JOHDATUS MATEMATIIKKAAN

"Toitteko minulle ihmisen, joka ei osaa laskea sormiaan?"
Kuolleiden kirja

JYVÄSKYLÄN YLIOPISTO
MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Alkusanat

Tämä tiivistelmä on allekirjoittaneen vuosina 2004 ja 2005 pitämistä johdatus matematiikkaan -kurssien luennoista. Luentotiivistelmän tarkoitus on osaltansa helpottaa matematiikkaa aloittavien opiskelijoiden urakkaa ja myöskin olla yritys yhtenäistää eri vuosina luennoitavien johdantokurssien sisältöä. Olen luentoja laatiessa pitänyt pääasiallisena lähteenä Lauri Kahanpään, Harri Högmanderin ja Matti Hannukaisen monistetta [**3**]. Myös kurssia aikaisemmin luennoineilla, erityisesti Petri Juutisella ja Esa Järvenpäällä, on ollut vaikutusta sisältöön.

Jyväskylässä syksyllä 2005

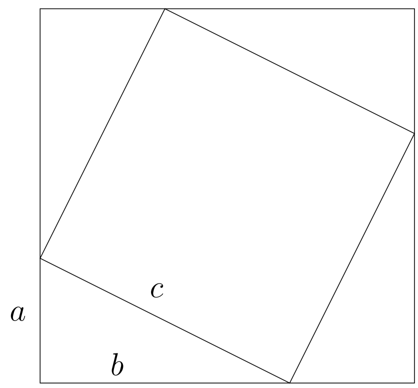
Antti Käenmäki

Sisältö

1. Mitä matematiikka on?

Matematiikka ei ole pelkästään mekaanista laskemista ja kaavaan sijoittamista. Usein itse laskeminen onkin matematiikan tekemisessä vain apuvälineen roolissa. Sanotaan, että matematiikka on tietyistä alkuehdoista (aksioomat) johdettavien deduktiivisten päättelyketjujen (todistusten) muodostamia tosia lauseita, teoreemia[1]. Siten matematiikassa, päin vastoin kuin muissa tieteissä, ei ole korjauksia, vain laajennuksia.

Matematiikassa tehtävät päättelyt ovat siis deduktiivisia. Monisteen [**2**] mukaan deduktio on päättelyä yleisestä yksityiseen ja päättely on deduktiivinen, jos se säilyttää totuuden eli jos johtopäätös on oletusten looginen seuraus. Deduktio on peräisin kreikkalaisilta. Eukleideen geometrian kirjassa Elementa (Alkeet) otettiin muutamia väitteitä, joita ei millään tapaa todistettu, päättelyn lähtökohdiksi. Näitä ilmeisiä tosiasioita eli aksioomia hyväksi käyttäen perusteltiin kirjan muut väitteet. Kattava esitys matematiikan historiasta löytyy kirjasta [**1**].



Kuva A. Apukuva Pythagoraan lauseen todistukseen.

Esimerkki 1.1 (Pythagoraan lauseen todistus). Halutaan osoittaa, että suorakulmaiselle kolmiolle pätee

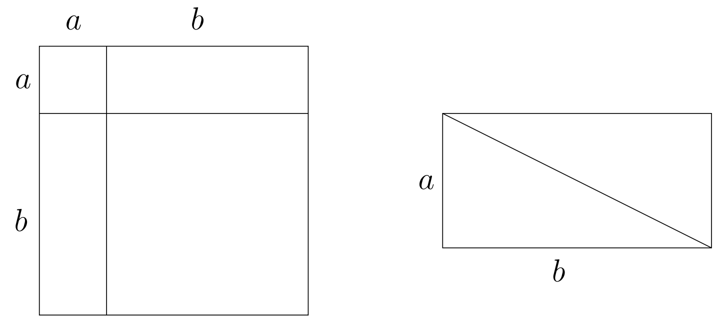
$$a^2 + b^2 = c^2,$$

missä a ja b ovat kateettien pituudet ja c hypotenuusan pituus. Kuvan A avulla havaitaan, että kuvan ison neliön pinta-ala on $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ja toisaalta se on myös neljän kolmion ala plus pienen neliön ala eli $4\frac{ab}{2} + c^2 = 2ab + c^2$. Näin ollen $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$, eli $a^2 + b^2 = c^2$ niinkuin haluttiinkin.

Perustelu näyttää aukottomalta. Onko tämä todistus Pythagoraan lauseelle? Lähemmin tarkastellen huomataan, että päättelyssä käytettiin esimerkiksi tietoa

[1] Usein myös sanotaan, että matematiikka on sitä mitä matemaatikot tekevät.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ja suorakulmaisen kolmion alan kaavaa. Ilmeistä on, että nämä eivät ole aksioomia, joten niiden on seurattava jostain. Seuraavat kuviot perustelevat edellä mainitut tiedot:



Kuva B. Suorakulmion alasta saadaan johdettua esimerkiksi neliöimiskaava ja suorakulmaisen kolmion alan kaava.

Seuraavaksi voisi sitten kysyä miksi suorakulmion ala on sivujen pituuksien tulo ja miksi yhdenmuotoisilla kolmioilla on sama ala. Näin jatkaen lopulta päästään tilanteeseen, jossa jokainen välivaihe on perusteltavissa aksioomilla. Tämä on todistus Pythagoraan lauseelle. Tosin yleensä näin pitkälle ei tarvitse mennä. Usein sanotaankin, että todistus on päättelyketju, joka on perusteltu tarkasti. Tässä tarkasti perusteleminen tarkoittaa sitä, että jos voidaan perustella päättelyä aikaisemmin osoitetuilla tai muuten tunnetuilla tuloksilla, niin tehdään niin. Näin ollen Esimerkin 1.1 päättelyketjua voidaan pitää todistuksena Pythagoraan lauseelle.

Tällä kurssilla osa materiaalista perustellaan aksiomaattisesti, esimerkiksi päättelysäännöt luvussa 2, ja osassa taas lähdetään liikkeelle ”keskeltä”, esimerkiksi joukko-opin kanssa luvussa 7. Joukko-opin aksioomia voi tarkastella esimerkiksi monisteen [**3**] kappaleesta 7.2.

Harjoitustehtäviä

1.1. Kaupunkisuunnistaja etenee pohjoiseen a metriä, hissillä ylöspäin b metriä ja itään c metriä. Mikä on suunnistajan kulkema matka linnuntietä pitkin?

---

2. Päättelemisestä ja lauselogiikasta

Logiikka (kreik. *logos* "sana", "järki") on oppia oikeasta ajattelusta. Monisteen [**2**] mukaan logiikka on kiinnostunut totuuden säilyttävistä päätelmistä, joissa johtopäätös on oletusten looginen seuraus. Logiikkaa, joka tutkii väitelauseita ja niiden välisiä suhteita, sanotaan *lauselogiikaksi*. Tässä *väitelause* on lause, joka on joko totta (merk. T) tai epätotta (merk. E).

Esimerkki 2.1. Seuraavat lauseet ovat väitelauseita:

(a) $5 > 18$,
(b) Hauki on kala,
(c) $9 \geq 9$,
(d) Naisilla on pitkät hiukset.

Koska ne ovat väitelauseita, on niillä myös totuusarvot. Mitkä ne ovat? Seuraavat lauseet taas eivät ole väitelauseita:

(e) $2 + 3 - \sqrt{5}$,
(f) Naisella on pitkät hiukset,
(g) Tämä lause on epätosi.

2.1. Loogiset konnektiivit. *Loogisia konnektiiveja* ovat implikaatio "$\Rightarrow$", ekvivalenssi "$\Leftrightarrow$", negaatio "$\neg$", konjunktio "$\wedge$" ja disjunktio "$\vee$". Yhdistelemällä väitelauseita loogisilla konnektiiveilla saadaan *molekyylilauseita* (ts. uusia väitelauseita). Luetteloa, jossa esitetään kuinka molekyylilauseen totuusarvo riippuu siinä esiintyvien väitelauseiden totuusarvoista sanotaan *totuustaulukoksi*. Totuustaulukoiden avulla voidaan loogiset konnektiivit määritellä täsmällisesti. Nämä määritelmät ovat lauselogiikan aksioomia.

Olkoot P ja Q väitelauseita. Määritellään *implikaatio* ja *ekvivalenssi* seuraavasti:

Implikaatio:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	E	E
E	T	T
E	E	T

Ekvivalenssi:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	E	E
E	T	E
E	E	T

Implikaatio $P \Rightarrow Q$ voidaan lukea "jos P, niin Q" tai "P:stä seuraa Q" tai "Q on välttämätön ehto P:lle" tai "P on riittävä ehto Q:lle" tai "P vain jos Q". Jos esimerkiksi $P =$ "sataa" ja $Q =$ "on pilvistä", niin $(P \Rightarrow Q) =$ "jos sataa, niin on pilvistä". Huomaa, että molekyylilause $P \Rightarrow Q$ määriteltiin todeksi aina kun P on epätosi. Tämä johtuu siitä, että päättelyn oikeellisuus ei riipu oletuksen oikeellisuudesta. Jos nimittäin $P =$ "hauki on hevonen ja hevoset ovat kaloja" ja $Q =$ "hauki on kala", niin $P \Rightarrow Q$ virheetön päätelmä.

Ekvivalenssi $P \Leftrightarrow Q$ voidaan taas lukea ”P on yhtäpitävää Q:n kanssa” tai ”P jos ja vain jos Q” (mikä usein kirjoitetaan ”P joss Q”) tai ”P täsmälleen kun Q”. Huomaa, että ekvivalenssilla tarkoitetaan implikaatiota molempiin suuntiin.

Määritellään *negaatio*, *konjunktio* ja *disjunktio* seuraavasti:

Negaatio:

P	$\neg P$
T	E
E	T

Konjunktio:

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	E	E
E	T	E
E	E	E

Disjunktio:

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	E	T
E	T	T
E	E	E

Negaatio $\neg P$ luetaan ”ei P” tai ”ei ole totta, että P” tai ”P ei päde”. Esimerkiksi, jos $P =$ ”sataa”, niin $\neg P =$ ”ei sada”. Konjunktio $P \wedge Q$ taas luetaan ”P ja Q” ja disjunktio $P \vee Q$ luetaan ”P tai Q”. Huomaa, että disjunktio ei ole ”joko-tai”.

2.2. Tautologia. *Tautologia* on molekyylilause, joka on aina tosi riippumatta siinä esiintyvien väitelauseiden totuusarvoista.

Esimerkki 2.2. Olkoot P, Q ja S väitelauseita. Tällöin seuraavat molekyylilauseet ovat tautologioita:

(a) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$,
(b) $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$,
(c) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$,
(d) $P \vee (Q \wedge S) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee S)$,
(e) $P \wedge (Q \vee S) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge S)$,
(f) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \vee \neg P)$,
(g) $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow \big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)\big)$,
(h) $\neg\neg P \Leftrightarrow P$,
(i) $P \vee \neg P$,

Kohdan (a) perustelee seuraava totuustaulukko:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \Rightarrow Q$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
T	T	E	E	T	T	T
T	E	E	T	E	E	T
E	T	T	E	T	T	T
E	E	T	T	T	T	T

Esimerkiksi, jos $P =$ ”sataa” ja $Q =$ ”on pilvistä”, on molekyylilause ”jos sataa, niin on pilvistä” yhtäpitävää molekyylilauseen ”jos ei ole pilvistä, niin ei sada” kanssa.

Kohdan (b) perustelee seuraava totuustaulukko:

P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$	$\cdots \Leftrightarrow \cdots$
T	T	E	E	T	E	E	T
T	E	E	T	E	T	T	T
E	T	T	E	E	T	T	T
E	E	T	T	E	T	T	T

Muut kohdat ovat harjoitustehtäviä.

Tautologiat antavat siis loogisille konnektiiveille laskusääntöjä. Seuraavien tautologioiden merkitys selviää luvussa 3.

Esimerkki 2.3. Olkoot P, Q ja S väitelauseita. Tällöin seuraavat molekyylilauseet ovat tautologioita:

(a) $\big(P \wedge (P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q$,
(b) $\big(P \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)\big) \Rightarrow Q$,
(c) $\big(P \wedge ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow (S \wedge \neg S))\big) \Rightarrow Q$.

Kohdan (a) perustelee seuraava totuustaulukko:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$P \wedge (P \Rightarrow Q)$	$\big(P \wedge (P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q$
T	T	T	T	T
T	E	E	E	T
E	T	T	E	T
E	E	T	E	T

Kohta (b) nähdään suoraan kohdasta (a), sillä Esimerkin 2.2(a) nojalla $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ on tautologia.

Viimeinen kohta on harjoitustehtävä.

Harjoitustehtäviä

2.1. Mitkä seuraavista ovat väitelauseita:
- (a) Jyväskylän Harjulla on vesitorni,
- (b) jokaisella harjulla on vesitorni,
- (c) harjulla on vesitorni,
- (d) $0 \geq 2$,
- (e) kaikki reaaliluvut x toteuttavat ehdon $x \geq 2$,
- (f) $x \geq 2$.

2.2. Ovatko seuraavissa kohdissa tehdyt päättelyt oikein vai väärin:
- (a) Jos pidän integroimisesta, olen joko matemaatikko tai fyysikko. Minä pidän integroimisesta, mutta en ole kuitenkaan fyysikko. Siksipä minun täytyy olla matemaatikko.

(b) Jos olen matemaatikko tai fyysikko, pidän integroimisesta. Minä pidän integroimisesta, mutta en ole matemaatikko. Siten olen välttämättä fyysikko.
(c) Jos matematiikka on tylsää ja logiikka on vaikeaa, en mene johdatus matematiikkaan -kurssille. Jos logiikka ei ole vaikeaa, osaan ratkaista tämän tehtävän. Minä menen johdatus matematiikkaan -kurssille, mutta en kuitenkaan osaa ratkaista tätä tehtävää. Siispä matematiikka ei ole tylsää.

2.3. Kaksi poikaa, Matti ja Jussi, istuvat talon rappusilla.
”Olen Matti”, sanoo pojista tummatukkainen.
”Olen Jussi”, sanoo pojista vaaleatukkainen.
Jos tiedetään, että ainakin toinen pojista valehtelee, niin kumpi on kumpi?

2.4. Jos $P =$ ”sataa”, $Q =$ ”on pilvistä”, $R =$ ”tuulee” ja $S =$ ”aurinko paistaa”, niin kirjoita auki seuraavat molekyylilauseet:
(a) $P \Rightarrow Q$,
(b) $P \wedge Q \wedge \neg R$,
(c) $\neg(Q \wedge S)$,
(d) $S \vee (Q \wedge R)$.

2.5. Muodosta seuraaville väitelauseille negaatiot:
(a) Naisilla on pitkät hiukset,
(b) Hauki on kala ja kuusi on puu,
(c) Ei ole niin, että tämä tehtävä ei ole helppo,
(d) $0 \leq 1$.
Mieti lauseiden totuusarvoja.

2.6. Olkoon P ja Q väitelauseita. Muodosta seuraaville molekyylilauseille totuustaulukot:
(a) $P \wedge \neg P$,
(b) $\neg(P \Rightarrow Q)$,
(c) $\neg Q \wedge P$,
(d) $\neg(P \Rightarrow Q) \vee (\neg Q \wedge P)$.

3. Todistamisesta

Matematiikassa todistettavat lauseet ovat usein muotoa $P \Rightarrow Q$, missä P ja Q ovat väitelauseita. Tässä P:tä sanotaan *oletukseksi* ja Q:ta *väitteeksi*. Väitteen negaatiota $\neg Q$ sanotaan *antiteesiksi*. Tautologiat antavat päättelysäännöt väitteen Q johtamiseksi oletuksesta P. Hyvän päättelyn tulee olla oikea riippumatta siitä, sovelletaanko sitä tosiin tai epätosiin väitelauseisiin.

Pythagoraan lauseen tapauksessa

$$\begin{aligned} P &= \text{"suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet} \\ &\quad \text{ovat } a \text{ ja } b \text{ sekä hypotenuusan pituus } c\text{"}, \\ Q &= \text{"}a^2 + b^2 = c^2\text{"}. \end{aligned}$$

Esitellään seuraavaksi kolme tapaa todistaa muotoa $P \Rightarrow Q$ olevia lauseita.

3.1. Suora päättely. Suora päättely on analoginen seuraavan tautologian kanssa (ks. Esimerkki 2.3(a)):

$$\big(P \wedge (P \Rightarrow Q)\big) \Rightarrow Q.$$

"Jos oletus P on tosi ja implikaatio $P \Rightarrow Q$ on voimassa, niin myös väite Q on tosi".

Todistamisen idea käyttäen suoraa päättelyä:

(1) Leikitään, että oletus P on totta,
(2) Yritetään johtaa oletuksen avulla väite Q,
(3) Jos kohdassa 2 onnistutaan, niin myös väite Q on totta.

Todistus, jonka esitimme Pythagoraan lauseelle Esimerkissä 1.1 on suora päättely. Tarkastellaan suoran päättelyn tekemistä vielä seuraavalla esimerkkilauseella.

LAUSE 3.1. *Jos $x \geq 0$, niin $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 > 0$.*

TODISTUS. Tehdään suora päättely. Oletetaan siis, että $x \geq 0$. Tällöin selvästi $x-1 \geq -1$ ja siten $(x-1)^3 \geq (-1)^3 = -1 > -2$. Koska nyt $(x-1)^3+2 > 0$, on väite näytetty toteen, sillä $(x-1)^3 + 2 = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. $\square$

3.2. Käänteinen suora päättely. Käänteinen suora päättely on analoginen seuraavan tautologian kanssa (ks. Esimerkki 2.3(b)):

$$\big(P \wedge (\neg Q \Rightarrow \neg P)\big) \Rightarrow Q.$$

"Jos oletus P on tosi ja implikaatio $\neg Q \Rightarrow \neg P$ on voimassa, niin myös väite Q on tosi".

Todistamisen idea käyttäen käänteistä suoraa päättelyä:

(1) Leikitään, että oletus P on totta,
(2) Muodostetaan antiteesi $\neg Q$,
(3) Yritetään johtaa antiteesin avulla $\neg P$,
(4) Jos kohdassa 3 onnistutaan, niin antiteesi $\neg Q$ ei voi olla totta, joten väite Q on totta.

Tarkastellaan käänteisen suoran päättelyn tekemistä seuraavalla esimerkkilauseella (vrt. Lause 3.1).

Lause 3.2. *Jos* $x \geq 0$*, niin* $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 > 0$.

Todistus. Tehdään käänteinen suora päättely. Muodostetaan antiteesi eli oletetaan vastoin väitettä, että $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \leq 0$. Koska $(x-1)^3 + 2 = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, on $(x-1)^3 \leq -2 < -1 = (-1)^3$. Näin ollen $x - 1 < -1$, eli $x < 0$. Tämä on ristiriidassa oletuksen kanssa, joten antiteesin on oltava epätosi. Siispä väite on tosi. □

3.3. Epäsuora päättely. Epäsuora päättely on analoginen seuraavan tautologian kanssa (ks. Esimerkki 2.3(c)):

$$\big(P \wedge ((P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (S \wedge \neg S))\big) \Rightarrow Q.$$

"Jos oletus P on tosi ja olettamalla P ja $\neg Q$ yhtäaikaa tosiksi, saadaan aikaiseksi jokin ristiriita, on myös väite Q tosi".

Todistamisen idea käyttäen epäsuoraa päättelyä:

(1) Leikitään, että oletus P on totta,
(2) Muodostetaan antiteesi $\neg Q$,
(3) Yritetään johtaa jokin ristiriita oletuksen P ja antiteesin $\neg Q$ avulla,
(4) Jos kohdassa 3 onnistutaan, niin antiteesi $\neg Q$ ei voi olla totta, joten väite on totta.

Huomaa, että käänteinen suora päättely on epäsuoran päättelyn erikoistapaus. Siinä $S = P$, eli antiteesista $\neg Q$ johtamalla $\neg P$ saadaan ristiriita oletuksen P kanssa. Tarkastellaan epäsuoran päättelyn tekemistä seuraavalla esimerkkilauseella (vrt. Lause 3.1).

Lause 3.3. *Jos* $x \geq 0$*, niin* $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 > 0$.

Todistus. Tehdään epäsuora päättely. Muodostetaan antiteesi eli oletetaan vastoin väitettä, että $x^3 - 3x^2 + 3x + 1 \leq 0$. Koska $(x-1)^3 + 2 = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$, on $(x-1)^3 \leq -2 < -1$. Oletuksen $x \geq 0$ nojalla on taas selvästi $-1 \leq x - 1$, eli $(-1)^3 \leq (x-1)^3$. Näin ollen

$$-1 = (-1)^3 \leq (x-1)^3 < -1,$$

mikä on ristiriita. Siispä antiteesin on oltava epätosi ja väitteen tosi. □

Harjoitustehtäviä

3.1. On olemassa saari, jolla asuu tasan kahdenlaisia ihmisiä – rehtejä ja retkuja. Rehdit puhuvat aina totta, retkut puolestaan valehtelevat aina.

(a) Tutkimusmatkailija oli päätynyt eräälle saarelle, mutta ei ollut aivan varma, oliko hän juuri rehtien ja retkujen saarella, jonne halusi mennä. Hän tapasi erään henkilön, ja kysyi: ”Millainen ihminen olet?” Henkilö vastasi: ”Minä olen retku.” Onko tutkimusmatkailija rehtien ja retkujen saarella?
(b) Eräänä päivänä rehtien ja retkujen saarella oli koolla kolme henkilöä, A, B ja C. A sanoi: ”Me olemme kaikki retkuja,” johon B vastasi: ”Täsmälleen yksi meistä on rehti.” Ketkä henkilöistä ovat retkuja ja ketkä rehtejä?
(c) Tutkimusmatkailija tapasi kolme rehtien ja retkujen saaren asukasta maleksimasta. Hän meni henkilön A luo, jolloin A sanoi: ”Nuo kaksi muuta, B ja C, ovat samaa tyyppiä[2].” Tämän jälkeen tutkimusmatkailija meni henkilön C luokse ja kysyi tältä: ”Ovatko A ja B samaa tyyppiä?” Mitä C vastasi?

3.2. Olkoot P, Q ja S väitelauseita. Osoita, että seuraavat molekyylilauseet ovat tautologioita:
(a) $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$,
(b) $P \vee (Q \wedge S) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee S)$,
(c) $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \vee \neg P)$,
(d) $\big(P \wedge ((P \wedge \neg Q) \Rightarrow (S \wedge \neg S))\big) \Rightarrow Q$.

3.3. Jos on niin, että aurinko paistaa ja on lämmin, niin silloin on kesä. Voin mennä uimaan vain jos on lämmin. Tiedän, että tällä hetkellä on aurinko paistaa, mutta ei ole kesä. Voinko siis mennä uimaan?

3.4. Jos luvulle x on $x^2 - 3x + 2 < 0$, niin $x > 0$. Todista[3] tämä käyttäen
(a) suoraa päättelyä,
(b) käänteistä suoraa päättelyä,
(c) epäsuoraa päättelyä.

---

4. Lukualueista

Tällä kurssilla *luonnolliset luvut* (merk. $\mathbb{N}$) ovat luvut $1, 2, 3, \ldots$ ja *reaaliluvut* (merk. $\mathbb{R}$) ajatellaan yksinkertaisesti lukusuoran pisteiksi. Näiden lukualueiden perusominaisuudet, esimerkiksi että kahden luonnollisen luvun summa on luonnollinen luku, oletetaan tunnetuiksi. Tarkemmat määritelmät annetaan myöhemmillä kursseilla. *Kokonaisluvut* (merk. $\mathbb{Z}$) ovat luvut $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ ja *rationaaliluvut* (merk. $\mathbb{Q}$) ovat sellaiset luvut $\frac{m}{n}$, missä m on jokin kokonaisluku ja n on jokin luonnollinen luku. *Irrationaaliluvut* ovat sellaiset reaaliluvut, jotka eivät ole rationaalisia.

[2] Eli molemmat joko rehtejä tai retkuja.
[3] Vihje: $(x-1)^2 = \cdots$

4.1. Parilliset ja parittomat luonnolliset luvut. Sanotaan, että luonnollinen luku n on *parillinen*, jos $n = 2l$ jollakin luonnollisella luvulla l. Edelleen, luonnollinen luku m on *pariton*, jos $m = 2k - 1$ jollakin luonnollisella luvulla k.

LAUSE 4.1. *Jos luonnollinen luku on parillinen, niin se ei ole pariton.*

TODISTUS. Osoitetaan väite epäsuoralla päättelyllä. Olkoon n parillinen luku. Muodostetaan antiteesi eli oletetaan vastoin väitettä, että n on pariton. Tällöin on olemassa k siten, että $n = 2k - 1$. Toisaalta oletuksen mukaan n on parillinen, joten $n = 2l$ jollakin l. Nyt

$$0 = n - n = 2l - (2k - 1) = 2(l - k) + 1,$$

eli

$$l - k = -\tfrac{1}{2}.$$

Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä kahden luonnollisen luvun erotus on kokonaisluku. Näin ollen antiteesi ”n on pariton” on väärin ja siten väite ”n ei ole pariton” on oikein. $\square$

LAUSE 4.2. *Luonnollinen luku on joko parillinen tai pariton.*

TODISTUS. Osoitetaan ensin, että luonnollinen luku ei voi olla parillinen ja pariton yhtäaikaa. Olkoon siis n parillinen ja pariton. Parillisuudesta seuraa Lauseen 4.1 nojalla, että n ei voi olla pariton. Tämä on ristiriita, sillä n:n piti olla myös pariton.

Osoitetaan sitten, että jokainen luonnollinen luku on välttämättä parillinen tai pariton. Pitää siis osoittaa, että ei ole olemassa sellaista luonnollista lukua n, joka ei olisi parillinen eikä pariton. Havaitaan, että 1 on pariton. Olkoon n pienin luonnollinen luku, joka ei ole parillinen eikä pariton. Tällöin $n - 1$ on parillinen tai pariton. Voidaan olettaa, että $n \geq 2$. Jos $n - 1$ on parillinen, niin $n - 1 = 2k$ jollakin k. Tällöin $n = 2k + 1 = 2(k + 1) - 1$ jollakin k, eli n on pariton. Jos taas $n - 1$ on pariton, on $n - 1 = 2k - 1$ jollakin k. Tällöin $n = 2k$ jollakin k, eli n on parillinen. Oli siis $n - 1$ kumpi tahansa, parillinen tai pariton, on saatu ristiriita sen kanssa, että n ei olisi kumpaakaan. $\square$

LAUSE 4.3. *Jos luonnollinen luku n on pariton, niin myös n^2 on pariton.*

TODISTUS. Tehdään suora päättely. Olkoon n pariton luonnollinen luku. Tällöin määritelmän mukaan $n = 2k - 1$ jollakin k. Neliöimällä havaitaan, että $n^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1$ jollakin k. Huomataan, että $2k^2 - 2k + 1$ on luonnollinen luku ja merkitsemällä $l = 2k^2 - 2k + 1$ voidaan kirjoittaa $n^2 = 2l - 1$. Näin ollen myös n^2 on pariton. $\square$

Huomaa, että todistukseksi ei riitä laskea neliöitä mistään äärellisestä määrästä parittomia lukuja:

n	1	3	5	7	9	11	13	$\cdots$	21	$\cdots$	101	$\cdots$
n^2	1	9	25	49	81	121	169	$\cdots$	441	$\cdots$	10201	$\cdots$

Tämän tyyppisiä päättelyitä tehdään kuitenkin paljon muissa tieteissä. Esimerkiksi jos tuhannesta suomalaisesta on tiettyä mieltä 600, niin tästä vedetään usein johtopäätös, että jollain virhemarginaalilla 60% suomalaisista on samaa mieltä.

LAUSE 4.4. *Jos luonnollinen luku n on parillinen, niin myös n^2 on parillinen.*

TODISTUS. Harjoitustehtävä (samaan tapaan kuin Lauseen 4.3 todistus). $\square$

LAUSE 4.5. *Olkoon n luonnollinen luku. Tällöin*

(a) n on pariton täsmälleen silloin kun n^2 on pariton.
(b) n on parillinen täsmälleen silloin kun n^2 on parillinen.

TODISTUS. (a) "$\Rightarrow$" on Lause 4.3. Osoitetaan "$\Leftarrow$" käänteisellä suoralla päättelyllä. Tehdään siis antiteesi ja oletetaan vastoin väitettä, että n ei ole pariton. Tällöin Lauseen 4.2 nojalla n on parillinen ja siten Lauseen 4.4 mukaan n^2 on parillinen. Edelleen Lauseen 4.2 nojalla n^2 ei ole pariton, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

(b) Samaan tapaan. Harjoitustehtävä. $\square$

4.2. Alkuluvuista. Sanotaan, että luonnollinen luku n on *alkuluku*, jos ei ole olemassa luonnollista lukua $2 \leq k \leq n-1$ siten, että $\frac{n}{k}$ on luonnollinen luku. Huomaa, että luonnollinen luku, joka ei ole alkuluku, voidaan aina esittää kahden tai useamman alkuluvun tulona. Alkulukuja ovat esimerkiksi $3, 5, 7, 11, 13, 17$ ja 23.

LAUSE 4.6. *Alkulukuja on äärettömän monta.*

TODISTUS. Tehdään epäsuora päättely. Oletetaan, että alkulukuja on äärellinen määrä. Olkoon k alkulukujen lukumäärä ja olkoot alkuluvut $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Määritellään

$$n = n_1 n_2 \cdots n_k + 1.$$

Koska selvästi $n > n_j$ kaikilla $1 \leq j \leq k$, ei n voi olla alkuluku. Näin ollen se voidaan esittää alkulukujen tulona. Siten luku n jaettuna em. tulossa esiintyvällä alkuluvulla on erityisesti luonnollinen luku. Mutta suoralla jakolaskulla nähdään, että $\frac{n}{n_j} = n_1 \cdots n_{j-1} n_{j+1} \cdots n_k + \frac{1}{n_j}$ ei ole luonnollinen luku millään $1 \leq j \leq k$. Ristiriita. $\square$

Huomaa, että ristiriita todistuksessa löytyi hyvin erikoisella tavalla.

4.3. Irrationaaliluvuista. Irrationaaliluvut määriteltiin sellaisiksi reaaliluvuiksi, jotka eivät ole rationaalisia. Entä jos kaikki reaaliluvut ovatkin rationaalisia? Seuraava lause osoittaa, että on olemassa ainakin yksi irrationaaliluku.

LAUSE 4.7. *Reaaliluku* $\sqrt{2}$ *on irrationaalinen.*

TODISTUS. Osoitetaan väite epäsuoralla päättelyllä. Muodostetaan antiteesi eli oletetaan vastoin väitettä, että $\sqrt{2}$ on rationaalinen. Tällöin on olemassa luonnolliset luvut n ja m (sillä $\sqrt{2} > 0$) siten, että

$$\sqrt{2} = \tfrac{m}{n}.$$

Jos nyt n ja m ovat molemmat parillisia, niin supistamme luvulla 2 niin monta kertaa, että toinen on pariton. Nyt

$$2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\tfrac{m}{n}\right)^2 = \tfrac{m^2}{n^2}$$

eli

$$m^2 = 2n^2. \tag{1}$$

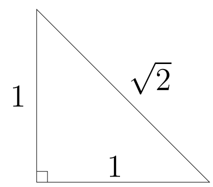
Luku m^2 on siis parillinen ja Lauseen 4.5(b) mukaan myös m on parillinen eli $m = 2k$ jollakin k.

Edelleen, koska (1):n ja m:n parillisuuden nojalla

$$2n^2 = m^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$

on $n^2 = 2k^2$. Näin ollen luku n^2 on parillinen ja Lauseen 4.5(b) mukaan myös n on parillinen. Tämä on ristiriita, sillä toisen luvuista n ja m piti olla pariton. □

Todistuksen keksi Pythagoraan koulukunta noin 550 e.a.a. Irrationaalilukujen olemassaolo aiheutti heille kylmiä väreitä, koska he ajattelivat, että kaikki luvut pitäisi voida muodostaa luonnollisista luvuista pelkillä peruslaskutoimituksilla.



Kuva C. Luku $\sqrt{2}$ on olemassa, sillä sen pituinen jana on olemassa.

Harjoitustehtäviä

4.1. Osoita, että parillisen luonnollisen luvun neliö on parillinen.

4.2. Osoita, että jos n on sellainen luonnollinen luku, että n^2 on parillinen, on myös n parillinen.
4.3. Osoita, että kahden parittoman luonnollisen luvun summa on parillinen.
4.4. Osoita seuraavat väitteet:
  (a) Jos x ja y ovat molemmat rationaalilukuja, niin xy on rationaalinen.
  (b) Jos x on nollasta eroava rationaaliluku ja y on irrationaaliluku, niin xy on irrationaalinen.
4.5. Onko olemassa[4] irrationaalilukuja x ja y siten, että x^y on rationaalinen?

---

5. Lisää todistamisesta

5.1. Induktiotodistus. Induktioperiaatteen avulla voidaan todistaa luonnollisia lukuja koskevia väitteitä, jotka ovat muotoa:

”kaikille luonnollisille luvuille n pätee $P(n)$”,

missä $P(n)$ on lukuun n liittyvä väitelause. *Induktiotodistuksessa* on kolme vaihetta:

(1) Osoitetaan, että väite $P(1)$ pätee.
(2) Tehdään induktio-oletus, eli oletetaan, että väite $P(k)$ on voimassa jollakin luonnollisella luvulla k.
(3) Osoitetaan, että induktio-oletuksesta (ja tehtävän muista oletuksista) seuraa väite $P(k+1)$.

Tällöin kaikkien kolme kohdan ollessa voimassa induktioperiaatteen mukaan $P(n)$ on totta jokaisella luonnollisella luvulla n. Vaiheita (2) ja (3) yhdessä kutsutaan usein *induktioaskeleeksi*. Induktiotodistusta voidaan havainnollistaa helposti dominonappuloiden avulla: Asetetaan äärettömän monta dominonappulaa pystyyn vieri viereen. Kaatamalla ensimmäinen saadaan ketjureaktiona kaadettua kaikki muutkin.

Lause 5.1. *Kaikilla luonnollisilla luvuilla n on*

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Todistus. Osoitetaan väite induktiolla. Lukua n koskeva väite on siis

$$P(n) = \text{"}1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}\text{"}.$$

Osoitetaan ensin, että $P(1)$ on totta. Tämä on selvää, sillä yhtälön vasen puoli on 1 ja oikea $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$. Oletetaan, että $P(k)$ on totta, kun k on jokin luonnollinen

[4] Pyri löytämään ratkaisu käyttämällä vain tämän kurssin tietoja.

luku. Eli $1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$. Osoitetaan sitten, että $P(k+1)$ on totta. Käyttämällä induktio-oletusta saadaan

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2}+(k+1) \\ &= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}, \end{aligned}$$

mikä on $P(k+1)$. Induktioperiaatteen nojalla $P(n)$ on siis voimassa kaikilla luonnollisilla luvuilla n. □

Lause 5.2. *Kaikilla luonnollisilla luvuilla n on*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Todistus. Tarkistetaan, että tapaus $n=1$ on totta. Tämä on selvää, sillä yhtälön vasen puoli on $\frac{1}{1\cdot 2}$ ja oikea $\frac{1}{1+1}$. Oletetaan, että väite on totta jollakin arvolla $n=k$, ts.

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}.$$

Osoitetaan, että väite on totta seuraavalla arvolla $n=k+1$. Näin on, sillä induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned} \frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

□

5.2. Osoittaminen vääräksi. Yleensä matematiikan teoreemat koskevat ”kaikkia tapauksia”, esimerkiksi Pythagoraan lauseen tulos koskee kaikkia suorakulmaisia kolmioita. Joskus kuitenkin voimme saada todistettavaksi lauseen, joka ei ole oikein (tätä ei tosin voi etukäteen välttämättä tietää). Tällöin riittää löytää yksi esimerkkitilanne, jossa lause ei päde[5]. Tätä kutsutaan *vastaesimerkiksi.*

Esimerkki 5.3. Väitetään, että kaikilla reaaliluvuilla x pätee

$$x^2-4x+4>0.$$

Yritykset todistaa väite oikeaksi epäonnistuvat, joten koetetaan löytää vastaesimerkki. Kokeillaan tapausta $x=2$. Nyt väite saa muodon:

$$2^2-4\cdot 2+4>0,$$

[5]Matematiikassa poikkeus siis kumoaa säännön, ei vahvista sitä.

eli $0 > 0$, mikä on epätosi. Siispä vastaesimerkki $x = 2$ kumoaa väitteen.

5.3. Varoittava esimerkki. Käydään seuraavassa läpi tyypillinen aloittelevalle matematiikolle sattuva virhe. Osoitettavana on seuraava lause.

LAUSE 5.4. *Jos $a > b > 0$, niin $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$.*

VIRHEELLINEN TODISTUS.

$$\begin{aligned}\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} &\Rightarrow \left(\sqrt{ab}\right)^2 < \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow ab < \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\ &\Rightarrow a^2+2ab+b^2 > 4ab \\ &\Rightarrow a^2-2ab+b^2 > 0 \\ &\Rightarrow (a-b)^2 > 0,\end{aligned}$$

joka on tosi, sillä $a > b$. □

Edellä olevassa päättelyssä on lähdetty virheellisesti liikkeelle väitteestä. Implikaation suunnan kanssa on siis syytä olla tarkkana! Huomaa kuitenkin, että väitteen muokkaaminen antaa hyvän vihjeen kuinka todistus löytyy. Todistus olisi ollut vaikeampi löytää lähtemällä liikkeelle sokeasti vain oletuksesta. Esitetään seuraavassa lauseelle oikea todistus:

TODISTUS.

$$\begin{aligned}a > b \Rightarrow a-b > 0 &\Rightarrow (a-b)^2 > 0 \\ &\Rightarrow a^2-2ab+b^2 > 0 \\ &\Rightarrow a^2+2ab+b^2 > 4ab \\ &\Rightarrow ab \leq \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &\Rightarrow \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2},\end{aligned}$$

sillä $ab > 0$ ja $a + b > 0$. □

Harjoitustehtäviä

5.1. Olkoon n parillinen luonnollinen luku. Osoita, että n^k on parillinen kaikilla luonnollisilla luvuilla k.

5.2. Osoita, että $2^n > n$ kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

5.3. Osoita, että jos x on rationaalinen, niin x^n on myös rationaalinen kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

5.4. Osoita, että

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

millä tahansa luonnollisella luvulla n.

5.5. Osoita, että

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2$$

kaikilla luonnollisilla luvuilla n.

---

6. Predikaattilogiikkaa

Predikaattilogiikka on lauselogiikkaa laajempi järjestelmä, jossa loogisten konnektiivien lisäksi esiintyvät *kvanttorit*:

Olemassaolokvanttori:	$\exists$
Kaikkikvanttori:	$\forall$

Tällä kurssilla riittää muistaa, että $\exists$ luetaan ”on olemassa” ja $\forall$ ”kaikilla” tai ”jokaisella”.

Esimerkki 6.1. (a) ”On olemassa negatiivinen luku, jonka itseisarvo[6] on kolme” voidaan kirjoittaa lyhyemmin:

$$\exists x < 0 : |x| = 3$$

(b) ”Jokaisen nollasta eroavan reaaliluvun neliö on aidosti positiivinen” on lyhyemmin:

$$\forall x \neq 0 : x^2 > 0$$

Esimerkissä 2.1(f) totesimme, että lause ”naisella on pitkät hiukset” ei ole väitelause. Syy tähän on se, että emme tiedä keneen lause kohdistuu. Lause onkin ns. *avoin lausuma*. Avoimista lausumista saadaan kvanttoreiden avulla väitelauseita, esimerkiksi ”on olemassa nainen, jolla on pitkät hiukset” tai ”jokaisella naisella on pitkät hiukset” ovat väitelauseita. Tässä jälkimmäinen on sama kuin Esimerkki 2.1(d). Samassa lauseessa voi esiintyä useampia kvanttoreita:

[6]Itseisarvoon tutustumme paremmin luvussa 8.

Esimerkki 6.2. (a) ”Jokaisella on. . . ”:

$$\forall x > 5\ \exists y > 0 : x > y$$

(b) ”On olemassa jokaiselle kelpaava. . . ”:

$$\exists x > 5\ \forall y > 0 : x > y$$

Mitkä ovat edellä olevien väitelauseiden totuusarvot?

6.1. Negaation ja kvanttoreiden vaihtosääntö. Esitämme seuraavaksi (perustelematta) negaation ja kvanttoreiden vaihtosäännön. Olkoon $P(x)$ alkioon x liittyvä väitelause. Tällöin

(a) $\neg\big(\forall x : P(x)\big) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$
(b) $\neg\big(\exists x : P(x)\big) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$

Vaihtosääntö kannattaa havainnollistaa itselleen arkikielessä:

Esimerkki 6.3. (a) ”Ei ole totta, että jokainen kaljupää on viisas” $\Leftrightarrow$ ”On olemassa kaljupää, joka ei ole viisas”.

(b) ”Ei ole olemassa kaljupäätä, joka olisi viisas” $\Leftrightarrow$ ”Jokainen kaljupää on ei-viisas”.

Esimerkki 6.4. (a) $\neg(\exists x < 0 : |x| = 3) \Leftrightarrow \forall x < 0 : |x| \neq 3$.

(b) $\neg(\forall x \neq 0 : x^2 > 0) \Leftrightarrow \exists x \neq 0 : x^2 \leq 0$.

Mitkä ovat väitelauseiden totuusarvot (vrt. Esimerkki 6.1)?

Jos lauseessa on useita kvanttoreita, niin negaation siirtäminen niiden yli muuttaa ne kaikki. Tämä seuraa suoraan vaihtosäännöstä. Olkoon $P(x, y)$ alkioihin x ja y liittyvä väitelause. Tällöin esimerkiksi

$$\begin{aligned}\neg\big(\forall x\ \exists y : P(x, y)\big) &\Leftrightarrow \neg\big(\forall x\ (\exists y : P(x, y))\big)\\ &\Leftrightarrow \exists x\ \neg\big(\exists y : P(x, y)\big)\\ &\Leftrightarrow \exists x\ \forall y : \neg P(x, y).\end{aligned}$$

Huomaa, että saman tyyppisten peräkkäisten kvanttoreiden järjestys ei vaikuta syntyvän lauseen totuusarvoon.

7. Joukko-oppia

Sovitaan, että *joukko* koostuu kokoelmasta alkioita. Alkio x joko kuuluu joukkoon A, jolloin merkitään

$$x \in A$$

tai sitten x ei kuulu joukkoon A, jolloin merkitään

$$x \notin A.$$

Esimerkki 7.1. Esimerkkejä erilaisista joukoista:

(a) $A = \{a, b, c\}$,
(b) $B = \{\text{nelijalkaiset eläimet}\}$,
(c) $C = \{5\}$,
(d) $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$,
(e) $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
(f) $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{R} : m \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \in \mathbb{N}\}$,
(g) $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$,

Joukon määritelmä edellä on naivi[7], sillä matematiikassa joukko ja kokoelma tarkoittavat samaa asiaa. Huomaa myös, että joukon esitystapa ei välttämättä ole yksikäsitteinen: $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 3x - 2\}$.

Esimerkki 7.2 (Parturiparadoksi). Olkoon A erään kylän kaikkien niiden miesten joukko, jotka eivät itse aja omaa partaansa. Kylässä on miesparturi, joka ajaa kaikkien näiden ja vain näiden miesten parrat. Kuuluuko tämä parturi joukkoon A vai ei?

Sanotaan, että joukko A on joukon B *osajoukko*, merk. $A \subset B$, jos kaikille x on voimassa: $x \in A \Rightarrow x \in B$. Edelleen sanotaan, että joukot A ja B ovat *samat*, merk. $A = B$, jos on voimassa inkluusiot $A \subset B$ ja $B \subset A$.

Huomaa, että triviaalisti joukko sisältyy itseensä, ts. $A \subset A$ aina kun A on joukko, ja että tyhjä joukko $\emptyset$, eli joukko millä ei ole yhtään alkiota, sisältyy mihin tahansa joukkoon, ts. $\emptyset \subset A$ aina kun A on joukko. Lisäksi, kun A, B ja C ovat joukkoja siten, että $A \subset B \subset C$, on määritelmän nojalla selvästi $A \subset C$.

Esimerkki 7.3. $\emptyset \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

7.1. Joukko-opin perusoperaatiot. Olkoot $A, B \subset X$ (X on esimerkiksi $\mathbb{N}$ tai $\mathbb{R}$). Tällöin joukkojen A ja B *yhdiste* on

$$A \cup B = \{x \in X : x \in A \text{ tai } x \in B\},$$

leikkaus on

$$A \cap B = \{x \in X : x \in A \text{ ja } x \in B\},$$

erotus on

$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \text{ ja } x \notin B\}$$

ja *komplementti* on

$$A^c = X \setminus A = \{x \in X : x \notin A\}.$$

[7] Vähemmän naiviin joukko-oppiin voi tutustua esimerkiksi monisteen [**3**] luvussa 7.

Esimerkki 7.4. (a) Irrationaaliluvut $= \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
(b) Olkoot

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ on parillinen}\}, \\ B &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ on pariton}\}. \end{aligned}$$

Tällöin Lauseen 4.2 mukaan

$$\begin{aligned} A \cup B &= \mathbb{N}, & A &= B^c = \mathbb{N} \setminus B, \\ A \cap B &= \emptyset, & B &= A^c = \mathbb{N} \setminus A. \end{aligned}$$

(c) Olkoot

$$\begin{aligned} X &= \{\text{johdatus matematiikkaan kurssilaiset}\}, \\ N &= \{x \in X : x \text{ on nainen}\}, \\ M &= \{x \in X : x \text{ on mies}\}, \\ A &= \{x \in X : x\text{:n ikä on enemmän kuin } 20\}, \\ B &= \{x \in X : x\text{:n ikä on korkeintaan } 20\}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} X = N \cup M &= A \cup B, & X \setminus M &= N, \\ N \cap A &= X \setminus (M \cup B), & N \setminus A &= (X \setminus M) \cap B. \end{aligned}$$

Harjoitustehtävä. Perustele sanallisesti.

Lause 7.5. *Olkoot A,B ja C joukkoja. Tällöin pätee*

- *(a) vaihdantalait:*
  - *(i)* $A \cup B = B \cup A$
  - *(ii)* $A \cap B = B \cap A$
- *(b) liitäntälait:*
  - *(i)* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - *(ii)* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- *(c) osittelulait:*
  - *(i)* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - *(ii)* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- *(d) deMorganin lait:*
  - *(i)* $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
  - *(ii)* $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Todistus. Todistetaan kohta (c)(i) osoittamalla, että

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &\subset (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{ja} \\ A \cup (B \cap C) &\supset (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

Osoitetaan ensin ”$\subset$”. Pitää siis näyttää, että mille tahansa alkiolle $x \in A \cup (B \cap C)$ pätee $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Olkoon siis $x \in A \cup (B \cap C)$. Silloin yhdisteen määritelmän mukaan $x \in A$ tai $x \in B \cap C$.

(1) Jos $x \in A$, niin silloin myös $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$. Näin ollen $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
(2) Jos $x \in B \cap C$, niin $x \in B$ ja $x \in C$. Siten $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$, eli $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Siispä $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Osoitetaan sitten ”$\supset$”. Olkoon $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Tällöin $x \in A \cup B$ ja $x \in A \cup C$.

(1) Jos nyt $x \in A$, niin selvästi myös $x \in A \cup (B \cap C)$.
(2) Jos taas $x \notin A$, niin edellisen nojalla $x \in B$ ja $x \in C$, eli $x \in B \cap C$.

Näin ollen $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$.

Todistetaan seuraavaksi kohta (d)(i). Väitteenä on siis $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$. Tämä on totta, sillä

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)^c &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \text{ ja } x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \text{ ja } x \in B^c \\ &\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c. \end{aligned}$$

Muut kohdat ovat harjoitustehtäviä. □

HUOMAUTUS 7.6. Kohdan (d)(i) todistuksessa käytettiin itse asiassa Esimerkin 2.2(c) tautologiaa

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q).$$

Osoitetaan myös kohta (c)(i) käyttäen tautologiaa

$$P \vee (Q \wedge S) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee S).$$

Tautologian nojalla

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in A \vee (x \in B \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C), \end{aligned}$$

mikä antaa väitteen.

Vaikka näissä tapauksissa pystyimme käyttämään tautologioita hyväksi, on silti usein suositeltavin tapa todistaa joukot samoiksi osoittaa inkluusiot molempiin suuntiin.

7.2. Tulojoukko ja useamman joukon yhdiste ja leikkaus. Jos A ja B ovat joukkoja, niin näiden *karteesinen tulo* on joukko

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \text{ ja } b \in B\}.$$

Tuttuja karteesisia tuloja ovat *taso* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ ja *avaruus* $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

LAUSE 7.7. *Olkoot A, B, C ja D joukkoja siten, että $A \subset C$ ja $B \subset D$. Tällöin*

$$A \times B \subset C \times D.$$

TODISTUS. On siis osoitettava, että

$$x \in A \times B \Rightarrow x \in C \times D.$$

Olkoon siis $x \in A \times B$. Tällöin karteesisen tulon määritelmän mukaan x on muotoa $x = (a,b)$, missä $a \in A$ ja $b \in B$. Koska oletusten perusteella $A \subset C$ ja $B \subset D$, on myös $a \in C$ ja $b \in D$. Karteesisen tulon määritelmän nojalla siis $(a,b) \in C \times D$ ja näin ollen $x \in C \times D$ aivan kuten väitettiinkin. □

Lauseen 7.5 kohdat (a) ja (b) antavat mahdollisuuden määritellä yhdisteen ja leikkauksen suoraan useammalle joukolle. Olkoot siis $k \in \mathbb{N}$ ja $A_1, \ldots, A_k$ joukkoja. Tällöin

$$\begin{aligned}\bigcup_{i=1}^{k} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \\ &= \big\{x : x \in A_i \text{ jollakin } i \in \{1, \ldots, k\}\big\}\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\bigcap_{i=1}^{k} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \\ &= \big\{x : x \in A_i \text{ kaikilla } i \in \{1, \ldots, k\}\big\}.\end{aligned}$$

Seuraava lause yleistää deMorganin lain (Lause 7.5(d)(i)) useammalle joukolle.

LAUSE 7.8. *Kaikilla $n \in \mathbb{N}$, kun $A_1, \ldots, A_n$ ovat joukkoja, pätee*

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c.$$

TODISTUS. Osoitetaan väite induktiolla. Jätetään harjoitustehtäväksi miettiä kuinka todistus tehdään ilman induktiota. Tarkistetaan ensin tapaus $n = 1$. Väitteen vasen puoli on $\left(\bigcup_{i=1}^{1} A_i\right)^c = A_1^c$ ja oikea $\bigcap_{i=1}^{1} A_i^c = A_1^c$. Oletetaan sitten, että väite on totta jollakin arvolla $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, eli $\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{k} A_i^c$.

Osoitetaan väite arvolla $n = k+1$. Merkitään $B = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Tällöin Lauseen 7.5(d)(i) ja induktio-oletuksen nojalla

$$\begin{aligned}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i\right)^c &= \left(\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) \cup A_{k+1}\right)^c \\ &= (B \cup A_{k+1})^c = B^c \cap A_{k+1}^c \\ &= \left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right)^c \cap A_{k+1}^c = \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}^c \\ &= \bigcap_{i=1}^{k+1} A_i^c.\end{aligned}$$

□

Esimerkki 7.9. Joitain esimerkkejä joukoista:

(a) Jos $A = \{1, 2, 3\}$ ja $B = \{\alpha, \beta\}$, niin

$$A \times B = \{(1,\alpha), (1,\beta), (2,\alpha), (2,\beta), (3,\alpha), (3,\beta)\}$$

(b) $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(n,m) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N} \text{ ja } m \in \mathbb{N}\}$.
(c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ ja } y < 0\}$.
(d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.
(e) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x - 1\}$.

Harjoitustehtäviä

7.1. Kirjoita alkuluvun määritelmä käyttäen vain predikaattilogiikan ja joukko-opin merkintöjä.

7.2. Kirjoita auki ja osoita oikeaksi tai vääräksi:
(a) $\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$,
(b) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x^2 > 0$,
(c) $\exists x \in \mathbb{Q}\ \forall y \in \mathbb{Q} :\ xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
Muodosta myös negaatiot.

7.3. Hahmottele tasossa seuraavat joukot:
(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1\}$,
(b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ tai } -1 \leq y \leq 1\}$.

7.4. Olkoot A, B, C ja D joukkoja. Osoita seuraavat väitteet oikeiksi tai vääriksi:
(a) Jos $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$ ja $B \cap C \neq \emptyset$, niin $A \cap B \cap C \neq \emptyset$,
(b) Jos $A \cap B = A$, niin $A \cup B = B$,
(c) Jos $A \setminus B = B \setminus A$, niin $A \cap B = \emptyset$,
(d) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$,
(e) $A \setminus B = A \cap B^c$.

7.5. Olkoot A, B ja C joukkoja. Osoita, että jos $A \setminus B = C \setminus B$, niin $C \setminus A \subset B$.
7.6. Olkoot A ja B joukkoja. Osoita, että

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

7.7. Olkoot A, B ja C joukkoja. Osoita[8], että

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

7.8. Osoita, että

$$\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$$

millä tahansa $n \in \mathbb{N}$, kun $A_1, \ldots, A_n$ ovat joukkoja.

---

8. Arviointia ja epäyhtälöitä

Arviointi on yksi matematiikan opiskelijan ja tutkijan tärkeimmistä työvälineistä. Matematiikassa arviointi ei ole hatusta vedettyjä arvauksia tai näppituntumaa, vaan perusteltuja, oikeaksi todistettavia arvioita.

Esimerkki 8.1. Onko

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \cdots + \frac{1}{200} < \frac{1}{2}?$$

Ei ole, sillä

$$\begin{aligned}\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \cdots + \frac{1}{200} &\geq \frac{1}{200} + \frac{1}{200} + \cdots + \frac{1}{200} \\ &= 100 \cdot \frac{1}{200} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Esimerkki 8.2. Olkoot a, b ja c kokonaislukuja väliltä 0–10 siten, että $abc > 200$. Arvioidaan summaa $a+b+c$. Kirjanpidon helpottamiseksi voidaan olettaa, että $a \leq b \leq c$. Triviaalisti havaitaan, että

$$\begin{aligned}&a+b+c \geq 1+1+1 = 3 \qquad \text{ja}\\ &a+b+c \leq 10+10+10 = 30.\end{aligned}$$

Ylärajaa ei voi parantaa. Voiko alarajaa? Koska $200 < abc \leq a \cdot 10 \cdot 10 = 100a$, on $a > 2$ eli $a \geq 3$. Näin ollen

$$a+b+c \geq a+a+a \geq 3+3+3 = 9.$$

Edelleen, koska $200 < abc \leq b \cdot b \cdot 10 = 10b^2$, on $b^2 > 20$, eli $b \geq 5$. Näin ollen

$$a+b+c \geq a+b+b \geq 3+5+5 = 13.$$

---

[8] Vihje: Harjoitustehtävä 7.6 ja Lauseen 7.5 kohdat.

Edelleen, koska $200 < abc \leq c \cdot c \cdot c = c^3$, on $c > \sqrt[3]{200}$ eli $c \geq 6$, sillä $6^3 = 216 > 200 > 125 = 5^3$. Näin ollen

$$a + b + c \geq 3 + 5 + 6 = 14.$$

8.1. Itseisarvo. Monet tärkeimmistä matematiikassa tarvittavista epäyhtälöistä liittyvät luvun itseisarvon arvioimiseen. Reaaliluvun x *itseisarvo* on

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Geometrisesti tulkittuna $|x|$ on reaaliluvun x etäisyys nollasta lukusuoralla, kun taas $|x - y|$ voidaan ajatella lukujen x ja y väliseksi etäisyydeksi.

Esimerkki 8.3. (a) Olkoon $a > 0$. Mitkä pisteet $x \in \mathbb{R}$ toteuttavat ehdon $|x| \leq a$? Geometrisen tulkinnan nojalla ne pisteet, joiden etäisyys nollasta on pienempää tai yhtäsuurta kuin a, eli $-a \leq x \leq a$. Myös suoraan määritelmästä nähdään, että nämä pisteet toteuttavat ehdon. Itse asiassa

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a.$$

(b) Epäyhtälön $|x - 2| < \frac{1}{2}$ toteuttavat ne pisteet, joiden etäisyys 2:sta on pienempi kuin $\frac{1}{2}$, eli sellaiset $x \in \mathbb{R}$, joille $1\frac{1}{2} < x < 2\frac{1}{2}$.

(c) Mitkä pisteet $x \in \mathbb{R}$ toteuttavat ehdon $|x-2| > |x+1|$? Geometrisen tulkinnan mukaan ne pisteet, joiden etäisyys 2:sta on enemmän kuin etäisyys -1:stä, eli pisteet, jotka ovat lähempänä -1:stä kuin 2:sta, eli pisteet x, joille $x < \frac{1}{2}$. Myös suoraan laskien päästään samaan tulokseen:

$$\begin{aligned} & |x-2| > |x+1| \\ \Leftrightarrow \quad & x - 2 > |x+1| \text{ tai } x - 2 < -|x+1| \end{aligned}$$

Tässä ensimmäinen epäyhtälö on mahdoton, sillä

$$\begin{aligned} & |x+1| < x - 2 \\ \Leftrightarrow \quad & -(x-2) < x + 1 < x - 2. \end{aligned}$$

Toinen puoli taas antaa

$$\begin{aligned} & |x+1| < -(x-2) \\ \Leftrightarrow \quad & x - 2 < x + 1 < -(x-2) \\ \Leftrightarrow \quad & x + 1 < -(x-2) \\ \Leftrightarrow \quad & 2x < 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x < \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

(d) Millä reaaliluvuilla x pätee

$$|x - 1| < \varepsilon \text{ jokaisella } \varepsilon > 0?$$

Selvästi $x = 1$ toteuttaa ehdon, sillä $|1 - 1| = 0 < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Mikään muu luku ei kelpaa: Olkoon $x \neq 1$. Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että

$$|x - 1| \geq \varepsilon.$$

Voidaan esimerkiksi valita

$$\varepsilon = \frac{|x-1|}{2} > 0.$$

LAUSE 8.4. *Olkoon $x, y \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$|xy| = |x||y|.$$

TODISTUS. Huomataan ensin, että $|x| = \sqrt{x^2}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Näin ollen

$$|xy| = \sqrt{(xy)^2} = \sqrt{x^2y^2} = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = |x||y|.$$

□

8.2. Kolmioepäyhtälö. Kolmioepäyhtälö on yksinkertaisuudestaan huolimatta yksi matemaattisen analyysin tärkeimmistä työkaluista.

LAUSE 8.5 (Kolmioepäyhtälö). *Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee*

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

ja

$$|x - y| \leq |x| + |y|.$$

TODISTUS. Koska itseisarvon määritelmän nojalla on joko $x = |x|$ tai $x = -|x|$, pätee erityisesti

$$-|x| \leq x \leq |x|.$$

Edelleen, koska myös

$$-|y| \leq y \leq |y|,$$

saadaan laskemalla yhteen

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

eli

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Toinen väite seuraa ensimmäisestä, sillä $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |(-y)| = |x| + |y|$. □

LAUSE 8.6. *Olkoon $v, w \in \mathbb{R}$. Tällöin*

$$|v - w| \leq |v - z| + |z - w|$$

kaikilla $z \in \mathbb{R}$.

TODISTUS. Annetuille pisteille $v, w \in \mathbb{R}$ nähdään kolmioepäyhtälön nojalla suoraan, että

$$|v-w| = |(v-z)+(z-w)| \leq |v-z| + |z-w|$$

kaikilla $z \in \mathbb{R}$. $\square$

ESIMERKKI 8.7. Arvioidaan lukua $|\frac{1}{x} - x^2 \sin x|$ "ylhäältä", kun tiedetään, että $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$. Kolmioepäyhtälön mukaan

$$\begin{aligned} |\tfrac{1}{x} - x^2 \sin x| &\leq |\tfrac{1}{x}| + |x^2 \sin x| \\ &= |\tfrac{1}{x}| + |x^2||\sin x| \\ &\leq |\tfrac{1}{x}| + |x^2| \\ &= \tfrac{1}{x} + x^2 \leq 2 + 4 = 6. \end{aligned}$$

Kolmioepäyhtälöllä voidaan siis arvioida summia termeittäin.

LAUSE 8.8. *Kaikille $x, y \in \mathbb{R}$ pätee*

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y|$$

ja

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|.$$

TODISTUS. Kolmioepäyhtälön nojalla on

$$|x| = |(x-y)+y| \leq |x-y| + |y|$$

ja

$$|y| = |(y-x)+x| \leq |y-x| + |x| = |x-y| + |x|.$$

Tällöin

$$|x| - |y| \leq |x-y|$$

ja

$$-|x-y| \leq |x| - |y|$$

eli

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|.$$

Toinen väite seuraa suoraan tästä, sillä $|x+y| = |x-(-y)| \geq \big||x| - |(-y)|\big| = \big||x| - |y|\big|$. $\square$

8.3. Etäisyys tasossa. Olkoon $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Määritellään

$$||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Muista Pythagoraan lause. Nyt siis $||(x, y)||$ on tason pisteen (x, y) etäisyys origosta $(0, 0)$. Samoin, jos $(z, w) \in \mathbb{R}^2$, on

$$||(x, y) - (z, w)|| = ||(x - z, y - w)|| = \sqrt{(x - z)^2 + (y - w)^2}$$

tason pisteiden (x, y) ja (z, w) etäisyys toisistaan. Päteekö tason etäisyydelle kolmioepäyhtälö?

LAUSE 8.9 (Kolmioepäyhtälö). *Kaikille* $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$ *pätee*

$$||(x, y) + (z, w)|| \leq ||(x, y)|| + ||(z, w)||$$

ja

$$||(x, y) - (z, w)|| \leq ||(x, y)|| + ||(z, w)||.$$

TODISTUS. Korottamalla toiseen nähdään laskemalla, että

$$\begin{aligned} ||(x, y) + (z, w)||^2 &= (x + z)^2 + (y + w)^2 \\ &= (x^2 + 2xz + z^2) + (y^2 + 2yw + w^2) \\ &= (x^2 + y^2) + 2(xz + yw) + (z^2 + w^2) \\ &\leq ||(x, y)||^2 + 2|xz + yw| + ||(z, w)||^2 \\ &\leq ||(x, y)||^2 + 2||(x, y)||\,||(z, w)|| + ||(z, w)||^2 \\ &= (||(x, y)|| + ||(z, w)||)^2, \end{aligned}$$

mikä todistaa ensimmäisen väitteen mikäli $|xz + yw| \leq ||(x, y)||\,||(z, w)||$. Mutta tämä on totta, sillä

$$\begin{aligned} & & |xz + yw| &\leq ||(x, y)||\,||(z, w)|| \\ &\Leftrightarrow & |xz + yw|^2 &\leq (x^2 + y^2)(z^2 + w^2) \\ &\Leftrightarrow & x^2z^2 + 2xzyw + y^2w^2 &\leq x^2z^2 + x^2w^2 + y^2z^2 + y^2w^2 \\ &\Leftrightarrow & x^2w^2 - 2xzyw + y^2z^2 &\geq 0 \\ &\Leftrightarrow & (xw - yz)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

mikä on aina totta.

Toinen väite nähdään ensimmäisestä kuten aiemminkin. □

LAUSE 8.10. *Olkoon* $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$. *Tällöin*

$$||(x, y) - (z, w)|| \leq ||(x, y) - (v, u)|| + ||(z, w) - (v, u)||$$

kaikilla $(v, u) \in \mathbb{R}^2$.

TODISTUS. Vastaavasti kuten Lauseen 8.6 todistus. Harjoitustehtävä. □

Mitä Lause 8.10 tarkoittaa geometrisesti? Tarkastellaan kahta pistettä, esimerkiksi $(2,1)$ ja $(4,3)$. Lauseen mukaan matka vain kasvaa, jos kuljetaan pisteestä $(2,1)$ pisteeseen $(4,3)$ jonkun kolmannen pisteen kautta.

Etäisyys tasoon voidaan määritellä tilanteesta riippuen monella muullakin tavalla. Esimerkiksi kaupungissa pisteestä toiseen ei aina pääse linnuntietä, vaan on kierrettävä edessä olevat talot. Tällöin pisteen etäisyydeksi toisesta ei ole järkevää määritellä matkan pituutta linnuntietä pitkin, vaan määritellä se lyhimmän mahdollisen, talot kiertävän reitin pituudeksi.

Osoittautuu, että kolmioepäyhtälö on hyvä testi annetun etäisyyden "järkevyydelle".

Harjoitustehtäviä

8.1. Osoita, että
$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$$
millä tahansa $n \in \mathbb{N}$, kun $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.

8.2. Ratkaise epäyhtälöt:
  (a) $|x-1| > |x+2|$,
  (b) $|2x-1| \leq |x-2|$.

8.3. Jos luvuille $n, m \in \mathbb{N}$ pätee $n < m$, niin kumpi lauseke on arvoltaan suurempi, nm vai $(n+1)(m-1)$?

8.4. Hahmottele tasossa seuraavat joukot:
  (a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq ||(x,y) - (2,1)|| \leq 2\}$,
  (b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

8.5. Arvioi lukua $|x^2 - x\sin x + \frac{1}{x}|$ ylhäältä, kun $x \in [\frac{1}{2}, 2]$.

8.6. Osoita, että $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$ aina kun $x \neq 0$.

---

9. Funktioista eli kuvauksista

Kuvaukset ovat yksi matematiikan keskeisimmistä käsitteistä. Olkoot A ja B epätyhjiä joukkoja. *Kuvaus*
$$f\colon A \to B$$
on sääntö, joka liittää jokaisen joukon A alkioon $a \in A$ täsmälleen yhden joukon B alkion $f(a) \in B$. Sanotaan, että $f(a)$ on *kuvauksen f arvo* pisteessä $a \in A$, tai että $f(a)$ on a:n *kuvapiste* kuvauksessa f. Joukkoa A kutsutaan *lähtöjoukoksi* ja joukkoa B *maalijoukoksi*. Huomaa, että kaksi kuvausta on samat, jos niillä on samat lähtö- ja maalijoukot sekä samat kuvapisteet.

Esimerkki 9.1. (a) Olkoot $A = \{a, b, c\}$ ja $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Määritellään kuvaus $g_1 \colon A \to B$ asettamalla $g_1(a) = 2$, $g_1(b) = 3$ ja $g_1(c) = 2$.

(b) Määritellään kuvaus $g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $g_2(x) = x^2$ kaikille $x \in \mathbb{R}$.

(c) Määritellään kuvaus $g_3 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ asettamalla

$$g_3(n) = \begin{cases} n-1, & n \text{ on parillinen,} \\ n+1, & n \text{ on pariton.} \end{cases}$$

Lauseen 4.2 nojalla kuvaus on hyvin määritelty, ts. jokaiseen lähtöjoukon $\mathbb{N}$ pisteeseen on liitetty täsmälleen yksi kuvapiste (ks. myös Esimerkki 7.4(b)).

(d) Määritellään kuvaus $g_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla $g_4(x, y) = x + y$ kaikille $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

9.1. Kuvajoukko ja alkukuva. Olkoon $f \colon A \to B$ kuvaus. Joukon $U \subset A$ *kuvajoukko* on joukko

$$f(U) = \{f(a) : a \in U\} \subset B.$$

Joukon $V \subset B$ *alkukuva* on joukko

$$f^{-1}(V) = \{a \in A : f(a) \in V\} \subset A.$$

Esimerkki 9.2. (a) Olkoon $g_1 \colon A \to B$ kuten Esimerkissä 9.1(a) ja

$$\begin{aligned} U_1 &= \{a, b\}, & U_2 &= \{a, c\} \\ V_1 &= \{1, 4\}, & V_2 &= \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} g_1(U_1) &= \{2, 3\}, & g_1(U_2) &= \{2\}, \\ g_1^{-1}(V_1) &= \emptyset, & g_1^{-1}(V_2) &= \{a, c\}. \end{aligned}$$

Huomaa, että vaikka $U_2 = g_1^{-1}(V_2)$, on silti $g_1(U_2) \neq V_2$.

(b) Olkoon $g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuten Esimerkissä 9.1(b) ja $U = [-2, 0]$ sekä $V = [0, 1]$. Tällöin $g_2(U) = [0, 4]$, sillä piste $y \in g_2([-2, 0])$ täsmälleen silloin, kun $y = g_2(x) = x^2$ jollakin $x \in [-2, 0]$, ts. $0 \leq y \leq 4$. Lisäksi $g_2^{-1}(V) = [-1, 1]$, sillä $x \in g_2^{-1}(V)$ täsmälleen silloin, kun $x^2 = g_2(x) \in V = [0, 1]$, ts. $-1 \leq x \leq 1$.

(c) Olkoon $g_3 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kuten Esimerkissä 9.1(c) ja

$$\begin{aligned} A &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ on parillinen}\}, \\ B &= \{n \in \mathbb{N} : n \text{ on pariton}\}. \end{aligned}$$

Tällöin $g_3(A) = B$, sillä $m \in g_3(A)$ täsmälleen silloin, kun $m = g_3(n) = n - 1$ jollakin $n \in A$. Eli $m = 2k - 1$ jollakin $k \in \mathbb{N}$, sillä $n = 2k$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Lisäksi $g_3^{-1}(B) = A$, sillä $n \in g_3^{-1}(B)$ täsmälleen silloin, kun $g_3(n) \in B$ eli kun $g_3(n)$ on pariton. Tämä on mahdollista täsmälleen silloin, kun n on parillinen.

(d) Olkoon $g_4\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kuten Esimerkissä 9.1(d). Tällöin joukon $\{0\}$ alkukuva on $g_4^{-1}(\{0\}) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$.

9.2. Injektio, surjektio ja bijektio. Sanotaan, että kuvaus $f\colon A \to B$ on *injektio*, jos se kuvaa eri pisteet eri pisteiksi, eli

$$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

kaikilla $a_1, a_2 \in A$.

Lause 9.3. *Kuvaus $f\colon A \to B$ on injektio täsmälleen silloin, kun*

$$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

kaikilla $a_1, a_2 \in A$.

Todistus. "$\Rightarrow$": Tehdään antiteesi ja oletetaan vastoin väitettä, että on olemassa $a_1, a_2 \in A$ siten, että $f(a_1) = f(a_2)$, mutta $a_1 \neq a_2$. Tällöin f ei voi olla injektio, sillä eri pisteet a_1 ja a_2 kuvautuvat samoiksi pisteiksi. Ristiriita.

"$\Leftarrow$": Olkoon $a_1, a_2 \in A$ siten, että $a_1 \neq a_2$. Jos olisi $f(a_1) = f(a_2)$, niin oletuksesta seuraisi, että $a_1 = a_2$, mikä on ristiriita. Siispä on oltava $f(a_1) \neq f(a_2)$. Näin ollen f on injektio. □

Lause 9.4. *Kuvaus $f\colon A \to B$ on injektio täsmälleen silloin, kun joukossa $f^{-1}(\{b\})$ on tasan yksi alkio jokaisella $b \in f(A) \subset B$.*

Todistus. "$\Rightarrow$": Tehdään antiteesi ja oletetaan vastoin väitettä, että joukossa $f^{-1}(\{b\})$ on joko 0 tai vähintään 2 alkiota. Jos $f^{-1}(\{b\}) = \emptyset$, niin $b \notin f(A)$, mikä on ristiriita. Jos taas $a_1, a_2 \in f^{-1}(\{b\})$ siten, että $a_1 \neq a_2$, niin tällöin $f(a_1) = b = f(a_2)$, joka on ristiriita injektion määritelmän kanssa.

"$\Leftarrow$": Olkoon $a_1, a_2 \in A$ ja $f(a_1) = f(a_2) = b \in f(A)$. Oletuksen mukaan vain yksi alkio voi kuvautua b:ksi, joten $a_1 = a_2$. Tällöin Lauseen 9.3 mukaan f on injektio. □

Huomautus 9.5. Jos kuvaus $f\colon A \to B$ on injektio, voidaan Lauseen 9.4 nojalla määritellä kuvaus $g\colon f(A) \to A$ liittämällä jokaiseen joukon $f(A)$ alkioon b joukon $f^{-1}(\{b\})$ yksikäsitteinen alkio, eli asettamalla $\{g(b)\} = f^{-1}(\{b\})$ kaikilla $b \in f(A)$. Kuvausta g sanotaan f:n *käänteiskuvaukseksi* ja sitä merkitään $g = f^{-1}$. Lisäksi Lauseen 9.4 mukaan tällaisen kuvauksen olemassaolo implikoi f:n injektiivisyyden. Huomaa, että injektiivisellä kuvauksella alkukuva on sama kuin käänteiskuvauksen kuvajoukko.

Esimerkki 9.6. (a) Esimerkin 9.1(a) kuvaus $g_1\colon A \to B$ ei ole injektio, sillä $g_1(a) = 2 = g_1(c)$. Toisin sanoen, $g_1^{-1}(\{2\})$ ei ole yhden pisteen joukko.

(b) Esimerkin 9.1(b) kuvaus $g_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ei ole injektio, sillä esimerkiksi $g(-1) = 1 = g(1)$. Mutta kuvaus $g\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, on injektio, sillä $x^2 = y^2 \Rightarrow x = y$ kaikilla $x, y \geq 0$.

(c) Esimerkin 9.1(c) kuvaus $g_3 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on injektio. Olkoon $n, m \in \mathbb{N}$ siten, että $n \neq m$. Jos nyt n on parillinen ja m on pariton (tai toisinpäin), niin suoraan kuvauksen määritelmän nojalla $g_3(n)$ on pariton ja $g_3(m)$ on parillinen (tai toisinpäin). Näin ollen Lauseen 4.2 nojalla $g_3(n) \neq g_3(m)$. Edelleen, jos n ja m ovat molemmat parillisia, niin $g_3(n) = n - 1 \neq m - 1 = g_3(m)$. Jos taas n ja m ovat molemmat parittomia, niin $g_3(n) = n + 1 \neq m + 1 = g_3(m)$.

(d) Esimerkin 9.1(d) kuvaus $g_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ei Lauseen 9.4 ja Esimerkin 9.2(d) nojalla ole injektio.

Sanotaan, että kuvaus $f \colon A \to B$ on *surjektio*, jos $f(A) = B$, ja *bijektio*, jos se on sekä injektio että surjektio.

LAUSE 9.7. *Kuvaus $f \colon A \to B$ on surjektio täsmälleen silloin, kun jokaiselle maalijoukon alkiolle $b \in B$ löytyy lähtöjoukon alkio $a \in A$, jolle $f(a) = b$.*

TODISTUS. "$\Rightarrow$": Olkoon $b \in B$. Tällöin oletuksen nojalla $b \in f(A)$ ja siten kuvajoukon määritelmän mukaan on olemassa $a \in A$, jolle $b = f(a)$.

"$\Leftarrow$": Huomaa, että kuvauksella $f \colon A \to B$ on aina $f(A) \subset B$. Näin ollen riittää siis osoittaa, että $B \subset f(A)$. Olkoon siis $b \in B$. Tällöin oletuksen nojalla löytyy alkio $a \in A$, jolle $f(a) = b$. Täten myös $b \in f(A)$. $\square$

ESIMERKKI 9.8. (a) Esimerkin 9.1(a) kuvaus $g_1 \colon A \to B$ ei ole surjektio, sillä $g_1(A) = \{g_1(a), g_1(b), g_1(c)\} = \{2, 3\} \neq \{1, 2, 3, 4\} = B$.

(b) Esimerkin 9.1(b) kuvaus $g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei ole surjektio, sillä on olemassa maalijoukon $\mathbb{R}$ piste, jolle mikään lähtöjoukon $\mathbb{R}$ piste ei kuvaudu. Esimerkiksi käy maalijoukon piste -1. Nyt $g_2(x) = x^2 \geq 0 > -1$ kaikilla lähtöjoukon pisteillä $x \in \mathbb{R}$. Huomaa, että kuvaus $g \colon \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $g(x) = x^2$, on surjektio, sillä $g(\mathbb{R}) = [0, \infty)$.

(c) Esimerkin 9.1(c) kuvaus $g_3 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on surjektio. Olkoon $m \in \mathbb{N}$. Etsitään lähtöjoukon piste, joka kuvautuu pisteeksi m. Jos m on parillinen, niin selvästi $m - 1$ on pariton ja näin ollen $g_3(m-1) = m - 1 + 1 = m$. Jos taas m on pariton, niin selvästi $m + 1$ on parillinen ja siten $g_3(m + 1) = m + 1 - 1 = m$.

(d) Esimerkin 9.1(d) kuvaus $g_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on surjektio. Harjoitustehtävä.

HUOMAUTUS 9.9. Huomautuksen 9.5 nojalla kuvaus $f \colon A \to B$ on bijektio täsmälleen silloin kun sillä on käänteiskuvaus $f^{-1} \colon B \to A$. Näin ollen bijektiivinen kuvaus antaa lähtöjoukon ja maalijoukon välille yksi yhteen säännön eli

$$f^{-1}\big(f(a)\big) = a$$

kaikilla $a \in A$ ja

$$f\big(f^{-1}(b)\big) = b$$

kaikilla $b \in B$.

Esimerkki 9.10. (a) Esimerkin 9.1(a) kuvaus $g_1 \colon A \to B$ ei Esimerkin 9.6 mukaan ole injektio. Näin ollen sillä ei ole käänteiskuvausta.

(b) Myöskään Esimerkin 9.1(b) kuvauksella $g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ei ole käänteiskuvausta.

(c) Koska Esimerkin 9.1(c) kuvaus $g_3 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ on bijektio, on sillä käänteiskuvaus $g_3^{-1} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Käänteiskuvaukselle pätee Huomautuksen 9.5 mukaan, että $\{g_3^{-1}(m)\}$ on sama joukko kuin joukon $\{m\}$ alkukuva. Esimerkin 9.8(c) päättelyiden mukaan $g_3^{-1}(\{m\}) = \{m-1\}$, jos m on parillinen, ja $g_3^{-1}(\{m\}) = \{m+1\}$, jos m on pariton. Näin ollen

$$g_3^{-1}(m) = \begin{cases} m-1, & m \text{ on parillinen,} \\ m+1, & m \text{ on pariton,} \end{cases}$$

eli tässä tapauksessa käänteiskuvaus on sama kuin itse kuvaus.

(d) Esimerkin 9.1(d) kuvaus $g_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ei Esimerkin 9.6(d) mukaan ole injektio, joten sillä ei ole käänteiskuvausta.

9.3. Kuvaaja eli graafi. Sanotaan, että kuvauksen $f \colon A \to B$ *kuvaaja* on joukko

$$G_f = \{(a,b) \in A \times B : a \in A \text{ ja } b = f(a)\} \subset A \times B.$$

Esimerkki 9.11. (a) Esimerkin 9.1(a) kuvauksen $g_1 \colon A \to B$ kuvaaja on joukko

$$\begin{aligned} G_{g_1} &= \{(a,b) \in A \times B : a \in A \text{ ja } b = g_1(a)\} \\ &= \{\big(a, g_1(a)\big), \big(b, g_1(b)\big), \big(c, g_1(c)\big)\} \\ &= \{(a,2), (b,3), (c,2)\}. \end{aligned}$$

(b) Esimerkin 9.1(b) kuvauksen $g_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaaja on joukko

$$\begin{aligned} G_{g_2} &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R} \text{ ja } y = g_2(x)\} \\ &= \{(x,x^2) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

(c) Esimerkin 9.1(c) kuvauksen $g_3 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kuvaaja on joukko

$$\begin{aligned} G_{g_3} &= \{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \in \mathbb{N} \text{ ja } m = g_3(n)\} \\ &= \{(n, n-1) : n \text{ on parillinen}\} \cup \{(n, n+1) : n \text{ on pariton}\}. \end{aligned}$$

(d) Esimerkin 9.1(d) kuvauksen $g_4 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kuvaaja on joukko

$$\begin{aligned} G_{g_4} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ ja } z = g_4(x,y)\} \\ &= \{(x,y,x+y) \in \mathbb{R}^3 : x,y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

9.4. Neliöimisestä. Neliöksi täydentäminen on kätevä keino esimerkiksi joidenkin kuvausten kuvaajan määrittämisessä. Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, missä $a, b, c \in \mathbb{R}$ ja $a \neq 0$. Kuvausta f kutsutaan *paraabeliksi* ja sen erikoistapauksia ovat

(1) $f(x) = x^2$,
(2) $f(x) = ax^2$ eli skaalaus/peilaus,
(3) $f(x) = (x - d)^2$ eli x-akselin suuntainen siirto,
(4) $f(x) = x^2 + c$ eli y-akselin suuntainen siirto.

Nyt kuvauksen f kuvaajat saadaan määriteltyä em. kohtien (1)–(4) avulla muistaen, että $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Neliöimällä nähdään, että

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a\big(x^2 + \tfrac{b}{a}x + \tfrac{c}{a}\big) \\ &= a\big(x^2 + 2 \cdot \tfrac{b}{2a}x + \big(\tfrac{b}{2a}\big)^2 - \big(\tfrac{b}{2a}\big)^2 + \tfrac{c}{a}\big) \\ &= a\big(\big(x + \tfrac{b}{2a}\big)^2 - \tfrac{b^2}{4a^2} + \tfrac{c}{a}\big) \\ &= a\big(x + \tfrac{b}{2a}\big)^2 - \tfrac{b^2}{4a} + c. \end{aligned}$$

Näin ollen paraabelin kärki on tason pisteessä $(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a} + c)$ ja se leikkaa x-akselia (eli joukkoa $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$) täsmälleen silloin kun

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \Leftrightarrow a\big(x + \tfrac{b}{2a}\big)^2 &= \tfrac{b^2}{4a} - c \\ \Leftrightarrow \big(x + \tfrac{b}{2a}\big)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \end{aligned}$$

Esimerkki 9.12. (a) Hahmotellaan kuvauksen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 6x + 7$, kuvaajaa. Edellisen nojalla $f(x) = (x - 3)^2 - 2$, kuvauksen kärki löytyy pisteestä $(3, -2)$ ja kuvaus kulkee pisteiden $(0, 7)$, $(\sqrt{2} + 3, 0)$ ja $(-\sqrt{2} + 3, 0)$ kautta.

(b) Hahmotellaan kuvauksen $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - 4x - 2$, kuvaajaa. Edellisen nojalla $g(x) = 3(x - \frac{2}{3})^2 - \frac{10}{3}$, kuvauksen kärki löytyy pisteestä $\big(\frac{2}{3}, -\frac{10}{3}\big)$ ja kuvaus kulkee pisteiden $(0, -2)$, $\big(\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3}, 0\big)$ ja $\big(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{10}}{3}, 0\big)$ kautta.

Neliöksi täydentäminen on hyödyllistä myös itseisarvoepäyhtälöiden ratkaisemisessa.

Esimerkki 9.13. Mitkä pisteet $x \in \mathbb{R}$ toteuttavat ehdon $|x-2| > |x+1|$? (vrt. Esimerkki 8.3(c)). Neliöimällä nähdään (ks. myös Lauseen 8.9 todistusta), että

$$\begin{aligned} & |x-2| > |x+1| \\ \Leftrightarrow \quad & (x-2)^2 > (x+1)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 4x + 4 > x^2 + 2x + 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 6x < 3 \\ \Leftrightarrow \quad & x < \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Epäyhtälö voidaan ratkaista myös graafisesti vertailemalla kuvausten $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x-2|$, ja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x+1|$, kuvaajia.

Harjoitustehtäviä

9.1. Olkoot $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ ja kuvaus $f\colon A \to B$, jolle $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ ja $f(c) = 2$. Mikä on joukon $\{1, 2, 4\}$ alkukuvan kuvajoukko?

9.2. Määritä tarkasti kuvauksen $f\colon (-\infty, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, käänteiskuvaus, jos se on olemassa.

9.3. Osoita, että kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$, on surjektio. Olkoon $c \in \mathbb{R}$. Mikä on joukon $A_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = c - x\}$ kuvajoukko? Hahmottele kuvauksen graafia.

9.4. Onko kuvaus $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$, injektio tai surjektio?

9.5. Olkoon $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ kuvaus, jolle $f(x) = 5x^2 + 10x - 15$ kaikilla $x \in [-1, 1]$.
   (a) Arvioi kuvauksen f itseisarvoa ylhäältä.
   (b) Hahmottele kuvauksen f kuvaajaa.

Kirjallisuutta

[1] C. Boyer. *Tieteiden kuningatar: Matematiikan historia, osat I ja II.* Art House, WSOY:n graafiset laitokset Juva, 1994.

[2] L. Haaparanta and I. Niiniluoto. *Johdatus tieteelliseen ajatteluun.* Filosofian laitoksen julkaisuja no. 3, Helsingin yliopisto, 1986.

[3] L. Kahanpää, H. Högmander, and M. Hannukainen. *Johdatus matematiikkaan.* Luentomoniste no. 23, Jyväskylän yliopisto, 1993.

Näiden lisäksi kannattaa tutustua myös monisteen [**3**] kirjallisuusluetteloon.