YHDEN REAALIMUUTTUJAN ANALYYSIN PERUSTEET

Tero Kilpeläinen

Luentomuistiinpanoja keväältä 2014
5. maaliskuuta 2015

Sisältö

1. Johdanto

Tällä kurssilla tutustumme reaalilukujen kontinuumi-ominaisuuteen tarkemmin ja pyrimme ymmärtämään reaalilukujen täydellisyyttä ja sen säilymistä. Erityisesti todistamme mm. Bolzanon ja Bolzano-Weierstrassin lauseet.

Matematiikka on paljon enemmän kuin vain kokoelma teorioita, lauseita, määritelmiä, ongelmia ja tekniikoita. Matematiikka on tapa ajatella. Sama pätee tietenkin myös matematiikan eri haaroihin, kuten (matemaattiseen) analyysiin. Analyysiä voidaan pitää yhteisnimekkeenä kaikelle matematiikalle, jossa käytetään rajaprosesseja. Rajaprosessien ymmärtäminen ja hallitseminen on ensiarvoisen tärkeää mm. sovellettaessa matematiikkaa luonnontieteissä. Näin pyritään ymmärtämään, miksi ja milloin mittaamalla voidaan saada suhteellisen luotettavaa tietoa ilmiöistä.

Oppikirjaksi suosittelen teoksia:

R. Courant & F. John: Introduction to Calculus and Analysis I.

B.S. Thomson, J. B. Bruckner & A.M. Bruckner: Elementary Real Analysis

Kreikkalainen aakkosto a:sta o:hon.
Iso ja pieni kirjain sekä nimi (suluissa mahdollinen vaihtoehtoinen muoto):

A α alfa, B β beeta, Γ γ gamma,
Δ δ delta, E ε (tai ϵ) epsilon,

Z ζ zeeta, H η eeta, Θ θ (tai ϑ) theeta,
I ι joota, K $\varkappa$ (tai κ) kappa,

Λ λ lambda, M μ myy, N ν nyy,
Ξ ξ ksii, O o omikron,

Π π (tai ϖ) pii, P ϱ (tai ρ) roo,
Σ σ (tai ς) sigma, T τ tau,

Υ υ ypsilon, Φ φ (tai ϕ) fii, X χ khii,
Ψ ψ psii, Ω ω oomega.

2. Reaalilukujen jatkumo

Tässä luvussa pohdimme reaalilukujen ominaisuuksia, jotka tekevät siitä kontinuumin, jatkumon.

2.1. Merkintöjä

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{luonnollisten lukujen joukko (0 mukana, jos tarvitaan)}\\
&\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad \text{kokonaislukujen joukko}\\
&\mathbf{Q} := \left\{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbf{Z}, m \neq 0\right\} \quad \text{rationaalilukujen joukko}\\
&\mathbf{R} = \text{ reaalilukujen joukko}\\
&\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \text{ irrationaalilukujen joukko } = \{x \in \mathbf{R} : x \notin \mathbf{Q}\}.
\end{aligned}
$$

2.2. Reaalilukujen perusominaisuudet

Reaaliluvuilla on seuraavat ominaisuudet; monet näistä ominaisuuksista seuraavat reaalilukujen konstruktiosta, minkä tekeminen ei ole analyysin kannalta erityisen kiinnostavaa.

2.2.1. Algebralliset ominaisuudet (kunta)

Reaalilukujen joukossa $\mathbf{R}$ on määritelty yhteenlasku $(+)$ ja kertolasku $(\cdot)$ seuraavin ominaisuuksin (kertomerkki jätetään yleensä kirjoittamatta: $a \cdot b = ab$).

Kaikille reaaliluvuille $a, b, c \in \mathbf{R}$ on voimassa:

(K1) $a + b = b + a$ ja $ab = ba$. (kommutatiivisuus)

(K2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ ja $(ab)c = a(bc)$ (assosiatiivisuus)

(K3) $a(b + c) = ab + ac$ (distributiivisuus)

(K4) On olemassa erityiset reaaliluvut 0 ja 1, joille $a + 0 = a$ ja $a \cdot 1 = a$ kaikilla $a \in \mathbf{R}$.

(K5) Jokaisella $a \in \mathbf{R}$ on olemassa *vastaluku* $-a$, jolle $a + (-a) = 0$ ja jokaisella $b \in \mathbf{R}$, $b \neq 0$ on olemassa *käänteisluku* $\frac{1}{b}$, jolle $b(\frac{1}{b}) = 1$.

2.1. Huomautus (kunta). Yleisemmin matematiikassa *kunta* tarkoittaa (epätyhjää) joukkoa K, johon on määritelty laskutoimitukset: yhteenlasku $+$ ja kertolasku $*$, jotka toteuttavat em. ominaisuudet: Kaikille $a, b, c \in K$ on voimassa:

(Ḱ1) $a + b = b + a \in K$ ja $a * b = b * a \in K$. (kommutatiivisuus)

(Ḱ2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ ja $(a * b) * c = a * (b * c)$ (assosiatiivisuus)

(Ḱ3) $a * (b + c) = a * b + a * c$ (distributiivisuus)

(Ḱ4) On olemassa erityiset luvut, *nolla-alkio* $\mathbf{0}$ ja *ykkösalkio* $\mathbf{1}$, joille $a + \mathbf{0} = a$ ja $a * \mathbf{1} = a$ kaikilla $a \in K$.

(Ḱ5) Jokaisella $a \in K$ on olemassa *vastaluku* $-a \in K$, jolle $a+(-a) = 0$ ja jokaisella $b \in K$, $b \neq \mathbf{0}$ on olemassa *käänteisalkio* b^{-1}, jolle $b * b^{-1} = \mathbf{1}$.

Esimerkiksi reaaliluvut $\mathbf{R}$ ja rationaaliluvut $\mathbf{Q}$ ovat kuntia tavallisine yhteen- ja kertolaskuineen (rationaalilukujen tapauksessa rittää vain todeta, että laskutoimitusten tulos pysyy rationaalilukujen joukossa). Sen sijaan kokonaislukujen joukko $\mathbf{Z}$ ei ole kunta, koska käänteisalkio yleensä karkaa ulos joukosta.

Kompleksiluvut $\mathbf{C}$ varustettuna tavallisella kompleksilukujen yhteen- ja kertolaskulla (jos $z = a + ib$ ja $w = c + id$, missä $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, niin $z + w = 1 + c + i(b + d)$ ja $zw = ac - bd + i(bc + ad)$) muodostaa kunnan, jonka nolla-alkio on $\mathbf{0} = 0$ ja ykkös-alkio on $\mathbf{1} = 1$. (HT, totea tämä ja etsi käänteisalkio)

2.2. Huomautus (Manipulointi).
Vähennyslasku on vasta-alkion yhteenlaskua:

$$a - b := a + (-b)\,.$$

Samoin jakolasku on käänteisalkiolla kertomista:

$$\frac{a}{b} := a(\frac{1}{b})\,.$$

Potensseille käytämme tavanomaisia merkintöjä:

$$a^1 = a\,, \quad a^2 = a\,a\,, \quad a^3 = a\,a^2\,, \text{ ja rekursiivisesti } a^{k+1} = a\,a^k \text{ kaikilla } k \in \mathbf{N}\,.$$

Edelleen, kun $k \in \mathbf{N}$ merkitään

$$a^{-k} = (\frac{1}{a})^k \text{ jolloin } a^{-k} = \frac{1}{a^k}\,.$$

Huomaa, että, edellisten kanssa yhteensopivasti, määritellään:

$$a^0 = 1 \text{ kaikilla } a \in \mathbf{R}\,, \quad a \neq 0\,,$$

mutta symbolia 0^0 ei määritellä lainkaan.

Mm. seuraavat tutut manipulointisäännöt on helppo verifioida em. ominaisuuksien (K1)-(K5) avulla (nämä kannattaa laskea itse):

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2\,,\\
(a+b)(a-b) &= a^2 - b^2\,,\\
(3a+2b)(4c+2d) &= 12ac + 6ad + 8bc + 4bd\\
-a = (-1)a\,, \quad a(-b) &= (-a)b = -(ab) \quad \text{ja}\\
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad+bc}{bd}\,, \qquad \text{kun } bd \neq 0\,.
\end{aligned}$$

Kokonaislukupotenssiin korottamisen käänteisoperaatio, juurenotto, on myös vanha tuttu: ei-negatiivisen reaaliluvun x k. juuri on sellainen ei-negatiivinen reaaliluku y, jolle $y^k = x$; tätä merkitään

$$y = \sqrt[k]{x} = x^{\frac{1}{k}}\,.$$

Kokonaislukupotensseja ja -juuria yhdistelemällä saadaan ei-negatiivisen reaaliluvun x rationaalipotenssit: kun $m, n \in \mathbf{Z}$, $m, n \neq 0$, niin

$$x^{\frac{m}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m = (x^m)^{\frac{1}{n}}\,.$$

Muista manipulointisäännöt:

$$x^{a+b} = x^a x^b \quad \text{ja} \quad x^{a-b} = \frac{x^a}{x^b}\,.$$

2.2.2. Järjestys

Reaalilukujen joukossa on järjestysrelaatio $<$, joka on yhteensopiva yhteen- ja kertolaskun kanssa ("**R** on *järjestetty kunta*"). Perusominaisuudet voidaan tiivistää seuraaviin neljään aksioomaan:

(J1) (täydellisyys) Kaikille reaaliluvuille a ja b on voimassa täsmälleen yksi seuraavista vaihtoehdoista:

$$a < b\,, \quad a = b \text{ tai } b < a\,.$$

(J2) (transitiivisuus) Jos $a < b$ ja $b < c$, niin $a < c$.

(J3) Jos $a < b$ niin $a + c < b + c$ kaikilla $c \in \mathbf{R}$.

(J4) Jos $a < b$ ja niin $ac < bc$ kaikilla $c \in \mathbf{R}$, $c > 0$.

Huomaa, että $a > b$ tarkoittaa samaa kuin $b < a$. Tämä lause luetaan: *a (aidosti) suurempi kuin b* tarkoittaa samaa kuin *b (aidosti) pienempi kuin a* .

Usein käytetään *aitojen epäyhtälöiden* $a < b$ ja $b > a$, lisäksi *epäyhtälöitä* $a \leq b$ eli $b \geq a$ luetaan *a pienempi tai yhtäsuuri kuin b* ja *b suurempi tai yhtäsuuri kuin a*). Nämä määritellään seuraavasti:

$$\begin{aligned} a \leq b \ \text{ tarkoittaa: joko } a < b \text{ tai } a = b\,; \\ a \geq b \ \text{ tarkoittaa: joko } a > b \text{ tai } a = b\,. \end{aligned}$$

Erityisesti, siis aina pätee:

$$\text{jos } a < b\,, \text{ niin } a \leq b\,,$$

ja

$$a = b \text{ täsmälleen silloin, kun sekä } a \leq b \text{ että } a \geq b\,.$$

Tällä järjestyksellä $\leq$ on ominaisuudet:

i) $a \leq a$ kaikilla $a \in \mathbf{R}$. (refleksiivisyys)

ii) Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$. (antisymmetrisyys)

iii) Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$. (transitiivisuus)

Huomaa: $a \neq b$ tarkoittaa:

$$\text{joko } a < b \text{ tai } a > b\,.$$

Yleensä käytetään ilmaisuja:

$$\begin{aligned}
x > 0 : &\quad x \text{ on } \textit{positiivinen},\\
x < 0 : &\quad x \text{ on } \textit{negatiivinen},\\
x \geq 0 : &\quad x \text{ on } \textit{ei-negatiivinen} \text{ ja}\\
x \leq 0 : &\quad x \text{ on } \textit{ei-positiivinen.}
\end{aligned}$$

Järjestysrelaation ominaisuuuksista saamme helposti:

2.3. Lemma.

i) Jos $a > b$ ja $c > d$, niin $a + c > b + d$.

ii) $a > b$, jos ja vain jos $a - b > 0$.

iii) Jos $a > b$ ja $c < 0$, niin $ac < bc$

iv) Kun $a, b > 0$, niin $a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < b^2$.

TODISTUS: *i)* Käyttämällä kohtaa (J3) kahdesti (ensin lisätään c ja sitten b) saadaan

$$a + c > b + c > b + d\,.$$

$\not\square$

ii) HT.

iii) Koska $c < 0$, niin kohdan ii) nojalla $-c > 0$, joten ominaisuus (J4) antaa:

$$-ac = a(-c) > b(-c) = -bc.$$

Ja siis $ac < bc$ kohdan ii) nojalla. $\not\square$

iv) Kun $0 < a < b$, saadaan käyttämällä ominaisuutta (J4) kahdesti

$$a^2 = aa < ab < bb = b^2\,,$$

joten $a^2 < b^2$.

Käänteinen implikaatio: Olkoon $a^2 < b^2$. Väite: $a < b$. Nyt

$$b - a = \frac{b + a}{b + a}(b - a) = \frac{1}{b + a}(b^2 - a^2) > 0,$$

koska $b + a > 0$ ja $b^2 - a^2 > 0$, joten $b > a$. $\square$

2.4. Lause. *Jos $a < b + c$ kaikilla $c > 0$, niin $a \le b$.*

TODISTUS: Antiteesi: $a > b$. Olkoon $c = a - b > 0$, jolloin oletuksen nojalla

$$a < b + c = b + (a - b) = a,$$

mikä on ristiriitaista (nimittäin, että olisi $a < a$). Väite on siten tosi. $\square$

*Väli*ä merkitään usein kirjaimella I. Väli I on aina epätyhjä , $I \neq \emptyset$, ja $I \subset \mathbf{R}$. Väli on jokin seuraavista:

$$\begin{aligned} [a,b] &:= \{x \in \mathbf{R} : a \le x \le b\} \quad \text{(suljettu väli)},\\ [a,b[&:= \{x \in \mathbf{R} : a \le x < b\} \quad \text{(puoliavoin väli)},\\ ]a,b] &:= \{x \in \mathbf{R} : a < x \le b\} \quad \text{(puoliavoin väli)},\\ ]a,b[&:= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\} \quad \text{(avoin väli)} \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned}]-\infty,b] &:= \{x \in \mathbf{R} : x \le b\}, \quad]-\infty,b[:= \{x \in \mathbf{R} : x < b\},\\ ]a,\infty[&:= \{x \in \mathbf{R} : x > a\}, \quad [a,\infty[:= \{x \in \mathbf{R} : x \ge a\} \quad \text{tai}\\ ]-\infty,\infty[&:= \mathbf{R}. \end{aligned}$$

2.2.3. Etäisyys

Analyysissä on tärkeää mitata/arvioida pisteiden välisiä etäisyyksiä. Reaalilukujen joukossa tätä tarkoitusta varten käytetään itseisarvoa: Luvun $x \in \mathbf{R}$ *itseisarvo* määritellään

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \ge 0\\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Itseisarvolla on ominaisuudet (todistus HT):

2.5. Lemma. *Tällöin*

i) $|x| \ge 0$ *kaikilla* $x \in \mathbf{R}$

ii) $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

iii) $|xy| = |x|\,|y|$ *kaikilla* $x, y \in \mathbf{R}$*; erityisesti* $|x| = |-x|$.

iv) $-|x| \le x \le |x|$ *kaikilla* $x \in \mathbf{R}$.

Lukujen a ja b *välinen etäisyys* on $|a-b|$, kun $a,b \in \mathbf{R}$. Erityisesti siis luvun x itseisarvo on sen etäisyys origosta eli luvusta 0. Eäisyydellä on seuraavat ominaisuudet:

2.6. Lause. *Kaikilla $x,y \in \mathbf{R}$ pätee:*

i) $|x-y| \geq 0$.

ii) $|x-y| = 0$ *jos ja vain jos* $x = y$.

iii) (Kolmioepäyhtälö, Δ-ey)

$$|x+y| \leq |x| + |y| \,.$$

iv) (Käänteinen kolmioepäyhtälö)

$$\Big|\, |x| - |y| \,\Big| \leq |x+y| \,.$$

Todistus: Kohdat i) ja ii) ovat selviä. Käänteinen kolmioepäyhtälö (kohta iv) seuraisi helposti kolmioepäyhtälöstä iii), joka taas tulee helpohkosti suoraan itseisarvon määritelmästä.. Todistetaan kuitenkin kolmioepäyhtälöt iii) ja iv) nopeasti käyttämällä Lemmaa 2.3: Koska Lemman 2.5 nojalla pätee

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x|+|y|)^2,$$

väite iii) seuraa Lemman 2.3 kohdasta iv). Samoin saadaan käänteinen kolmioepäyhtälö iv), koska

$$\Big|\, |x| - |y| \,\Big|^2 = |x|^2 - 2|x|\,|y| + |y|^2 \leq x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 = |x+y|^2.$$

$\square$

2.2.4. Täydellisyys

Reaalilukujoukon lisäksi myös rationaalilukujen joukko $\mathbf{Q}$ toteuttaa tähänastiset aksiomat (kunta - ja järjestys). Rationaalilukujen avulla ei voida kuitenkaan tarkasti lausua esimerkiksi yksikköneliön halkaisijan pituutta (joka on $\sqrt{2}$), vaikka rationaaliluvut tarjoavat äärimmäisen hyvän approksimantin em. halkaisijan pituudelle. Reaalilukujen täydellisyys takaa sen, ettei tällaiseen pulaan jouduta reaalilukujoukossa.

2.7 . Määritelmä. Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$. Sanotaan, että joukko A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa luku $M \in \mathbf{R}$ siten, että

$$a \leq M \quad \text{kaikilla } a \in A. \tag{2.8}$$

Tällöin luku M on joukon A (eräs) *yläraja*.
Edelleen A on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa luku $m \in \mathbf{R}$ siten, että

$$a \geq m \quad \text{kaikilla } a \in A. \tag{2.9}$$

Tällöin luku m on A:n (eräs) *alaraja*.
Joukko A on *rajoitettu*, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu.

Esimerkki.

$$A := \left\{ x \in \mathbf{R} : \, x = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{jollain } n \in N \right\}.$$

Tällöin 3 000 000 000 on eräs yläraja.Ylärajoista pienin on 2, joka on myös joukon A suurin alkio $\max A$. Alarajoista suurin on 1, joka ei kuulu joukkoon A.

2.10. Huomautus.

i) Jos M on A:n yläraja, niin jokainen $M' \in \mathbf{R}$, jolle $M' \geq M$, on myös A:n yläraja. Edelleen $A \subset]-\infty, M]$.
Samoin, jos m on A:n alaraja, niin jokainen $\tilde{m} \leq m$ on myös A:n alaraja.

ii) A on rajoitettu
$\Leftrightarrow$ $A \subset [a, b]$ joillakin $a, b \in \mathbf{R}$
$\Leftrightarrow$ $A \subset [-M, M]$ jollakin $M > 0$
$\Leftrightarrow$ on olemassa $M > 0$ siten, että $|a| \leq M$ kaikilla $a \in A$.

Esimerkki. Joukko

$$A =]1, \infty[$$

on alhaalta rajoitettu. Esimerkiksi $a \geq 0$ kaikilla $a \in A$ johtaa siihen, että 0 on eräs alaraja. A ei kuitenkaan ole ylhäältä rajoitettu, sillä jos $M \in \mathbf{R}$, niin $|M| + 1 > M$ ja $|M| + 1 \in A$, jolloin M ei mitenkään voi olla A:n yläraja.

Esimerkki. Olkoon

$$B = \{2 - n^2 : n \in N\} = \{2, 1, -2, -7 \ldots\}.$$

Tällöin B:n suurin alkio on $\max B = 2$, joten 2 on B:n pienin yläraja. B ei ole alhaalta rajoitettu.

2.11. Huomautus. Jos on olemassa $\max A := A$:n suurin alkio, niin $\max A$ on A:n pienin yläraja. Vastaavasti jos on olemassa $\min A$, A:n pienin alkio, on se A:n suurin alaraja.
Varoitus! Yleensä ei edes rajoitetulla joukolla ole suurinta tai pienintä alkiota (esim. $A =]-1, 1[$). Kuitenkin rajoitetulla joukolla on aina paras mahdollinen ylä- tai alaraja.

2.12. Aksiooma (Täydellisyysaksiooma).
Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$ ylhäältä rajoitettu. Tällöin on olemassa luku $G \in \mathbf{R}$, joka on pienin A:n ylärajoista (ts. G on joukon A yläraja ja kaikille joukon A ylärajoille M pätee: $G \leq M$).

2.13. Määritelmä. Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$. Jos A on ylhäältä rajoitettu, niin A:n pienin yläraja on joukon A *supremum*, merkitään $\sup A$, toisin sanoen $G = \sup A$, jos ja vain, jos

i) $a \leq G$ kaikilla $a \in A$ (eli G on A:n yläraja) ja

ii) $G \leq M$, oli $M \in \mathbf{R}$ mikä hyvänsä joukon A yläraja, ts. jos $a \leq M$ kaikilla $a \in A$, niin $G \leq M$ (G on ylärajoista pienin).

Vastaavasti määritellään: joukon A *infimum*, $\inf A$ on A:n suurin alaraja, toisin sanoen $g = \inf A$, jos ja vain jos

i) $a \geq g$ kaikilla $a \in A$ (eli g on joukon A alaraja) ja

ii) $g \geq m$, oli $m \in \mathbf{R}$ mikä hyvänsä joukon A alaraja, ts. jos $a \geq m$ kaikilla $a \in A$, niin $g \geq m$ (g on alarajoista suurin).

Täydellisyysaksiooman nojalla jokaisella ylhäältärajoitetulla joukolla on (yksikäsitteisesti määrätty, reaalinen) supremum. Havaitsemalla, että jos

$$-A = \{-a : \ a \in A\} ,$$

niin A on alhaalta rajoitettu täsmälleen silloin, kun $-A$ on ylhäältä rajoitettu ja

$$\inf A = -\sup(-A)$$

on tällöin täydellisyysaksiooman nojalla olemassa.

2.14. Huomautus. Merkitään

$$\begin{aligned} \sup A &:= +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad & A \text{ ei ole ylhäältä rajoitettu} \\ \inf A &:= -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad & A \text{ ei ole alhaalta rajoitettu.} \end{aligned}$$

Huomaa, että edellä määriteltiin supremum ja infimum vain epätyhjille joukoille.

2.15. Huomautus.

i) $\sup A \in A \quad \Leftrightarrow \quad$ on olemassa joukon A suurin alkio ($\max A$).
Tällöin $\sup A = \max A$.
Vastaavasti $\inf A \in A \quad \Leftrightarrow \quad$ on olemassa joukon A pienin alkio ($\min A$), jolloin $\inf A = \min A$.

ii) Usein: $\sup A, \inf A \notin A$ (esim. $A =]-1, 1[$).

iii) A:n supremum on yksikäsitteisesti määrätty: jos S ja S' ovat supremumeja, niin koska S' on yläraja ja S ylärajoista pienin, on $S \leq S'$. Samoin $S' \leq S$, joten $S = S'$.

Myös infimum on yksikäsitteinen.

iv) $\inf A \leq \sup A$ ja jos $A \subset B$, niin

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B \quad \text{(HT)}.$$

Esimerkki.

$$A = \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N} \right\} = \left\{ 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{4}{5}, 1\frac{5}{6}, \dots \right\}.$$

Mitkä ovat A:n supremum ja infimum? $1 \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, joten 1 on A:n eräs alaraja ja 2 eräs yläraja.
Jos m on A:n alaraja, niin

$$m \leq 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1,$$

joten $1 = \inf A = \min A$.
Näytetään, että $\sup A = 2$: Muistetaan, että 2 on joukon A yläraja. Jos M on A:n yläraja, on osoitettava, että $M \geq 2$. Jos $M < 2$, niin valitaan $n \in \mathbf{N}$,

$$n > \frac{1}{2 - M},$$

jolloin $2 - M > \frac{1}{n}$. Siten

$$2 - \frac{1}{n} > 2 - (2 - M) = M,$$

eli M ei olisikaan A:n yläraja. Siispä $M \geq 2$ ja $2 = \sup A$ (joukon A suurinta alkiota ei ole olemassa).

Esimerkki. Olkoon

$$B = \left\{ \sum_{k=1}^{n} a_k 10^{-k} : a_k \in \{0, 1, 2, 3\},\ n \in \mathbf{N} \right\}.$$

Selvästi $b \geq 0$ kaikilla $b \in B$ ja koska $0 \in B$, on

$$\inf B = 0\,.$$

Edelleen, koska (kuten induktiolla helposti näemme)

$$\sum_{k=1}^{n} 10^{-k} = \frac{1 - 10^{-n}}{9} < \frac{1}{9} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N},$$

on

$$b < \frac{1}{3} \quad \text{kaikilla } b \in B,$$

on $\frac{1}{3}$ eräs joukon B yläraja. Edellä olevan nojalla luku

$$\frac{1 - 10^{-n}}{3} \in B \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N},$$

joten $\frac{1}{3}$ joukon B ylärajoista pienin, eli

$$\sup B = \frac{1}{3}\,.$$

2.16. Lause. *Olkoon M epätyhjän joukon $A \subset \mathbf{R}$ jokin yläraja. Tällöin $M = \sup A$, jos ja vain, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $a \in A$ siten, että $a \geq M - \varepsilon$.*

TODISTUS: "$\Rightarrow$" **Antiteesi:** on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $a < M - \varepsilon$ kaikilla $a \in A$. Silloin $M - \varepsilon$ on joukon A yläraja, jolle $M - \varepsilon < M = \sup A$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa supremumin (pienin yläraja) määritelmän kanssa. $\not\square$

"$\Leftarrow$" Olkoon kaikilla $\varepsilon > 0$ olemassa $a \in A$, jolle $M - \varepsilon \leq a$. Väite: $M = \sup A$. Olkoon $\mathcal{Y}$ joukon A yläraja. On siis olemassa $a \in A$ siten, että

$$M - \varepsilon \leq a \leq \mathcal{Y},$$

toisin sanoen

$$\mathcal{Y} + \varepsilon \geq M \quad \text{kaikilla } \varepsilon > 0.$$

Lauseen 2.4 nojalla $\mathcal{Y} \geq M$, joten $M = \sup A$. $\square$

2.17. Seuraus. *Olkoon M epätyhjän joukon $A \subset \mathbf{R}$ jokin yläraja. Tällöin $M = \sup A$, jos ja vain, jos on olemassa sellainen jono $a_n \in A$, jolle*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = M.$$

TODISTUS: Seuraa lauseesta 2.16 ja raja-arvon määritelmästä. $\square$

Muista:

2.18. Määritelmä (Jonon raja-arvo)**.**
Olkoon $x_1, x_2, \ldots$ jono reaalilukuja. Sanotaan, että jono (x_n) *suppenee (konvergoi)* kohti reaalilukua a, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N = N(\varepsilon, jono) \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Tällöin sanotaan, että a on jonon (x_n) *raja-arvo* ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{tai } x_n \to a \text{ kun } n \to \infty.$$

2.19. Huomautus. Jos jono (x_n) ei suppene kohti mitään reaalilukua a, sanotaan, että jono (x_n) *hajaantuu (divergoi)* tai jono on *hajaantuva.* (Vast. jos jono (x_n) suppenee kohti jotain $a \in \mathbf{R}$, on jono (x_n) *suppeneva.*)

Kuitenkin erikoistapauksessa kun jonon alkiot kasvavat tai vähenevät rajatta, niin sanotaan että jonon raja-arvo on ∞ tai $-\infty$, vaikka jono hajaantuukin yo. määritelmän nojalla. Siis:

Jonon (x_n) *raja-arvo on* ∞, jos kaikilla $M \in \mathbf{R}$ on N siten, että

$$x_n \geq M \text{ kaikilla } n \geq N.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Vastaavasti, jonon (x_n) *raja-arvo on* $-\infty$, jos kaikilla $m \in \mathbf{R}$ on N siten, että

$$x_n \leq m \text{ kaikilla } n \geq N.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Täydellisyysaksiooman seurauksena todistamme, että kokonaislukujen joukko $\mathbf{N}$ ei ole ylhäältä rajoitettu:

2.20. Lause (Arkhimedeen ominaisuus)**.** *Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Tällöin on olemassa sellainen $n \in \mathbf{N}$, jolle*

$$|x| < n\,.$$

TODISTUS: Antiteesi: $|x| \geq n$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Tällöin $|x|$ on joukon $\mathbf{N}$ yläraja, jolloin täydellisyysaksiooman nojalla olisi $\sup \mathbf{N} \in \mathbf{R}$. Edelleen Lauseen 2.16 nojalla on sellainen $n \in \mathbf{N}$, jolle

$$\sup \mathbf{N} - 1 < n,$$

joten

$$n + 1 > \sup \mathbf{N}.$$

Tämä on ristiriita, koska $n + 1 \in \mathbf{N}$. □

2.21. Huomautus.

Arkhimedeen ominaisuuden seurauksena näemme: kaikille $x \in \mathbf{R}$ on yksikäsitteinen kokonaisluku $k \in \mathbf{Z}$, jolle[1]

$$k \leq x < k + 1\,.$$

Tämän seurauksena saamme edelleen, että jokaiselle $x \in \mathbf{R}$, jolle $0 < |x| \leq 1$, on sellainen kokonaisluku $n \in \mathbf{N}$, jolle

$$\frac{1}{n+1} < |x| \leq \frac{1}{n}\,. \tag{2.22}$$

Tämän näet, kun valitset sen luvun $n \in \mathbf{N}$, jolle

$$n \leq \frac{1}{|x|} < n + 1\,.$$

Epäyhtälöistä (2.22) seuraa, että kahden reaaliluvun välissä on aina rationaaliluku, ts. rationaaliluvut ovat *tiheässä* reaaliakselilla: Olkoot $x, y \in \mathbf{R}$, $x < y$. Tällöin on olemassa $q \in \mathbf{Q}$, jolle $x < q < y$. Etsitään eräs tällainen q: Olkoon k se kokonaisluku, jolle

$$k \leq x < k + 1.$$

Nyt valitaan (2.22):n takaama kokonaisluku n siten, että

$$\frac{1}{n} < y - x$$

[1] Voidaan olettaa, että $x \notin \mathbf{Z}$.
Olkoon sitten n pienin luonnollinen luku, joka on (aidosti) suurempi kuin $|x|$. Tällöin $k = n - 1$, jos $x \geq 0$ ja $k = -n$, jos $x < 0$.

ja edelleen sellainen kokonaisluku $\ell \in \mathbf{N}$, jolle

$$\ell \leq (x-k)n < \ell + 1 \,.$$

Tällöin eräs etsimistämme rationaaliluvuista on

$$q = k + \frac{\ell+1}{n} \,,$$

sillä

$$\begin{aligned} x = k + (x-k) &< k + \frac{\ell+1}{n} = q = k + \frac{\ell}{n} + \frac{1}{n} \\ &< k + (x-k) + \frac{1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y \,. \end{aligned}$$

Muistutetaan mieliin funktion jatkuvuuden ja raja-arvon määritelmät:

2.23. Määritelmä (jatkuvuus). Olkoon $I \subset \mathbf{R}$ väli, $x_0 \in I$ ja $f : I \to \mathbf{R}$. Funktio f on *jatkuva* pisteessä x_0, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

kun $x \in I$ ja $|x - x_0| < \delta$.

2.24. Määritelmä (Funktion raja-arvo). Sanotaan, että luku $a \in \mathbf{R}$ on funktion f *raja-arvo* pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \,,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta \,.$$

2.25. Huomautus.

i) Funktion raja-arvon määritelmässä f:n ei tarvitse olla määritelty lainkaan pisteessä x_0. Muutoinkin ehto $|f(x) - a| < \varepsilon$ tarkistetaan vain niillä x, joilla f on määritelty. Siinä siis riittää, että funktio f on määritelty lähellä pistettä x_0, mutta ei välttämättä pisteessä x_0.

ii) Funktion raja-arvon ja jatkuvuuden määritelmät muistuttavat toisiaan, ero on vain siinä, että jatkuvuuden tapauksessa (mahdollinen) raja-arvo on sama kuin funktion arvo pisteessä x_0. Ts, jos määritellään

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{jos } x \neq x_0 \\ a\,, & \text{jos } x = x_0\,, \end{cases}$$

niin

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,,$$

jos ja vain, jos g on jatkuva pisteessä x_0.

3. Olemassaolo

Tässä luvussa todistamme erilaisia olemassaolotuloksia, jotka on lauseina esitetty jo aiemmin (Bolzanon lause, Bolzano-Weierstrass, maksimin olemassaolo, Väliarvolause (seuraa Rollesta, joka edelleen maksimin olemassaolosta) jne.) Nämä todistukset perustuvat pohjimmiltaan reaalilukujen kontinuumiominaisuuteen (täydellisyyteen) ja sen periytymiseen jatkuvan kuvauksen graafille.

Aloitamme helpoimmasta ja todistamme ensin Bolzanon lauseen: jatkuva funktio ei jätä saamatta yhtään arvoa.

3.1. Bolzanon lause

3.1. Lause. (Bolzano) (Intermediate value theorem eli välissäoleva arvo -lause) *Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja*

$$f(a) \leq c \leq f(b).$$

Tällöin on olemassa $x_0 \in [a, b]$ siten, että

$$f(x_0) = c.$$

3.2. Huomautus. Bolzanon lauseen kertoo, että välin jatkuva kuva muistuttaa väliä sikäli, että kuvajoukossa on kaikki kahden pisteen välisetkin pisteet. Bolzanon lause on tyypillinen olemassaolotulos (eksistenssitulos); se ei anna minkäänlaista keinoa mainitun pisteen x_0 löytämiseksi.

Lauseen antama piste x_0 ei yleensä ole yksikäsitteinen, vaan f voi saada arvon c monessa eri pisteessä. Oleellista on se, että c on $f(a)$:n ja $f(b)$:n välissä (siis $f(a) \leq c \leq f(b)$ tai $f(a) \geq c \geq f(b)$).

3.3. Seuraus. *Jos välillä $[a, b]$ on jatkuva funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, joka saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä (toisin sanoen $f(a)\, f(b) \leq 0$), niin on olemassa $x_0 \in [a, b]$ siten, että $f(x_0) = 0$.*

Lauseet 3.1 ja 3.3 ovat yhtäpitäviä:

- Lause 3.3 seuraa Lauseesta 3.1 soveltamalla jälkimmäisenä mainittua funktioon $\pm f$ ja valitsemalla $c = 0$. Lause 3.1 voidaan johtaa Lauseesta 3.3 tutkimalla funktiota $g(x) = f(x) - c$

TODISTUS: Olkoon

$$x_0 := \sup \underbrace{\{t \in [a,b] : f(t) \leq c\}}_{=A}$$

Tällöin $A \neq \emptyset$, koska $a \in A$ sillä $f(a) \leq c$. Edelleen, A on ylhäältä rajoitettu, ylärajana b sillä $A \subset [a,b]$. Nyt täydellisyysaksiooman 2.12 mukaan on olemassa $x_0 = \sup A \in [a,b]$. Osoitetaan, että $f(x_0) = c$.

Ensin havaitaan, että $f(x_0) \geq c$, koska jos olisi $f(x_0) < c$, niin funktion f jatkuvuuden nojalla

$$f(x_0) - f(x) < \frac{c - f(x_0)}{2}$$

kunhan x on tarpeeksi lähellä x_0:aa. Silloin

$$f(x) < f(x_0) + \frac{c - f(x_0)}{2} = \frac{c + f(x_0)}{2} < c$$

jollain $x > x_0$, mikä on vastoin joukon A ja pisteen x_0 määrittelyä.

Edelleen: mikäli $f(x_0) > c$, niin (samoin kuin edellä) $x_0 \neq a$ ja f:n jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x_0) - f(x) < \frac{f(x_0) - c}{2} \quad \text{kaikille } x \in]x_0 - \delta, x_0[,$$

joten

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0) - c}{2} = \frac{f(x_0) + c}{2} \quad \text{kaikille } x \in]x_0 - \delta, x_0[.$$

Tällöin $x_0 - \frac{\delta}{2}$ on joukon A yläraja. Koska

$$x_0 - \frac{\delta}{2} < x_0 = \sup A,$$

tämä on ristiriidassa supremumin määritelmän kanssa. Siten välttämättä $f(x_0) = c$.

□

Esimerkki. (Bolzanon lause)

$$f(x) = 6x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 6.$$

Koska

$$f(0) = -6 < 0 < 1 = f(1),$$

on välillä $]0,1[$ vähintään yksi x_0 siten, että $f(x_0) = 0$. Etsitään nollakohta tarkkuudella $0,1$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{78}{16} < 0\,, \quad \text{joten nollakohta löytyy väliltä } \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -\frac{786}{256} < 0\,, \quad \text{joten nollakohta löytyy väliltä } \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

$$f\left(\frac{7}{8}\right) = -\frac{5802}{4096} < 0\,, \quad \text{joten nollakohta löytyy väliltä } \left[\frac{7}{8}, 1\right]$$

$$f\left(\frac{15}{16}\right) = -\frac{10\,413}{32\,768} < 0\,, \quad \text{joten nollakohta löytyy väliltä } \left[\frac{15}{16}, 1\right].$$

Koska $1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} < 0,1$, on haluttu tarkkuus saavutettu. Tarkemmin $x_0 \approx 0,953624$.

3.4. Huomautus.

i) Bolzanon lausetta ei voida "kääntää": epäjatkuvalla funktiollakin voi olla ominaisuus, että se saa jokaisella välillä kaikki päätepisteiden arvojen väliset arvot, esimerkiksi

$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}\,, & \text{jos } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{jos } x \neq 0, \end{cases}$$

on tällainen.

ii) Derivaattafunktio toteuttaa myös aina Bolzanon lauseen johtopäätöksen: *Olkoon f derivoituva ja $a < b$. Jos $f'(a) < \gamma < f'(b)$, niin on olemassa $x_0 \in]a,b[$, jolle $f'(x_0) = \gamma$.* Tämä ns. Darboux'n lause todistetaan seuraavasti: Tarkastellaan funktiota

$$g(x) = f(x) - \gamma x\,.$$

Koska $g'(a) = f'(a) - \gamma < 0$ ja $g'(b) = f'(b) - \gamma > 0$, saavuttaa g välillä $[a,b]$ pienimmän arvonsa jossakin pisteessä $x_0 \in]a,b[$. Tällöin $0 = g'(x_0) = f'(x_0) - \gamma$ eli $f'(x_0) = \gamma$.

Huomaa, että derivaattafunktio voi olla epäjatkuva, vaikka sillä ei edellä olevan nojalla voi olla hyppäysepäjatkuvuuskohtia.

3.2. Monotonisen jonon raja-arvo

Funktiota $x : \mathbf{N} \to A$ sanotaan *(äärettömäksi) jonoksi* joukossa A; tässä A voi olla mv. joukko, vaikkakin se jatkossa on yleensä $\mathbf{R}$, joskus yleisemmin $\mathbf{R}^n$, $n = 2, 3, \ldots$.

Käytännössä jonot kirjoitamme aina muodossa $x_n := x(n)$ ja jonon termit luetellaan alaindeksien kasvujärjestyksessä

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots .$$

Aina ei ole mukava määritellä jonoa *kaikilla* indekseillä $n \in \mathbf{N}$, joten käytämme jononimitystä myös $\mathbf{N}$:n äärettömillä osajoukoilla määritetyille funktioille. (Huomaa, että jos B on $\mathbf{N}$:n ääretön osajoukko eli siinä on äärettömän monta alkiota, niin on olmassa bijektio $b : B \to \mathbf{N}$.)

Usein kirjoitamme jonon myös muodossa (x_n).

3.5. Määritelmä. (*Monotoninen jono*) Jono (x_n) on *monotoninen*, jos se on joko

- *kasvava* (*nouseva*), ts. $x_n \leq x_{n+1}$ kaikilla n, tai
- *vähenevä* (*laskeva*), ts. $x_n \geq x_{n+1}$ kaikilla n.

Muista: Jono x_n on *ylhäältä rajoitettu*, jos on $M \in \mathbf{R}$ s.e. $x_n \leq M$ kaikilla n.
Jono x_n on *alhaalta rajoitettu*, jos on $m \in \mathbf{R}$ s.e. $x_n \geq m$ kaikilla n.
Jono x_n on *rajoitettu*, jos on $M \in \mathbf{R}$ s.e. $|x_n| \leq M$ kaikilla n.

Ts. jono on (ylhäältä/alhaalta) rajoitettu, jos ja vain, jos sen jäsenten muodostama joukko $\{x_n : n \in \mathbf{N}\}$ on ylhäältä/alhaalta) rajoitettu.

3.6. Määritelmä. (*Suppeneminen, raja-arvo*)
Olkoon $x_1, x_2, \ldots$ jono reaalilukuja. Sanotaan, että jono (x_n) *suppenee (konvergoi)* kohti reaalilukua a, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N = N(\varepsilon, jono) \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Tällöin sanotaan, että a on jonon (x_n) *raja-arvo* ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{tai } x_n \to a \text{ kun } n \to \infty.$$

Jos jono (x_n) ei suppene kohti mitään reaalilukua a, sanotaan, että jono (x_n) *hajaantuu (divergoi)* tai jono on *hajaantuva*. (Vast. jos jono (x_n) suppenee kohti jotain $a \in \mathbf{R}$, on jono (x_n) *suppeneva*.)

3.7. Lause. *Ylhäältä rajoitettu, kasvava jono on suppeneva, ts. jos x_n on ylhäältä rajoitettu, nouseva jono, niin on olemassa $a \in \mathbf{R}$ s.e.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,.$$

Todistus: Olkoon $a = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$ (täydellisyysaksiooma!). Osoitetaan, että a on etsitty raja-arvo: Olkoon $\varepsilon > 0$. Supremumin karakterisoinnin (Lause 2.16) nojalla on $n_0 \in \mathbf{N}$ siten, että

$$x_{n_0} > a - \varepsilon\,.$$

Koska jono x_n on kasvava, on kaikilla $n \geq n_0$

$$|x_n - a| = a - x_n \leq a - x_{n_0} < a - (a - \varepsilon) = \varepsilon$$

ja siten

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,.$$

□

3.8. Seuraus. *Rajoitettu monotoninen jono on suppeneva.*

Esimerkki. Raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

on olemassa: Olkoon $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$. Tällöin jono x_n on nouseva, koska

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = (1 + \frac{1}{n}) \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} \right)^{n+1} \\
&= (1 + \frac{1}{n}) \left(\frac{n(n+1+1)}{(n+1)(n+1)} \right)^{n+1} \\
&= (1 + \frac{1}{n}) \left(\frac{(n+1)(n+1) + n - (n+1)}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \\
&= (1 + \frac{1}{n}) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{n+1} \\
&\overset{\text{Bernoulli}}{\geq} (1 + \frac{1}{n})(1 - (n+1)\frac{1}{(n+1)^2}) \\
&= (1 + \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{(n+1)}) \\
&= \frac{n+1}{n} \frac{n+1-1}{n+1} = 1\,.
\end{aligned}$$

Osoitetaan lisäksi, että jono x_n on ylhäältä rajoitettu. Tätä varten tarvitsemme tietoa, että myös jono

$$y_n = (1 - \frac{1}{n})^n$$

on kasvava (tämä nähdään samanlaisella laskulla kuin jonon x_n kasvavuus, HT). Nyt kaikilla $n \geq 2$

$$\begin{aligned} x_n &= (1 + \frac{1}{n})^n = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} (1 - \frac{1}{n})(1 + \frac{1}{n}) \right)^n \\ &= \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} (1 - \frac{1}{n^2}) \right)^n \leq \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right)^n \\ &= \frac{1}{y_n} \leq \frac{1}{y_2} \\ &= 4 \,, \end{aligned}$$

sillä

$$1 - \frac{1}{n^2} \leq 1$$

ja jono y_n oli kasvava. Siis jono x_n on monotonisena rajoitettuna jonona suppeneva ja siis Neperin luku

$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

on olemassa.

Huom. Voidaan myös kohtuullisen helposti osoittaa (esimerkiksi binomikaavan avulla, HT), että

$$e = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots .$$

Esimerkki. Käytämme monotonisen jonon suppenemista ja osoitamme, että

$$\lim_{n \to \infty} 2^{-n} = 0.$$

Ellei näin ole, on olemassa $\varepsilon > 0$, jolle

$$2^{-n} \geq \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

Silloin

$$2^n \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N},$$

joten Lauseen 3.7 jono 2^n suppenee kohti jotain reaalilukua a. Tällöin suurilla $n \neq m$

$$2 \leq |2^n - 2^m| \leq |2^n - a| + |a - 2^m| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1\,,$$

mikä on mahdotonta.

3.3. Sisäkkäisten välien periaate

Sisäkkäisten välien periaate antaa geometrisen tavan ilmaista reaalilukujoukon reiättömyys. Sitä voisi kutsua myös jatkuvuusaksioomaksi. Siinä riittäisi tarkastella välejä, joiden päätepisteet ovat rationaalisia ja todistaa sen avulla sama kaikenlaisille väleille (HT).

3.9. Lause. *Jos* $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ *on jono sisäkkäisiä suljettuja välejä* $I_k \subset \mathbf{R}$, *niin*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset\,.$$

Toisin sanoen, on olemassa $x_0 \in \mathbf{R}$ *siten, että* $x_0 \in I_k$ *kaikilla* $k \in \mathbf{N}$.

TODISTUS: Merkitään

$$I_k = [a_k, b_k]\,,$$

jolloin

$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \cdots \leq b_{k+1} \leq b_k \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1.$$

Tällöin jono (a_k) on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, joten sillä on olemassa raja-arvo (Lause 3.7). Ts. on olemassa $x_0 \in \mathbf{R}$, jolle

$$\lim_{k\to\infty} a_k = x_0\,.$$

Nyt $x_0 \geq a_k$ kaikilla k. Jos $j \in \mathbf{N}$ on kiinteä, niin

$$a_k \leq b_j \quad \text{kaikilla } k \in \mathbf{N},$$

joten

$$x_0 = \lim_{k\to\infty} a_k \leq b_j\,.$$

Siten $a_j \leq x_0 \leq b_j$ eli $x_0 \in [a_j, b_j] = I_j$ kaikilla $j \in \mathbf{N}$. Toisin sanoen,

$$x_0 \in \bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$$

ja väite on todistettu. □

3.10. Seuraus. *Jos* $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$ *on jono sisäkkäisiä suljettuja välejä, jolle*

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0\,,$$

niin on olemassa $x_0 \in \mathbf{R}$*, jolle*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x_0\}\,.$$

TODISTUS: Lauseen 3.9 nojalla on olemassa $x_0 \in \mathbf{R}$, jolle

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]\,.$$

Riittää siis todistaa, ettei leikkauksessa ole muita pisteitä. Jos myös

$$y_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]\,,$$

niin

$$|y_0 - x_0| \le b_n - a_n \qquad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N},$$

koska sekä y_0 että x_0 kuuluvat jokaiseen väliin $[a_n, b_n]$. Siten

$$|y_0 - x_0| \le \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0\,,$$

joten $x_0 = y_0$. □

3.4. Desimaalikehitelmä

Seuraavassa näytetään, kuinka luvun desimaalikehitelmä voidaan esittää geometrisesti havainnollisella tavalla sisäkkäisten välien periaatteen avulla. (Geometrisen sarjan käyttö tarjoaisi toisen helpon lähestymistavan.)

Jaetaan lukusuora $\mathbf{R}$ kokonaisluvuilla ykkösen pituisiksi osiksi. Siis on (ainakin yksi) $k_0 \in \mathbf{Z}$ siten, että

$$k_0 \le x \le k_0 + 1$$

(toisin sanoen $x \in I_0 = [k_0, k_0 + 1]$). Jaetaan sitten väli I_0 kymmeneen yhtä suureen osaan, jakopisteinä siis

$$k_0, k_0 + \frac{1}{10}, k_0 + \frac{2}{10}, \dots, k_0 + \frac{9}{10}, k_0 + 1.$$

Koska x kuuluu jollekin näistä osaväleistä, on luku $k_1 \in \{0,1,2,3,\dots,9\}$ siten, että

$$k_0 + k_1\frac{1}{10} \le x \le k_0 + k_1\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = k_0 + (k_1+1)\frac{1}{10}.$$

Näin löydetään (suljettu) väli

$$I_1 = \left[k_0 + k_1\frac{1}{10}, k_0 + (k_1+1)\frac{1}{10}\right],$$

joka sisältää pisteen x ja $I_1 \subset I_0$. Jaetaan tämä uusi väli I_1 kymmeneen yhtä suureen osaan (koska välin I_1 pituus on $\frac{1}{10}$ ovat osien pituudet $\frac{1}{100}$): jakopisteinä ovat nyt

$$k_0 + k_1\frac{1}{10}, k_0 + k_1\frac{1}{10} + \frac{1}{100}, k_0 + k_1\frac{1}{10} + \frac{2}{100}, \dots, k_0 + k_1\frac{1}{10} + \frac{9}{100}, k_0 + (k_1+1)\frac{1}{10}.$$

Koska x kuuluu välille I_1, se kuuluu myös ainakin yhteen näistä osaväleistä, toisin sanoen on olemassa luku $k_2 \in \{0,1,2,\dots,9\}$.

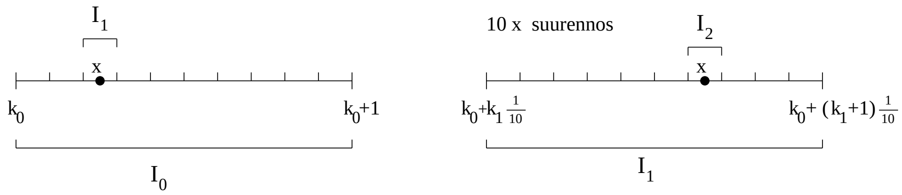
$$k_0 + k_1\frac{1}{10} + k_2\frac{1}{100} \le x \le k_0 + k_1\frac{1}{10} + k_2\frac{1}{100} + \frac{1}{100} = k_0 + k_1\frac{1}{10} + (k_2+1)\frac{1}{100},$$

joten merkitsemällä tätä suljettua väliä

$$I_2 = \left[k_0 + k_1\frac{1}{10} + k_2\frac{1}{100}, k_0 + k_1\frac{1}{10} + (k_2+1)\frac{1}{100}\right],$$

pätee

$$x \in I_2 \subset I_1 \subset I_0.$$



Jatketaan näin loputtomiin: n. vaiheessa löydetään suljettu väli $I_n \subset I_{n-1}$, jonka pituus on 10^{-n} ja

$$I_n = \left[k_0 + k_1\frac{1}{10} + k_2\frac{1}{100} + \dots + k_n\frac{1}{10^n}, k_0 + k_1\frac{1}{10} + k_2\frac{1}{100} + \dots + (k_n+1)\frac{1}{10^n}\right]$$

ja $x \in I_n$ (tässä $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$). Sisäkkäisten välien periaatteen nojalla

$$\{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n .$$

Koska luvut $k_0, k_1, k_2, \dots, k_n$ määräävät välin I_n (yksikäsitteisesti), vastaa lukua x "desimaalikehitelmä"

$$k_0, k_1 k_2 k_3 \cdots = k_0 + 0, k_1 k_2 k_3 \cdots = x,$$

jos $x \geq 0$; missä $k_0 \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ja $k_j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, kun $j = 1, 2, \dots$. Negatiivisille luvuille desimaalikehitelmää voitaisiin merkitä kuten yllä, mutta tavallisempi tapa on tällöin noudattaa sääntöä

$$\text{luvun } x \text{ desimaalikehitelmä} = -(\text{luvun } -x \text{ desimaalikehitelmä}) .$$

Tämä tulkittuna em. konstruktion merkinnöin antaa seuraavaa: kun $x < 0$ ja $k_0 \in \{-1, -2, -3, \dots\}$ sekä luvut $k_j \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$, kun $j = 1, 2, \dots$, määräytyvät eo. konstruktion mukaisesti, on

$$x = \tilde{k}_0, \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 \tilde{k}_3 \tilde{k}_4 \cdots = k_0 + 0, k_1 k_2 k_3 \dots ,$$

missä

$$\begin{aligned} \tilde{k}_0 &= k_0 + 1 , \\ \tilde{k}_1 &= 9 - k_1 , \\ \tilde{k}_2 &= 9 - k_2 , \\ \tilde{k}_3 &= 9 - k_3 , \\ &\dots . \end{aligned}$$

Siten esimerkiksi

$$\frac{1}{10} = 0, 1000 \cdots = 0, 1 \quad \text{ja} \quad -\frac{1}{10} = -0, 1 ;$$

kehitelmän lopusta 0-jonot jätetään yleensä merkitsemättä.

3.11. Huomautus. Yllä oleva desimaaliesitys ei ole yksikäsitteinen. Esimerkiksi

$$1 = 0, 999 \cdots = 1, 000 \dots$$

Kuitenkin, edellä olevassa konstruktiossa x määrää k_0:n yksikäsitteisesti, ellei x satu olemaan kokonaisluku. Jos taas $x \in \mathbf{Z}$, voidaan k_0 valita kahdella tavalla: joko

$k_0 = x$ tai $k_0 = x - 1$. Kun tämä valinta on tehty, määräytyvät loput luvut k_j yksikäsitteisesti:

$$\text{jos } k_0 = x\,, \quad \text{niin} \quad k_1 = 0 = k_2 = k_3 = \dots$$
$$\text{jos } k_0 = x - 1\,, \quad \text{niin} \quad k_1 = 9 = k_2 = k_3 = \dots$$

Edelleen, jos x ei ole kokonaisluku, niin k_j:t määräytyvät yksikäsitteisesti, ellei x satu olemaan välin I_j päätepiste. Jos x on I_j:n päätepiste, niin joko

1. x on I_j:n oikea päätepiste, jolloin x on myös jokaisen I_l:n oikea päätepiste, kaikilla $l \geq j$, joten

   $$x = k_0 + 0, k_1 k_2 \dots k_{j-1}(k_j - 1)999\dots,$$

   toisin sanoen $k_l = 9$ kaikilla $l > j$

tai

2. x on I_j:n vasen päätepiste, jolloin x on myös jokaisen I_l:n vasen päätepiste, kaikilla $l > j$, joten
   $$x = k_0 + 0, k_1 k_2 \dots k_j 000.$$

Siispä: sopimalla, ettei desimaalikehitelmä saa loppua päättymättömään 9-jonoon, on desimaalikehitelmä yksikäsitteinen.

3.5. Jonokompaktius

3.12. Määritelmä (Osajono)**.** Olkoon (x_n) reaalilukujono $n \in \mathbf{N}$. Jono (y_k), $k \in \mathbf{N}$ on jonon (x_n) *osajono*, jos on olemassa kasvava jono luonnollisia lukuja $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ s.e.

$$y_k = x_{n_k} \text{ kaikilla } k \in \mathbf{N},$$

ts.

$$y_1 = x_{n_1},\ y_2 = x_{n_2},\ y_3 = x_{n_3}, \dots .$$

Siis osajono saadaan alkuperäisestä jonosta (x_n) jättämällä välistä pisteitä pois ja indeksoimalla jonon alkiot uudelleen. Yleensä jonon (x_n) osajonoa merkitään (x_{n_j}):llä.

3.13. Huomautus.

i) Jos jono suppenee, niin sen jokainen osajono suppenee (kohti samaa rajapistettä)(HT).

ii) Jos $x_n \to x_0$, niin jonolla (x_n) on monotoninen osajono (HT). Tämä on melko helppo osoittaa. Vaikeampi todistaa (mutta silti tosi) on: "Jokaisella jonolla x_n on monotoninen osajono". (ks demot?)

3.14. Lause (Bolzano-Weierstrass)**.** *Rajoitetulla reaalilukujonolla on aina suppeneva osajono.*

Todistus: Metsästetään suppeneva osajono sisäkkäisten välien periaatteen avulla. Koska jono (x_n) on rajoitettu, on olemassa sellainen väli $[a, b]$, joka sisältää kaikki jonon pisteet, $x_n \in [a, b]$ kaikilla n.

Olkoon $c_0 = \frac{a+b}{2}$ välin $[a, b]$ keskipiste. Nyt ainakin toinen väleistä $[a, c_0]$ ja $[c_0, b]$ sisältää ∞ monta jonon (x_n) alkiota. Valitaan se (siis sellainen väleistä, joka sisältää ∞ monta jonon (x_n) alkiota) ja merkitään sitä $I_1 = [a_1, b_1]$.

Jatketaan samaan malliin: olkoon c_n välin $I_k = [a_k, b_k]$ keskipiste. ts.

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2},$$

ja valitaan väliksi I_{k+1} jompikumpi osaväleistä $[a_k, c_k]$ tai $[c_k, b_k]$ ja I_{k+1}, joka sisältää sisältää ∞ monta jonon (x_n) alkiota. Merkitään

$$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]\,.$$

Koska

$$|I_k| = b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \cdots = 2^{-k}(b - a) \to 0,$$

seuraa sisäkkäisten välien periaatteesta 3.10, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{x_0\}$$

jollakin $x_0 \in [a, b]$.

Valitaan osajono: Valitaan $n_1 \in \mathbf{N}$ s.e. $x_{n_1} \in I_1$ ja induktiivisesti $n_{j+1} \in \mathbf{N}$ s.e. $n_{j+1} > n_j$ ja $x_{n_{j+1}} \in I_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$ (tämä on mahdollista, koska jokainen I_j sisältää ∞ monta jonon (x_n) alkiota). Nyt

$$x_{n_j} \to x_0\,,$$

koska

$$|x_{n_j} - x_0| \le 2^{-j}(b - a) \to 0\,,$$

joten (x_{n_j}) on etsitty osajono. $\square$

3.15. Huomautus. Huomautuksen 3.13 ii) avulla saadaan toinen todistus Bolzano-Weierstrassin lauseelle: Rajoitetun jonon x_n mikä hyvänsä monotoninen (sellainen on olemassa) on etsitty suppeneva osajono.

Esimerkki. Olkoon

$$x_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n}).$$

Tällöin jono (x_n) on rajoitettu, $-1 \le x_n \le 1$, ja sillä on suppenevia osajonoja, esimerkiksi

$$x_{n_j} = (-1)^{2j}(1 - \frac{1}{2j}) \to 1 \qquad \text{(parilliset indeksit)}$$

ja

$$x_{n_j} = (-1)^{2j-1}(1 - \frac{1}{2j-1}) \to -1. \qquad \text{(parittomat indeksit)}$$

Ottaisko lim sup/lim inf tähän?

3.6. Cauchyn suppenemiskriteerio

3.16. Määritelmä (Cauchy-jono)**.**
Jono (x_n) on *Cauchy-jono*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } m, n \ge N.$$

Siis jono on Cauchy, mikäli sen häntä saadaan aina puristetuksi halutun pienelle välille.

3.17. Lause (Cauchyn suppenemiskriteerio)**.**
Olkoon (x_n) reaalilukujono. Tällöin (x_n) suppenee (kohti jotain lukua $a \in \mathbf{R}$), jos ja vain jos (x_n) on Cauchy-jono.

3.18. Huomautus. Cauchyn suppenemiskriteerio ei anna mitään keinoa löytää jonon raja-arvoa.

TODISTUS: $\Rightarrow$: Olkoon $x_n \to a$. Osoitetaan, että (x_n) on Cauchy-jono. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $N \in \mathbf{N}$ s.e.

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kaikilla } n \geq N\,.$$

Tällöin, jos $n, m \geq N$, on

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

joten (x_n) on Cauchy-jono.

$\Leftarrow$: Olkoon sitten (x_n) Cauchy-jono. Osoitetaan, että se suppenee kohti jotain reaalilukua a.

Osoitetaan ensin, että jono (x_n) on rajoitettu: Lukua $\varepsilon = 1$ vastaa $N \in \mathbf{N}$ s.e.

$$|x_n - x_m| < \varepsilon = 1 \qquad \text{kaikilla } m, n \geq N\,.$$

Siten kaikilla $n \geq N$

$$|x_n| \leq |x_N| + |x_n - x_N| \leq |x_N| + 1,$$

joten

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\} + 1 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{N}\,,$$

ts. jono (x_n) on rajoitettu.

Koska (x_n) on Cauchy-jono, on $N_0 \in \mathbf{N}$ s.e.

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{kaikilla } m, n \geq N_0\,.$$

Edelleen, jonolla (x_n) on Bolzano-Weierstrassin lauseen 3.14 nojalla suppeneva osajono (x_{n_j}), ts. on olemassa $a \in \mathbf{R}$ s.e. kaikilla $\varepsilon > 0$ on $J \in \mathbf{N}$, jolle $n_J \geq N_0$ ja

$$|x_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kunhan } j \geq J\,.$$

Siten, kaikilla $n \geq n_J$

$$|x_n - a| \leq |x_{n_J} - a| + |x_n - x_{n_J}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

eli

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a\,.$$

$\square$

3.7. Täydellisyyden monet kasvot

Tässä luvussa esitetyt tulokset ovat täydellisyysaksioman eri puolia. Seuraavan lauseen nojalla nämä ovat yhtäpitäviä, joten voisimme ottaa täydellisyysaksiooman sijasta aksioomaksi minkä hyvänsä alla olevan lauseen kohdista ja todistaa muut sen avulla.

LISÄÄ: Määritelmät ja todistukset täydellisyysaksiooman avulla (HT)???.

3.19. Lause. *Reaaliluvuille seuraavat "aksioomat" ovat yhtäpitäviä:*

i) (Täydellisyysaksiooma) Jokaisella ylhäältä rajoitetulla, epätyhjällä joukolla $A \subset \mathbf{R}$ *on pienin yläraja* $\sup A \in \mathbf{R}$.

ii) (Monotonisen jonon raja-arvo) Jokaisella ylhäältä rajoitetulla, kasvavalla jonolla x_n *on raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbf{R}\,.$$

iii) (Sisäkkäisten välien periaate). Jos $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \ldots$ *on jono sisäkkäisiä suljettuja välejä, jolle*

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0\,,$$

niin on olemassa $x_0 \in \mathbf{R}$, *jolle*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{x_0\}\,.$$

iv) (Bolzano-Weierstrass) Rajoitetulla jonolla on aina suppeneva osajono.

v) (Cauchyn kriteerio) Jokaisella Cauchy-jonolla $x_n \in \mathbf{R}$ *on raja-arvo*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in \mathbf{R}\,.$$

ja (Arkhimedeen ominaisuus) jokaiselle $x \in \mathbf{R}$ *on olemassa sellainen* $n \in \mathbf{N}$, *jolle*

$$|x| < n\,.$$

Todistus: "Yhtäpitävyys" tässä tarkoittaa, että kukin kohdista voidaan johtaa toisista. Tässä luvussa esitetyt todistukset antavat ketjun:

$$\text{i)} \Rightarrow \text{ii)} \Rightarrow \text{iii)} \Rightarrow \text{iv)}$$

sekä iv) $\Rightarrow$ v) muutoin paitsi Arkhimedeen ominaisuutta, joka myös seuraa kohdasta iv): Jos olisi sellainen $x \in \mathbf{R}$, jolle

$$n \leq |x| \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N}\,,$$

niin silloin kohdan iv) nojalla olisi nouseva jono luonnollisia lukuja $n_j \in \mathbf{N}$, $n_j < n_{j+1}$ kaikilla j, joka muodostaisi suppenevan jonon, siis Cauchy jonon (Lause 3.17). Tämä onkuitenkin mahdotonta, koska

$$|n_j - n_k| \geq 1 \quad \text{kaikilla } j \neq k.$$

Siten Arkhimedeen ominaisuus on voimassa.

Lopuksi osoitamme implikaation v) $\Rightarrow$ i): (Muodostamme A:n ylärajoista Cauchy-jonon, joka suppenee kohti supremumia.) Olkoon x_0 jokin joukon A yläraja ja olkoon k_0 pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $x_0 - k_0$ ei ole joukon A yläraja (luvun k_0 olemassaolo seuraa Arkhimedeen ominaisuudesta). Merkitään

$$x_1 = x_0 - (k_0 - 1)\,,$$

jolloin x_1 on joukon A yläraja ja $x_1 \leq x_0$. Lisäksi $x_1 - 1$ ei ole joukon A yläraja. Olkoon sitten k_1 pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $x_1 - k_1/2$ ei ole joukon A yläraja. Merkitään

$$x_2 = x_1 - \frac{k_1 - 1}{2}\,,$$

jolloin x_2 on joukon A yläraja ja $x_2 \leq x_1$. Lisäksi $x_2 - 1/2$ ei ole joukon A yläraja.

Jatketaan rekursiivisesti: kun $n \in \mathbf{N}$, olkoon k_{n+1} pienin positiivinen kokonaisluku, jolle $x_n - k_n/(n+1)$ ei ole joukon A yläraja. Merkitään

$$x_{n+1} = x_n - \frac{k_1 - 1}{n + 1}\,,$$

jolloin x_{n+1} on joukon A yläraja ja $x_{n+1} \leq x_n$. Lisäksi $x_{n+1} - 1/(n+1)$ ei ole joukon A yläraja.

Näin saatu jono (x_n) on Cauchy-jono, sillä kaikilla $m > n$

$$x_n - \frac{1}{n} \leq x_m \leq x_n\,,$$

koska x_m on joukon A yläraja, mutta $x_n - \frac{1}{n}$ ei ole. Siten on olemassa raja-arvo

$$M = \lim_{n \to \infty} x_n \,.$$

Tällöin M on joukon A yläraja, koska jokaisella $a \in A$

$$x_n \geq a \qquad \text{kaikilla } n$$

ja siten

$$M \geq a.$$

Lisäksi lukua M pienempää A:n ylärajaa ei ole, koska jokaisella $n \in \mathbf{N}$ on olemassa sellainen $a_n \in A$, jolle

$$M - \frac{1}{n} \leq x_n - \frac{1}{n} \leq a_n \,.$$

Siten

$$M = \sup A$$

Lauseen 2.16 nojalla.

□

LISÄÄ: "Sovellus" kustakin ominaisuudesta...

4. Reaalilukujoukoista

Tässä luvussa käsittelemme yleisiä reaalilukujoukkoja $A \subset \mathbf{R}$, erityisesti alkeellisia topologisia ominaisuuksia.

Yleistä joukoista ja yhdisteistä. Sisäpisteet, reunapisteet ulkopisteet; avoimet ja suljetut joukot, kasaantuminen, kosketuspisteet.

4.1. Hiukan joukko-oppia

Tällä kurssilla olemme kiinnostuneita reaalilukujen muodostamista joukoista. Seuraavissa määritelmissä on aina oletuksena, että kaikkien joukkojen alkiot kuuluvat ennalta kiinnitettyyn[2] *universaaliin joukkoon*, joka tällä kurssilla on (lähes aina) reaalilukujen joukko $\mathbf{R}$.

4.1. Määritelmä (Joukko-opin perusoperaatiot)**.** Olkoot A ja B joukkoja.

a) Merkintä $a \in A$ tarkoittaa, että alkio *a kuuluu joukkoon A*. Merkintä $a \notin A$ tarkoittaa, että alkio *a ei kuulu joukkoon A*.

b) Joukko A on joukon B *osajoukko*, merkitään[3] $A \subset B$, jos jokainen A:n alkio kuuluu myös joukkoon B (ts. jos $a \in A$, niin $a \in B$).

c) Joukot A ja B ovat *samoja*, $A = B$, jos niillä on täsmälleen samat alkiot.

d) Joukko A on joukon B *aito osajoukko*, merkitään $A \subsetneqq B$, jos $A \subset B$ ja $A \neq B$.

e) Joukkojen A ja B *erotusjoukko* $A \setminus B$ koostuu niistä A:n alkioista, jotka eivät ole joukon B alkioita, ts.
$$A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}.$$

f) Joukon A *komplementti* A^c on universaalin pohjajoukon ja joukon A erotusjoukko, ts. tällä kurssilla
$$A^c = \mathbf{R} \setminus A\,.$$

---

[2] ”Kaikkien joukkojen joukko” ei ole joukko. Russelin paradoksi: Sellaisten joukojen kokoelma E, jotka eivät sisällä itseään, joukkona ei ole joukko: ts. jos $E = \{A : A \notin A\}$ olisi joukko, niin ei voida ratkaista, onko E itsensä alkio, vai ei. Nimittäin, jos $E \notin E$, niin E:n määritelmän mukaan $E \in E$. Jos taas $E \in E$, niin E:n määritelmän mukaan $E \notin E$.

[3] Merkintä $B \supset A$ tarkoittaa samaa kuin $A \subset B$. Sanotaan myös, että joukko A *sisältyy* joukkoon B ja että joukko B *sisältää* joukon A.

g) Joukkojen A ja B *yhdiste* $A \cup B$ koostuu kaikista A:n ja B:n alkioista, ts.

$$A \cup B = \{x \in \mathbf{R} : \ x \in A \text{ tai } x \in B\}.$$

h) Joukkojen A ja B *leikkaus* $A \cap B$ koostuu niistä alkioista, jotka kuuluvat sekä joukkoon A että joukkoon B, ts.

$$A \cap B = \{x \in \mathbf{R} : \ x \in A \text{ ja } x \in B\}.$$

4.2. Huomautus.

a) Älä sotke alkion kuulumista joukkoon $a \in B$ ja osajoukon $A \subset B$ käsitteitä toisiinsa.

b) $A = B$, jos ja vain, jos sekä $A \subset B$ että $B \subset A$.

c) *Tyhjällä joukolla* $\emptyset$ ei ole lainkaan alkioita ja siksi $\emptyset \subset A$ oli A mikä hyvänsä joukko.

d) Jos joukoille A, B ja C pätee $A \subset B$ ja $B \subset C$, niin myös $A \subset C$.

e) Joukoille A, B ja C pätee:

   i) $A \setminus B = A \cap B^c$.

   ii) Vaihdantalait: $A \cup B = B \cup A$ ja $A \cap B = B \cap A$.

   iii) Liitäntälait:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad \text{ ja } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

   iv) Osittelulait:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{ ja } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

   v) DeMorganin lait:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{ ja } (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

4.3. Huomautus. Joukon X osajoukkojen kokoelmaa sanotaan X:n *potenssijoukoksi* ja sitä merkitään

$$\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}.$$

Tällä kurssilla käsitellyille joukoille pätee yleensä aina: $A \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$.

Modernissa matematiikassa käsitellään paljon äärettömiä joukkoja ja joukkokokoelmia. Joukon äärettömyydellä tarkoitetaan sitä, että sen alkioita on enemmän kuin äärellinen määrä.

Sanotaan, että joukot A ja B sanotaan olevan *yhtä mahtavia*, jos on olemassa bijektio $b : A \to B$; tällöin siis joukon A alkiot voidaan "laskea" joukon B alkioiden avulla. Konkreettisesti joukon A alkiot voidaan laskea tai luetella peräkkäin, jos A on *numeroituva*, ts. jos on olemassa luonnollisten lukujen joukon $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ osajoukko B, jolle on bijektio $b : A \to B$.

Huomaa, että (tällä kurssilla) numeroituva joukko on siis joko äärellinen tai yhtä mahtava $\mathbf{N}$:n kanssa (so. *numeroituvasti ääretön*). Joukko A on äärellinen, jos ja vain jos on olemassa $N \in \mathbf{N}$ ja bijektio $b : A \to \{1, 2, 3, \dots, N\}$.

Jos joukko A ei ole numeroituva, on se *ylinumeroituva*. Numeroituvat joukot ovat yleensä vaarattomia ja "pieniä".

Esimerkiksi, äärelliset joukot ja $\mathbf{Q}$ ovat numeroituvia. Sen sijaan joukot $\mathbf{R}$ ja $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ ovat ylinumeroituva.

Nykymatematiikassa äärettömänkin monen joukon yhdisteet ja leikkaukset ovat arkipäivää. Olkoon I epätyhjä joukko ja olkoot[4] E_i, $i \in I$, joukkoja. Niiden *yhdiste* ja *leikkaus* ovat

$$\bigcup_{i\in I} E_i = \{x : x \in E_i \text{ jollakin } i \in I\}, \qquad \text{yhdiste,}$$

$$\bigcap_{i\in I} E_i = \{x : x \in E_i \text{ kaikilla } i \in I\}, \qquad \text{leikkaus.}$$

Tässä määritelmässä ei ole väliä, kuinka monta alkiota joukossa I, ts. kuinka monen joukon yhdisteitä ja leikkauksia muodostetaan.

DeMorganin lait on helppo todistaa harjoitustehtävänä:

$$A \setminus \bigcup_{i\in I} E_i = \bigcap_{i\in I} (A \setminus E_i)$$

ja

$$A \setminus \bigcap_{i\in I} E_i = \bigcup_{i\in I} (A \setminus E_i).$$

[4]Usein sanotaan, että I on *indeksijoukko* ja joukot E_i on *indeksoitu* joukon I avulla. Usein $I = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Esimerkki.

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}}[0,n]=\{0\}\quad\text{ja}\quad\bigcup_{n\in\mathbf{N}}]n-1,n+1[=]0,\infty[.$$

4.4. Määritelmä (kuvajoukko ja alkukuva)**.** Olkoon $f: A\to B$ funktio. Olkoot $D\subset A$ ja $E\subset B$ joukkoja. Joukon D *kuva* kuvauksessa f on joukko

$$f(D)=\{f(x): x\in D\}\subset B.$$

Joukon E *alkukuva* kuvauksessa f on joukko

$$f^{-1}(E)=\{x\in A: f(x)\in E\}.$$

4.5. Huomautus. Kuvajoukko $f(D)$ on maalijoukon B se osajoukko, joka koostuu niistä pisteistä $y\in B$, joita kohti on olemassa $x\in D$, jolle $f(x)=y$.

Älä sotke alkukuvaa f:n käänteiskuvaukseen.

Alkukuva $f^{-1}(E)$ on siis määrittelyjoukon A (mahdollisesti tyhjä) osajoukko, jossa ovat ne, pisteet x, joiden kuvapisteet $f(x)$ kuuluvat joukkoon E.

Seuraavat ominaisuudet on helppo verifioida (HT) funktiolle $f: A\to B$:

i) Kaikille $D\subset A$ ja $E\subset B$ pätee

$$D\subset f^{-1}(f(D))\quad\text{ja}\quad f(f^{-1}(E))\subset E\,;$$

molemmat inkluusiot voivat olla aitoja.

ii) Olkoon $E_j\in B$, missä $j\in I\neq\emptyset$. Tällöin

$$f^{-1}(\bigcap_{j\in I}E_j)=\bigcap_{j\in I}f^{-1}(E_j)\quad\text{ja}\quad f^{-1}(\bigcup_{j\in I}E_j)=\bigcup_{j\in I}f^{-1}(E_j)$$

iii) Kaikille $E\subset B$ pätee

$$f^{-1}(B\setminus E)=A\setminus f^{-1}(E)\,.$$

4.2. Topologisia peruskäsitteitä

4.6. Määritelmä (r-ympäristö). Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$. Pisteen x_0 *r-ympäristö* (naapurusto, neighborhood) on avoin väli $]x_0 - r, x_0 + r[$, kun $r > 0$. Usein merkitään

$$B(x_0, r) :=]x_0 - r, x_0 + r[.$$

Esimerkki. Jono x_n suppenee kohti pistettä x_0, jos ja vain, jos jokaisella $r > 0$ kaikki jonon x_n jäsenet, paitsi ehkä äärellinen määrä niitä, kuuluvat pisteen x_0 r-ympäristöön.

4.7. Määritelmä (sisäpiste, reunapiste, ulkopiste). Olkoon $A \subset \mathbf{R}$.

Sisäpiste: Piste x_0 on joukon A *sisäpiste*, jos on olemassa sellainen pisteen x_0 r-ympäristö, joka sisältyy joukkoon A, ts. on olemassa $r > 0$, jolle

$$]x_0 - r, x_0 + r[\subset A.$$

Ulkopiste: Piste y_0 on joukon A *ulkopiste*, jos on olemassa sellainen pisteen y_0 s-ympäristö, joka sisältyy joukon A komplementtiin A^c, ts. on olemassa $s > 0$, jolle

$$]y_0 - s, y_0 + s[\cap A = \emptyset.$$

Reunapiste: Piste z_0 on joukon A *reunapiste*, jos jokainen sellainen pisteen z_0 δ-ympäristö sisältää sekä joukon A että sen komplementin A^c pisteen, ts. kaikilla $\delta > 0$

$$]z_0 - \delta, z_0 + \delta[\cap A \neq \emptyset \quad \text{ja} \quad]z_0 - \delta, z_0 + \delta[\setminus A \neq \emptyset\,.$$

Merkitään

$$\begin{aligned} \operatorname{int} A &:= \{x \in \mathbf{R} : \ x \text{ on joukon } A \text{ sisäpiste}\} \qquad (\text{joukon } A \textit{ sisus}) \\ \operatorname{ext} A &:= \{y \in \mathbf{R} : \ y \text{ on joukon } A \text{ ulkopiste}\} = \operatorname{int}(A^c) \\ \partial A &:= \{z \in \mathbf{R} : \ z \text{ on joukon } A \text{ reunapiste}\} \qquad (\text{joukon } A \textit{ reuna}). \end{aligned}$$

4.8 . Huomautus. Sisäpisteet ovat reilusti A:n sisällä, ulkopisteet ovat reilusti A:n ulkopuolella. Sen sijaan reunapisteet voivat joukosta riippuen kuulua tai olla kuulumatta A:han. Kaikille joukoille A pätee:

$$\operatorname{int} A \subset A \quad \text{ja} \quad \operatorname{ext} A \subset A^c .$$

Edelleen

$$\operatorname{int} A \cap \operatorname{ext} A = \emptyset , \quad \operatorname{int} A \cap \partial A = \emptyset \quad \text{ja } \partial A \cap \operatorname{ext} A = \emptyset$$

sekä

$$\operatorname{int} A \cup \operatorname{ext} A \cup \partial A = \mathbf{R} .$$

Huomaa, että $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$ ja $\operatorname{int}(\operatorname{ext} A) = \operatorname{ext} A$, $\operatorname{ext} A = \operatorname{int}(A^c)$ ja $\partial A = \partial(A^c)$.

HT Totea: Jos $A \subset B$, niin $\operatorname{int} A \subset \operatorname{int} B$ ja $\operatorname{ext} A \supset \operatorname{ext} B$. Kuinka reunajoukoille voi käydä?

Esimerkki.

i) $\operatorname{int} \emptyset = \emptyset$, $\operatorname{ext} \emptyset = \mathbf{R}$ ja $\partial\emptyset = \emptyset$ sekä $\operatorname{int} \mathbf{R} = \mathbf{R}$, $\operatorname{ext} \mathbf{R} = \emptyset$ ja $\partial\mathbf{R} = \emptyset$.

ii) Olkoon I väli, jonka päätepisteet ovat $a \in \mathbf{R}$ ja $b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Tällöin

$$\operatorname{int} I =]a, b[, \quad \partial I = \{a, b\} \quad \text{ja} \quad \operatorname{ext} I =]-\infty, a[\cup]b, \infty[.$$

Erityisesti puoliavoimen välin reunapisteistä vain toinen kuuluu ko. välille.

iii) $\operatorname{int} \mathbf{N} = \emptyset$, $\operatorname{ext} \mathbf{N} = \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}$ ja $\partial\mathbf{N} = \mathbf{N}$.

iv) Koska jokainen väli sisältää sekä rationaali- että irrationaalilukuja, on

$$\operatorname{int} \mathbf{Q} = \emptyset , \quad \operatorname{int}(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \emptyset , \quad \partial\mathbf{Q} = \mathbf{R} \quad \text{ja} \quad \partial(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}) = \mathbf{R}$$

4.9. Määritelmä (avoin joukko, suljettu joukko)**.**

Avoin joukko: Joukko $A \subset \mathbf{R}$ on *avoin*, jos sen kaikki pisteet ovat sisäpisteitä, ts. jos

$$\operatorname{int} A = A .$$

Suljettu joukko: Joukko $A \subset \mathbf{R}$ on *suljettu*, jos sen komplementti $A^c = \mathbf{R} \setminus A$ on avoin joukko.

4.10. Huomautus. Varo: yleensä joukko ei ole avoin eikä suljettu!

Joukon avoimuus tarkoittaa sitä, että sen sisällä on hieman tilaa liikkua ilman, että joudutaan joukosta ulos (jos $a \in A$, niin joku a:n sisältävä pieni väli sisältyy edelleen joukkoon A).

Nimitys "suljettu" selviää jatkon analyysin seurauksena paremmin: suljetusta joukosta on vaikeaa päästä pois, koska kaikki komplementin pisteet ovat "kaukana" A:sta.

Esimerkki. Avoimet välit, $\emptyset$ ja $\mathbf{R}$ ovat avoimia (miksi?).

Suljetut välit, $\emptyset$ ja $\mathbf{R}$ ovat suljettuja (miksi?).

Äärelliset pistejoukot $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ ovat suljettuja.

Rationaalilukujen joukko $\mathbf{Q}$ ja irrationaalilukujen joukko $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ eivät ole suljettuja eikä avoimia.

4.11. Lause. *Olkoon $A \subset \mathbf{R}$ epätyhjä joukko ja $A \neq \mathbf{R}$. Jos A on avoin, niin A ei ole suljettu (tai ekvivalentisti jos A on suljettu, niin A ei ole avoin).*

Todistus: Oletetaan, että A on sekä avoin että suljettu. Olkoon $x_0 \notin A$. Jos on olemassa sellainen $a \in A$, jolle $a < x_0$, merkitään

$$M = \sup\{x \in A : \, x < x_0\} \, .$$

Jos $M \in A$, niin on olemassa $r > 0$, jolle $]a - r, a + r[\subset A$, joten M ei voisi olla em. supremum. Siis $M \notin A$. Koska A on suljettu, on A^c avoin ja siten on olemassa $s > 0$, jolle $]M - s, M + s[\cap A = \emptyset$, joten M ei voisi olla em. supremum. Näin ollen on välttämättä

$$a \geq x_0 \quad \text{kaikilla } a \in A \, .$$

Siten A on alhaalta rajoitettu ja siten

$$m = \inf A \in \mathbf{R}.$$

Koska A on avoin, on $m \notin A$, koska muutoin A sisältäisi lukua m pienempiä lukuja. Myös vaihtoehto $m \notin A$ johtaa ristiriitaan, koska myös A^c on avoin, jolloin jokin väli $]m - \varepsilon, m + \varepsilon[$ ei sisällä yhtään A:n pistettä, joten m ei voi olla $= \inf A$.

$\square$

4.12. Lause.

i) *Mielivaltaisen (vaikka äärettömän) monen avoimen joukon yhdiste on avoin.*

ii) *Äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin.*

iii) *Mielivaltaisen (vaikka äärettömän) monen suljetun joukon leikkaus on suljettu.*

iv) *Äärellisen monen suljetun joukon yhdiste on suljettu.*

TODISTUS: i) Olkoot A_j, $j \in J$, avoimia joukkoja. Jos $x_0 \in \bigcup_{j\in J} A_j$, niin $x_0 \in A_{j_0}$ jollakin $j_0 \in J$. Koska A_{j_0} on avoin, on $]x_0 - r, x_0 + r[\subset A_{j_0}$ jollakin $r > 0$ ja siten

$$]x_0 - r, x_0 + r[\subset A_{j_0} \subset \bigcup_{j\in J} A_j \,,$$

joten yhdiste $\bigcup_{j\in J} A_j$ on avoin.

ii) Olkoot A_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, avoimia joukkoja. Jos $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j$, niin $x_0 \in A_j$ kaikilla $j \in J$. Koska kukin A_j on avoin, on olemassa $r_j > 0$ siten, että $]x_0 - r_j, x_0 + r_j[\subset A_j$. Olkoon $r_0 = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, jolloin $r_0 > 0$ ja

$$]x_0 - r_0, x_0 + r_0[\subset]x_0 - r_j, x_0 + r_j[\subset A_j \quad \text{kaikilla } j.$$

Siten

$$]x_0 - r_0, x_0 + r_0[\subset \bigcap_{j=1}^{n} A_j \,,$$

joten leikkaus $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ on avoin.

Kohdat iii) ja iv) seuraavat kohdista i) ja ii) ja DeMorganin kaavojen avulla. (HT)

□

Esimerkki. Lauseen 4.12 kohdissa ii) ja iv) ei voida todistaa enempää (ts. väitteet eivät yleisty äärettömille leikkauksille tai yhdisteille). Esim.

$$\bigcap_{j=1}^{\infty}]-1, \frac{1}{j}[=]-1, 0] \quad \text{ja} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} [\frac{1}{j}, 1] =]0, 1] \,,$$

mitkä eivät ole avoimia eikä suljettuja.

Joukon A sisäpisteen ympärillä on kokonainen väli joukon A pisteitä. Toista äärilaitaa joukon pisteitä edustaa erakkopiste, jonka lähettyvillä ei ole muita joukon A pisteitä:

4.13. Määritelmä (eristetty (isoloitu) piste). Piste x_0 on joukon $A \subset \mathbf{R}$ *eristetty piste* (tai *isoloitu piste, erakkopiste*), jos $x_0 \in A$ ja on olemassa sellainen pisteen x_0 r-ympäristö, joka ei sisällä muita joukon A alkioita kuin pisteen x_0, ts. jos on olemassa $r > 0$, jolle

$$]x_0 - r, x_0 + r[\cap A = \{x_0\}.$$

4.14. Huomautus. Joukon A eristetty piste on aina kyseisen joukon reunapiste. Joukolla voi olla muitakin reunapisteitä. Esimerkiksi kokonaislukujen joukon $\mathbf{Z}$ jokainen piste on isoloitu. Edelleen, joukon

$$A = \mathbf{Z} \cup]0, 1[$$

eristetyt pisteet muodostavat joukon $\mathbf{Z} \setminus \{0, 1\}$, vaikka tässä tapauksessa $\partial A = \mathbf{Z}$.

Eristetyn pisteen vastakohta on sellainen piste jonka jokaisessa ympäristössä on muitakin (ainakin yksi) joukon A pisteitä; ne ovat pisteitä, joiden ympärille joukko A tiivistyy, kasaantuu:

4.15. Määritelmä (kasaantumispiste). Piste x_0 on joukon $A \subset \mathbf{R}$ *kasaantumispiste*, jos jokainen pisteen x_0 r-ympäristö sisältää muita joukon A alkioita kuin pisteen x_0, ts. jos jokaisella $r > 0$ on olemassa sellainen $x \in A$, jolle $x \neq x_0$ ja $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$, ts.

$$]x_0 - r, x_0 + r[\cap A \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

4.16. Huomautus.

i) Joukon A kasaantumispiste voi kuulua tai olla kuulumatta joukkoon A, esim. puoliavoimen välin $[0, 1[$ kasaantumispisteiden joukko on suljettu väli $[0, 1]$.

ii) Äärellisellä pistejoukolla $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_k\}$ ei ole kasaantumispisteitä (eikä välttämättä äärettömälläkään, esim. luonnollisten lukujen joukolla $\mathbf{N}$ ei ole kasaantumispisteitä).

iii) Jos x_0 on joukon A kasaantumispiste ja $A \subset B$, niin x_0 on myös joukon B kasaantumispiste.

iv) Jos $x_j \to x_0$ ja $x_j \neq x_k$, kun $j \neq k$, niin x_0 on joukon $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ kasaantumispiste.

v) Bolzano-Weierstrassin lauseen 3.14 nojalla jokaisella rajoitetulla, äärettömällä reaalilukujoukolla on aina kasaantumispiste (vrt kohdat iii ja iv).

vi) Piste x_0 on joukon A kasaantumispiste, jos ja vain, jos on olemassa jono $x_n \in A$, jolle $x_n \neq x_0$ kaikilla n ja $x_n \to x_0$ (todistus HT).

vii) Joukon A sisäpiste on aina A:n kasaantumispiste; reunapiste on joko kasaantumispiste tai isoloitu piste. Ole tässä varovainen: ∂A:lla olevat joukon A kasaantumispisteet voivat kuulua A:han tai olla kuulumatta.

viii) Jos x_0 on joukon A kasaantumispiste, niin jokainen x_0:n r-ympäristö sisältää äärettömän monta joukon A pistettä. Jos nimittäin olisi niin, että jokin väli $]x_0 - r, x_0 + r[$ sisältäisikin vain äärellisen monta A·n pistettä (eri pisteitä kuin x_0), sanotaan pisteet $x_1, x_2, \ldots, x_k$, niin

$$r_0 = \min\{|x_1 - x_0|, |x_2 - x_0|, \ldots, |x_k - x_0|\} > 0,$$

jolloin väli $]x_0 - r_0, x_0 + r_0[$ ei sisällä muita A:n pisteitä kuin ehkä pisteen x_0, joten x_0 ei olisikaan joukon A kasaantumispiste.

ix) Voidaan osoittaa, että on olemassa (suljettu) joukko A, jolle

$$A = \partial A$$

ja jokainen A:n piste on sen kasaantumispiste. (Esimerkiksi ns. Cantorin $\frac{1}{3}$-joukko on tällainen.)

Joukon A kasaantumispisteet voivat siis kuulua joukkoon A tai olla sen reunajoukossa ∂A. Joukon A pisteet voivat olla paitsi kasaantumispisteitä, myös sen eristettyjä pisteitä (jolloin ne kuuluvat reunalle). Seuraavaksi nimetään joukon A ja sen reunan ∂A yhdessä muodostama joukko

4.17. Määritelmä (sulkeuma). Joukon $A \subset \mathbf{R}$ *sulkeuma* on joukko

$$\bar{A} = A \cup \partial A\,.$$

4.18 . Lause. *Joukon A sulkeuma on suljettu joukko. Edelleen, $\bar{A}$ on suppein*[5] *suljettu joukko, joka sisältää joukon A.*

[5] *Suppein* tässä yhteydessä tarkoittaa: jos C on toinen suljettu joukko, joka sisältää joukon A, niin $\bar{A} \subset C$.

Todistus: Sulkeuma $\bar{A}$ on suljettu, koska sen komplementti on

$$(\bar{A})^c = \operatorname{ext} A,$$

joka on avoin joukko. Olkoon sitten C suljettu joukko, joka sisältää joukon A eli $A \subset C$. Olkoon $x_0 \in C^c$. Koska C^c on avoin on $r > 0$, jolle

$$]x_0 - r, x_0 + r[\subset C^c.$$

Siten $x_0 \notin \partial A \cup A$ ja , koska $C^c \subset A^c$. Toisin sanoen, $C^c \subset (\bar{A})^c$ eli $\bar{A} \subset C$. Näin ollen, $\bar{A}$ on suppein suljettu joukko, joka sisältää joukon A. □

4.19. Seuraus. *Olkoon $A \subset \mathbf{R}$. Tällöin seuraavat ovat yhtäpitäviä:*

i) Joukko A on suljettu.

ii) Joukko A on A:n sulkeuma eli

$$A = \bar{A}.$$

iii) Joukko A sisältää reunansa,

$$\partial A \subset A.$$

iv) Joukko A sisältää kasaantumispisteensä.

Todistus: i) $\Rightarrow$ ii): Jos A on suljettu niin $\bar{A} \subset A$, koska $\bar{A}$ on suppein A:n sisältävä suljettu joukko (Lause 4.18).

ii) $\Rightarrow$ iii): Selvä, koska $\partial A \subset \bar{A}$.

iii) $\Rightarrow$ iv): Jos x_0 on joukon A kasaantumispiste, niin $x_0 \in A$ tai $x_0 \in \partial A$. Koska oletuksen mukaan $\partial A \subset A$, niin molemmissa tapauksissa $x_0 \in A$.

iv) $\Rightarrow$ i): Olkoon $y \notin A$. Koska y ei oletuksen mukaan ole joukon A kasaantumispiste (eikä A:n piste), on olemassa y:n r-ympäristö, joka ei sisällä joukon A pisteitä lainkaan, ts. $]y - r, y + r[\subset A^c$. Siten jokainen A^c:n piste on sen sisäpiste, joten A^c on avoin ja siten A on suljettu. □

4.20. Lause. *Olkoon $A \subset \mathbf{R}$. Tällöin*

i) Joukon A sulkeuman sulkeuma on joukon A sulkeuma,

$$\bar{\bar{A}} = \bar{A}.$$

ii) Joukon A sulkeuma on joukon A kosketuspisteiden joukko,

$$\bar{A} = \{x \in \mathbf{R} :]x - r, x + r[\cap A \neq \emptyset \text{ kaikilla } r > 0\}.$$

iii) Joukon A sulkeuma on joukon A ja sen kasaantumispisteiden yhdiste,

$$\begin{aligned}\bar{A} &= \{x \in \mathbf{R} : x \in A \text{ tai } x \text{ on joukon } A \text{ kasaantumispiste}\} \\ &= A \cup \{A\text{:n kasaantumispisteet}\}.\end{aligned}$$

TODISTUS: i): Harjoitustehtävä.

ii): Olkoon $x_0 \in \bar{A} = A \cup \partial A$. Jos $x_0 \in A$, niin selvästi $x_0 \in]x_0 - r, x_0 + r[\cap A$ kaikilla $r > 0$. Jos taas $x_0 \notin A$, niin $x_0 \in \partial A$, joten määritelmän mukaan $]x_0 - r, x_0 + r[\cap A \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$. Siten inkluusio ”$\subset$”on todistettu. Toiseen suuntaan selvä (miksi?, HT).

iii): HT (katso edellisen kohdan todistus). □

4.21. Huomautus. Seuraavat ominaisuudet on hyvä tietää (ja helppoja todistaa). Todistukset jätetään harjoitustehtäviksi.

i) Joukko A on suljettu, jos ja vain, jos jokaiselle suppenevalle jonolle $x_n \to x_0$, jolle $x_n \in A$, myös rajapiste $x_0 \in A$.

ii) Olkoon $x_0 \notin \operatorname{int} A$. Tällöin $x_0 \in \partial A$, jos ja vain, jos on olemassa jono $x_n \in A$, jolle $x_n \to x_0$.

iii) $\sup A \in \partial A$ ja $\inf A \in \partial A$. (jos sup/inf ovat reaalilukuja)

Suljetut välit ovat suljettujen joukkojen malliesimerkkejä. Suljettuja joukkoja on paljon muitakin, esimerkiksi jos $x_n \to x_0$, niin joukko

$$\{x_0, x_1, x_2, x_2, \dots\}$$

on suljettu (HT). Seuraava lause näyttää, että reaaliakselin täydellisyysominaisuudet (ks. Lause 3.19) periytyvät suljetuille ja rajoitetuille joukoille:

4.22. Lause. *Olkoon $F \subset \mathbf{R}$. Tällöin seuraavat ominaisuudet ovat yhtäpitäviä:*

i) (”Kompaktius”) Joukko F on suljettu ja rajoitettu.

ii) Jokaisella epätyhjällä joukolla $A \subset F$ on pienin yläraja $\sup A \in F$ ja suurin alaraja $\inf A \in F$.

iii) (Monotonisen jonon raja-arvo) Jokaisella monotonisella jonolla $x_n \in F$ on raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in F\,.$$

iv) (Cantorin leikkausominaisuus). Jos $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$ on jono sisäkkäisiä suljettuja joukkoja, joille $C_n \cap F \neq \emptyset$ kaikilla n, niin on olemassa $x_0 \in F$, jolle

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\,.$$

v) (Bolzano-Weierstrass -ominaisuus) Jokaisella F:n jonolla on aina suppeneva osajono, jonka rajapiste kuuluu joukkoon F.

vi) ("Täydellisyys") Joukko F on rajoitettu ja jokaisella Cauchy-jonolla $x_n \in F$ on raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in F\,.$$

TODISTUS: i) $\Rightarrow$ ii): Koska A on rajoitettu, niin $\inf A, \sup A \in \mathbf{R}$. Edelleen, $\inf A, \sup A \in \bar{A}$ ja $\bar{A} \subset \bar{F} = F$, koska F on suljettu, niin väite seuraa.

ii) $\Rightarrow$ iii): Koska rajoitettu, monotoninen jono x_n suppenee kohti lukua x_0, missä

$$x_0 = \begin{cases} \sup_n x_n, & \text{jos jono nouseva} \\ \inf_n x_n, & \text{jos jono laskeva}\,, \end{cases}$$

seuraa väite ehdosta ii).

iii) $\Rightarrow$ iv): Olkoon $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$ on jono sisäkkäisiä suljettuja joukkoja, joille $C_n \cap F \neq \emptyset$ kaikilla n. Valitaan kaikilla n luku $x_n \in C_n \cap F$. Koska joukko F on rajoitettu (miksi?, mieti huolella), on jonolla x_n Bolzano-Weierstrassin lauseen 3.14 nojalla suppeneva osajano x_{n_j}, jonka rajapiste olkoon x_0. Edelleen jonolla x_{n_j} on monotoninen osajono $x_{n_{j_k}}$ (tällaisen konstruointi jätetään harjoitustehtäväksi). Koska $x_{n_{j_k}} \to x_0$, on $x_0 \in F$ oletuksen iii) nojalla. Osoitetaan lopuksi, että

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\,,$$

mistä väite seuraa. Olkoon $n \in \mathbf{N}$. Koska

$$x_{n_{j_k}} \in C_n \quad \text{kaikilla } n_{j_k} \geq n,$$

ja C_n sisältää suljettuna joukkona kasautumispisteensä (Lause 4.20), saamme $x_0 \in C_n$, joten väite iv) on todistettu.

iv) $\Rightarrow$ v): Ensiksi havaitaan, että joukko F on rajoitettu: Jos F ei olisi ylhäältä rajoitettu, olisi nouseva jono $f_n \in F$, $f_n \to \infty$, jolloin olisi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [f_n, \infty[= \emptyset$$

vastoin kohdan iv) ehtoa. Siis F on ylhäältä rajoitettu. Samoin nähdään, että F on alhaalta rajoitettu.

Olkoon $x_n \in F$ jono. Bolzano-Weierstrassin lauseen 3.14 sillä on suppeneva osajano x_{n_j}. Osoitetaan, että osajonon x_{n_j} rajapiste x_0 kuuluu joukkoon F. Nyt joukot

$$C_{n_j} = \{x_0\} \cup \{x_{n_j}, x_{n_{j+1}}, x_{n_{j+2}}, x_{n_{j+3}}, \dots\}$$

toteuttavat kohdan iv) ehdot ja

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{n_j} = \{x_0\},$$

joten $x_0 \in F$. Siten ehto v) on todistettu.

v) $\Rightarrow$ vi): (HT vrt Lauseen 3.17 todistus).

vi) $\Rightarrow$ i): (HT). □

4.23. Huomautus. Lauseen 4.22 kohdan iv) suljetut joukot C_n voidaan korvata suljetuilla väleillä (HT, sama todistus kuin edellä).

4.3. Funktiot kuvauksina

4.24. Lause. *Olkoon $F \subset \mathbf{R}$ suljettu ja rajoitettu joukko ja $f : F \to \mathbf{R}$ jatkuva. Tällöin*

i) kuvajoukko $f(F)$ on suljettu ja rajoitettu.

ii) f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa F.

TODISTUS: Kuvajoukko $f(F)$ on suljettu: Olkoon $y_n \in f(F)$ jono, $y_n \to y_0$. Koska joukko on suljettu, mikäli se sisältää kasaantumispisteensä (Seuraus 4.19), riittää osoittaa, että $y_0 \in f(F)$. Valitaan $x_n \in F$ siten, että $f(x_n) = y_n$. Bolzano-Weierstrass -ominaisuuden (Lause 4.22 v)) nojalla, on olemassa jonon x_n osajono x_{n_j}, joka suppenee kohti jotain pistettä $x_0 \in F$. Koska f on jatkuva, on

$$f(x_0) = \lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = \lim_{j\to\infty} y_{n_j} = y_0\,,$$

joten $y_0 \in f(F)$.

Valitsemalla yllä olevassa argumentissa y_0:ksi termit $\sup_F f$ (ja $\inf_F f$; nämä ensin mahdollisesti $\pm\infty$) nähdään samoin kuin yllä, että on olemassa $x_0 \in F$, jolle

$$f(x_0) = y_0\,,$$

joten supremum ja infimum saavutetaan ja nämä ovat äärellisiä. Lause on todistettu

$\square$

4.25. Huomautus. Lauseessa 4.24 on oleellista, että lähtöjoukko F on sekä suljettu että rajoitettu. Jos F on suljettu mutta ei rajoitettu ei kuvajoukko ole välttämättä suljettu tai rajoitettu (esim $F = \mathbf{N}$; jos $f(x) = x$, ei $f(F)$ ole rajoitettu eikä f saa suurinta arvoaan; jos $g(x) = 1/x$ ei $g(F)$ ole ole suljettu eikä g saa pienintä arvoaan.

Keksi itse esimerkki, jossa joukko F on rajoitettu, mutta ei suljettu ja kuvajoukon ominaisuudet eivät toteudu.

Funktion jatkuvuus voidaan näppärästi lausua alkukuvien ja sisäpisteiden avulla:

4.26. Lause. *Olkoon $I \subset \mathbf{R}$ avoin, $f : I \to \mathbf{R}$ ja $x_0 \in I$. Tällöin f on jatkuva pisteessä x_0, jos ja vain jos jokaiselle $E \subset \mathbf{R}$, jolla $f(x_0) \in \operatorname{int} E$, pätee $x_0 \in \operatorname{int} f^{-1}(E)$.*

TODISTUS: Olkoon ensin f jatkuva pisteessä x_0. Olkoon $E \subset \mathbf{R}$ sellainen joukko, jolle $f(x_0) \in \operatorname{int} E$. Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$, jolle

$$]f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon[\subset E\,.$$

Koska f on jatkuva, on $\delta > 0$, jolle

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\,,$$

joten

$$f(]x_0-\delta,x_0+\delta[)\subset]f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon[\subset E\,.$$

Siten

$$]x_0-\delta,x_0+\delta[\subset f^{-1}(E)\,,$$

joten $x_0\in\operatorname{int} f^{-1}(E)$.

Osoitetaan sitten, että lauseen ehto takaa, että f on jatkuva pisteessä x_0. Olkoon $\varepsilon>0$ ja sovelletaan ehtoa joukkoon $E=]f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon[$. Tällöin $x_0\in\operatorname{int} f^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon[)$, ja siten on $\delta>0$, jolle

$$]x_0-\delta,x_0+\delta[\subset f^{-1}(]f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon[)\,,$$

ts.

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon \quad \text{kaikilla } x\in]x_0-\delta,x_0+\delta[\,.$$

Siis f on jatkuva pisteessä x_0. □

4.27. Seuraus. *Olkoon $I\subset\mathbf{R}$ avoin. Tällöin funktio $f:I\to\mathbf{R}$ on jatkuva välillä I, jos ja vain jos jokaisen avoimen joukon $A\subset\mathbf{R}$ alkukuva $f^{-1}(A)$ on avoin joukko.*

Käyttämällä alkukuvan ominaisuuksia 4.5 saadaan Seurauksesta 4.27:

4.28. Seuraus. *Funktio $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ on jatkuva, jos ja vain jos jokaisen suljetun joukon $F\subset\mathbf{R}$ alkukuva $f^{-1}(F)$ on suljettu joukko.*

4.29. Huomautus. i) Myös funktion raja-arvon voi helposti karakterisoida avointen joukkojen avulla (HT: tee se!)

ii) Huomaa, että jatkuvalle funktiolle $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ kuvajoukko $f(A)$ **ei yleensä ole** avoin eikä suljettu vaikka A olisi avoin tai suljettu. Esimerkiksi, kuvaukselle

$$f(x)=e^{-x^2}$$

suljetun ja avoimen joukon $\mathbf{R}$ kuvajoukko on

$$f(\mathbf{R})=]0,1]\,,$$

mikä ei ole avoin eikä suljettu.

4.4. Kompaktius ja peitteet

(Tätä osiota ei käytäne luennolla.)

Lauseessa 4.22 mainittin kompaktiuden käsite. Seuraavassa määritellään se tavalla, jota käytetään reaaliakselia yleisemmissä avaruuksissa. Ensin tarvitaan kuitenkin peitteen käsite.

4.30. Määritelmä (peite). Olkoon $F \subset \mathbf{R}$. Olkoon $\mathcal{U}$ perhe joukkoja[6] $U \subset \mathbf{R}$. Sanotaan, että $\mathcal{U}$ on joukon F *peite*, jos

$$F \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U .$$

Edelleen sanotaan, että $\mathcal{U}$ on joukon F *avoin peite*, jos $\mathcal{U}$ on joukon F peite ja jokainen joukko $U \in \mathcal{U}$ on avoin joukko.

4.31. Määritelmä (kompakti). Olkoon $F \subset \mathbf{R}$. Sanotaan, että F on *kompakti*, jos jokaiselle joukon F avoimelle peiteelle $\mathcal{U}$ on $k \in \mathbf{N}$ ja joukot $U_1, U_2, \dots, U_k \in \mathcal{U}$ siten, että

$$F \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_j .$$

Ts. jokaisen joukon F avoimen peitteen $\mathcal{U}$ joukoista jo äärellisen moni rittää[7] peittämään joukon F.

Esimerkki. Joukot $]0,1]$ ja $\mathbf{R}$ eivät ole kompakteja, koska joukot $]\frac{1}{j}, 2[$, $j \in \mathbf{N}$, muodostavat joukon $]0,1]$ avoimen peitteen ja samoin joukot $]-j, j[$, $j \in \mathbf{N}$, muodostavat joukon $\mathbf{R}$ avoimen peitteen, mutta mikään äärellinen määrä näitä ei riitä peittämään ko. joukkoa.

Jokainen äärellinen pistejoukko on kompakti.

4.32. Lause (Heine-Borel). *Joukko $F \subset \mathbf{R}$ on kompakti, jos ja vain jos F on sekä suljettu että rajoitettu.*

[6] Kokoelma $\mathcal{U}$ on siis joukko, jonka alkiot ovat $\mathbf{R}$:n osajoukkoja.

[7] Jos $\mathcal{U}$ on joukon F peite ja kokoelma $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ on myös joukon F peite, sanotaan että $\mathcal{V}$ on peitteen $\mathcal{U}$ alipeite. Siten kompaktiuden määritelmä voidaan lausua lyhyesti: joukko f on kompakti, jos sen jokaisella avoimella peitteellä on äärellinen alipeite.

TODISTUS: Osoitetaan ensiksi, että kompakti joukko F on sekä suljettu että rajoitettu:

F on rajoitettu: peitetään F avoimilla väleillä $]-n, n[$, $n \in \mathbf{N}$. Näistä jo äärellisen monta peittää F:n. Siten on olemassa $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$F \subset \bigcup_{n=1}^{N}]-n, n[=]-N, N[\,,$$

joten F on rajoitettu.

F on suljettu: Olkoon $x_0 \notin F$. Avoimet joukot

$$\mathbf{R} \setminus [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]\,, \quad n \in \mathbf{N},$$

peittävät joukon F, joten on olemassa $N \in \mathbf{N}$, siten, että

$$F \subset \bigcup_{n=1}^{N} \left(\mathbf{R} \setminus [x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}]\right) = \mathbf{R} \setminus [x_0 - \frac{1}{N}, x_0 + \frac{1}{N}].$$

Siten $[x_0 - \frac{1}{N}, x_0 + \frac{1}{N}] \subset \mathbf{R} \setminus F$, ts $x_0 \in \operatorname{int}(\mathbf{R} \setminus F)$. Siten $\mathbf{R} \setminus F$ on avoin ja F on suljettu.

Oletetaan seuraavaksi, että joukko F on sekä suljettu että rajoitettu ja osoitetaan, että se on kompakti. Todistetaan tämä epäsuorasti: oletetaan, että $\mathcal{U}$ sellainen joukon F avoin peite, josta ei voida poimia äärellistä osaperhettä, joka olisi F:n peite. Näytetään, että tämä johtaa ristiriitaan.

Koska F on rajoitettu, $F \subset I_0 = [a_0, b_0] \in \mathbf{R}$ joillakin $a_0, b_0 \in \mathbf{R}$. Jaetaan väli I_0 keskeltä kahdeksi suljetuksi väliksi

$$I_{0,1} = [a_0, c_0] \quad \text{ja} \quad I_{0,2} = [c_0, b_0], \qquad \text{missä } c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Nyt antiteesin nojalla ainakin toista joukoista $F \cap I_{0,1}$ ja $F \cap I_{0,2}$ ei voida peittää äärellisellä määrällä peitteen $\mathcal{U}$ joukkoja. Valitaan se väli $I_{0,j}$ ja merkitään kyseistä väliä

$$I_1 = [a_1, b_1]\,.$$

Jatketaan rekursiivisesti. Yleinen askel: Olkoon $I_k = [a_k, b_k]$ sellainen suljettu väli, että leikkausta $F \cap I_k$ ei voida peittää äärellisellä määrällä peitteen $\mathcal{U}$ joukkoja. Jaetaan väli I_k keskeltä kahdeksi suljetuksi väliksi

$$I_{k,1} = [a_k, c_k] \quad \text{ja} \quad I_{k,2} = [c_k, b_k], \qquad \text{missä } c_k = \frac{a_k + b_k}{2}.$$

Nyt antiteesin nojalla ainakin toista joukoista $F \cap I_{k,1}$ ja $F \cap I_{k,2}$ ei voida peittää äärellisellä määrällä peitteen $\mathcal{U}$ joukkoja. Valitaan se väli $I_{k,j}$ ja merkitään kyseistä väliä

$$I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}] \,.$$

Sadaan jono vähenevä jono suljettuja, epätyhjiä joukkoja $I_k \cap F$, joten Lauseen 4.22 iv nojalla on olemassa

$$x_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \cap F \,.$$

Koska $x_0 \in F$ on joukko $U \in \mathcal{U}$, jolle $x_0 \in U$. Koska konstruktion nojalla $a_k \to x_0$ ja $b_k \to x_0$, on olemassa $N \in \mathbf{N}$, jolle

$$I_k = [a_k, b_k] \subset U \quad \text{kaikilla } k \geq N.$$

Tämä on ristiriita, koska joukkoa $F \cap I_k$ ei voitu peittää äärellisen monella joukoista $V \in \mathcal{U}$.

□

4.33 . Huomautus. Lause 4.24 on helppo muotoilla ja todistaa kompaktiuden avulla. *Olkoon $f : I \to \mathbf{R}$ jatkuva ja $F \subset I$ kompakti joukko ja Tällöin $f(F)$ on kompakti ja f saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa joukossa F.*

Jos $\mathcal{U}$ on joukon $f(F)$ avoin peite, niin alkukuvat

$$\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$$

muodostavat F:n avoimen peitteen. Tällä on äärellinen osapeite

$$\{f^{-1}(U_j) : j = 1, 2, \ldots, k\},$$

joten joukot U_j, $j = 1, 2, \ldots, k$, muodostavat etsityn $f(F)$:n äärellisen peitteen. Siten $f(F)$ on kompakti. Koska $f(F)$ on kompakti, sisältää se supremuminsa, sillä jos näin ei olisi, niin joukon $f(F)$ avoimesta peitteestä

$$]-\infty, \sup f(F) - \frac{1}{j}[\,, \quad j = 1, 2, \ldots,$$

ei voitaisi valita äärellistä osapeitettä.

LISÄÄ (?): - joukkojen välinen etäisyys -suljetun ja kompaktin joukon välinen etäisyys - useampiulotteinen tilanne