dominonappulat jäävät pystyyn.

Induktion ei välttämättä tarvitse alkaa luvusta $n = 1$. Yleisemmässä muodossaan sen avulla voidaan todistaa muotoa

$$\text{kaikille } n = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots \text{ pätee } P(n)$$

olevia väitteitä. Tällöinkin todistuksessa on kaksi vaihetta: Ensin osoitetaan, että väite pätee arvolla $n = n_0$, ja sitten näytetään, että jos $P(k)$ on tosi ja $k \geq n_0$, niin $P(k+1)$ on tosi.

Esimerkki 1.2.22. Osoita, että kaikille $n = 1, 2, \dots$ on voimassa

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

TODISTUS.

1° Tarkistetaan ensin, että väittämämme yhtäsuuruus on voimassa tapauksessa $n = 1$:

$$\text{vasen puoli: } \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$
$$\text{oikea puoli: } \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Niinpä väite on tosi, kun $n = 1$.

2° Seuraavaksi on näytettävä, että jos väite on totta jollakin arvolla $n = k$, $k \geq 1$, niin se on totta myös seuraavalla arvolla $k+1$. Tätä vaihetta todistuksessa kutsutaan joskus *induktioaskeleeksi*, ja sitä varten tehdään ns. induktio-oletus ja induktioväite.

INDUKTIO-OLETUS:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

INDUKTIOVÄITE:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

TODISTUS: Induktio-oletusta käyttämällä saadaan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2},
\end{aligned}$$

eli induktioväite on voimassa.

Induktioperiaatteen nojalla väite on nyt tosi kaikille $n = 1, 2, 3, \ldots$. □

Seuraavaksi tarkastellaan geometrisen sarjan osasummia ja todistetaan induktiolla taulukkokirjasta tuttu kaava. Tätä varten olkoon b reaaliluku siten, että $b \neq 0$ ja $b \neq 1$, ja määritellään

$$S_n = \sum_{j=0}^{n} b^j = 1 + b + b^2 + \cdots + b^n.$$

Lause 1.2.23. *Jos $b \neq 0$ ja $b \neq 1$, niin*

$$S_n = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}, \text{ kun } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

TODISTUS. Induktio n:n suhteen alkaen luvusta $n = 0$:

1° : $n = 0$:

$$\text{vasen puoli: } S_0 = \sum_{j=0}^{0} b^j = b^0 = 1$$

$$\text{oikea puoli: } \frac{b-1}{b-1} = 1$$

Siten väite on tosi, kun $n = 0$.

2° : Induktioaskel: Osoitetaan, että jos väite on totta kun $n = k$, on se välttämättä totta myös kun $n = k + 1$. Luvusta k emme tässä voi olettaa muuta kuin sen, että $k \in \mathbb{N}$.

INDUKTIO-OLETUS:

$$S_k = \frac{b^{k+1} - 1}{b - 1}$$

INDUKTIOVÄITE:

$$S_{k+1} = \frac{b^{k+2} - 1}{b - 1}$$

TODISTUS:

$$S_{k+1} = \sum_{j=0}^{k+1} b^j = \sum_{j=0}^{k} b^j + b^{k+1} = S_k + b^{k+1},$$

josta induktio-oletuksen nojalla saadaan edelleen

$$\begin{aligned} S_{k+1} = \frac{b^{k+1} - 1}{b - 1} + b^{k+1} &= \frac{b^{k+1} - 1}{b - 1} + \frac{(b-1)b^{k+1}}{b - 1} \\ &= \frac{b^{k+1} - 1 + b^{k+2} - b^{k+1}}{b - 1} \\ &= \frac{b^{k+2} - 1}{b - 1}. \end{aligned}$$

Siten induktioväite seuraa induktio-oletuksesta.

Induktioperiaatteen nojalla väite on nyt tosi kaikille $n = 0, 1, 2, \ldots$ □

Seuraus 1.2.24. *Olkoon* $0 < b < 1$. *Tällöin*

$$\sum_{j=1}^{\infty} b^j = b + b^2 + b^3 + \cdots = \frac{b}{1 - b}.$$

TODISTUS. (tarkemmin kurssilla Analyysi 1)
Käyttäen edellistä lausetta saamme

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} b^j = \sum_{j=0}^{k} b^j - b^0 = S_k - 1 &= \frac{b^{k+1} - 1}{b - 1} - 1 \\ &= \frac{b^{k+1} - 1 - b + 1}{b - 1} \\ &= \frac{b^{k+1} - b}{b - 1} \longrightarrow -\frac{b}{b - 1} = \frac{b}{1 - b}, \text{ kun } k \to \infty, \end{aligned}$$

sillä oletimme, että $0 < b < 1$. Siispä

$$\sum_{j=1}^{\infty} b^j = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} b^j \right) = \frac{b}{1-b}.$$

$\square$

Esimerkki 1.2.25. Seuraus 1.2.24:n avulla nähdään, että 1=0,999999...

Perustelu:

$$\begin{aligned}
0,9999\ldots &= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots \\
&= 9(0,1 + 0,01 + 0,001 + \cdots) \\
&= 9\left(\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots \right) \\
&= 9\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^j = 9 \cdot \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.
\end{aligned}$$

Esimerkki 1.2.26. Jokaisen rationaaliluvun desimaalikehitelmä on jaksollinen (miksi?) ja se saadaan jakamalla jakokulmassa. Kääntäen, jokaista jaksollista desimaalikehitelmää vasta rationaaliluku. Esimerkiksi

$$\begin{aligned}
0,34656565\ldots &= 0,34 + 0,0065 + 0,000065 + \cdots \\
&= \frac{34}{100} + \frac{65}{100}\left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots \right) \\
&= \frac{34}{100} + \frac{65}{100}\left(\frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \left(\frac{1}{100}\right)^3 + \cdots \right) \\
&= \frac{34}{100} + \frac{65}{100} \cdot \frac{\frac{1}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{34}{100} + \frac{65}{100} \cdot \frac{1}{99} \\
&= \frac{34}{100} + \frac{65}{9900} = \frac{34 \cdot 99 + 65}{9900} = \frac{3431}{9900}.
\end{aligned}$$

Luku 2

Joukko-oppia

2.1 Joukko-opin merkintöjä ja määritelmiä

Tällä kurssilla sovimme yksinkertaisesti, että joukko koostuu alkioista, ja jokaisesta alkiosta on pystyttävä sanomaan, kuuluuko se tiettyyn joukkoon vai ei. Tällainen määrittely riittää hyvin varsinkin matematiikan opiskelun alkuvaiheessa, vaikka todellisuudessa joukon ja alkion käsitteisiin liittyy kaikenlaisia ongelmia, eikä joukko-oppi suinkaan ole niin yksinkertaista kuin ensisilmäykseltä saattaa vaikuttaa.

Merkintöjä. Osa joukko-opin perusmerkinnöistä tuli vastaan jo edellisessä luvussa.

(i) $x \in A$ tarkoitaa, että x on joukon A alkio. Se luetaan: "x kuuluu joukkoon A."

(ii) $y \notin A$ tarkoitaa, että y ei ole joukon A alkio ja luetaan: "y ei kuulu joukkoon A."

(iii) Joukko määritellään usein luettelemalla sen alkiot aaltosulkeissa tai merkinnällä $\{x : P(x)\}$, joka tarkoittaa kaikkien niiden alkioiden x joukkoa, joille ominaisuus $P(x)$ on totta.

Määritelmä 2.1.1. Joukot A ja B ovat *samat*, merkitään $A = B$, jos niillä on täsmälleen samat alkiot: kaikille x on voimassa $x \in A$ jos ja vain jos $x \in B$.

Huomautus 2.1.2. On syytä huomata, että Määritelmä 2.1.1 kertoo myös sen, miten kaksi joukkoa A ja B tulee todistaa yhtäsuuriksi. Todistuksessa on kaksi vaihetta:

(i) osoitetaan, että jos $x \in A$, niin $x \in B$.

(ii) osoitetaan, että jos $x \in B$, niin $x \in A$.

Yhdessä nämä näyttävät, että joukoilla A ja B on täsmälleen samat alkiot.

Esimerkkejä. Erilaisia joukkoja:

(a) $\{1, 2\} = \{1, 1, 2\} = \{2, 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

(b) $\{n \in \mathbb{N} : n \text{ pariton}\} = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \text{ pariton}\} = \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$.

(c) $\{n \in \mathbb{N} : \sqrt{n} < 3\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 8\}$.

(d) $\{f : [0, 1] \to \mathbb{R} : f \text{ jatkuva}\}$

eli “suljetulla välillä $[0, 1]$ määriteltyjen reaaliarvoisten jatkuvien funktioiden joukko.”

(e) $\{\, \Delta ABC\colon \Delta ABC$ on tason tasasivuinen kolmio, jonka pinta-ala $\leq 3\,\}$.

(f) Olkoon

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in A\}.$$

Onko A joukko?

Kaikki alkiokokoelmat eivät ole joukkoja. Olkoon esimerkiksi A erään kylän kaikkien niiden miesten joukko, jotka eivät itse aja omaa partaansa. Kylässä on miesparturi, joka ajaa kaikkien näiden miesten parrat. Kuuluuko tämä parturi joukkoon A vai ei? Molemmat vaihtoehdot johtavat ristiriitaan, joten kyseessä on paradoksi, ns. parturiparadoksi. Parturiparadoksi on yksinkertaistettu versio niin kutsutusta Russelin paradoksista, joka kuuluu:

> Onko niiden joukkojen joukko, jotka eivät ole itsensä alkioita, itsensä alkio?

Tällainen kokoelma joukkoja ei ole joukko, sillä se ei toteuta ehtoa jonka mukaan jokaisesta alkiosta on voitava sanoa, kuuluuko se joukkoon vai ei.

Määritelmä 2.1.3. Joukko A on joukon B *osajoukko*, merkitään $A \subset B$, jos jokainen A:n alkio on myös B:n alkio, ts. kaikille x on voimassa: $x \in A \Rightarrow x \in B$.

Huomautus 2.1.4. Seuraavat asiat on hyvä muistaa:

(1) Kaikille joukoille A ja B on voimassa: $A = B \iff A \subset B$ ja $B \subset A$.

(2) Kaikille joukoille A on $A \subset A$.

(3) Joskus käytetään myös merkintöjä $A \subseteq B$ ja $A \subsetneq B$. Näistä '$\subseteq$'='$\subset$' ja $A \subsetneq B$ tarkoittaa, että A on B:n osajoukko ja $A \neq B$. Tällöin sanotaan, että A on B:n *aito* osajoukko.

Esimerkki 2.1.5. Muistetaan, että:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \ldots\} \\
\mathbb{Z} &= \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\} \\
\mathbb{Q} &= \left\{x \in \mathbb{R} : \exists m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \text{ siten, että } x = \frac{m}{n}\right\} \\
\mathbb{R} &= \text{ reaaliluvut} \\
\mathbb{C} &= \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} \\
\emptyset &= \text{ tyhjä joukko, joukko, joka ei sisällä yhtään alkiota}
\end{aligned}$$

Tällöin

$$\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

ja lisäksi kaikki inkluusiot ovat aitoja (eli $\subsetneq$):

$$\begin{gathered}
\sqrt{2} \in \mathbb{R}, \text{ mutta } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \\
\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}, \text{ mutta } \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \\
-1 \in \mathbb{Z}, \text{ mutta } -1 \notin \mathbb{N} \\
22 \in \mathbb{N}, \text{ mutta } 22 \notin \emptyset
\end{gathered}$$

Määritelmä 2.1.6. Olkoot $A, B \subset X$ joukkoja (X on asiayhteydestä selviävä perusjoukko, esim. $\mathbb{R}$ tai $\mathbb{N}$). Määritellään joukkojen *yhdiste*

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ tai } x \in B\},$$

leikkaus

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ ja } x \in B\},$$

erotus

$$A \backslash B = \{x \in X : x \in A \text{ ja } x \notin B\}$$

ja *komplementti*

$$A^C = X \backslash A = \{x \in X : x \notin A\}.$$

Joskus joukkojen A ja B erotusta merkitään myös symbolilla $A - B$ ja joukon A komplementtia symbolilla $\complement A$.

Esimerkki 2.1.7. Esimerkkejä joukkojen yhdisteistä, leikkauksista, erotuksista ja komplementeista.

(a) irrationaaliluvut $= \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}^C = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

(b) Olkoot

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ jaollinen 6:lla}\}, \\ B &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ jaollinen 3:lla}\}, \\ C &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ jaollinen 2:lla}\}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} B \cup C &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ jaollinen 3:lla tai 2:lla}\}, \\ B \cap C &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ jaollinen 3:lla ja 2:lla}\} = A. \end{aligned}$$

Yhtäsuuruus $B \cap C = A$ seuraa Lauseesta 1.2.12.

(c) Olkoot

$$\begin{aligned} A &= \{0, 1, \alpha, \beta\}, \\ B &= \{1, 2, \beta\}, \\ C &= \{3, 4, \gamma\}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{0, 1, 2, \alpha, \beta\}, \\ A \cap B &= \{1, \beta\}, \\ A \backslash B &= \{0, \alpha\}, \\ B \backslash A &= \{2\}, \\ (A \cap B) \cup C &= \{1, 3, 4, \beta, \gamma\}. \end{aligned}$$

Useamman kuin kahden joukon yhdiste ja leikkaus määritellään saman periaatteen mukaisesti kuin kahdenkin.

Määritelmä 2.1.8. Olkoot $A_1, A_2, \ldots, A_k$ joukkoja. Tällöin niiden *yhdiste* on

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{k} A_i &:= \{x : x \in A_1 \text{ tai } x \in A_2 \text{ tai } \ldots \text{ tai } x \in A_k\} \\ &= \{x : x \in A_i \text{ jollakin } i = 1, 2, \ldots, k\}, \end{aligned}$$

ja *leikkaus*

$$\begin{aligned} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i &:= \{x : x \in A_1 \text{ ja } x \in A_2 \text{ ja } \ldots \text{ ja } x \in A_k\} \\ &= \{x : x \in A_i \text{ kaikilla } i = 1, 2, \ldots, k\}. \end{aligned}$$

Huomautus 2.1.9. Yhdiste ja leikkaus voidaan määritellä myös äärettömän monelle joukolle. Joukkojen A_i, $i = 1, 2, \dots$ yhdiste on

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i := \{x : x \in A_i \text{ jollakin } i = 1, 2, \dots\},$$

ja leikkaus

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i := \{x : x \in A_i \text{ kaikilla } i = 1, 2, \dots\}.$$

Tällä kurssilla rajoitumme kuitenkin pääsääntöisesti tilanteeseen, jossa joukkoja on vain äärellinen määrä.

Edellä määriteltyjen joukko-operaatioiden lisäksi tarvitaan matematiikassa varsin usein myös joukkojen tulon käsitettä.

Määritelmä 2.1.10. Joukkojen A ja B *tulojoukko* eli *karteesinen tulo* on

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

missä $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ ja $b = d$.

Esimerkki 2.1.11. Esimerkkejä tulojoukoista.

(a) Jos $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{\alpha, \beta\}$, niin

$$A \times B = \{(1, \alpha), (1, \beta), (2, \alpha), (2, \beta), (3, \alpha), (3, \beta)\}.$$

(b) $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(m, n) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$. (Huom: $(2, 3) \neq (3, 2)$.)

(c) Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} = xy\text{-taso} \\
&\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = xyz\text{-avaruus} \\
&\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ kpl}} = n\text{-ulotteinen Euklidinen avaruus}
\end{aligned}$$

Harjoitustehtävä 2.1.12. Hahmottele seuraavia joukkoja:

(a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x - 1\}$.

(b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.

(c) $C = \{(t^2 + 1, t) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$.

2.2 Joukko-oppi ja todistaminen

Seuraavaksi tutustumme siihen, miten joukko-oppiin liittyviä väitelauseita todistetaan. Avainasemassa ovat yllä annetut määritelmät joukkojen yhtäsuuruudelle, osajoukolle, leikkaukselle, yhdisteelle jne., sillä viime kädessä juuri määritelmät kertovat yksityiskohtaisesti mitä todistuksissa on pystyttävä osoittamaan.

Lause 2.2.1. *Kaikille joukoille A, B ja C pätee*

$$\begin{aligned}&(a)\ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),\\ &(b)\ (A \cup B)^C = A^C \cap B^C,\\ &(c)\ A \cup B \subset A \iff B \subset A.\end{aligned}$$

TODISTUS.
(a) Haluamme todistaa joukkojen $A \cup (B \cap C)$ ja $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ yhtäsuuruuden, eli sen, että niillä on täsmälleen samat alkiot: kaikille x on

$$x \in A \cup (B \cap C) \iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Tämän todistaminen tapahtuu kahdessa osassa:

"$\subset$" : Osoitetaan, että $A \cup (B \cap C)$ on joukon $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ osajoukko:

$$x \in A \cup (B \cap C) \implies x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

TODISTUS: Koska $x \in A \cup (B \cap C)$, niin $x \in A$ tai $x \in (B \cap C)$. Jos $x \in A$, niin yhdisteen määritelmän nojalla $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$. Jos taas $x \in B \cap C$, niin leikkaauksen määritelmän nojalla tällöin $x \in B$ ja $x \in C$. Tästä seuraa yhdisteen määritelmän nojalla, että $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$. Siten kummassakin tapauksessa $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, kuten väitettiin.

"$\supset$" : Osoitetaan, että $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ on joukon $A \cup (B \cap C)$ osajoukko:

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \implies x \in A \cup (B \cap C).$$

TODISTUS: Koska $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$, niin $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$. Jos nyt $x \in A$, niin selvästi $x \in A \cup (B \cap C)$. Jos taas $x \notin A$, niin koska $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$, on $x \in B$ ja $x \in C$. Siten $x \in B \cap C$, mistä seuraa, että $x \in A \cup (B \cap C)$. Siten siis välttämättä $x \in A \cup (B \cap C)$.

"$\subset$" ja "$\supset$" yhdessä takaavat, että joukot ovat samat.

(b) Jälleen on kyseessä kahden joukon todistaminen yhtäsuuriksi.

"$\subset$" : Osoitetaan, että $(A \cup B)^C$ on joukon $A^C \cap B^C$ osajoukko:

$$x \in (A \cup B)^C \implies x \in A^C \cap B^C.$$

TODISTUS: $x \in (A \cup B)^C \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ ja $x \notin B \Rightarrow x \in A^C$ ja $x \in B^C \Rightarrow x \in A^C \cap B^C$.

"$\supset$" : Osoitetaan, että $A^C \cap B^C$ on joukon $(A \cup B)^C$ osajoukko:

$$x \in A^C \cap B^C \implies x \in (A \cup B)^C.$$

TODISTUS: $x \in A^C \cap B^C \Rightarrow x \notin A$ ja $x \notin B \Rightarrow x \notin A \cup B \Rightarrow x \in (A \cup B)^C$.

Jälleen "$\subset$" ja "$\supset$" yhdessä takaavat, että joukot ovat samat.

(c) Koska on kyse ekvivalenssin eli yhtäpitävyyden todistamisesta, on tämäkin todistus tehtävä kahdessa osassa:

"$\Rightarrow$" : Jos $(A \cup B) \subset A$, niin $B \subset A$.

TODISTUS: Olkoon $x \in B$. Haluamme osoittaa, että $x \in A$. Koska $x \in B$, niin $x \in A \cup B$, mistä oletuksen nojalla seuraa $x \in A$. Siten jokainen joukon B alkio x 0n välttämättä myös joukon A alkio eli $B \subset A$.

"$\Leftarrow$" : Jos $B \subset A$, niin $(A \cup B) \subset A$.

TODISTUS: Olkoon $x \in A \cup B$. Haluamme osoittaa, että $x \in A$. Koska $x \in A \cup B$, niin $x \in A$ tai $x \in B$. (Muista, että tähän sisältyy myös vaihtoehto, että x sisältyy molempiin joukkoihin.) Jos $x \in A$, niin todistushan on valmis! Jos taas $x \in B$, niin koska oletuksen mukaan $B \subset A$, niin $x \in A$. Siispä molemmissa vaihtoehdoissa toteutui $x \in A$, joten olemme näyttäneet, että $(A \cup B) \subset A$.

Kohdat "$\Rightarrow$" ja "$\Leftarrow$" yhdessä osoittavat ekvivalenssin oikeaksi.
$\square$

Lause 2.2.2. *Olkoot A, A', B ja B' joukkoja siten, että $A \subset A'$ ja $B \subset B'$. Tällöin*

$$A \times B \subset A' \times B'.$$

TODISTUS. On siis osoitettava, että

$$(x, y) \in A \times B \implies (x, y) \in A' \times B'.$$

Jos siis alkiopari (x, y) kuuluu joukkooon $A \times B$, niin karteesisen tulon määritelmän mukaan tämä tarkoittaa sitä, että $x \in A$ ja $y \in B$. Oletusten mukaan $A \subset A'$ ja $B \subset B'$, joten $x \in A'$ ja $y \in B'$. Karteesisen tulon määritelmän perusteella siis $(x, y) \in A' \times B'$ aivan kuten väitettiinkin. $\square$

Harjoitustehtävä 2.2.3. Todista seuraavat tyhjän joukon $\emptyset$ ominaisuudet: Jos A on mikä tahansa joukko, niin

(a) $\emptyset \subset A$,

(b) $A \cap \emptyset = \emptyset$,

(c) $A \cup \emptyset = A$,

(d) $\emptyset \setminus A = \emptyset$,

(e) $A \setminus \emptyset = A$.

(Muista: tyhjä joukko määriteltiin joukkona, jossa ei ole yhtään alkiota.)

Luku 3

Arviointia ja epäyhtälöitä

3.1 Arviointia

Monille sana "arvioida" luo mielleyhtymän jostakin epätarkasta, epätäsmällisestä. Siksi saattaakin tuntua aluksi hieman yllättävältä, että arviointi on yksi matematiikan opiskelijan ja tutkijan tärkeimmistä työvälineistä. Matemaatikkojen harrastamana arviointi ei luonnollisestikaan tarkoita hatusta vedettyjä arvauksia tai kokemuksen tuoman näppituntuman hyväksikäyttöä, vaan tarkasti perusteltuja, oikeaksi todistettavissa olevia arvioita.

Matematiikassa arviointia käytetään monissa eri yhteyksissä. Usein on esimerkiksi pystyttävä arvioimaan erilaisia suureita annettujen tietojen perusteella. Lisäksi törmätään jatkuvasti tilanteisiin, joissa tarkan arvon laskeminen on liian vaikeaa, työlästä tai epäoleellista, ja on viisaampaa käyttää hyvää arviota.

Esimerkki 3.1.1. Onko

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{199}<\frac{1}{2}?$$

Ei ole, sillä

$$\begin{aligned}\frac{1}{100}+\frac{1}{101}+\frac{1}{102}+\cdots+\frac{1}{199} &\geq \frac{1}{199}+\frac{1}{199}+\cdots+\frac{1}{199}\\ &=100\cdot\frac{1}{199}\\ &\geq 100\cdot\frac{1}{200}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki 3.1.2. Kuinka paljon Päijänteen pinta nousisi, jos kaikki ihmisveri laskettaisiin siihen?

Tällaiseen kysymykseen on tietysti täysin mahdotonta antaa tarkkaa vastausta, mutta voimme kuitenkin yrittää arvioida veden pinnan nousun suuruusluokkaa. Tätä varten tarvitsemme joitakin tietoja (jotka nekin tietysti ovat vain enemmän tai vähemmän luotettavia arvioita) ongelmaan liittyvistä tekijöistä.

Päijänteen pinta-ala: 1080 km^2

Ihmisiä maapallolla: 6,2 miljardia (U.S. Bureau of the Cencus)

Verta ihmisessä: aikuisessa enintään 6 litraa, lapsessa huomattavasti vähemmän.

Näiden tietojen perusteella voidaan todeta maapallolla olevan ihmisverta kaiken kaikkiaan korkeintaan $10l \cdot 7 \cdot 10^9 = 7 \cdot 10^{10}$ litraa$= 7 \cdot 10^{10} dm^3$.

Pinnan nousu metreinä olkoon x. Tällöin (sopivin oletuksin Päijänteen rantojen muodosta)

$$\begin{aligned} x \cdot 1080 \cdot 10^6 m^3 &\leq 7 \cdot 10^7 m^3 \\ \Rightarrow x &\leq \frac{7 \cdot 10^7}{108 \cdot 10^7} \approx 0,065. \end{aligned}$$

Varsin karkea arviomme on siis, että pinta nousisi korkeintaan 7 cm.

Esimerkki 3.1.3. Päteekö

$$\int_{-1}^{2} \left(2 + \cos\sqrt{x^2+2}\right) x^4 e^x \, dx \geq 2?$$

Lukiosta muistetaan, että jos $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja $f \geq 0$, niin

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

ilmaisee f:n kuvaajan ja x-akselin sekä suorien $x = a$ ja $x = b$ rajoittaman alueen pinta-alan. Yllä olevan määrätyn integraalin suuruutta voidaan siten arvioida sen kuvaajan alle jäävän alueen pinta-alaa arvioimalla. Tätä pinta-alaa voi puolestaan arvioida vertaamalla aluetta yksinkertaisiin geometrisiin kappaleisiin, kuten suorakaiteeseen tai kolmioon. Ongelmana onkin päätellä, millaisia geometrisia kappaleita arvioinnissa voidaan käyttää.

Merkitään siis $f(x) = \left(2 + \cos\sqrt{x^2+2}\right) x^4 e^x$, $x \in [-1,2]$. Ensimmäinen huomio on, että f on ei-negatiivinen, sillä

$$f(x) \geq (2-1)\, x^4 e^x \geq 0 \qquad \text{kaikilla } x \in [-1,2].$$

Tässä käytimme tietoa $-1 \leq \cos y \leq 1$ kaikille $y \in \mathbb{R}$ ja funktioiden x^4 ja e^x ei-negatiivisuutta. Välillä $[1,2]$ puolestaan pätee

$$f(x) \geq 1 \cdot x^4 e^x \geq e^x \geq e \geq 2.$$

Näin ollen f:n kuvaajan alle mahtuu suorakaide, jonka pohjan muodostaa väli $[1, 2]$ ja jonka korkeus on 2. Siten

$$\int_{-1}^{2} \left(2 + \cos\sqrt{x^2+2}\right) x^4 e^x \; dx \geq \text{suorakaiteen pinta-ala} = 2.$$

Miten edellä olevaa arviota voitaisiin parantaa? Yksi tapa olisi käyttää monimutkaisempia geometrisiä kuvioita, kuten puolisuunnikkaita, ja toivoa, että niiden avulla arvio voitaisiin tehdä "hukaten vähemmän tilaa". Tämä keino ei kuitenkaan yksinään riitä monimutkaisemmissa tapauksissa. Toinen hyvä keino on jakaa integroimisväli useisiin pieniin osaväleihin ja tehdä arvio kullakin osavälillä erikseen. Tarkkaa arviota haettaessa on funktion käyttäytyminen tunnettava hyvin.

Yläraja määrätylle integraalille saadaan etsimällä säännöllinen geometrinen kuvio, joka sisältää f:n kuvaajan rajoittaman alueen. Jälleen edellä mainitut keinot auttavat parantamaan arviota.

Esimerkki 3.1.4. Olkoot a, b ja c kokonaislukuja väliltä 0-10 siten, että $abc > 200$. Arvioi summaa $a + b + c$.

Kirjanpidon helpottamiseksi voimme olettaa, että $a \leq b \leq c$.

1. arvio: (triviaalit arviot)

$$a + b + c \geq 1 + 1 + 1 = 3.$$
$$a + b + c \leq 10 + 10 + 10 = 30. \text{ (Huom! tätä ei voi parantaa.)}$$

2. arvio: Koska

$$200 < abc \leq c^3,$$

on

$$c \geq \sqrt[3]{200}.$$

Siten $c \geq 6$, sillä $5^3 = 125 < 200 < 216 = 6^3$. Toisaalta koska

$$200 < abc \leq a \cdot 10 \cdot 10 = 100a,$$

on

$$a \geq 3.$$

Siten

$$a + b + c \geq 2a + c \geq 2 \cdot 3 + 6 = 12.$$

3. arvio:

$$200 < abc \leq 10b^2 \Rightarrow b^2 > 20 \Rightarrow b \geq 5$$
$$\Rightarrow a + b + c \geq 3 + 5 + 6 = 14.$$

3.2 Itseisarvo

Monet tärkeimmistä matematiikassa tarvittavista epäyhtälöistä liittyvät luvun itseisarvon arvioimiseen.

Määritelmä 3.2.1. Reaaliluvun x *itseisarvo* on

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0, \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Geometrinen tulkinta:

- $|x|$ on luvun x etäisyys nollasta lukusuoralla.
- $|x - y|$ voidaan tulkita lukujen x ja y etäisyydeksi toisistaan lukusuoralla.

Siten epäyhtälön

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \qquad (\text{jos } a \geq 0)$$

toteuttavat ne pisteet x, joiden etäisyys nollasta on korkeintaan a, ja epäyhtälön

$$|x - 2| < \frac{1}{2} \iff 1\frac{1}{2} < x < 2\frac{1}{2}$$

puolestaan ne pisteet, joiden etäisyys 2:sta on pienempi kuin $\frac{1}{2}$. Näiden epäyhtälöiden sisällön ymmärtämiseksi ei ole siis tarpeen ryhtyä poistamaan itseisarvomerkkejä kuten koulussa yleensä oli tapana.

Esimerkki 3.2.2. Ratkaise epäyhtälö $|x - 2| > |x + 1|$.

Tapa 1: Epäyhtälön toteuttavat ne pisteet, jotka ovat lähempänä -1:stä kuin 2:sta, toisin sanoen $x < \frac{1}{2}$.

Tapa 2: Piirretään funktioiden $f(x) = |x - 2|$ ja $g(x) = |x + 1|$ kuvaajat ja tutkitaan, milloin $f(x) > g(x)$.

Huomautus 3.2.3. Jos kuvan piirtää väärin saa väärän vastauksen. Siis kuviosta katsomalla näkee oikean vastauksen vain, jos kuva on oikein. Miten todistetaan kuva oikein piirretyksi?

Esimerkki 3.2.4. Millä reaaliluvuilla x pätee

$$|x - 1| < \varepsilon \text{ jokaisella } \varepsilon > 0?$$

Selvästi $x = 1$ toteuttaa ehdon, sillä $0 = |1 - 1| < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$.

Mikään muu luku ei kelpaa:
Olkoon $x \neq 1$ annettu. Tällöin löytyy $\varepsilon > 0$ siten, että

$$|x - 1| \geq \varepsilon,$$

nimittäin voidaan valita

$$\varepsilon = \frac{|x-1|}{2} > 0.$$

Harjoitustehtävä 3.2.5. Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita, että $|xy| = |x||y|$.

3.2.1 Etäisyys xy-tasossa

Olkoot $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Määritellään

$$\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Siis $\|(x, y)\|$ on tason pisteen (x, y) (geometrinen) etäisyys origosta $(0, 0)$. Samoin

$$\|(x, y) - (1, 2)\| = \|(x - 1, y - 2)\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$

on tason pisteen (x, y) etäisyys pisteestä $(1, 2)$.

Epäyhtälön

$$\|(x, y) - (1, 2)\| < 1$$

toteuttavat ne tason pisteet (x, y), joiden etäisyys pisteestä $(1, 2)$ on pienempi kuin 1. Niistä muodostuu siis tason 1-säteinen pallo, jonka keskipiste on $(1, 2)$. Pallon kuori ei kuulu mukaan.

Harjoitustehtävä 3.2.6. Tulkitse geometrisesti epäyhtälö

$$\|(x, y)\| < \|(x, y) - (1, 1)\|.$$

3.3 Kolmioepäyhtälö

Kolmioepäyhtälö on yksinkertaisuudestaan huolimatta yksi matemaattisen analyysin tärkeimmistä työkaluista.

Aloitetaan yksinkertaisella aputuloksella, jonka avulla kolmioepäyhtälö todistetaan.

Lemma 3.3.1. *Kaikille reaaliluvuille x on*

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Todistus. Muistetaan, että

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ kun } x \geq 0, \\ -x, \text{ kun } x < 0. \end{cases}$$

1. tapaus: $x \geq 0 : -|x| \leq 0 \leq |x|$ ja $x = |x|$.
2. tapaus: $x < 0 : -|x| = -(-x) = x$ ja $x \leq 0 \leq -x = |x|$. □

Lause 3.3.2. (Kolmioepäyhtälö) *Kaikille* $x, y \in \mathbb{R}$ *on voimassa*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

ja

$$|x - y| \leq |x| + |y|.$$

Todistus. Koska $-|x| \leq x \leq |x|$ ja $-|y| \leq y \leq |y|$, niin laskemalla nämä yhteen saadaan

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Siis

$$|x + y| = \begin{cases} x + y \leq |x| + |y|, \text{ kun } x + y \geq 0, \\ -(x + y) \leq |x| + |y|, \text{ kun } x + y < 0. \end{cases}$$

Toisaalta lauseen alkuosan perusteella

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |(-y)| = |x| + |y|.$$

□

Huomautus 3.3.3. Lisäksi on voimassa

$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x + y|$$

ja

$$\big|\, |x| - |y| \,\big| \leq |x - y|$$

Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$. Tämä todistetaan kurssilla Analyysi 1.

Esimerkki 3.3.4. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y| \text{ kaikille } z \in \mathbb{R}.$$

Todistus. Olkoon $z \in \mathbb{R}$ mikä tahansa reaaliluku. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$|x - y| = |x - z + z - y| = |(x - z) + (z - y)| \leq |x - z| + |z - y|.$$

□

Kolmioepäyhtälö pätee myös xy-tason pisteille: jos u, v ja $w \in \mathbb{R}^2$, niin

$$\|u - v\| \leq \|u - w\| + \|w - v\|.$$

Mieti mitä tämä tarkoittaa geometrisesti.

Esimerkki 3.3.5. Arvioi lukua $\left|\frac{1}{x} - x^2 \sin x\right|$, kun tiedetään, että $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

Kolmioepäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{x} - x^2 \sin x\right| &\leq \left|\frac{1}{x}\right| + \left|x^2 \sin x\right| \\
&= \left|\frac{1}{x}\right| + \left|x^2\right| |\sin x| \\
&\leq \left|\frac{1}{x}\right| + \left|x^2\right| \\
&= \frac{1}{x} + x^2 \\
&\leq 2 + 4 = 6.
\end{aligned}$$

Kolmioepäyhtälön voima on siinä, että sen avulla summia päästään arvioimaan termeittäin.

3.4 Epäyhtälöistä

Hyvin monet matematiikassa esiintyvistä väitelauseista voidaan kirjoittaa epäyhtälön muotoon. Epäyhtälöitä todistettaessa on erityisen tärkeää pitää mielessä päättelyn suunta: mikä on oletus ja mikä väite.

Esimerkki 3.4.1. Olkoon a ja b reaalilukuja siten, että $0 \leq a \leq b$. Osoita, että

$$a \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq b.$$

TODISTUS. Todistettava väite koostuu kolmesta epäyhtälöstä:

$$a \leq \sqrt{ab}, \qquad \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \qquad \text{ja} \qquad \frac{a+b}{2} \leq b.$$

Kukin näistä pitää todistaa erikseen.

1° $a \leq \sqrt{ab}$:

Koska $a \leq b$ ja molemmat ovat ei-negatiivisia lukuja, niin

$$aa \leq ab.$$

Siten

$$a = \sqrt{aa} \leq \sqrt{ab}.$$

2° $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$:

Todistetaan tämä epäyhtälö harjoituksen vuoksi kahdella eri tavalla.

Tapa 1: (Epäsuora todistus)

Antiteesi: $\exists$ luvut $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $0 \leq a \leq b$ ja $\sqrt{ab} > \frac{a+b}{2}$.

Tällöin, koska $\sqrt{ab} \geq 0$ ja $\frac{a+b}{2} \geq 0$, on

$$ab = \left(\sqrt{ab}\right)^2 > \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4}.$$

Edellä epäyhtälö $>$ saatiin antiteesistä. Nyt edellisestä seuraa

$$4ab > a^2 + 2ab + b^2 \quad \text{eli} \quad a^2 - 2ab + b^2 < 0.$$

Tämä on ristiriita, sillä

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 \geq 0.$$

Tapa 2: (Suora todistus)

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{2} &= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{ab} + \left(\sqrt{b}\right)^2 + 2\sqrt{ab}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 + 2\sqrt{ab}\right) \\
&\geq \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{ab} = \sqrt{ab}.
\end{aligned}$$

Viimeisen rivin epäyhtälö saadaan yksinkertaisesti jättämällä neliötermi summauksesta pois.

3° $\frac{a+b}{2} \leq b$:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leq \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

Välissä oleva epäyhtälö $\leq$ saadaan oletuksesta $a \leq b$.

□

Esimerkki 3.4.2. Jos $a, b \in \mathbb{R}$ ja $a^2 + b^2 \geq 1 - 2ab$, niin $a + b \geq 1$.

TODISTUS. ("Lukiolaisen versio")

$$\begin{aligned} a+b &\geq 1 \\ (a+b)^2 &\geq 1 \text{ eli } a^2+2ab+b^2 \geq 1 \text{ eli } a^2+b^2 \geq 1-2ab, \end{aligned}$$

mikä on oletuksen nojalla totta. Siispä $a+b \geq 1$. □

TÄMÄ TODISTUS ON VÄÄRIN, SILLÄ VÄITE ON EPÄTOSI:

Jos

$$a = -2 \text{ ja } b = 0,$$

niin

$$a^2+b^2 = 4 > 1 = 1-2ab$$

eli oletukset ovat voimassa, mutta silti

$$a+b = -2 < 1.$$

Yllä esitetyn "todistuksen" vikana on se, että siinä päättely etenee väärään suuntaan, väitteestä oletukseen.

Esimerkki 3.4.3. Osoita, että $(n+1)! \geq 2^n$ kaikille $n \in \mathbb{N}$.

$$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n,\ 0! = 1.)$$

TODISTUS. Todistetaan väite induktioperiaatetta käyttäen.

1° $n = 0$:

$$(0+1)! = 1! = 1 \geq 1 = 2^0,$$

joten väitetty epäyhtälö pätee, kun $n = 0$.

2° Induktioaskel:

Oletetaan, että epäyhtälö pätee jollakin $n = k$, $k \geq 0$, ja osoitetaan, että tästä seuraa, että epäyhtälö on voimassa myös kun $n = k+1$:

Induktio-oletus: $(k+1)! \geq 2^k$.

Induktioväite: $(k+2)! \geq 2^{k+1}$.

Todistus:

$$\begin{aligned} (k+2)! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k(k+1)(k+2) = (k+1)!(k+2) \\ &\geq 2^k(k+2) \geq 2^k \cdot 2 = 2^{k+1}. \end{aligned}$$

Epäyhtälöistä ensimmäinen saadaan induktio-oletuksesta ja toinen arviosta $k+2 \geq 2$, joka on voimassa koska $k \geq 0$.

□

3.5 Neliöksi täydentäminen

Neliöksi täydentäminen perustuu kaavojen

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \qquad \text{ja} \qquad a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

hyödyntämiseen. Ideana on yksinkertaisesti kirjoittaa toisen asteen polynomilauseke “väkisin” neliömuotoon, jolloin lausekkeen käyttäytymisen tutkiminen on helpompaa.

Neliöksi täydentämisen havainnollistamiseksi tutkitaan toisen asteen polynomifunktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$, ja erityisesti sen tiettyjä erikoistapauksia.

(i) $f(x) = x^2$ perusparaabeli

(ii) $f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}$; perusparaabelin “skaalaus ja/tai peilaus”.

(iii) $f(x) = (x-d)^2$. Nyt $f(x) = 0 \iff x = d$, eli kyseessä on perusparaabelin “x-akselin suuntainen siirto”.

(iv) $f(x) = x^2 + c$; “y-akselin suuntainen siirto”.

Kaikki muotoa $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R}$ olevat käyrät saadaan perusparaabelistä x^2 operaatioilla (ii)-(iv). Tämä nähdään neliöksi täydentämisen avulla.

Esimerkki 3.5.1. Esimerkkejä neliöksi täydentämisestä:

(a) Hahmottele funktion $f(x) = x^2 - 6x + 7$ kuvaajaa.

Täydennetään f:n lauseke neliöksi:

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 - 6x + 7 &= \left(x^2 + 2 \cdot x \cdot (-3) + (-3)^2\right) - (-3)^2 + 7 \\ &= (x-3)^2 - 9 + 7 = (x-3)^2 - 2. \end{aligned}$$

Funktion f kuvaaja saadaan siis siirtämällä perusparaabelin x^2 kuvaajaa 3 “yksikköä” oikealle ja 2 alas.

(b) Hahmottele funktion $g(x) = x - 5x^2$ kuvaajaa.

$$\begin{aligned} g(x) = x - 5x^2 &= -5\left(x^2 - \tfrac{1}{5}x\right) \\ &= -5\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \left(-\tfrac{1}{10}\right) + \left(-\tfrac{1}{10}\right)^2 - \left(-\tfrac{1}{10}\right)^2\right) \\ &= -5\left(\left(x - \tfrac{1}{10}\right)^2 - \tfrac{1}{100}\right) \\ &= -5\left(x - \tfrac{1}{10}\right)^2 + \tfrac{1}{20}. \end{aligned}$$

Siten g:n kuvaaja saadaan perusparaabelista seuraavilla operaatioilla: siirto oikealle $\frac{1}{10}$, skaalaus kertoimella 5, peilaus x-akselin suhteen ja lopuksi siirto $\frac{1}{20}$ ylös.

(c) Ratkaise epäyhtälö $3x^2 - 4x - 2 > 0$.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x - 2 &= 3\left(x^2 - \tfrac{4}{3}x - \tfrac{2}{3}\right) \\ &= 3\left(x^2 - 2 \cdot \tfrac{2}{3} \cdot x + \tfrac{4}{9} - \tfrac{4}{9} - \tfrac{2}{3}\right) \\ &= 3\left(\left(x - \tfrac{2}{3}\right)^2 - \tfrac{10}{9}\right). \end{aligned}$$

Siten

$$\begin{aligned} 3x^2 - 4x - 2 > 0 &\iff \left(x - \tfrac{2}{3}\right)^2 > \tfrac{10}{9} \\ &\iff \left|x - \tfrac{2}{3}\right| > \tfrac{\sqrt{10}}{3} \\ &\iff x\text{:n etäisyys luvusta } \tfrac{2}{3} \text{ suurempi kuin } \tfrac{\sqrt{10}}{3} \\ &\iff x < \tfrac{2-\sqrt{10}}{3} \text{ tai } x > \tfrac{2+\sqrt{10}}{3}. \end{aligned}$$

Tietysti on muitakin tapoja ratkaista tehtävä.

3.5.1 Kartioleikkauksista

Palautetaan mieleen ympyrän, ellipsin ja hyperbelin yhtälöt:

- Ympyrä, jonka keskipiste on (x_0, y_0) ja säde $r > 0$ koostuu niistä tason pisteparеista (x, y), joiden etäisyys keskipisteestä on r:

  $$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = r \iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

  mikä voidaan kirjoittaa muodossa

  $$\frac{(x - x_0)^2}{r^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r^2} = 1.$$

- Ellipsi, jonka keskipiste on (x_0, y_0) ja puoliakselit ovat koordinaattiakselien suuntaiset, pituuksiltaan a ja b, on esitettävissä muodossa

  $$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

  Ympyrä on siis erikoistapaus ellipsistä; se on ellipsi, jonka puoliakselien pituudet ovat yhtäsuuret.

- Hyperbelit, joista entuudestaan tuttuja ovat ainakin seuraavat kolme tyyppiä:

  (i) Hyperbelin

  $$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

  keskipiste on (x_0, y_0) ja asymptoottiset suorat

  $$y - y_0 = \pm\frac{|a|}{|b|}(x - x_0).$$

(ii) Edellisen liittohyperbeli:

$$-\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

eli

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=-1.$$

Sama keskipiste ja asymptoottiset suorat kuin edellisessä tapauksessa.

(iii)

$$(x-x_0)(y-y_0)=k, k\neq 0.$$

Asymptoottiset suorat $y=y_0$ ja $x=x_0$.

Yleinen tilanne: Tutkitaan niiden pisteparien $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ joukkoa, joille

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+h=0.$$

Tässä $a,b,c,d,e,h\in\mathbb{R}$ ja vähintään yksi niistä poikkeaa nollasta. Osoittautuu, että yhtälön ratkaisujoukko esittää jotain seuraavista (jossakin koordinaatistossa):

- pistettä (= nollasäteinen ympyrä),
- suoraa (kun $a=b=c=0$),
- kahta suoraa (esimerkiksi $x^2-1=0$ tai $xy=0$),
- ympyrää,
- ellipsiä,
- paraabeliä,
- hyperbeliä,
- tyhjää joukkoa $\emptyset$ (esimerkiksi $x^2+2=0$).

Esimerkki 3.5.2. Seuraavassa kaksi esimerkkiä kartioleikkauksista.

(a) Millaista joukkoa esittää yhtälön

$$2x^2+y^2-4x-10=0$$

ratkaisujoukko?

Yhtälössä ei esiinny “sekatermiä” xy, joten voimme käyttää neliöksi täydentämistä erikseen sekä x:n että y:n suhteen:

$$\begin{aligned} 2x^2 + y^2 - 4x - 10 &= \left(\sqrt{2}x\right)^2 - 2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}x\right) + 2 + y^2 - 12 \\ &= \left(\sqrt{2}x - \sqrt{2}\right)^2 + y^2 - 12 \\ &= 2(x-1)^2 + y^2 - 12 = 0, \end{aligned}$$

josta saadaan

$$\frac{(x-1)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} = 1.$$

Siis ratkaisujoukko on ellipsi, jonka keskipiste on (1,0) ja puoliakselien pituudet $\sqrt{6}$ ja $2\sqrt{3}$.

(b) Millaista joukkoa esittää yhtälön

$$xy - 2x = 1$$

ratkaisujoukko?

Muistetaan, että $xy = k$ on hyperbeli.

$$xy - 2x = 1 \iff x(y-2) = 1.$$

Siis ratkaisujoukko on hyperbeli, jonka asymptootiset suorat ovat $x = 0$ (y-akseli) ja suora $y = 2$. Tämä hyperbeli saadaan tutummasta hyperbelistä $xy = 1$ “nostamalla” sitä 2 yksikköä.

Esimerkki 3.5.3. Olkoon meillä annettu origokeskeinen hyperbeli

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mitä kertovat luvut a ja b?

Koska hyperbelin ja x-akselin leikkauspisteissä on $y = 0$, nämä leikkauspisteet saadaan yhtälöstä

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \iff x = \pm a.$$

Sen sijaan y-akselia hyperbeli ei leikkaa, sillä yhtälöllä

$$-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

ei ole ratkaisuja.

Määritetään seuraavaksi asymptoottiset suorat:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 &\iff \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\\ &\iff y^2=\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2\\ &\iff y=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}.\end{aligned}$$

Mitä tapahtuu, kun $|x|$ on hyvin suuri?

$$\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}=\pm\frac{|b|}{|a|}|x|\underbrace{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}_{\approx 1}.$$

Siten hyperbeli lähestyy (asymptoottisesti) suoria $y=\pm\frac{|b|}{|a|}x$ kun $|x|\to\infty$.

Luku 4

Funktioista

4.1 Funktioihin liittyviä peruskäsitteitä

Funktio eli kuvaus on ehdottomasti yksi matematiikan keskeisimmistä käsitteitä. Matematiikan opiskelija törmää funktioihin jokaisella kurssilla, ja siksi funktioihin liittyvien määritelmien ja käsitteiden hallinta on erittäin tärkeää.

Määritelmä 4.1.1. Olkoot A ja B mitä tahansa epätyhjiä joukkoja. *Kuvaus* eli *funktio*

$$f : A \to B$$

on sääntö, joka liittää jokaiseen joukon A alkioon $a \in A$ täsmälleen yhden joukon B alkion $f(a) \in B$.

Tätä merkitään myös $a \mapsto f(a)$ $(a \in A, f(a) \in B)$, ja sanotaan, että $f(a)$ on funktion f *arvo pisteessä* $a \in A$, tai että $f(a)$ on a:n *kuva* (tai kuvapiste) kuvauksessa f, tai että alkio (piste) a *kuvautuu* alkioksi (pisteeksi) $f(a)$ kuvauksessa f.

Joukkoa A kutsutaan kuvauksen $f : A \to B$ *määrittelyjoukoksi* tai *lähtöjoukoksi*, ja joukkoa B kuvauksen *maalijoukoksi*.

Huomautus 4.1.2. Kuvaus muodostuu siis kolmikosta (f, A, B). Erityisesti kaksi kuvausta $f : A \to B$ ja $g : C \to D$ ovat samat, jos $A = C$, $B = D$ ja $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in A = C$.

Esimerkki 4.1.3. Esimerkkejä erilaisista kuvauksista:

(a) Olkoot $A = \{a, b, c\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$. Määritellään funktio $f : A \to B$ seuraavasti:

$$f(a) = 2, \ f(b) = 3, \ f(c) = 2.$$

Nyt siis $f(a) = f(c)$, mutta tätä ei ole millään tavalla kielletty kuvauksen määritelmässä.

(b) Ympyräkiekon pinta-ala P riippuu ympyrän säteestä r kaavan $P = \pi r^2$ mukaisesti. Tämä vastaavuus määrittelee funktion

$$P : [0, \infty[\to [0, \infty[,\ \ P(r) = \pi r^2.$$

(c) Olkoon

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Miesten EM-maratonin osanottajat}\} \text{ ja} \\ B &= \{\text{Euroopan valtiot}\}. \end{aligned}$$

Määritellään kuvaus $f : A \to B,\ f(x) = x$:n edustama valtio. Silloin

$$f(\text{Janne Holmén}) = \text{Suomi}.$$

(d) Olkoon

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{\text{toisen asteen polynomifunktiot}\} \\ &= \{P :\ \ P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx + c,\ \text{missä } a, b, c \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Määritellään kuvaus

$$f : \mathcal{P} \to \mathbb{R},\ \ f(P) = \int_0^1 P(x)\,dx.$$

Siis esimerkiksi jos $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \ Q(x) = x^2 + 3$, niin $Q \in \mathcal{P}$ ja

$$f(Q) = \int_0^1 x^2 + 3\,dx = 3\frac{1}{3}.$$

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + 1$ (tai $x \mapsto x^3 + 1$).

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, y) = (2x + y, x - 3y)$. Siis esimerkiksi

$$\begin{aligned} &f(1, -1) = (2 \cdot 1 + (-1), 1 - 3 \cdot (-1)) = (1, 4). \\ &f(2, 1) = (5, 1). \end{aligned}$$

4.1.1 Kuvajoukko ja alkukuva

Määritelmä 4.1.4. Olkoon $f : A \to B$ kuvaus. Joukon $U \subset A$ *kuvajoukko* on joukko

$$\begin{aligned} f(U) &= \{f(a) : a \in U\} \\ &= \{b \in B : \exists\, a \in U \text{ siten, että } f(a) = b\} \subset B \end{aligned}$$

eli joukon U pisteiden kuvapisteiden muodostama joukko.

Joukon $V \subset B$ *alkukuva* on joukko

$$f^{-1}(V) = \{a \in A : f(a) \in V\} \subset A$$

eli ne pisteet, jotka kuvautuvat joukkoon V.

Huomautus 4.1.5. (i) Erityisesti

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\} \subset B$$

on kuvauksen f kuvajoukko. Nyt siis $f(A) \subset B$, mutta *ei* tarvitse olla $f(A) = B$. Esimerkiksi tästä kelpaa Esimerkin 4.1.3 kohta (a) tai funktio

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2.$$

(ii) Joukon $V \subset B$ alkukuva $f^{-1}(V)$ kuvauksessa $f : A \to B$ on aina määritelty (olivatpa f, A ja B mitä tahansa). Se voi olla tyhjä joukko, koko joukko A tai jotain näiden väliltä.

Esimerkki 4.1.6. Esimerkkejä kuvajoukoista ja alkukuvista.

(a) Olkoot

$$A = \{a, b, c\},\ B = \{1, 2, 3, 4\}$$

ja määritellään kuvaus $f : A \to B$ kuten Esimerkin 4.1.3 kohdassa (a):

$$f(a) = 2, f(b) = 3, f(c) = 2.$$

Olkoot $U_1 = \{a, b\},\ U_2 = \{a, c\},\ V_1 = \{1, 4\}$ ja $V_2 = \{1, 2\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} f(U_1) &= \{2, 3\} \\ f(U_2) &= \{2\} \\ f^{-1}(V_1) &= \emptyset \\ f^{-1}(V_2) &= \{a, c\} \end{aligned}$$

Huomaa, että vaikka $U_2 = f^{-1}(V_2)$, niin $f(U_2) \neq V_2$.

(b) Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2$. Olkoot $U = [0, 2]$ ja $V = [-1, 1]$. Määritetään $f(U)$ ja $f^{-1}(V)$.

Määritelmän mukaisesti

$$f(U) = \{f(x) : x \in U\} = \{x^2 - 2 : x \in [0, 2]\} = [-2, 2]$$

ja

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in V\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 2 \in [-1, 1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x^2 - 2 \leq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x^2 \leq 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq |x| \leq \sqrt{3}\} \\ &= [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}]. \end{aligned}$$

(c) Olkoon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (2x+y, x-3y)$. Olkoot

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \tfrac{1}{3}x + 1\}, \\ V &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u = v\}. \end{aligned}$$

Määritetään $f(U)$ ja $f^{-1}(V)$.

$$\begin{aligned} f(U) &= \{f(x,y) : (x,y) \in U\} \\ &= \{(2x+y, x-3y) : y = \tfrac{1}{3}x + 1, x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(2x + \tfrac{1}{3}x + 1, x - x - 3) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(\tfrac{7}{3}x + 1, -3) : x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : v = -3, u \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \in V\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (\overbrace{2x+y}^{=u}, \overbrace{x-3y}^{=v}) \in V\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y = x - 3y\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4y = -x\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{1}{4}x\}. \end{aligned}$$

(d) Olkoon

$$\begin{aligned} &A = \{\text{Miesten EM-maratonin osanottajat}\} \\ &B = \{\text{Euroopan valtiot}\} \\ &f : A \to B,\ f(x) = x\text{:n edustama valtio} \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} &f(\text{mitalistit}) = \{\text{Suomi, Viro, Espanja}\}, \\ &f^{-1}(\{\text{Suomi}\}) = \{\text{Holmén, Pesonen}\}. \end{aligned}$$

(e) Olkoon $f : A \to B$ kuvaus, ja olkoot $V_1 \subset B$ ja $V_2 \subset B$ joukkoja siten, että $V_1 \subset V_2$. Tällöin

$$f^{-1}(V_1) \subset f^{-1}(V_2).$$

Todistus. Olkoon $x \in f^{-1}(V_1)$ mielivaltainen. Meidän on osoitettava, että $x \in f^{-1}(V_2)$:

Koska $x \in f^{-1}(V_1)$, niin alkukuvan määritelmän mukaan $f(x) \in V_1$. Koska $V_1 \subset V_2$, niin tästä seuraa, että $f(x) \in V_2$. Siten alkukuvan määritelmän nojalla $x \in f^{-1}(V_2)$, mikä haluttiinkin osoittaa. $\square$

4.1.2 Yhdistetty kuvaus

Määritelmä 4.1.7. Olkoot $g : A \to B$ ja $f : B \to C$ kuvauksia. Tällöin niiden *yhdistetty kuvaus* on kuvaus

$$f \circ g : A \to C, (f \circ g)(a) = f\left(g(a)\right).$$

(Huomaa järjestys!)

Esimerkki 4.1.8. Esimerkkejä kuvausten yhdistämisestä:

(a) Olkoot

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 1 \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \sin x \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} f \circ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = 3\sin x + 1, \\ g \circ f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1) = \sin(3x + 1). \end{aligned}$$

Erityisesti siis $f \circ g \neq g \circ f$, vaikka molemmat ovat kuvauksia $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(b) Olkoot

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x + y, \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ g(t) = (t^2, 2 - t). \end{aligned}$$

Tällöin

$$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (f \circ g)(t) = f(g(t)) = f(t^2, 2-t) = t^2 + 2 - t = t^2 - t + 2$$

ja

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (g \circ f)(x, y) &= g(f(x, y)) = g(x + y) \\ &= ((x + y)^2, 2 - (x + y)) \\ &= (x^2 + 2xy + y^2, 2 - x - y). \end{aligned}$$

Siis yhdistetyt kuvaukset $f \circ g$ ja $g \circ f$ ovat molemmat olemassa, mutta kuvauksen $f \circ g$ sekä määrittely- että maalijoukko on $\mathbb{R}$, kun taas kuvauksen $g \circ f$ kohdalla määrittely- ja maalijoukko on $\mathbb{R}^2$.

(c) Olkoot

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x + y, \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(t) = t^2. \end{aligned}$$

Tällöin

$$g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x + y) = x^2 + 2xy + y^2,$$

mutta yhdistettyä kuvausta $f \circ g$ ei ole olemassa.

Yhteenveto. Olkoot f ja g kuvauksia.

(i) Yleensä *ei* ole olemassa yhdistettyjä kuvauksia $f \circ g$ tai $g \circ f$.

(ii) Vaikka esimerkiksi $f \circ g$ olisi olemassa, niin $g \circ f$:n *ei* tarvitse olla määritelty.

(iii) Vaikka $f \circ g$ ja $g \circ f$ olisivat molemmat määriteltyjä, niin ne yleensä *eivät* ole samat. (Jos et muista, niin kertaa mitä vaaditaan, jotta kuvaukset olisivat samat.)

Esimerkki 4.1.9. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$. Nyt voidaan muodostaa yhdistetty kuvaus

$$\begin{aligned} f \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = f(x^2+1) \\ &= (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2 \end{aligned}$$

ja edelleen

$$\begin{aligned} f \circ (f \circ f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \circ (f \circ f)(x) &= f(x^4 + 2x^2 + 2) \\ &= (x^4 + 2x^2 + 2)^2 + 1 \\ &= x^8 + 4x^6 + 8x^4 + 8x^2 + 5 \end{aligned}$$

ja niin edelleen. Usein merkitään

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ kpl}}$$

ja sanotaan, että f^n on f:n *n:s iteraatio.*

4.2 Kuvausten ominaisuuksia

4.2.1 Injektio ja surjektio

Olkoon $f : A \to B$ kuvaus. Tällöin voi aivan hyvin löytyä kaksi eri pistettä $a_1, a_2 \in A$ niin, että $f(a_1) = f(a_2)$. Toisaalta voi löytyä piste $b \in B$, jolle $f(a) \neq b$ kaikilla pisteillä $a \in A$, toisin sanoen mikään joukon A pisteistä ei kuvaudu pisteeksi b. Kuvaukset, joissa *ei* tapahdu jompaa kumpaa tai kumpaakaan näistä ilmiöistä, ovat matematiikassa erikoisasemassa.

Esimerkki 4.2.1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$. Nyt

$$f(0) = f(2\pi) = f(4\pi) = 0$$

ja

$$f(x) \neq 10 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \text{ sillä } -1 \leq f(x) \leq 1.$$

Funktio f on siis esimerkki kuvauksesta, jolla on molemmat edellä mainitut ominaisuudet.

Määritelmä 4.2.2. Kuvaus $f : A \to B$ on *injektio*, jos se kuvaa eri pisteet eri arvoiksi, eli jos pätee

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2) \quad \text{kaikille } a_1, a_2 \in A.$$

Esimerkki 4.2.3. Injektioita ja ei-injektioita:

(a) Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$ ei ole injektio, sillä $f(0) = f(2\pi)$.

(b) Aiemmin esillä ollut “maratonkuvaus” (ks. Esimerkki 4.1.3) ei ole injektio, sillä f(Holmén)=f(Pesonen)=Suomi.

Huomautus 4.2.4. Injektiivisyys voidaan ilmaista myös seuraavilla tavoilla:

(i) $f : A \to B$ injektio $\iff$ jokaiseen pisteeseen $b \in B$ kuvautuu korkeintaan yksi (siis tasan yksi tai ei yhtään) määrittelyjoukon A alkio.

(ii) $f : A \to B$ injektio $\iff$ ehdosta $f(a_1) = f(a_2)$ seuraa $a_1 = a_2$ kaikilla $a_1, a_2 \in A$

Todistus. ”$\Rightarrow$”: Antiteesi: $\exists\, a_1, a_2 \in A$ siten, että $f(a_1) = f(a_2)$, mutta $a_1 \neq a_2$. Tällöin f ei kuitenkaan voi olla injektio, sillä se kuvaa eri pisteet a_1 ja a_2 samaksi arvoksi. Niinpä antiteesi on epätosi ja väite totta.

”$\Leftarrow$”: Olkoot $a_1, a_2 \in A$ siten, että $a_1 \neq a_2$. Jos olisi $f(a_1) = f(a_2)$, niin oletuksesta seuraisi $a_1 = a_2$, mikä olisi ristiriita. Siispä $f(a_1) \neq f(a_2)$. Näin ollen f on injektio. $\square$

Esimerkki 4.2.5. Injektiivisyyden tutkiminen:

(a) Tutki, onko kuvaus

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x - y$$

injektio vai ei.

Käytetään edellisen huomautuksen kohtaa (ii). Oletetaan, että pisteparit $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ ovat sellaisia, että $f(x, y) = f(x', y')$. Seuraako tästä, että $(x, y) = (x', y')$?

$$f(x, y) = f(x', y') \iff x - y = x' - y' \iff x - x' = y - y'.$$

Huomaamme, että yhtäsuuruus $f(x, y) = f(x', y')$ voi olla voimassa vaikka olisi $x \neq x'$ ja $y \neq y'$. Esimerkiksi

$$\begin{aligned} f(1, 2) &= -1, \\ f(3, 4) &= -1. \end{aligned}$$

Siten f ei ole injektio.

(b) Tutki, onko kuvaus

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(t) = (2t, t^3)$$

injektio vai ei.

$$\begin{aligned} f(t) = f(s) &\Rightarrow (2t, t^3) = (2s, s^3) \\ &\Rightarrow 2t = 2s \text{ ja } t^3 = s^3 \\ &\Rightarrow t = s. \end{aligned}$$

$\therefore f$ on injektio.

Injektiivisyyden ohella toinen tärkeä kuvausominaisuus on surjektiivisuus. Nämä kaksi ominaisuutta ovat toisistaan riippumattomia: injektiivisyyden perusteella ei voi (yleisesti ottaen) päätellä mitään kuvauksen surjektiivisuudesta, ja päinvastoin.

Määritelmä 4.2.6. Kuvaus $f : A \to B$ on *surjektio*, jos $f(A) = B$, eli jos jokaisella $b \in B$ on olemassa ainakin yksi $a \in A$ siten, että $f(a) = b$.

Esimerkki 4.2.7. Surjektioita ja ei-surjektioita:

(a) Olkoon f "maratonkuvaus". Mitä tarkoittaa surjektiivisuus tässä tapauksessa?

(b) Kuvaus

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin x$$

ei ole surjektio, sillä kuvajoukko $f(\mathbb{R}) = [-1, 1] \neq \mathbb{R}$. Sen sijaan kuvaus

$$g : \mathbb{R} \to [-1, 1],\ g(x) = \sin x$$

on surjektio. Huomaa, että f ja g ovat eri kuvauksia!

(c) Olkoon

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x - y.$$

Onko f surjektio?

Olkoon $t \in \mathbb{R}$ mikä tahansa. Löytyykö lukuparia $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ siten, että $f(x, y) = t$?

$$f(x, y) = t \iff x - y = t.$$

Jos valitaan $(x, y) = (t, 0) \in \mathbb{R}^2$, niin silloin

$$f(x, y) = f(t, 0) = t.$$

Tämä voidaan tehdä kaikille $t \in \mathbb{R}$, joten määritelmän mukaan f on surjektio.

(d) Olkoon
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ f(t) = (2t, t^3).$$

Onko f surjektio?

Olkoon $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mielivaltainen. Löytyykö alkiota $t \in \mathbb{R}$ siten, että $f(t) = (x, y)$?

$$\begin{aligned} f(t) = (x, y) &\iff (2t, t^3) = (x, y) \\ &\iff x = 2t \text{ ja } y = t^3 = \left(\tfrac{1}{2}x\right)^3 = \tfrac{1}{8}x^3. \end{aligned}$$

Mutta nyt (x, y) ei saa enää olla mielivaltainen, koska on oltava $y = \frac{1}{8}x^3$. Esimerkiksi, jos on $(x, y) = (2, 0)$ (huomaa: $0 \neq 1 = \frac{1}{8} \cdot 2^3$), niin

$$\begin{aligned} f(t) = (2, 0) &\iff (2t, t^3) = (2, 0) \\ &\iff 2t = 2 \text{ ja } t^3 = 0 \\ &\iff t = 1 \text{ ja } t = 0 \text{ ristiriita!} \end{aligned}$$

Koska siis $f(t) \neq (2, 0)$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$, ei kuvaus f ole surjektio.

Määritelmä 4.2.8. Kuvaus $f : A \to B$ on *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio.

Muista. Injektiivisyyteen ja surjektiivisuuteen liittyen on hyvä muistaa, että

(i) injektiivisyys ja surjektiivisuus ovat toisistaan riippumattomia ominaisuuksia. Kumpikaan ei seuraa toisesta.

(ii) yleensä kuvauksella ei ole kumpaakaan näistä ominaisuuksista.

4.2.2 Käänteiskuvaus

Olkoon $f : A \to B$ kuvaus. Jos f on bijektio, eli siis sekä surjektio että injektio, niin jokaista $b \in B$ vastaa täsmälleen yksi $a \in A$ siten, että $f(a) = b$: surjektiivisuuden nojalla annetulle $b \in B$ löytyy ainakin yksi tällainen alkio $a \in A$, ja injektiivisyys puolestaan takaa sen, ettei mikään muu joukon A piste voi kuvautua b:ksi.

Siten on olemassa sääntö, joka liittää jokaiseen joukon B alkioon täsmälleen yhden joukon A alkion. Näin saadaan kuvaus $g : B \to A$, jolle $g(b) =$ "se yksikäsitteinen a, joka toteuttaa yhtälön $f(a) = b$".

Määritelmä 4.2.9. Olkoon $f : A \to B$ kuvaus. Kuvaus $g : B \to A$ on f:n *käänteiskuvaus*, jos
$$f(g(b)) = b \text{ kaikilla } b \in B$$

ja

$$g(f(a)) = a \text{ kaikilla } a \in A,$$

toisin sanoen

$$f \circ g : B \to B \text{ on joukon } B \textit{ identtinen } \text{kuvaus}$$

ja

$$g \circ f : A \to A \text{ on joukon } A \textit{ identtinen } \text{kuvaus.}$$

Jos käänteiskuvaus on olemassa, se on yksikäsitteinen ja sitä merkitään symbolilla $f^{-1} : B \to A$.

Yleensä annetulla kuvauksella ei ole käänteiskuvausta. Riittävä ja välttämätön ehto käänteiskuvauksen olemassaoloon on kuvauksen bijektiivisyys.

Lause 4.2.10. *Olkoon $f : A \to B$ kuvaus. Tällöin*

$$\textit{on olemassa käänteiskuvaus } f^{-1} : B \to A \iff f \textit{ on bijektio.}$$

TODISTUS.

"$\Rightarrow$": oletetaan, että f:llä on käänteiskuvaus, ja osoitetaan tämän perusteella f:n olevan sekä injektio että surjektio.

1° f on injektio: Olkoon $a_1, a_2 \in A$ siten, että $f(a_1) = f(a_2)$. Haluamme osoittaa, että $a_1 = a_2$.

Käänteiskuvauksen määritelmän ja oletuksen $f(a_1) = f(a_2)$ avulla saamme

$$a_1 = f^{-1}(f(a_1)) = f^{-1}(f(a_2)) = a_2.$$

Siten f on injektio.

2° f on surjektio: Olkoon $b \in B$ mielivaltainen. Haluamme löytää alkion $a \in A$ siten, että $f(a) = b$.

Nyt alkiolle $f^{-1}(b) \in A$ (alkion b kuvapiste kuvauksessa $f^{-1} : B \to A$) pätee

$$f(f^{-1}(b)) = b,$$

joten etsitty alkio a löytyy kun valitaan $a = f^{-1}(b)$. Siten f on surjektio.

"$\Leftarrow$": oletetaan, että f on bijektio, ja osoitetaan tämän perusteella, että f:llä on olemassa käänteiskuvaus.

Määritellään kuvaus

$$g : B \to A,\ g(b) = \text{“se } a\text{, jolle } f(a) = b\text{”.}$$

Tämä todellakin määrittelee kuvauksen, sillä bijektiivisyyden nojalla jokaisella $b \in B$ on olemassa täsmälleen yksi $a \in A$ siten, että $f(a) = b$. On helppo nähdä, että

$$f(g(b)) = b \text{ kaikilla } b \in B$$

ja

$$g(f(a)) = a \text{ kaikilla } a \in A,$$

joten g on f:n käänteiskuvaus.

$\square$

Esimerkki 4.2.11. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x - 1$. Osoitetaan, että f on bijektio ja etsitään sen käänteiskuvaus.

1° f on injektio:

$$f(x) = f(y) \iff 3x - 1 = 3y - 1 \iff x = y.$$

Erityisesti siis ehdosta $f(x) = f(y)$ seuraa aina $x = y$, eli kuvaus f on injektio.

2° f on surjektio: Olkoon $t \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Halutaan löytää $x \in \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = t$.

$$f(x) = t \iff 3x - 1 = t \iff 3x = t + 1 \iff x = \tfrac{t+1}{3}.$$

Siis $f(\frac{t+1}{3}) = t$.

$\therefore$ 1° ja 2° $\implies$ f on bijektio $\Rightarrow$ f:llä on käänteiskuvaus ja se on

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f^{-1}(t) = \frac{t+1}{3},$$

sillä

$$f \circ f^{-1}(t) = f\left(\frac{t+1}{3}\right) = t,$$
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(3x - 1) = \frac{(3x-1)+1}{3} = x.$$

Huomaa, että käänteisfunktion lauseke löydettiin kuvauksen surjektiivisuuden osoittamisen yhteydessä.

Huomautus 4.2.12. Älä sekoita alkukuvaa ja käänteiskuvausta!!

(i) Jos $f : A \to B$ on kuvaus, niin joukon $V \subset B$ alkukuva $f^{-1}(V)$ on *aina* olemassa, kun taas käänteiskuvaus $f^{-1} : B \to A$ on olemassa jos ja vain jos f on bijektio.

(ii) Olkoon $f : A \to B$ bijektio ja $b \in B$. Jos merkitään $V = \{b\} \subset B$, niin
$$f^{-1}(V) = \{f^{-1}(b)\},$$
ts. joukon $V = \{b\}$ alkukuva on sama kuin alkion $b \in B$ kuvapisteen $f^{-1}(b)$ muodostama joukko.

Lause 4.2.13. *Jos $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ ovat bijektioita, niin yhdistetty kuvaus*
$$g \circ f : A \to C, \ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$
on bijektio, ja sen käänteiskuvaus on
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Todistus.

1° $g \circ f$ on injektio:

Olkoot $a_1, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$. Tällöin f:n injektiivisyyden perusteella a_1 ja a_2 kuvautuvat eri pisteiksi,
$$f(a_1) \neq f(a_2),$$
josta taas g:n injektiivisyyden nojalla seuraa
$$g(f(a_1)) \neq g(f(a_2)),$$
eli
$$(g \circ f)(a_1) \neq (g \circ f)(a_2).$$
Siten $g \circ f$ on injektio.

2° $g \circ f$ on surjektio:

Olkoon $c \in C$. Haluamme löytää $a \in A$ siten, että
$$(g \circ f)(a) = c.$$
Koska $g : B \to C$ on surjektio, on olemassa $b \in B$ siten, että
$$g(b) = c.$$
Koska $f : A \to B$ on surjektio, on olemassa $a \in A$ siten, että
$$f(a) = b.$$
Siten
$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = c.$$

3° $g \circ f$:n käänteiskuvaus on $f^{-1} \circ g^{-1}$:

Koska f ja g ovat molemmat bijektioita, ovat käänteiskuvaukset $f^{-1} : B \to A$ ja $g^{-1} : C \to B$ olemassa. Lisäksi niiden yhdistetty kuvaus $f^{-1} \circ g^{-1} : C \to A$ on hyvin määritelty. Käänteiskuvauksen määritelmän perusteella saamme

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})(c) &= (g \circ f)(f^{-1} \circ g^{-1}(c)) \\ &= g(f(f^{-1}(g^{-1}(c)))) \\ &= g(g^{-1}(c)) = c\end{aligned}$$

kaikille $c \in C$. Vastaavasti

$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)(a) &= (f^{-1} \circ g^{-1})(g \circ f(a)) \\ &= f^{-1}(g^{-1}(g(f(a)))) \\ &= f^{-1}(f(a)) = a\end{aligned}$$

kaikille $a \in A$. Siten $g \circ f$:n käänteiskuvaus on $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□