Differentiaaliyhtälöt

Petri Juutinen

2. syyskuuta 2008

Sisältö

Alkulause

Käsissäsi on puhtaaksi kirjoitettu versio allekirjoittaneen syyslukukausilla 2005 ja 2006 Jyväskylän yliopiston matematiikan ja tilastotieteen laitoksella luennoiman Differentiaaliyhtälöt -kurssin (3 op/2 ov) luentomuistiinpanoista. Kurssi on osa matematiikan aineopintoja ja sen menestyksekäs suorittaminen edellyttää yhden reaalimuuttujan differentiaali- ja integraalilaskennan perusteiden (= kurssien Analyysi 1-3 sisältö tai vastaavat tiedot) hallintaa. Myös useamman muuttujan differentiaalilaskennan ja lineaarialgebran tuntemuksesta on apua ja iloa.

Kurssin pääpaino on ensimmäisen ja toisen kertaluvun tavallisten differentiaaliyhtälöiden teoriassa, erityisesti eri ratkaisumenetelmien esittelyssä. Differentiaaliyhtälöryhmiä, osittaisdifferentiaaliyhtälöitä tai differentiaaliyhtälöiden kvalitatiivista teoriaa kurssilla ei juurikaan ehditä käsitellä.

Petri Juutinen

Luku 1

Johdanto

Määritelmiä ja terminologiaa

Tavallisella differentiaaliyhtälöllä (ordinary differential equation) tarkoitetaan yhtälöä, joka sisältää tuntemattoman yhden muuttujan reaalifunktion ja sen derivaattoja. Yhtälön *kertaluku* on korkeimman yhtälössä esiintyvän tuntemattoman funktion derivaatan kertaluku.

Esimerkki 1.0.1. Differentiaaliyhtälön

$$3y''(x)y(x)^2 = \sin(x + y(x)),$$

jossa tuntematon funktion on $y = y(x)$, kertaluku on 2, sillä korkein yhtälössä esiintyvä y:n derivaatta on sen toinen derivaatta y''.

Yhtälöä, jossa esiintyy tuntematon useamman kuin yhden (reaali)muuttujan funktio ja sen osittaisderivaattoja, kutsutaan *osittaisdifferentiaaliyhtälöksi*. Tällä kurssilla käsitellään vain tavallisia differentiaaliyhtälöjä.

Esimerkki 1.0.2. Yksiulotteinen lämpöyhtälö

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(t, x),$$

missä u on reaalimuuttujien t ja x funktio, $u = u(t, x)$, on esimerkki osittaisdifferentiaaliyhtälöstä.

Yleinen n. kertaluvun tavallinen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{1.1}$$

missä $F : D \to \mathbb{R}$ on alueessa[1] $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$ määritelty jatkuva funktio. Yhtälön sanotaan olevan *normaalimuotoinen*, jos se on esitettävissä muodossa

$$y^{(n)}(x) = G(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \tag{1.2}$$

[1] alue = avoin ja yhtenäinen joukko

Esimerkki 1.0.3. Esimerkin 1.0.1 yhtälö $3y''(x)y(x)^2 = \sin(x+y(x))$ voidaan esittää muodossa $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$, kun valitaan $F(x, y, z, w) = 3wy^2 - \sin(x + y)$.

Huomautus 1.0.4. Kaikkia muotoa (1.1) olevia differentiaaliyhtälöitä ei suinkaan voida esittää normaalimuodossa eikä normaaliesitys, jos sellainen on olemassa, ole välttämättä yksikäsitteinen. Esimerkiksi yhtälöä

$$(y'(x))^2 + xy'(x) + 4y = 0$$

vastaavat normaalimuotoiset yhtälöt

$$y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 16y(x)^2}}{2}.$$

Differentiaaliyhtälön (1.1) *ratkaisulla* tarkoitetaan jollakin avoimella välillä $\Delta \subset \mathbb{R}$ määriteltyä n kertaa derivoituvaa funktiota $y : \Delta \to \mathbb{R}$, jolle $(x, y(x), \ldots, y^{(n)}(x)) \in D$ kaikilla $x \in \Delta$ ja

$$F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0 \qquad \text{kaikilla } x \in \Delta.$$

Differentiaaliyhtälön ratkaisemisella tarkoitetaan sen *kaikkien* ratkaisujen löytämistä.

Esimerkki 1.0.5. Funktio $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y(x) = e^{-x^2/2}$ on yhtälön

$$y' + xy = 0 \tag{1.3}$$

ratkaisu, sillä

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2/2}\right) + x\left(e^{-x^2/2}\right) = -xe^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2} = 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Myös $y(x) = Ce^{-x^2/2}$ on ratkaisu kaikilla vakioilla $C \in \mathbb{R}$, ja itse asiassa yhtälön $y' + xy = 0$ kaikki ratkaisut ovat tätä muotoa. Tämän osoittamiseksi olkoon y_0 yhtälön (1.3) mielivaltainen ratkaisu ja asetetaan $f(x) = y_0(x)e^{x^2/2}$. Tällöin

$$f'(x) = y_0'(x)e^{x^2/2} + xy_0(x)e^{x^2/2} = e^{x^2/2}\,(y_0'(x) + xy_0(x)) = 0,$$

joten f on vakiofunktio eli on olemassa $C \in \mathbb{R}$ siten, että $f(x) = y_0(x)e^{x^2/2} = C$ kaikilla x. Näin ollen $y_0(x) = Ce^{-x^2/2}$.

Esimerkkejä

a) Radioaktiivisen aineen hajoamista voidaan kuvata yhtälöllä

$$N'(t) = -\lambda N(t),$$

missä $N(t)$ on ydinten lukumäärä ajanhetkellä t ja $\lambda > 0$ on hajoamisvakio. Yhtälöön liittyy tyypillisesti *alkuehto* $N(t_0) = N_0$, ts. ydinten lukumäärä tietyllä hetkellä t_0

tunnetaan. Tällöin tehtävänä on löytää yhtälön $N'(t) = -\lambda N(t)$ juuri se ratkaisu, joka toteuttaa annetun alkuehdon.

b) Jatkuvasti derivoituvan funktion $u : [0,1] \to [0,\infty)$ kuvaajan pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyvän pyörähdyskappaleen pinnan pinta-ala on

$$I(u) = 2\pi \int_0^1 u(x)\sqrt{1+u'(x)^2}\,dx.$$

Annetuilla kiinteillä reuna-arvoilla $u(0) = \alpha > 0$, $u(1) = \beta > 0$ tämän pinta-alan minimoivan funktion etsintä johtaa toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöön

$$u''(x)u(x) - u'(x)^2 = 1, \qquad u(0) = \alpha,\ u(1) = \beta.$$

c) Peto-saalis -malli:

$$\begin{cases} p'(t) = ap(t) - bp(t)r(t) \\ r'(t) = -cr(t) + dp(t)r(t) \end{cases}$$

missä $p(t)$ kuvaa saaliseläinten ja $r(t)$ petojen lukumäärää hetkellä t ja a, b, c, d ovat malliin liittyviä positiivisia vakioita.

Luku 2

Ensimmäisen kertaluvun yhtälöistä

Tässä luvussa tutustutaan ensimmäisen kertaluvun yhtälöiden teoriaan. Tarkastelemme ensin ratkaisun olemassaoloa ja yksikäsitteisyyttä, ja käymme sen jälkeen läpi tiettyjä yhtälötyyppejä, joiden ratkaiseminen onnistuu suhteellisen alkeellisin keinoin. Lukijan kannattaa kuitenkin pitää mielessä, että yleisesti ottaen annettu differentiaaliyhtälö osataan ratkaista ainoastaan tietyissä erikoistapauksissa.

2.1 Olemassaolo ja yksikäsitteisyys

Tarkastellaan normaalimuotoista ensimmäisen kertaluvun yhtälöä

$$y'(x) = f(x, y(x)),$$

missä $f : D \to \mathbb{R}$ on jatkuva alueessa $D \subset \mathbb{R}^2$.

Lause 2.1.1. *Oletetaan, että $f : D \to \mathbb{R}$ ja sen osittaisderivaatta*[1] $\dfrac{\partial f}{\partial y} : D \to \mathbb{R}$ *ovat jatkuvia alueessa D ja $(x_0, y_0) \in D$ on annettu. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.1}$$

on olemassa välillä $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ määritelty ratkaisu, ts. on olemassa jatkuvasti derivoituva funktio $y :]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\to \mathbb{R}$ siten, että $y(x_0) = y_0$ ja $y'(x) = f(x, y(x))$ kaikilla $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

Lisäksi jos $y_1 : \Delta_1 \to \mathbb{R}$ ja $y_2 : \Delta_2 \to \mathbb{R}$ ovat alkuarvotehtävän (2.1) ratkaisuja, niin $y_1(x) = y_2(x)$ kaikilla $x \in \Delta_1 \cap \Delta_2$.

Huomautus 2.1.2. Lause 2.1.1 kertoo, että alueen D jokaisen pisteen (x_0, y_0) kautta kulkee täsmälleen yhden yhtälön $y' = f(x, y)$ ratkaisun kuvaaja. Erityisesti siis ratkaisujen kuvaajat peittävät alueen D toisiaan leikkaamatta tai sivuamatta.

[1] Muista, että $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x, y+h) - f(x)}{h}$, mikäli kyseinen raja-arvo on olemassa.

Huomautus 2.1.3. Voidaan osoittaa, että ratkaisun olemassaoloon riittää pelkästään funktion $f : D \to \mathbb{R}$ jatkuvuus. Sen sijaan yksikäsitteisyyteen tämä oletus ei yksin riitä. Esimerkiksi alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x)^2)^{1/3} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

on triviaalin ratkaisun $y_1(x) \equiv 0$ lisäksi ainakin ratkaisu $y_2(x) = \frac{1}{27}x^3$. Huomaa, että funktiolla $f(x, y) = (y^2)^{1/3}$ ei ole olemassa osittaisderivaattaa $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ millään $x \in \mathbb{R}$.

Lauseen 2.1.1 oletuksin on olemassa ns. maksimaalinen ratkaisuväli $\hat{\Delta}$ ja yksikäsitteinen maksimaalinen ratkaisu $\hat{y} : \hat{\Delta} \to \mathbb{R}$ siten, että mille tahansa alkuarvotehtävän (2.1) ratkaisulle $y : \Delta \to \mathbb{R}$ pätee $\Delta \subset \hat{\Delta}$ ja $y(x) = \hat{y}(x)$ kaikilla $x \in \Delta$ (katso esimerkiksi [6] tai [7]). Voidaan osoittaa, että maksimaalisen ratkaisun kuvaaja kulkee alueen D ”reunalta reunalle”, eli sen kuvaaja ei sisälly mihinkään D:n kompaktiin osajoukkoon. Tämä ei kuitenkaan tarkoita sitä, että edes tapauksessa $D = \Delta \times \mathbb{R}$ maksimaalinen ratkaisu olisi määritelty koko välillä Δ. Tietyin lisäoletuksin näin kuitenkin käy:

Lause 2.1.4. *Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli ja $f : \Delta \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, jonka osittaisderivaatta $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ on jatkuva ja lisäksi rajoitettu jokaisessa joukossa $([a, b] \times \mathbb{R}) \subset (\Delta \times \mathbb{R})$. Tällöin kaikilla $(x_0, y_0) \in \Delta \times \mathbb{R}$ alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on olemassa yksikäsitteinen koko välillä Δ määritelty ratkaisu $y : \Delta \to \mathbb{R}$.

Esimerkki 2.1.5. Tarkastellaan alkuarvotehtävää

$$\begin{cases} y'(x) = \cos(x^2 y(x)), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Tällöin $f(x, y) = \cos(x^2 y)$, joten $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\sin(x^2 y)x^2$. Koska

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Big| \leq |\sin(x^2 y)|x^2 \leq x^2 \leq \max\{a^2, b^2\}$$

kaikilla $(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R}$, on alkuarvotehtävällä yksikäsitteinen ratkaisu $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen todistukseen palataan myöhemmin.

2.2 Separoituvat yhtälöt

Määritelmä 2.2.1. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on *separoituva*, jos se on esitettävissä muodossa

$$y'(x) = g(x)h(y(x)),$$

missä $g : \Delta_1 \to \mathbb{R}$ ja $h : \Delta_2 \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia funktioita.

Esimerkki 2.2.2. Yhtälö $y' = 2xy^2$ on separoituva ($g(x) = 2x$, $h(y) = y^2$), mutta $y' = y + x$ ei ole.

Separoituvan yhtälön ratkaiseminen:

Tarkastellaan yhtälöä

$$y' = g(x)h(y), \tag{2.2}$$

ja oletetaan aluksi, että funktiolla h ei ole nollakohtia välillä Δ_2. Olkoon $y : \Delta \to \mathbb{R}$ yhtälön (2.2) jokin ratkaisu, $\Delta \subset \Delta_1$. Tällöin

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) \qquad \text{kaikilla } x \in \Delta.$$

Jos merkitään $H(y) = \int \frac{1}{h(y)}\,dy$, ts. H on jatkuvan funktion $\frac{1}{h}$ (jokin) integraalifunktio, niin saamme

$$\frac{d}{dx}\big(H(y(x))\big) = H'(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x) = \frac{d}{dx}\left(\int g(x)\,dx\right).$$

Näin ollen

$$H(y(x)) = \int g(x)\,dx + C \qquad \text{jollakin vakiolla } C \in \mathbb{R}.$$

Koska H on jatkuvasti derivoituva ja $H'(y) = \frac{1}{h(y)} \neq 0$ kaikilla $y \in \Delta_2$, on olemassa jatkuvasti derivoituva käänteisfunktio $H^{-1} : H(\Delta_2) \to \Delta_2$. Siten saamme

$$y(x) = H^{-1}(H(y(x))) = H^{-1}\Big(\int g(x)\,dx + C\Big).$$

Kääntäen, jos määrittelemme funktion y kaavalla

$$y(x) = H^{-1}\Big(\int g(x)\,dx + C\Big),$$

missä $\int g(x)\,dx$ on g:n jokin integraalifunktio ja $C \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned} y'(x) &= (H^{-1})'\Big(\int g(x)\,dx + C\Big)g(x) = \frac{1}{H'(H^{-1}\big(\int g(x)\,dx + C\big))}g(x) \\ &= \frac{1}{H'(y(x))}g(x) = h(y(x))g(x). \end{aligned}$$

Siten yhtälön (2.2) kaikki ratkaisut saadaan kaavasta

$$\int \frac{1}{h(y)}\,dy = \int g(x)\,dx + C.$$

Jos liitämme yhtälöön (2.2) alkuehdon $y(x_0) = y_0$, niin ratkaisu saa implisiittisen muodon

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(t)}\,dt = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds.$$

Entä jos funktiolla h on nollakohtia välillä Δ_2? Jos oletamme, että h ei ole pelkästään jatkuva, vaan myös jatkuvasti derivoituva, niin Lauseen 2.1.1 nojalla alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} y' = g(x)h(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on yksikäsitteinen ratkaisu (määritelty jollakin välillä $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$). Nyt

- jos $h(y_0) = 0$, niin alkuarvotehtävän ratkaisu on vakiofunktio $y(x) \equiv y_0$.
- jos $h(y_0) \neq 0$, niin ratkaisu saadaan kaavasta

$$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{h(t)}\,dt = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds.$$

Huomautus 2.2.3. Jos h on jatkuvasti derivoituva ja sillä on nollakohdat $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$, niin yhtälöllä $y' = g(x)h(y)$ on erikoisratkaisut $y_i(x) \equiv a_i$, $i = 1, \ldots, m$, ja muiden ratkaisujen kuvaajat kulkevat suorien $y = a_i$ välissä (tai joukoissa $y < a_1$ tai $y > a_m$) niitä sivuamatta. Tämä ei ole totta ilman oletusta funktion h jatkuvasta derivoituvuudesta; jo aiemmin vastaan tullut yhtälö $y' = (y^2)^{1/3}$ kelpaa tästä esimerkiksi.

Esimerkki 2.2.4. a) Ratkaistaan separoituva yhtälö

$$y' = 2xy^2.$$

Tällöin siis $h(y) = y^2$ ja $g(x) = 2x$, joten ratkaisut saadaan yhtälöstä

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy = \int 2x\,dx + C$$

eli

$$-\frac{1}{y(x)} = x^2 + C.$$

Vaihtamalla vakion C merkkiä saamme ratkaisut kirjoitettua muotoon

$$y(x) = \frac{1}{C - x^2},\ \ C \in \mathbb{R}.$$

Ratkaisuväli Δ on

- koko $\mathbb{R}$, jos $C < 0$.
- $]-\infty, 0[$ tai $]0, \infty[$, jos $C = 0$.
- $]-\infty, -\sqrt{C}[$, $]-\sqrt{C}, \sqrt{C}[$ tai $]\sqrt{C}, \infty[$, jos $C > 0$.

Koska $h(0) = 0$, yhtälöllä on lisäksi erikoisratkaisu $y \equiv 0$. Huomaa, että muut ratkaisut eivät missään pisteessä saa arvoa nolla.

b) Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y' = 2xy(y-1), \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Funktio $h(y) = y(y-1)$ on jatkuvasti derivoituva ja sillä on nollakohdat $y = 0$ ja $y = 1$. Näin ollen tutkittavan alkuarvotehtävän ratkaisu saadaan muuttujien separoinnilla yhtälöstä

$$\int_{1/2}^{y} \frac{1}{t(t-1)}\, dt = \int_{0}^{x} 2s\, ds. \tag{2.3}$$

Vasen puoli saadaan integroitua osamurtokehitelmän avulla: $\frac{1}{t(t-1)} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}$, joten

$$\int_{1/2}^{y} \frac{1}{t(t-1)}\, dt = \Big/_{1/2}^{y} \log|t-1| - \log|t| = \log\left|\frac{y-1}{y}\right|.$$

Siten (2.3) antaa

$$\log\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| = x^2.$$

Koska yhtälöllä $y' = 2xy(y-1)$ on erikoisratkaisut $y \equiv 0$ ja $y \equiv 1$ ja alkuarvo $y(0) = \frac{1}{2}$ on näiden välissä, pätee haetulle alkuarvotehtäväm ratkaisulle $0 < y(x) < 1$. Siten

$$\left|\frac{y(x)-1}{y(x)}\right| = \frac{1-y(x)}{y(x)},$$

jonka nojalla saamme

$$\frac{1-y(x)}{y(x)} = e^{x^2}$$

eli

$$y(x) = \frac{1}{1+e^{x^2}}.$$

c) Varoittava esimerkki: Tarkastellaan yhtälöä

$$(1-x^2)y' + 2y = 0. \tag{2.4}$$

Jos $x \neq \pm 1$, niin yhtälö voidaan kirjoittaa separoituvaan muotoon

$$y' = -2y\frac{1}{1-x^2} \tag{2.5}$$

ja sen ratkaisuiksi saadaan $y \equiv 0$ tai

$$y(x) = C\frac{1-x}{1+x}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad x \neq \pm 1.$$

Funktio $x \mapsto C\frac{1-x}{1+x}$ on hyvin määritelty ja derivoituva myös kun $x = 1$ ja on helppo todeta suoraan laskemalla, että

$$y :]-1, \infty[\to \mathbb{R}, \ y(x) = C\frac{1-x}{1+x}$$

toteuttaa alkuperäisen yhtälön (2.4) määrittelyvälillään $]-1, \infty[$. Nyt siis alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} (1-x^2)y' + 2y = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

on äärettömän monta ratkaisua (kaikki funktiot $x \mapsto C\frac{1-x}{1+x}$), kun taas esimerkiksi alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} (1-x^2)y' + 2y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

ei ole yhtään ratkaisua.

Tämä esimerkki ei kuitenkaan osoita Lausetta 2.1.1 vääräksi, sillä siinä tarkasteltiin *normaalimuotoista* yhtälöä $y' = f(x, y)$. Tarkkaan ottaen (2.4) ja (2.5) ovat siis kaksi eri differentiaaliyhtälöä!

2.3 Separoituvaksi palautuvia yhtälöitä

Määritelmä 2.3.1. Differentiaaliyhtälö $y' = f(x, y)$ on *tasa-asteinen*, jos se on kirjoitettavissa muotoon

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right),$$

missä g on jokin jatkuva funktio.

Olkoon $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$, $x \neq 0$, tasa-asteinen yhtälö, ja tarkastellaan funktiota

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Tällöin, jos y on yhtälön $y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$ ratkaisu, niin

$$z'(x) = \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y'(x) - \frac{y(x)}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(g(z(x)) - z(x)\right)$$

eli z toteuttaa separoituvan yhtälön

$$z' = \frac{1}{x}\left(g(z) - z\right). \tag{2.6}$$

Kääntäen, jos z toteuttaa yhtälön (2.6), niin funktiolle $y(x) = xz(x)$ pätee

$$y'(x) = z(x) + xz'(x) = z(x) + g(z(x)) - z(x) = g\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Esimerkki 2.3.2. Tutkitaan yhtälöä

$$y' = \frac{x+y}{x-y}, \ x \neq y.$$

Koska

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{x\big(1+\frac{y}{x}\big)}{x\big(1-\frac{y}{x}\big)} = \frac{\big(1+\frac{y}{x}\big)}{\big(1-\frac{y}{x}\big)} = g\Big(\frac{y}{x}\Big),$$

missä $g(s) = \dfrac{1+s}{1-s}$, on tutkittava yhtälö tasa-asteinen alueissa, joissa $x \neq 0$ ja $y \neq x$. Edellä tehdyn päättelyn nojalla päädymme siten tutkimaan separoituvaa yhtälöä

$$z' = \frac{1}{x}\left(g(z) - z\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1+z}{1-z} - z\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1+z^2}{1-z}\right),$$

jonka ratkaisut saadaan yhtälöstä

$$\int \frac{1-z}{1+z^2}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx + C.$$

Vasen puoli antaa

$$\int \frac{1-z}{1+z^2}\, dz = \int \frac{1}{1+z^2}\, dz - \frac{1}{2}\int \frac{2z}{1+z^2}\, dz = \arctan z - \frac{1}{2}\log(z^2+1),$$

joten saamme

$$\arctan\left(\frac{y(x)}{x}\right) - \frac{1}{2}\log\left(\left(\frac{y(x)}{x}\right)^2 + 1\right) = \log|x| + C.$$

Tästä ei funktiota $y(x)$ kuitenkaan enää saada ratkaistua.

Toinen esimerkki separoituvaksi palautuvista yhtälöistä ovat muotoa

$$y' = f(ax + by + c), \ b \neq 0 \tag{2.7}$$

olevat yhtälöt. Tällöin kannattaa tarkastella funktiota

$$z(x) = ax + by(x) + c.$$

Suoralla laskulla on helppo nähdä, että funktio y on yhtälön (2.7) ratkaisu jos ja vain jos z toteuttaa separoituvan yhtälön

$$z' = a + bf(z).$$

Esimerkki 2.3.3. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y' = \cos(x+y), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Tämä on muotoa (2.7) valinnoilla $f(z) = \cos z$, $a = b = 1$ ja $c = 0$. Olkoon $z(x) = x + y(x)$ ja tutkitaan separoituvaa yhtälöä

$$z' = 1 + \cos z.$$

Tällä yhtälöllä on erikoisratkaisut $z \equiv \pi + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, muut ratkaisut saadaan kaavasta

$$\int \frac{1}{1+\cos z}\, dz = \int 1\, dx + C.$$

Funktion $\dfrac{1}{1+\cos z}$ integrointi onnistuu esimerkiksi sijoituksen $t = \tan\frac{z}{2}$ avulla:

$$\int \frac{1}{1+\cos z}\, dz = \int \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int 1dt = t = \tan\frac{z}{2}.$$

Siten saamme ratkaisuiksi

$$z(x) = 2\arctan(x + C),$$

eli (koska $z(x) = x + y(x)$)

$$y(x) = 2\arctan(x + C) - x.$$

Alkuehdon $y(0) = 0$ perusteella $C = 0$, joten alkuarvotehtävän yksikäsitteinen ratkaisu on koko reaaliakselilla määritelty funktio

$$y(x) = 2\arctan(x) - x.$$

2.4 Ensimmäisen kertaluvun lineaariset yhtälöt

Määritelmä 2.4.1. Ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälö on *lineaarinen*, jos se on muotoa

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x), \tag{2.8}$$

missä $p, q : \Delta \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia. Yhtälö (2.8) on *homogeeninen*, jos $q(x) \equiv 0$. Jos puolestaan p on vakiofunktio, niin yhtälöä (2.8) sanotaan *vakiokertoimiseksi*.

Huomautus 2.4.2. Homogeeninen lineaariyhtälö $y' + p(x)y = 0$ on separoituva ja sen kaikki ratkaisut saadaan kaavasta

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)\, dx}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Huomaa, että tämä ratkaisuparvi pitää sisällään myös erikoisratkaisun $y \equiv 0$. Erityisesti siis jos y on homogeeniyhtälön $y' + p(x)y = 0$ ratkaisu, niin myös funktio $y_1(x) := Cy(x)$ toteuttaa saman yhtälön millä tahansa vakiolla $C \in \mathbb{R}$.

Lause 2.4.3. *Jos funktio y_1 on lineaarisen yhtälön $y'+p(x)y = q$ jokin ratkaisu, niin yhtälön kaikki ratkaisut saadaan muodossa*

$$y(x) = y_1(x) + Cy_2(x),$$

missä $C \in \mathbb{R}$ ja y_2 on vastaavan homogeeniyhtälön $y' + p(x)y = 0$ jokin nollasta poikkeava ratkaisu, ts.

$$y_2(x) = C_0 e^{-\int p(x)\,dx}, \quad \textit{jollakin } C_0 \neq 0.$$

Todistus. Jos $y(x) = y_1(x) + Cy_2(x)$, niin

$$\begin{aligned} y' + p(x)y &= y_1' + Cy_2' + p(x)(y_1 + Cy_2) = (y_1' + p(x)y_1) + C(y_2' + p(x)y_2) \\ &= q(x) + 0 = q(x) \end{aligned}$$

eli jokainen muotoa $y(x) = y_1(x)+Cy_2(x)$ oleva funktio toteuttaa yhtälön $y'+p(x)y = q$.

Kääntäen, jos y on yhtälön $y' + p(x)y = q$ mielivaltainen ratkaisu, niin funktiolle $y_0 := y - y_1$ pätee

$$y_0' + p(x)y_0 = y' + p(x)y - (y_1' + p(x)y_1) = q(x) - q(x) = 0$$

eli se toteuttaa homogeeniyhtälön $y'+p(x)y = 0$. Näin ollen on olemassa vakio $C \in \mathbb{R}$ siten, että $y_0 = Ce^{-\int p(x)\,dx} = \frac{C}{C_0}y_2$, joten $y = y_1 + \frac{C}{C_0}y_2$. □

Lineaariyhtälön ratkaiseminen

Tarkastellaan ensin erikoistapauksena vakiokertoimista yhtälöä

$$y' + ay = q(x), \quad a \in \mathbb{R}.$$

Kertomalla yhtälö puolittain termillä $e^{ax} \neq 0$ saamme ekvivalentin[2] yhtälön

$$e^{ax}y' + ae^{ax}y = e^{ax}q(x).$$

Koska

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ax}y(x)\right) = e^{ax}y'(x) + ae^{ax}y(x),$$

toteutuu saatu yhtälö jos ja vain jos

$$e^{ax}y(x) = \int^x e^{at}q(t)\,dt + C$$

eli

$$y(x) = e^{-ax}\int^x e^{at}q(t)\,dt + Ce^{-ax}.$$

[2]Saadulla yhtälöllä on täsmälleen samat ratkaisut kuin alkuperäisellä yhtälöllä

Tämä yhtälö on ekvivalentti differentiaaliyhtälön $y' + ay = q(x)$ kanssa, joten olemme löytäneet kaikki ratkaisut. Huomaa, että ratkaisun lausekkeessa esiintyy vastaavan homogeeniyhtälön $y' + ay = 0$ yleinen ratkaisu Ce^{-ax}.

Yleisessä tapauksessa

$$y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$$

pyritään toimimaan samalla tavalla ja kerrotaan yhtälö puolittain funktiolla $\mu(x) \neq 0$. Saamme tällöin ekvivalentin yhtälön

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)p(x)y(x) = \mu(x)q(x).$$

Funktio μ halutaan valita siten, että

$$\mu(x)y'(x) + \mu(x)p(x)y(x) = \frac{d}{dx}\Big[\mu(x)y(x)\Big].$$

Tämä on voimassa jos ja vain jos

$$p(x)y(x)\mu(x) = y(x)\mu'(x),$$

eli joko $y(x) = 0$ tai $\mu'(x) = p(x)\mu(x)$. Jälkimmäinen yhtälö on separoituva, ja siitä saadaan

$$\frac{d}{dx}\left(\log \mu(x)\right) = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = p(x),$$

joten

$$\mu(x) = e^{\int^x p(t)\,dt + C}.$$

Koska riittää löytää yksi sopiva funktio μ, voidaan valita $C = 0$. Nyt siis jos valitsemme $\mu(x) = e^{\int^x p(t)\,dt}$, niin

$$\frac{d}{dx}\Big[\mu(x)y(x)\Big] = \mu(x)y'(x) + \mu(x)p(x)y(x) = \mu(x)q(x).$$

Siten

$$\mu(x)y(x) = \int^x \mu(t)q(t)\,dt + C,$$

eli

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int^x \mu(t)q(t)\,dt + C\right].$$

Sijoittamalla tähän funktion μ lausekkeen saamme lopulta kaavan

$$y(x) = e^{-\int^x p(t)\,dt}\left[\int^x e^{\int^t p(s)\,ds} q(t)\,dt + C\right].$$

Jos vielä liitämme tutkittavaan differentiaaliyhtälöön alkuehdon $y(x_0) = y_0$, niin ratkaisukaava saa muodon

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(t)\,dt}\left[\int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^t p(s)\,ds} q(t)\,dt + y_0\right].$$

Lause 2.4.4. *Lineaarisen yhtälön $y'(x) + p(x)y(x) = q(x)$, missä $p, q : \Delta \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia, kaikki ratkaisut saadaan kaavasta*

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \left[\int^x \mu(t)q(t)\,dt + C \right], \quad C \in \mathbb{R},$$

missä funktiota

$$\mu(x) = e^{\int^x p(t)\,dt}$$

kutsutaan yhtälön integroivaksi tekijäksi. Ratkaisufunktio $y = y(x)$ on määritelty koko välillä Δ.

Esimerkki 2.4.5. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y' - 2xy = x, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Nyt siis $p(x) = -2x$, $q(x) = x$ ja $\mu(x) = e^{\int_0^x -2t\,dt} = e^{-x^2}$. Siten alkuarvotehtävän yksikäsitteinen ratkaisu on

$$y(x) = e^{x^2} \left[\int_0^x e^{-t^2} t\,dt + 1 \right] = \frac{3}{2} e^{x^2} - \frac{1}{2}.$$

Lineaarisen yhtälön ratkaisukaavassa esiintyvät integraalit ovat joskus vaikeita laskea. Tällöin voidaan hyödyntää Lausetta 2.4.3, jonka mukaan kaikkien ratkaisujen määrääminen onnistuu heti kun tunnetaan yksikin ratkaisuista. Tämä yksittäinen ratkaisu puolestaan löytyy monesti "valistuneella arvauksella":

Lause 2.4.6. *Vakiokertoimiselle lineaariyhtälölle $y' + ay = q(x)$, $a \neq 0$, pätee*

(i) jos $q(x)$ on n. asteen polynomi, niin yhtälöllä on korkeintaan astetta n oleva polynomiratkaisu.

(ii) jos $q(x) = Ae^{bx}$, niin yhtälöllä on ratkaisu, joka on muotoa

$$y(x) = \begin{cases} Ke^{bx}, & \text{jos } b \neq -a, \\ Kxe^{bx}, & \text{jos } b = -a, \end{cases}$$

jollakin $K \in \mathbb{R}$.

(iii) jos $q(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, $\omega \neq 0$, niin yhtälöllä on ratkaisu, joka on muotoa

$$y(x) = K\cos(\omega x) + L\sin(\omega x)$$

joillakin $K, L \in \mathbb{R}$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 2.4.7. Ratkaistaan yhtälö

$$y' - 4y = e^{3x}. \tag{2.9}$$

Edellisen lauseen nojalla yhtälöllä on muotoa $y(x) = Ke^{3x}$ oleva ratkaisu. Nyt

$$\frac{d}{dx}(Ke^{3x}) - 4Ke^{3x} = -Ke^{3x},$$

joten funktio $x \mapsto Ke^{3x}$ on ratkaisu jos ja vain jos $K = -1$. Koska vastaavan homogeeniyhtälön $y' - 4y = 0$ kaikki ratkaisut ovat muotoa $y(x) = Ce^{4x}$, on yhtälön (2.9) kaikki ratkaisut esitettävissä muodossa

$$y(x) = Ce^{4x} - e^{3x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2.5 Eksaktit yhtälöt

Määritelmä 2.5.1. Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue ja $P, Q : D \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita. Differentiaaliyhtälö

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$$

on *eksakti*, jos on olemassa jatkuvasti differentioituva funktio $u : D \to \mathbb{R}$ (ts. u:n osittaisderivaatat[3] $\frac{\partial u}{\partial x}$ ja $\frac{\partial u}{\partial y}$ ovat jatkuvia alueessa D) siten, että

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y) \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y)$$

kaikilla $(x, y) \in D$.

Esimerkki 2.5.2. Yhtälö

$$y(x)^2 \cos x + 2y(x)y'(x) \sin x = 0$$

on eksakti, sillä funktiolle $u(x, y) = y^2 \sin x$ pätee $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \cos x$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y \sin x$.

Huomautus 2.5.3. Jos u on kahdesti jatkuvasti differentioituva, niin

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\Big) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Siten funktiot P ja Q ovat vahvasti sidoksissa toisiinsa.

Huomautus 2.5.4. Jos meillä on kaksi funktiota u_1 ja u_2, joille pätee $\frac{\partial u_1}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u_1}{\partial y} = Q$ ja $\frac{\partial u_2}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u_2}{\partial y} = Q$, niin on helppo nähdä, että $u_1 = u_2 + C$ jollakin vakiolla $C \in \mathbb{R}$.

[3] Tässä $u = u(x, y)$ ja $\frac{\partial u}{\partial x} = \partial_1 u$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \partial_2 u$

Eksaktin yhtälön ratkaiseminen

Olkoon yhtälö $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ eksakti ja $y:\Delta\to\mathbb{R}$ sen jokin ratkaisu. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big[u(x,y(x))\Big] &= \frac{\partial u}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial u}{\partial y}(x,y(x))y'(x)\\ &= P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)=0\end{aligned}$$

kaikilla $x\in\Delta$, joten on olemassa vakio $C\in\mathbb{R}$ siten, että $u(x,y(x))\equiv C$. Tämä on yhtälön $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ ratkaisu implisiittisessä muodossa.

Kääntäen, jos funktiolle $y:\Delta\to\mathbb{R}$ pätee $u(x,y(x))\equiv C$ jollakin $C\in\mathbb{R}$, niin

$$0=\frac{d}{dx}C=\frac{d}{dx}\Big[u(x,y(x))\Big]=P(x,y(x))+Q(x,y(x))y'(x)$$

eli y on yhtälön $P(x,y)+Q(x,y)y'=0$ ratkaisu. Näin ollen kaikki ratkaisut (katso Huomautus 2.5.4) saadaan ratkaisemalla yhtälö $u(x,y(x))\equiv C$, $C\in\mathbb{R}$.

Esimerkki 2.5.5. Esimerkin 2.5.2 perusteella funktio y on eksaktin yhtälön

$$y(x)^2\cos x+2y(x)y'(x)\sin x=0$$

ratkaisu jos ja vain jos $u(x,y)=y^2\sin x\equiv C$ jollakin $C\in\mathbb{R}$, ts.

$$y(x)=\pm\sqrt{\frac{C}{\sin x}},\quad n\pi<x<(n+1)\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

ja $C\geq 0$ jos n on parillinen ja $C\leq 0$ jos n on pariton; triviaaliratkaisu $y\equiv 0$, joka vastaa tapausta $C=0$, on tietenkin määritelty koko reaaliakselilla.

Ratkaisun olemassaolo

Olkoon $u:D\to\mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituva ja $(x_0,y_0)\in D$. Alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases}P(x,y)+Q(x,y)y'=0,\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{2.10}$$

on ratkaisu jos ja vain jos löytyy funktio $y:\,]x_0-\delta,x_0+\delta[\,\to\mathbb{R}$ siten, että $y(x_0)=y_0$ ja $u(x,y(x))=C_0$ kaikilla $x\in\,]x_0-\delta,x_0+\delta[$, missä $C_0=u(x_0,y_0)$. Implisiittifunktiolauseen nojalla tällainen funktio löytyy, jos $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$. Siten alkuarvotehtävällä (2.10) on ratkaisu ainakin jos

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)=Q(x_0,y_0)\neq 0.$$

Huomautus 2.5.6. Alkuarvotehtävällä (2.10) voi olla ratkaisu, vaikka $Q(x_0,y_0)=0$. Tässä tapauksessa on kuitenkin oltava myös $P(x_0,y_0)=0$, sillä muuten yhtälö ei voi toteutua pisteessä (x_0,y_0).

Esimerkki 2.5.7. Tarkastellaan jälleen eksaktia yhtälöä

$$y(x)^2 \cos x + 2y(x)y'(x) \sin x = 0.$$

Tällöin $Q(x,y) = 2y \sin x = 0$ jos ja vain jos $y = 0$ tai $x = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Siten alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} y^2 \cos x + 2yy' \sin x = 0, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

on ratkaisu ainakin kun $y_0 \neq 0$ ja $x_0 \neq n\pi$. Koska $y \equiv 0$ on yhtälön ratkaisu, myös alkuarvolla $y_0 = 0$ löytyy aina ratkaisu. Sen sijaan esimerkiksi alkuehdon $y(\pi) = 1$ toteuttavaa ratkaisua ei ole olemassa.

Eksaktiuden toteaminen

Sanotaan, että alue $D \subset \mathbb{R}^2$ *toteuttaa ehdon* $\mathcal{S}$, jos kaikilla $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$ suorakaide, jonka vastakkaiset kärjet ovat (x_1, y_1) ja (x_2, y_2) sisältyy joukkoon D.

Lause 2.5.8. *Olkoon $D \subset \mathbb{R}^2$ alue, joka toteuttaa ehdon $\mathcal{S}$ ja $P, Q : D \to \mathbb{R}$ jatkuvasti differentioituvia funktioita. Tällöin yhtälö $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ on eksakti jos ja vain jos*

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \text{kaikilla } (x,y) \in D. \tag{2.11}$$

Lisäksi jos $(\hat{x}, \hat{y}) \in D$, niin funktiolle

$$\begin{aligned} u(x,y) &:= \int_{\hat{x}}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{\hat{y}}^{y} Q(\hat{x},s)\,ds \\ &= \int_{\hat{x}}^{x} P(t,\hat{y})\,dt + \int_{\hat{y}}^{y} Q(x,s)\,ds \end{aligned}$$

pätee $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ ja $\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$ kaikilla $(x,y) \in D$.

Todistus. Oletetaan ensin, että (2.11) pätee, ja määritellään funktio u kaavalla

$$u(x,y) = \int_{\hat{x}}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{\hat{y}}^{y} Q(\hat{x},s)\,ds.$$

Tällöin analyysin peruslauseen nojalla $\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ ja

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \int_{\hat{x}}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)\,dt + Q(\hat{x},y) = \int_{\hat{x}}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(t,y)\,dt + Q(\hat{x},y) \\ &= Q(x,y) - Q(\hat{x},y) + Q(\hat{x},y) = Q(x,y); \end{aligned}$$

tässä käytettiin hyväksi paitsi oletusta $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, myös päättelyä

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h)-u(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\int_{\hat{x}}^{x} \frac{P(t,y+h)-P(t,y)}{h}\,dt + \frac{1}{h}\int_{y}^{y+h} Q(\hat{x}, s\,ds)\right] \\ &= \int_{\hat{x}}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(t,y)\,dt + Q(\hat{x},y),\end{aligned}$$

jonka yksityiskohdat jätetään lukijan tarkistettavaksi. Nyt on siis löydetty funktio u, jolla on Määritelmässä 2.5.1 vaaditut ominaisuudet, eli olemme todistaneet yhtälön $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ eksaktiksi.

Vastaavasti, jos määritellään

$$v(x,y) = \int_{\hat{x}}^{x} P(t,\hat{y})\,dt + \int_{\hat{y}}^{y} Q(x,s)\,ds,$$

niin samaan tapaan kuin edellä nähdään, että $\dfrac{\partial v}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ ja $\dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$. Näin ollen $u(\hat{x},\hat{y}) = v(\hat{x},\hat{y}) = 0$ ja $\dfrac{\partial(u-v)}{\partial x} = \dfrac{\partial(u-v)}{\partial y} = 0$, joten $u = v$. Tämä todistaa lauseessa esitetyt kaksi tapaa määritellä funktio u yhtäpitäviksi.

Jos oletamme kääntäen, että yhtälö $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ on eksakti, niin määritelmän mukaan löytyy jatkuvasti differentioituva funktio $u : D \to \mathbb{R}$, jolle $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$. Tällöin

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\Big) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

eli ehto (2.11) on näillä oletuksilla myös välttämätön. □

Esimerkki 2.5.9. a) Ratkaistaan yhtälö

$$2x^2yy' + 2xy^2 + 1 = 0.$$

Tässä $P(x,y) = 2xy^2 + 1$, $Q(x,y) = 2x^2y$ ja $D = \mathbb{R}^2$. Yhtälö on eksakti, sillä

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 4xy = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Lisäksi

$$\begin{aligned}u(x,y) &= \int_{\hat{x}}^{x} P(t,y)\,dt + \int_{\hat{y}}^{y} Q(\hat{x},s)\,ds = \int_{\hat{x}}^{x} 2y^2t + 1\,dt + \int_{\hat{y}}^{y} 2\hat{x}^2 s\,ds \\ &= y^2x^2 + x - \hat{x} - \hat{x}^2\hat{y}^2.\end{aligned}$$

Koska riittää löytää jokin funktio u , jolle $\frac{\partial u}{\partial x} = P$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$, niin voidaan valita $(\hat{x},\hat{y}) = (0,0)$. Siten

$$u(x,y) = y^2x^2 + x$$

ja y on tutkittavan differentiaaliyhtälön ratkaisu jos ja vain jos $y(x)^2x^2 + x = C$ jollakin $C \in \mathbb{R}$, toisin sanoen,

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{C-x}{x^2}}, \quad x \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Ratkaistaan yhtälö

$$y\cos x + 2xe^y + (\sin x + x^2e^y + 2)y' = 0.$$

Tässä esimerkissä $P(x,y) = y\cos x + 2xe^y$ ja $Q(x,y) = \sin x + x^2e^y + 2$, sekä $D = \mathbb{R}^2$. Koska

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \cos x + 2xe^y = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

niin yhtälö on eksakti, eli on olemassa jatkuvasti differentioituva $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ siten, että

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} & = P = y\cos x + 2xe^y, \\ \frac{\partial u}{\partial y} & = Q = \sin x + x^2e^y + 2. \end{cases}$$

Ensimmäisen yhtälön perusteella u on välttämättä muotoa

$$u(x,y) = y\sin x + x^2e^y + h(y)$$

jollekin jatkuvasti derivoituvalle funktiolle h. Derivoimalla tämä muuttujan y suhteen saadaan

$$Q(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \sin x + x^2e^y + h'(y),$$

mikä toteutuu jos ja vain jos $h'(y) = 2$ eli $h(y) = 2y + C$. Valitsemalla $C = 0$ saamme siis

$$u(x,y) = y\sin x + x^2e^y + 2y.$$

Näin ollen tutkittavan yhtälön ratkaisut ovat täsmälleen ehdon

$$y(x)\sin x + x^2e^{y(x)} + 2y(x) = C$$

toteuttavat funktiot y.

2.6 Integroiva tekijä

Jos yhtälö $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ ei ole eksakti, niin joissakin tilanteissa se voidaan kertoa puolittain funktiolla $\mu : D \to \mathbb{R}$ niin, että saatu uusi yhtälö on eksakti.

Määritelmä 2.6.1. Funktiota $\mu : D \to \mathbb{R}$ sanotaan yhtälön $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ *integroivaksi tekijäksi*, jos

(i) $\mu(x,y) \neq 0$ kaikilla $(x,y) \in D$,

(ii) yhtälö

$$\mu(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)Q(x,y)y' = 0$$

on eksakti.

Yllä olevan määritelmän ehto (i) takaa sen, että kerrottu yhtälö ja alkuperäinen yhtälö ovat ekvivalentit. Integroivaa tekijää haetaan yleensä sopivilla yritteillä, esimerkiksi muodossa

$$\begin{aligned}
\mu(x,y) &= \mu(x),\\
\mu(x,y) &= \mu(y),\\
\mu(x,y) &= \mu(x+y),\\
\mu(x,y) &= \mu_1(x)\mu_2(y), \ \ldots
\end{aligned}$$

Eräissä erikoistapauksissa integroiva tekijä löytyy varmasti:

Lause 2.6.2. *Jos $Q(x,y) \neq 0$ kaikilla $(x,y) \in D$, D toteuttaan ehdon $\mathcal{S}$ ja funktio*

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)$$

riippuu vain muuttujasta x, $\varphi(x,y) = \varphi(x)$, niin

$$\mu(x,y) = e^{\int \varphi(x)\,dx}$$

on yhtälön $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ integroiva tekijä. Vastaavasti, jos $P(x,y) \neq 0$ kaikilla $(x,y) \in D$ ja funktio

$$\psi(x,y) = \frac{1}{P(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)$$

riippuu vain muuttujasta y, $\psi(x,y) = \psi(y)$, niin

$$\mu(x,y) = e^{-\int \psi(y)\,dy}$$

on yhtälön $P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$ integroiva tekijä.

TODISTUS. Suora lasku, joka jää lukijalle harjoitustehtäväksi. □

Esimerkki 2.6.3. Tarkastellaan yhtälöä

$$3xy + y^2 + (x^2 + xy)y' = 0.$$

Merkitään $P(x,y) = 3xy + y^2$ ja $Q(x,y) = x^2 + xy$. Tällöin

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 3x + 2y \neq 2x + y = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y),$$

joten yhtälö ei ole eksakti. Jos lisäämme rajoitteet $x \neq 0$ ja $x \neq -y$, niin $Q(x,y) \neq 0$ ja

$$\frac{1}{Q(x,y)}\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{1}{x^2+xy}(3x+2y-2x-y) = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$$

riippuu vain muuttujasta x. Siten edellisen lauseen nojalla

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x}\,dx} = |x|$$

on yhtälön integroiva tekijä alueissa, joissa $x \neq 0$ ja $x \neq -y$. Saamme siten eksaktit yhtälöt

$$3x^2y + xy^2 + (x^3 + x^2y)y' = 0, \quad x > 0$$

ja

$$-(3x^2y + xy^2 + (x^3 + x^2y)y') = 0, \quad x < 0.$$

Nämä voidaan yhdistää yhtälöksi

$$3x^2y + xy^2 + (x^3 + x^2y)y' = 0,$$

joka on hyvin määritelty myös kun $x = 0$. Tämän ratkaisuiksi saadaan

$$x^3y(x) + \frac{1}{2}x^2y(x)^2 = C.$$

Lukijalle jää harjoitustehtävänä pohdittavaksi onko tässä myös alkuperäisen yhtälön ratkaisujen joukko.

2.7 Olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen todistus

Tässä osiossa todistamme olemassaolo- ja yksikäsitteisyyslauseen ensimmäisen kertaluvun normaalimuotoisille yhtälöille:

Lause 2.7.1. *Oletetaan, että $f : D \to \mathbb{R}$ ja sen osittaisderivaatta $\frac{\partial f}{\partial y} : D \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia alueessa D ja $(x_0, y_0) \in D$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.12}$$

on olemassa välillä $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ määritelty ratkaisu.

Lisäksi jos $y_1 : \Delta_1 \to \mathbb{R}$ ja $y_2 : \Delta_2 \to \mathbb{R}$ ovat alkuarvotehtävän (2.12) ratkaisuja, niin $y_1(x) = y_2(x)$ kaikilla $x \in \Delta_1 \cap \Delta_2$.

Aloitamme todistuksen Gronwallin lemmaksi kutsutulla aputuloksella:

Lemma 2.7.2. *Jos $g : \Delta \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva funktio siten, että*

$$|g'(x)| \leq Kg(x) \qquad \textit{kaikilla } x \in \Delta,$$

ja $\hat{x} \in \Delta$, niin

$$g(x) \leq g(\hat{x})e^{K|x-\hat{x}|}.$$

TODISTUS. Oletetaan ensin, että $g(x) > 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Tällöin oletuksen perusteella

$$\left|\frac{d}{dx}\Big[\log g(x)\Big]\right| = \frac{|g'(x)|}{g(x)} \leq K,$$

joten

$$\log g(x) - \log g(\hat{x}) = \int_{\hat{x}}^{x} \frac{d}{dt} \log g(t)\, dt \leq K|x - \hat{x}|.$$

Siten

$$\frac{g(x)}{g(\hat{x})} = e^{\log g(x) - \log g(\hat{x})} \leq e^{K|x-\hat{x}|},$$

eli $g(x) \leq g(\hat{x})e^{K|x-\hat{x}|}$.

Jos tiedetään pelkästään, että $g(x) \geq 0$, niin soveltamalla yllä olevaa päättelyä funktioon $g_\varepsilon(x) := g(x) + \varepsilon$ saadaan

$$g_\varepsilon(x) \leq g_\varepsilon(\hat{x})e^{K|x-\hat{x}|}$$

eli

$$g(x) \leq g(\hat{x})e^{K|x-\hat{x}|} + \varepsilon e^{K|x-\hat{x}|} - \varepsilon.$$

Väite seuraa tästä kun $\varepsilon \to 0$. □

Yksikäsitteisyyden todistus:

Todistuksen yksinkertaistamiseksi tehdään pieni lisäoletus: on olemassa vakio $L > 0$ siten, että

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq L \qquad \text{kaikilla } (x, y) \in D;$$

ilman tätä oletusta tehty todistus löytyy mm. Kekäläisen luentomonisteesta [6].

Olkoot $y_1, y_2 : \Delta \to \mathbb{R}$ alkuarvotehtävän (2.12) kaksi ratkaisua. Sovelletaan Lemmaa 2.7.2 funktioon

$$g(x) = (y_1(x) - y_2(x))^2.$$

Funktio g on jatkuvasti derivoituva ja väliarvolauseen avulla saamme

$$\begin{aligned}
|g'(x)| &= |2(y_1(x) - y_2(x))(y_1'(x) - y_2'(x))| \\
&= |2(y_1(x) - y_2(x))(f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x)))| \\
&\leq 2|y_1(x) - y_2(x)|^2 \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)\right| \\
&\leq 2Lg(x).
\end{aligned}$$

Siten Lemman 2.7.2 nojalla, kun valitaan $\hat{x} = x_0$,

$$g(x) \leq g(x_0)e^{2L|x-x_0|}$$

eli

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq e^{L|x-x_0|}|y_1(x_0) - y_2(x_0)| = e^{L|x-x_0|}|y_0 - y_0| = 0.$$

Näin ollen $y_1(x) = y_2(x)$ kaikilla $x \in \Delta$. □

Olemassaolon todistus:

Jos $y : \Delta \to \mathbb{R}$ on jatkuvasti derivoituva, niin

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} y'(t)\,dt.$$

Siten funktio y on alkuarvotehtävän (2.12) ratkaisu jos ja vain jos

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \qquad \text{kaikilla } x \in \Delta. \tag{2.13}$$

Olkoon $a, b > 0$ siten, että $I := [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset D$ ja merkitään

$$M = \max\{|f(x,y)| : (x,y) \in I\}, \qquad L = \max\left\{ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| : (x,y) \in I\right\}.$$

Määritellään funktiojono (y_n) seuraavasti. Asetetaan ensin

$$y_0(x) = y_0 \qquad \text{(vakiofunktio)}$$

ja

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt.$$

Selvästi y_1 on jatkuva ja

$$|y_1(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\,dt \le M|x - x_0|$$

kaikilla $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$. Merkitään $\delta := \min\{a, b/M\}$, $\Delta :=]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ja määritellään induktiivisesti

$$y_n : \Delta \to \mathbb{R}, \quad y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Induktiolla nähdään, että $(x, y_n(x)) \in I$ kaikilla $x \in \Delta$ ja $n = 0, 1, 2, \ldots$ Nimittäin jos $(x, y_k(x)) \in I$ kaikilla $x \in \Delta$, niin

$$|y_{k+1}(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))\,dt| \le \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t))|\,dt \le M|x - x_0| \le M\delta \le b$$

eli $y_{k+1}(x) \in [y_0 - b, y_0 + b]$ kaikilla $x \in \Delta \subset [x_0 - a, x_0 + a]$. Lisäksi väite on selvästi totta tapauksessa $n = 0$. Erityisesti tiedämme nyt, että funktiot y_n ovat järkevästi määriteltyjä ja jatkuvia.

Seuraavaksi näytämme, että funktiojono (y_n) suppenee tasaisesti. Koska

$$y_n = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}),$$

niin riittää osoittaa, että funktiosarja $\sum(y_k - y_{k-1})$ suppenee tasaisesti. Tätä varten osoitamme induktiolla, että

$$|y_k(x) - y_{k+1}(x)| \leq \frac{ML^k|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{ML^k\delta^{k+1}}{(k+1)!} \tag{2.14}$$

kaikilla $x \in \Delta$; jos näin on, niin jonon (y_n) tasainen suppeneminen seuraa Weierstrassin kriteeriosta majoranttisarjan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{ML^k\delta^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{M}{L}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(L\delta)^k}{k!}$$

suppenemisen nojalla.

Arvion (2.14) todistamisen osalta huomataan ensin, että väite on jo todistettu yllä tapauksessa $k = 0$. Oletetaan siis nyt, että (2.14) on voimassa jollakin $k \geq 0$, jolloin väliarvolauseen nojalla

$$\begin{aligned}
|y_{k+1}(x) - y_{k+2}(x)| &= |\int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, y_{k+1}(t))\,dt| \\
&\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k+1}(t))|\,dt \\
&\leq L\int_{x_0}^{x} |y_k(t) - y_{k+1}(t)|\,dt \\
&\leq L\int_{x_0}^{x} \frac{ML^k|t-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}\,dt = \frac{ML^{k+1}}{(k+1)!}\int_{x_0}^{x}|t-x_0|^{k+1}\,dt \\
&= \frac{ML^{k+1}}{(k+1)!}\frac{1}{k+2}|x-x_0|^{k+2} = \frac{ML^{k+1}|x-x_0|^{k+2}}{(k+2)!}.
\end{aligned}$$

Näin ollen (2.14) on totta kaikilla $k = 0, 1, 2, \ldots$

Koska funktiot y_n ovat jatkuvia ja suppenevat tasaisesti, on rajafunktio

$$y(x) := \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

myös jatkuva. Lisäksi koska $f(t, y_n(t)) \to f(t, y(t))$ tasaisesti kun $t \in \Delta$ (tämä johtuu siitä, että $y_n \to y$ tasaisesti ja f on tasaisesti jatkuva kompaktissa joukossa I), niin

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt.$$

Näin ollen y toteuttaa integraaliyhtälön (2.13) ja on siten alkuarvotehtävän (2.12) ratkaisu. $\square$

Luku 3

Toisen kertaluvun yhtälöistä

Tässä luvussa tarkastelemme toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöitä. Rajoitumme kuitenkin lähinnä lineaarisiin yhtälöihin sekä sopivalla muuttujanvaihdolla ensimmäiseen kertalukuun palautettavissa oleviin yhtälöihin.

3.1 Olemassaolo- ja yksikäsitteisyys

Tarkastellaan toisen kertaluvun normaalimuotoista yhtälöä

$$y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \tag{3.1}$$

missä $f : D \to \mathbb{R}$ on jatkuva, $D \subset \mathbb{R}^3$ alue. Merkitsemällä $z(x) = y'(x)$, yhtälö (3.1) voidaan esittää yhtälöparina

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = f(x, y, z). \end{cases}$$

Tämä on erikoistapaus ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöparista

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2), \end{cases}$$

joka usein esitetään vektorimuodossa

$$Y'(x) = F(x, Y(x));$$

tässä $Y(x) = (y_1(x), y_2(x))$ ja $F(x) = (f_1(x), f_2(x)) : D \to \mathbb{R}^2$. Normaalimuotoisille ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöpareille alkuarvotehtävän ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys voidaan todistaa lähes samalla tavalla kuin edellä Lauseessa 2.7.1, ja tämän tuloksen nojalla saamme

Lause 3.1.1. *Oletetaan, että $f : D \to \mathbb{R}$ ja sen osittaisderivaatat $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}$ ovat jatkuvia alueessa $D \subset \mathbb{R}^3$ ja $(x_0, y_0, y_1) \in D$. Tällöin on olemassa $\delta > 0$ siten, että* *alkuarvotehtävällä*

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases} \tag{3.2}$$

on olemassa välillä $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ *määritelty ratkaisu* y*. Lisäksi jos* $y_1 : \Delta_1 \to \mathbb{R}$ *ja* $y_2 : \Delta_2 \to \mathbb{R}$ *ovat alkuarvotehtävän (3.2) ratkaisuja, niin* $y_1(x) = y_2(x)$ *kaikilla* $x \in \Delta_1 \cap \Delta_2$.

Huomautus 3.1.2. Toisen kertaluvun yhtälön $y'' = f(x, y, y')$ ratkaisujen y_1 ja y_2 kuvaajat voivat hyvin leikata toisensa. Sen sijaan funktioiden $x \mapsto (y_1(x), y_1'(x))$ ja $x \mapsto (y_2(x), y_2'(x))$ graafit (jotka siis ovat $\mathbb{R}^3$:n osajoukkoja) ovat joko erillisiä tai ne yhtyvät.

3.2 Ensimmäiseen kertalukuun palautuvia yhtälöitä

A. Muotoa $y'' = f(x, y')$ olevat yhtälöt

Jos merkitään $z(x) := y'(x)$, jolloin $y''(x) = z'(x)$, niin saamme tässä tapauksessa ensimmäisen kertaluvun yhtälön $z' = f(x, z)$, jossa tuntemattomana on funktio $z(x)$.

Esimerkki 3.2.1. Yhtälö

$$y'' + \frac{1}{x}y' = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

on muotoa $y'' = f(x, y')$. Merkitsemällä $z = y'$ saamme z:lle yhtälön

$$z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

joka on ensimmäisen kertaluvun separoituva yhtälö. Sen ratkaisut ovat muotoa

$$z(x) = 1 + \frac{C_1}{x}, \quad C_1 \in \mathbb{R},$$

josta saamme

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int z(x)\,dx = \int 1 + \frac{C_1}{x}\,dx = x + C_1 \log x + C_2,$$

missä $x > 0$ ja $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

B. Muotoa $y'' = f(y, y')$ olevat yhtälöt

Olkoon $y : \Delta \to \mathbb{R}$ yhtälön $y'' = f(y, y')$ ratkaisu, jolle $y'(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Tällöin $y'(x) > 0$ tai $y'(x) < 0$ kaikilla $x \in \Delta$, joten y on aidosti monotoninen. Siten on olemassa käänteisfunktio $y^{-1} : y(\Delta) \to \Delta$. Merkitään

$$z(t) := y'(y^{-1}(t)), \quad t \in y(\Delta).$$

Tällöin

$$z'(t) = y''(y^{-1}(t))\frac{d}{dt}\left[y^{-1}(t)\right] = f(y(y^{-1}(t)), y'(y^{-1}(t)))\frac{1}{y'(y^{-1}(t))} = f(t, z(t))\frac{1}{z(t)}$$

eli funktio $z = z(t)$ toteuttaa yhtälön $z' = \dfrac{f(t,z)}{z}$.

Kääntäen, jos $z' = \dfrac{f(t,z)}{z}$, $z \neq 0$, ja jos y toteuttaa yhtälön $y'(x) = z(y(x))$, niin

$$y'' = z'(y(x))y'(x) = \frac{f(y(x), z(y(x)))}{z(y(x))}y'(x) = f(y(x), y'(x)).$$

Tällä menetelmällä saadaan (ainakin) yhtälön $y'' = f(y, y')$ kaikki ne ratkaisut, joille $y'(x) \neq 0$.

Esimerkki 3.2.2. a) Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' = \frac{1 + (y')^2}{y}, \quad y \neq 0.$$

Tämä on tyyppiä $y'' = f(y, y')$, joten edellä tehdyn päättelyn nojalla päädymme tutkimaan yhtälöä

$$z' = \frac{f(t,z)}{z} = \frac{1+z^2}{tz} = \frac{1}{t}\frac{1+z^2}{z},$$

joka separoituu; sen ratkaisut ovat muotoa

$$z(t) = \pm\sqrt{(C_1 t)^2 - 1}, \qquad t \in \mathbb{R} \setminus [-\tfrac{1}{|C_1|}, \tfrac{1}{|C_1|}],\ C_1 \neq 0.$$

Alkuperäisen yhtälön ratkaisut saadaan nyt ratkaisemalla yhtälö $y' = z(y)$ eli

$$y'(x) = \pm\sqrt{(C_1 y(x))^2 - 1}.$$

Myös tämä yhtälö separoituu. Sillä on erikoisratkaisut $y = \pm\frac{1}{C_1}$ (jotka *eivät* toteuta alkuperäistä yhtälöä), muut ratkaisut saadaan kaavasta

$$\pm\int \frac{1}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}}\,dy = \int 1\,dx.$$

Muuttujanvaihdolla $C_1 y = s$ saamme

$$\pm\int \frac{1}{\sqrt{(C_1 y)^2 - 1}}\,dy = \pm\frac{1}{C_1}\int \frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}}\,ds = \frac{1}{C_1}\operatorname{arcosh} s = \frac{1}{C_1}\operatorname{arcosh}(C_1 y),$$

joten tämä kaava johtaa ratkaisuihin

$$y(x) = \frac{1}{C_1}\cosh(C_1 x + C_1 C_2), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'' = y'e^y, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Yhtälön $z' = \dfrac{f(t,z)}{z} = \dfrac{ze^t}{z} = e^t$ ratkaisut ovat $z(t) = e^t + C_1$. Funktio y saadaan siten ratkaisemalla separoituva yhtälö

$$y' = e^y + C_1.$$

Tällä yhtälöllä on erikoisratkaisut $y = \log C_1$ (jos $C_1 > 0$) ja muut ratkaisut saadaan kaavasta

$$\int \frac{1}{e^y + C_1}\, dy = \int 1\, dx = x + C_2.$$

Vasemman puolen integraalin laskeminen helpottuu merkittävästi, kun huomataan, että alkuehtojen perusteella

$$1 = y'(0) = z(y(0)) = z(0) = e^0 + C_1 = 1 + C_1,$$

eli $C_1 = 0$. Siten saamme yhtälön

$$-e^{-y(x)} = x + C_2,$$

josta seuraa

$$y(x) = \log \frac{1}{-x - C_2}.$$

Koska $y(0) = 0$, on $C_2 = -1$, ja siten alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y(x) = \log \frac{1}{1-x}, \qquad x \in \left]-\infty, 1\right[.$$

3.3 Toisen kertaluvun lineaarinen yhtälö

Määritelmä 3.3.1. Toisen kertaluvun normaalimuotoinen differentiaaliyhtälö on *lineaarinen*, jos se on muotoa

$$y''(x) + p(x)y'(x) + r(x)y(x) = q(x),$$

missä $p, q, r : \Delta \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia. Yhtälö on *homogeeninen*, jos $q(x) \equiv 0$ ja *vakiokertoiminen*, jos p ja r ovat vakiofunktioita.

Huomautus 3.3.2. Samaan tapaan kuin ensimmäisen kertaluvun tapauksessa voidaan osoittaa, että alkuarvotehtävällä

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + r(x)y = q(x), \\ y(x_0) = y_0, \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

on olemassa yksikäsitteinen *koko välillä* Δ määritelty ratkaisu $y : \Delta \to \mathbb{R}$.

3.3.1 Homogeeniyhtälön ratkaiseminen

Määritelmä 3.3.3. Funktiot $u, v : \Delta \to \mathbb{R}$ ovat *lineaarisesti riippuvia* (LD), jos on olemassa vakiot $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, joista ainakin toinen on nollasta eroava siten, että

$$C_1 u(x) + C_2 v(x) = 0 \qquad \text{kaikilla } x \in \Delta.$$

Muussa tapauksessa funktiot u ja v ovat *lineaarisesti riippumattomia* (LI).

Huomautus 3.3.4. Funktiopari $\{u, v\}$ on LD jos ja vain jos $u = Cv$ jollakin $C \in \mathbb{R}$ tai $v = Cu$ jollakin $C \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 3.3.5. Funktiot $u(x) = e^x$ ja $v(x) = e^{2x}$ ($\Delta = \mathbb{R}$) ovat LI: ehto

$$0 = C_1 u(x) + C_2 v(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} = e^x (C_1 + C_2 e^x)$$

on voimassa kaikilla x jos ja vain jos $C_1 = -C_2 e^x$. Erityisesti siis termin $-C_2 e^x$ on oltava vakio, mikä on mahdollista ainoastaan jos $C_2 = 0$. Tällöin myös $C_1 = 0$.

Määritelmä 3.3.6. Jatkuvasti derivoituvien funktioiden $y_1, y_2 : \Delta \to \mathbb{R}$ *Wronskin determinantti* on jatkuva funktio

$$W = W(y_1, y_2) : \Delta \to \mathbb{R},\ W(x) = \det \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix} = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x).$$

Lemma 3.3.7. *Jos $y_1, y_2 : \Delta \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvasti derivoituvia ja $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jollakin $x_0 \in \Delta$, niin $\{y_1, y_2\}$ on LI.*

Todistus. Jos $\{y_1, y_2\}$ olisi LD, niin $y_1 = Cy_2$ jollakin $C \in \mathbb{R}$ tai $y_2 = Cy_1$ jollakin $C \in \mathbb{R}$; ilman yleisyyden menetystä voimme olettaa, että $y_1 = Cy_2$. Tällöin

$$W(y_1, y_2)(x) = y_1(x) y_2'(x) - y_2(x) y_1'(x) = C y_2(x) y_2'(x) - C y_2(x) y_2'(x) = 0,$$

mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □

Huomautus 3.3.8. Käänteinen tulos ei yleisesti ottaen pidä paikkaansa, eli ehdosta $W(x) = 0$ kaikilla $x \in \Delta$ *ei* seuraa, että $\{y_1, y_2\}$ olisi LD. Esimerkkinä tästä ovat funktiot $y_1(x) = x^2$ ja

$$y_2(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$$

Kuitenkin pätee:

Lause 3.3.9. *Jos $y_1, y_2 : \Delta \to \mathbb{R}$ ovat homogeeniyhtälön $y'' + p(x) y' + r(x) y = 0$ ratkaisuja, niin $\{y_1, y_2\}$ on LI jos ja vain jos $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jollakin $x_0 \in \Delta$.*

Todistus. Riittää osoittaa, että jos $\{y_1, y_2\}$ on LI, niin $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ jollakin $x_0 \in \Delta$. Valitaan ensin $x_0 \in \Delta$ siten, että $y_2(x_0) \neq 0$; tällainen piste on olemassa, sillä jos $y_2 \equiv 0$, niin $\{y_1, y_2\}$ on LD.

Suoralla laskulla (joka jää lukijalle harjoitustehtäväksi) nähdään, että Wronskin determinantti toteuttaa ensimmäisen kertaluvun lineaarisen yhtälön

$$W' + p(x)W = 0,$$

joten

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)\,dt}.$$

Siten jos $W(x_0) = 0$, niin $W(x) = 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Erityisesti olisi

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\right] = \frac{y_2(x)y_1'(x) - y_1(x)y_2'(x)}{y_2(x)^2} = -\frac{W(x)}{y_2(x)^2} = 0$$

jokaisella välin Δ osavälillä Δ', jolla $y_2(x) \neq 0$. Tällaisilla väleillä siis osamäärä $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ olisi vakio eli $y_1(x) = Cy_2(x)$ jollakin $C \in \mathbb{R}$. Tässä vakio C voisi periaatteessa riippua osavälistä Δ', mutta Lauseen 3.1.1 yksikäsitteisyyspuoli takaa, että näin ei ole. Siten $y_1(x) = Cy_2(x)$ kaikilla $x \in \Delta$, mistä seuraa, että $\{y_1, y_2\}$ on LD vastoin oletusta. Näin ollen $W(x_0) \neq 0$ ja samalla nähtiin, että itse asiassa $W(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \Delta$. □

Seuraus 3.3.10. *Jos $y_1, y_2 : \Delta \to \mathbb{R}$ ovat homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + r(x)y = 0$ lineaarisesti riippumattomia ratkaisuja, niin funktiolla y_2 on nollakohta funktion y_1 kahden nollakohdan välissä.*

Todistus. Tehdään antiteesi: $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$, mutta $y_2(x) \neq 0$ kaikilla $x \in]x_1, x_2[$. Huomataan ensin, että $y_2(x_1) \neq 0 \neq y_2(x_2)$, sillä muuten Wronskin determinantti häviäisi näissä pisteissä. Näin ollen funktio $h : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ on hyvin määritelty ja $h(x_1) = h(x_2) = 0$. Rollen lauseen nojalla on olemassa $\xi \in]x_1, x_2[$ siten, että $h'(\xi) = 0$, eli

$$0 = h'(\xi) = -\frac{W(\xi)}{y_2(\xi)^2}.$$

Siten $W(\xi) = 0$ ja $\{y_1, y_2\}$ LD edellisen lauseen (todistuksen) nojalla, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □

Määritelmä 3.3.11. Kahdesti jatkuvasti derivoituvat funktiot $y_1, y_2 : \Delta \to \mathbb{R}$ muodostavat homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + r(x)y = 0$ *ratkaisukannan*[1], jos y_1 ja y_2 ovat yhtälön ratkaisuja ja jokaiselle ratkaisulle $y : \Delta \to \mathbb{R}$ on olemassa vakiot $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) \qquad \text{kaikilla } x \in \Delta.$$

[1]Joissakin lähteissä ratkaisukantaa kutsutaan myös nimellä *perusjärjestelmä*

Lause 3.3.12. *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä homogeeniyhtälön* $y'' + p(x)y' + r(x)y = 0$ *ratkaisuille* y_1 *ja* y_2*:*

(i) Funktiot y_1 *ja* y_2 *muodostavat yhtälön ratkaisukannan.*

(ii) $\{y_1, y_2\}$ *on LI.*

(iii) $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ *jollakin* $x_0 \in \Delta$*.*

(iv) $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ *kaikilla* $x \in \Delta$*.*

Todistus. 1° Olkoon $\{y_1, y_2\}$ homogeeniyhtälön ratkaisukanta, ja osoitetaan, että funktiopari $\{y_1, y_2\}$ on LI:

Tehdään antiteesi, $\{y_1, y_2\}$ on LD. Tällöin, ilman yleisyyden menetystä, voimme olettaa, että $y_1 = Cy_2$ jollakin $C \in \mathbb{R}$. Koska $\{y_1, y_2\}$ on ratkaisukanta, niin kaikki homogeeniyhtälön ratkaisut voidaan lausua muodossa

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) = (C_1C + C_2)y_2(x) = C'y_2(x).$$

Olkoon nyt $x_0 \in \Delta$. Jos $y_2(x_0) = 0$, niin yhtälön $y'' + p(x)y' + r(x)y = 0$ alkuehdot $y(x_0) = y'(x_0) = 1$ toteuttavaa ratkaisua (jollainen on olemassa Lauseen 3.1.1 nojalla) ei voida esittää muodossa $y = C'y_2$. Jos taas $y_2(x_0) \neq 0$, niin alkuehdot $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 1$ toteuttavaa ratkaisua ei voida esittää muodossa $y = C'y_2$. Siten $\{y_1, y_2\}$ ei ole ratkaisukanta, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

2° Oletetaan, että $W(x_0) \neq 0$ jollakin $x_0 \in \Delta$, ja osoitetaan, että $\{y_1, y_2\}$ on ratkaisukanta:

Olkoon y mielivaltainen yhtälön $y''+p(x)y'+r(x)y = 0$ ratkaisu. Lauseen 3.3.9 todistuksen perusteella $W(y_1, y_2)(x) = C\mu(x)$, $W(y, y_1)(x) = C_1\mu(x)$ ja $W(y, y_2)(x) = C_2\mu(x)$ joillakin vakioilla $C, C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, missä

$$\mu(x) = e^{-\int p(x)\,dx}$$

Siten

$$\begin{aligned}
(C_1y_2(x) - C_2y_1(x))\mu(x) &= W(y, y_1)(x)y_2(x) - W(y, y_2)(x)y_1(x) \\
&= \Big[y(x)y_1'(x) - y_1(x)y'(x)\Big]y_2(x) \\
&\quad - \Big[y(x)y_2'(x) - y_2(x)y'(x)\Big]y_1(x) \\
&= \Big[y_2(x)y_1'(x) - y_1(x)y_2'(x)\Big]y(x) = -W(y_1, y_2)(x)y(x) \\
&= -C\mu(x)y(x).
\end{aligned}$$

Koska $\mu(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \Delta$ ja oletuksen perusteella $C\mu(x_0) = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, niin myös $C \neq 0$. Siten saamme edellisestä yhtälöstä

$$y(x) = \frac{C_2}{C}y_1(x) - \frac{C_1}{C}y_2(x).$$

Näin ollen $\{y_1, y_2\}$ on ratkaisukanta. □

Esimerkki 3.3.13. Funktiot $y_1(x) = \sin x$ ja $y_2(x) = \cos x$ ovat yhtälön $y'' + y = 0$ ratkaisuja ja

$$W(y_1, y_2)(x) = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siten $\{y_1, y_2\}$ muodostaa ratkaisukannan eli yhtälön $y'' + y = 0$ kaikki ratkaisut ovat muotoa

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Lause 3.3.14. *Yhtälöllä $y'' + p(x)y' + r(x)y = 0$ on olemassa ratkaisukanta.*

Todistus. Olkoot y_1 ja y_2 yhtälön $y'' + p(x)y' + r(x)y = 0$ ratkaisuja alkuarvoilla $y_1(x_0) = 1$, $y_1'(x_0) = 0$ ja $y_2(x_0) = 0$, $y_2'(x_0) = 1$, missä x_0 on jokin välin Δ piste. Tällöin $W(y_1, y_2)(x_0) = 1 \neq 0$, joten väite seuraa Lauseesta 3.3.12. □

3.3.2 Ratkaisukannan löytäminen kertaluvun pudotuksella

Oletetaan, että y_1 on homogeeniyhtälön

$$y'' + p(x)y' + r(x)y = 0 \tag{3.3}$$

ratkaisu siten, että $y_1(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Etsitään toista lineaarisesti riippumatonta ratkaisua y_2 muodossa $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Tällöin suoralla laskulla nähdään, että y_2 on yhtälön (3.3) ratkaisu jos ja vain jos

$$v''y_1 + (2y_1' + p(x)y_1)v' + \underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + r(x)y_1)}_{=0} v = 0$$

eli

$$v'' + s(x)v' = 0,$$

missä

$$s(x) := 2\frac{y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x).$$

Tämä yhtälö toteutuu jos $v'(x) = e^{-\int s(x)\,dx}$, mistä saadaan

$$v(x) = \int^x \left(e^{-\int^t s(r)\,dr}\right) dt.$$

Nyt on löydetty yhtälön (3.3) ratkaisukanta, sillä

$$\begin{aligned} W(y_1, y_2)(x) &= \det \begin{bmatrix} y_1(x) & v(x)y_1(x) \\ y_1'(x) & v'(x)y_1(x) + v(x)y_1'(x) \end{bmatrix} = v'(x)y_1(x)^2 \\ &= e^{-\int s(x)\,dx} y_1(x)^2 \neq 0 \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \Delta$ oletuksen $y_1(x) \neq 0$ perusteella.

Esimerkki 3.3.15. Yhtälöllä

$$y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0, \quad x \neq 0$$

on ratkaisu $y_1(x) = x$ (joka löydetään kokeilemalla/arvaamalla). Haetaan toista ratkaisua y_2 muodossa $y_2(x) = v(x)x$, jolloin $y_2'(x) = v'(x)x + v(x)$ ja $y_2'' = v''(x)x + 2v'(x)$. Siten

$$y_2'' - \frac{1}{x}y_2' + \frac{1}{x^2}y_2 = v''x + 2v' - v' - \frac{1}{x}v + \frac{1}{x}v = v''x + v' = 0$$

jos ja vain jos

$$v'' = -\frac{1}{x}v'.$$

Tämän separoituvan yhtälön eräs ratkaisu on $v'(x) = \frac{1}{x}$, josta edelleen $v(x) = \log|x|$. Siten etsitty ratkaisu on $y_2(x) = x\log|x|$. Koska $W(y_1, y_2)(x) = x$, saadaan tutkittavan yhtälön kaikki ratkaisut väleillä $\Delta =]-\infty, 0[$ ja $\Delta =]0, \infty[$ muodossa

$$y(x) = C_1 x + C_2 x \log|x|, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.3.3 Vakiokertoiminen yhtälö

Vakiokertoimiseen homogeeniyhtälöön

$$y'' + ay' + by = 0, \qquad a, b, \in \mathbb{R}$$

liittyvä *karakteristinen yhtälö* on

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Sen ratkaisut ovat

$$\lambda = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \in \mathbb{C}.$$

Huomautus 3.3.16. Jos $y(x) = e^{\lambda x}$, niin

$$y'' + ay' + by = \lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = e^{\lambda x}(\lambda^2 + a\lambda + b).$$

Lause 3.3.17. *Vakiokertoimiseen homogeeniyhtälön $y'' + ay' + by = 0$ kaikki ratkaisut saadaan muodossa*

(i) $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, *jos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ovat karakteristisen yhtälön juuria ja $\lambda_1 \neq \lambda_2$.*

(ii) $y(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$, *jos $\lambda \in \mathbb{R}$ on karakteristisen yhtälön kaksinkertainen juuri.*

(iii) $y(x) = C_1 e^{\alpha x}\sin(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, *jos $\alpha \pm i\beta \in \mathbb{C}$ ovat karakteristisen yhtälön kompleksijuuria.*

Todistus. (i) Merkitään $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ ja $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$. Suoralla laskulla (vertaa Huomautus 3.3.16) nähdään, että y_1 ja y_2 toteuttavat yhtälön $y'' + ay' + by = 0$. Lisäksi

$$W(y_1, y_2)(x) = (\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_1+\lambda_2)x} \neq 0$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siten Lauseen 3.3.12 nojalla $\{y_1, y_2\}$ on yhtälön ratkaisukanta.

Kohtien (ii) ja (iii) todistus jää lukijalle harjoitustehtäväksi. □

Esimerkki 3.3.18. Ratkaistaan alkuarvotehtävä

$$\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Karakteristinen yhtälö on tässä tapauksessa

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

jonka juuret ovat $\lambda = -1 \pm i$. Siten yhtälön $y'' + 2y' + 2y = 0$ ratkaisut saadaan muodossa

$$y(x) = C_1 e^{-x} \sin x + C_2 e^{-x} \cos x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ehdosta $y(0) = 0$ seuraa $C_2 = 0$, joten $y'(x) = -C_1 e^{-x} \sin x + C_1 e^{-x} \cos x$. Ehto $y'(0) = 1$ toteutuu kun $C_1 = 1$, joten etsitty alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$y(x) = e^{-x} \sin x.$$

Huomautus 3.3.19. Lauseen 3.3.17 kohdan (ii) ratkaisukanta $\{e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}\}$ löydetään kertaluvun pudotuksella: muodossa $y_2(x) = v(x)e^{\lambda x}$ tehty yrite johtaa ratkaisuun $y_2(x) = xe^{\lambda x}$. Kohta (iii) puolestaan selittyy (ainakin osin) sillä, että kompleksiluvulle $z = \alpha + i\beta$ pätee

$$e^z = e^\alpha(\cos\beta + i \sin\beta).$$

3.3.4 Yleisen lineaariyhtälön ratkaiseminen

Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' + p(x)y' + r(x)y = q(x), \tag{3.4}$$

missä $p, r, q : \Delta \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia.

Lause 3.3.20. *Jos funktiot $\{y_1, y_2\}$ muodostavat homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + r(x)y = 0$ ratkaisukannan ja y_3 on yhtälön (3.4) jokin ratkaisu, niin (3.4):n kaikki ratkaisut saadaan muodossa*

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_3(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Todistus. Harjoitustehtävä, johon vihjeitä voi etsiä Lauseen 2.4.3 todistuksesta. □

Esimerkki 3.3.21. Ratkaistaan lineaarinen yhtälö $y'' + y = x$. Vastaavan vakiokertoimisen homogeeniyhtälön $y'' + y = 0$ (eräs) ratkaisukanta on $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$. Lisäksi havaitaan, että $y_3(x) = x$ on yhtälön $y'' + y = x$ ratkaisu, joten sen kaikki ratkaisut saadaan muodossa

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.3.5 Vakioiden variointi

eli miten yksittäisratkaisu y_3 löydetään, jos vastaavan homogeeniyhtälön jokin ratkaisukanta $\{y_1, y_2\}$ tunnetaan?

Ideana on etsiä kahdesti jatkuvasti derivoituvat funktiot $C_1, C_2 : \Delta \to \mathbb{R}$ siten, että

$$y_3(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

on yhtälön (3.4) ratkaisu. Tälle yritteelle pätee

$$y_3' = C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'.$$

Tehdään tässä vaiheessa lisäoletus $C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0$, jolloin

$$y_3' = C_1y_1' + C_2y_2'$$

ja

$$y_3'' = C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2'y_2' + C_2y_2''.$$

Siten termejä sopivasti järjestellen saamme

$$\begin{aligned} y_3'' + p(x)y_3' + r(x)y_3 &= C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1\underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + r(x)y_1)}_{=0} \\ &\quad + C_2\underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + r(x)y_2)}_{=0} \\ &= C_1'y_1' + C_2'y_2', \end{aligned}$$

joten y_3 on etsitty ratkaisu, jos yhtälöpari

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0 \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = q(x) \end{cases} \tag{3.5}$$

toteutuu. Tämän yhtälöparin ratkaisuksi saadaan

$$C_1'(x) = -\frac{y_2(x)q(x)}{W(x)}, \qquad C_2'(x) = \frac{y_1(x)q(x)}{W(x)},$$

missä Wronskin determinantti $W(x) = W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \Delta$, sillä $\{y_1, y_2\}$ on homogeeniyhtälön $y'' + p(x)y' + r(x)y = 0$ ratkaisukanta. Etsityt funktiot C_1 ja C_2 saadaan vastaavia derivaattoja integroimalla.

Esimerkki 3.3.22. Ratkaistaan yhtälö

$$y'' + y = \tan x$$

välillä $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Vastaavan homogeeniyhtälön $y'' + y = 0$ ratkaisukannan muodostavat funktiot $y_1(x) = \sin x$ ja $y_2(x) = \cos x$. Yrite

$$y_3(x) = C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x$$

yhdessä lisäehdon $C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0$ kanssa johtaa yhtälöpariin

$$\begin{cases} C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = 0, \\ C_1'(x)\cos x - C_2'(x)\sin x = \tan x. \end{cases}$$

Ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $C_2' = -C_1' \dfrac{\sin x}{\cos x}$, joka sijoitettuna toiseen yhtälöön antaa sieventämisen jälkeen $C_1' = \sin x$. Siten $C_2' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. Integroimalla nämä saamme $C_1(x) = -\cos x$ ja

$$C_2(x) = \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx = \int \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right) dx = \sin x - \log\left(\frac{1+\sin x}{\cos x} \right),$$

missä integraali $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ saadaan laskettua sijoitusta $t = \tan \frac{x}{2}$ ja trigonometristen funktioiden palautuskaavoja käyttäen. Näin ollen

$$\begin{aligned} y_3(x) &= C_1(x)\sin x + C_2(x)\cos x \\ &= -\cos x \sin x + \sin x \cos x - \cos x \, \log\left(\frac{1+\sin x}{\cos x} \right) \\ &= -\cos x \, \log\left(\frac{1+\sin x}{\cos x} \right), \end{aligned}$$

ja yhtälön $y'' + y = \tan x$ kaikki ratkaisut välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ saadaan muodossa

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \cos x \, \log\left(\frac{1+\sin x}{\cos x} \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.3.6 Valistunut arvaus

Kokeilu on tietyissä tapauksissa tehokas tapa etsiä ratkaisua toisen kertaluvun epähomogeeniselle lineaariyhtälölle. Erityisen hyvin tämä metodi toimii kun yhtälö on vakiokertoiminen, mutta muulloinkin voi yrittää.

Lause 3.3.23. *Tutkitaan vakiokertoimista yhtälöä $y'' + ay' + by = q(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$.*

(i) Jos $q(x)$ on polynomi, niin yhtälöllä on polynomiratkaisu.

(ii) Jos $q(x) = Ae^{cx}$ ja

  (a) c ei ole karakteristisen yhtälön juuri, niin $y(x) = Ke^{cx}$ on ratkaisu jollakin $K \in \mathbb{R}$.

  (b) c on karakteristisen yhtälön yksinkertainen juuri, niin $y(x) = Kxe^{cx}$ on ratkaisu jollakin $K \in \mathbb{R}$.

  (c) c on karakteristisen yhtälön kaksinkertainen juuri, niin $y(x) = Kx^2e^{cx}$ on ratkaisu jollakin $K \in \mathbb{R}$.

(iii) Jos $q(x) = A\sin(\omega x)$ (vast. $q(x) = A\cos(\omega x)$) ja

(a) $\pm\omega i$ eivät ole karakteristisen yhtälön juuria, niin $y(x) = K\sin(\omega x) + L\cos(\omega x)$ on ratkaisu joillakin $K, L \in \mathbb{R}$.

(b) $\pm\omega i$ ovat karakteristisen yhtälön juuria, niin $y(x) = Lx\cos(\omega x)$ (vast. $y(x) = Lx\sin(\omega x)$) on ratkaisu joillakin $L \in \mathbb{R}$.

Todistus. Todistamme vain kohdan (ii), kohdat (i) ja (iii) jäävät lukijalle harjoitustehtäviksi.

Jos $q(x) = Ae^{cx}$ ja c ei ole karakteristisen yhtälön juuri, niin funktiolle $y(x) = Ke^{cx}$ pätee

$$y'' + ay' + by = Ke^{cx}(c^2 + ac + b) = Ae^{cx},$$

kun $K = A/(c^2 + ac + b)$, missä $c^2 + ac + b \neq 0$ oletuksen perusteella. Jos taas c on karakteristisen yhtälön yksinkertainen juuri, niin $c^2 + ac + b = 0$ ja $2c + a \neq 0$. Siten funktiolle $y(x) = Kxe^{cx}$ pätee

$$y'' + ay' + by = Kxe^{cx}(c^2 + ac + b) + Ke^{cx}(2c + a) = Ke^{cx}(2c + a) = Ae^{cx},$$

kun $K = A/(2c + a)$. Lopulta jos c on karakteristisen yhtälön kaksinkertainen juuri, niin $c^2 + ac + b = 0$, $2c + a = 0$ ja $a^2 - 4b = 0$. Siten funktiolle $y(x) = Kx^2e^{cx}$ pätee

$$y'' + ay' + by = Kx^2e^{cx}(c^2 + ac + b) + Kxe^{cx}(4c + 2a) + 2Ke^{cx} = 2Ke^{cx} = Ae^{cx},$$

kun $K = A/2$. □

Esimerkki 3.3.24. a) Ratkaistaan yhtälö

$$y'' + y = \sin x.$$

Vastaavan homogeeniyhtälön ratkaisukannan muodostavat $y_1(x) = \sin x$ ja $y_2(x) = \cos x$. Siten Lauseen 3.3.23 nojalla etsimme ratkaisua y_3 muodossa $y_3(x) = Kx\cos x$. Tällöin $y_3' = K\cos x - Kx\sin x$ ja $y_3'' = -2K\sin x - Kx\cos x$. Siten

$$y_3'' + y_3 = -2K\sin x - Kx\cos x + Kx\cos x = -2K\sin x = \sin x,$$

kun $K = -1/2$. Tutkittavan yhtälön $y'' + y = \sin x$ kaikki ratkaisut saadaan siis muodossa

$$y(x) = C_1\sin x + C_2\cos x - \frac{1}{2}x\cos x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Ratkaistaan yhtälö

$$y'' + y = x^2 + \sin x.$$

Yhtälö $y'' + y = \sin x$ ratkaistiin yllä. Ratkaistaan erikseen vielä yhtälö $y'' + y = x^2$: Kokeilu $y_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ antaa

$$y_3'' + y_3 = 2a_2 + a_0 + a_1x + a_2x^2,$$

joten y_3 toteuttaa yhtälön $y'' + y = x^2$ jos ja vain jos $a_0 = -2$, $a_1 = 0$ ja $a_2 = 1$. Siten kaikki ratkaisut saadaan muodossa

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x + x^2 - 2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Nyt yhtälön $y'' + y = x^2 + \sin x$ kaikki ratkaisut saadaan muodossa

$$y(x) = C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{1}{2} x \cos + x^2 - 2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Syynä tähän on se, että funktio $y_4(x) = -\frac{1}{2} x \cos + x^2 - 2$, joka on siis saatu laskemalla yhteen yhtälöiden $y'' + y = \sin x$ ja $y'' + y = x^2$ löydetyt yksittäisratkaisut, on yhtälön $y'' + y = x^2 + \sin x$ yksittäisratkaisu.

3.4 Yhteys lineaarisiin differentiaaliyhtälöpareihin

Lineaarinen ensimmäisen kertaluvun differentiaaliyhtälöpari on muotoa

$$\begin{cases} y_1'(x) = a_{11}(x) y_1(x) + a_{12}(x) y_2(x) + b_1(x), \\ y_2'(x) = a_{21}(x) y_1(x) + a_{22}(x) y_2(x) + b_2(x), \end{cases}$$

missä kerroinfunktiot $a_{ij}, b_j : \Delta \to \mathbb{R}$ ovat jatkuvia ja y_1, y_2 tuntemattomia. Sama voidaan esittää matriisimuodossa

$$Y'(x) = A(x) Y(x) + B(x),$$

missä $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, $A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix}$ ja $B(x) = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{pmatrix}$. Yhtälöpariin liittyvä alkuarvotehtävä saa muodon

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x) Y(x) + B(x), \\ Y(x_0) = Y_0, \end{cases}$$

missä $x_0 \in \Delta$ ja $Y_0 = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Siten ehto $Y(x_0) = Y_0$ tarkoittaa, että $y_1(x_0) = y_{01}$ ja $y_2(x_0) = y_{02}$.

Esimerkki 3.4.1. Tarkastellaan yhtälöparia

$$\begin{cases} y_1' = x y_2 + 1, \\ y_2' = 0, \end{cases}$$

joka on helppo ratkaista. Koska $y_2' = 0$, niin $y_2(x) = C_1$ jollakin $C_1 \in \mathbb{R}$. Siten ensimmäinen yhtälö saa muodon $y_1' = C_1 x + 1$, josta $y_1(x) = \frac{C_1}{2} x^2 + x + C_2$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{C_1}{2} x^2 + x + C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} x^2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x) + Y_3(x), \end{aligned}$$

missä vektorifunktiot $Y(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ja $Y(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ toteuttavat vastaavan homogeenisen yhtälöparin

$$\begin{cases} y_1' = xy_2, \\ y_2' = 0. \end{cases}$$

Määritelmä 3.4.2. Funktiot $Y_1, Y_2 : \Delta \to \mathbb{R}^2$ muodostavat homogeenisen yhtälöparin $Y'(x) = A(x)Y(x)$ *ratkaisukannan*, jos $Y_i'(x) = A(x)Y_i(x)$, $i = 1, 2$, ja jokainen yhtälöparin ratkaisu Y on muotoa

$$Y(x) = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Lause 3.4.3. *Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä homogeenisen yhtälöparin $Y'(x) = A(x)Y(x)$ ratkaisuille Y_1 ja Y_2:*

(i) Funktiot Y_1 ja Y_2 muodostavat yhtälöparin ratkaisukannan.

(ii) $\{Y_1, Y_2\}$ on LI, ts. ehdosta $C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) = 0$ kaikilla $x \in \Delta$ seuraa $C_1 = C_2 = 0$.

(iii) $W(x_0) := \det \begin{bmatrix} Y_{11}(x_0) & Y_{12}(x_0) \\ Y_{21}(x_0) & Y_{22}(x_0) \end{bmatrix} \neq 0$ jollakin $x_0 \in \Delta$, missä $Y_1(x) = \begin{pmatrix} Y_{11}(x) \\ Y_{21}(x) \end{pmatrix}$, $Y_1(x) = \begin{pmatrix} Y_{12}(x) \\ Y_{22}(x) \end{pmatrix}$.

(iv) $W(x) \neq 0$ kaikilla $x \in \Delta$.

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Vakiokertoimisen yhtälöparin ratkaiseminen eliminoinnilla

Tyydymme tarkastelemaan asiaa esimerkin avulla:

Esimerkki 3.4.4. Tutkitaan yhtälöparia

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2, \\ y_2' = 5y_1 - 3y_2. \end{cases}$$

Derivoimalla ensimmäisen yhtälön saamme $y_1'' = y_1' - y_2'$. Sijoittamalla tähän toisen yhtälön $y_2' = 5y_1 - 3y_2$ tuloksena on yhtälö

$$y_1'' = y_1' - 5y_1 + 3y_2.$$

Toisaalta ensimmäisen yhtälön nojalla $y_2 = -y_1' + y_1$, joten

$$y_1'' = y_1' - 5y_1 + 3(-y_1' - y_1) = -2y_1' - 2y_1.$$

Päädyimme siis toisen kertaluvun vakiokertoimiseen yhtälöön

$$y_1'' + 2y_1' + 2y_1 = 0,$$

jonka ratkaisut ovat muotoa (karakteristisen yhtälön juuret ovat $-1 \pm i$)

$$y_1(x) = C_1 e^{-x} \sin x + C_2 e^{-x} \cos x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Tätä derivoimalla saamme

$$\begin{aligned} y_1' &= -C_1 e^{-x} \sin x + C_1 e^{-x} \cos x - C_2 e^{-x} \cos x - C_2 e^{-x} \sin x \\ &= (-C_1 - C_2) e^{-x} \sin x + (C_1 - C_2) e^{-x} \cos x, \end{aligned}$$

joten yhtälöparin ensimmäisen yhtälön nojalla

$$y_2 = -y_1' + y_1 = (2C_1 + C_2) e^{-x} \sin x + (2C_2 - C_1) e^{-x} \cos x.$$

Siten

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} e^{-x} \sin x \\ 2e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-x} \cos x \\ e^{-x} \sin x + 2e^{-x} \cos x \end{pmatrix}.$$

Koska lisäksi

$$W(x) = \det \begin{bmatrix} e^{-x} \sin x & e^{-x} \cos x \\ 2e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x & e^{-x} \sin x + 2e^{-x} \cos x \end{bmatrix} = e^{-2x} \neq 0,$$

on yhtälöparin kaikki ratkaisut löydetty.

Huomautus 3.4.5. Muotoa $Y'(x) = A(x)Y(x) + B(x)$ olevia epähomogeenisiä yhtälöpareja voidaan myös ratkaista eliminoinimenetelmällä. Yksi tapa on ratkaista ensin vastaava homogeeniyhtälöpari ja sitten etsiä vakion varioinnilla/kokeilulla jokin yksittäisratkaisu.

Kirjallisuutta

[1] Apostol, T. M., Calculus I ja II, New York, 1976.

[2] Birkhoff, G., Rota, G.-C., Ordinary differential equations, New York : Wiley, cop. 1989.

[3] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., Elementary differential equations and boundary value problems, Hoboken, N.J : Wiley, cop. 2005.

[4] Brauer F., Nohel, J. A., Ordinary differential equations: a first course, Menlo Park, Calif., 1973.

[5] Braun, M., Differential equations and their applications, New York, Springer, 1978.

[6] Kekäläinen, P., Differentiaaliyhtälöt, Jyväskylä, Jyväskylän yliopisto, 2000.

[7] Martio O., Sarvas J., Tavalliset differentiaaliyhtälöt. Helsinki, Yliopistopaino, 1993.