

ANALYYSI 2

TERO KILPELÄINEN

2001–2003

Teksti sisältää muistiinpanoja vuosina 2001 ja 2003 pidetystä kurssista. Tämän paketin tarkoitus on tukea omien muistiinpanojen tekoa, ei korvata niitä. Matemaatiikkaa oppii parhaiten itse kirjoittaen ja ongelmia ratkoen.

Kun olin lapsi, minä puhuin kuin lapsi, minulla oli lapsen mieli ja lapsen ajatukset. Nyt, kun olen mies, olen jättänyt sen mikä kuuluu lapsuuteen.

SISÄLLYS

Preliminäärejä	1
1. Riemann-integraali	2
2. Derivaatta	29
3. Derivaatta ja integraali – analyysin peruslause	47
4. Differentiaalilaskentaa	52
5. Integrointitekniikkaa	67
6. Epäoleelliset integraalit	85

Kurssi on osa yhden reaaliuuttujan analyysin peruskäsitteiden esittelyä. Ensimmäisessä osassa tutustuttiin funktioihin ja jonoihin, niiden raja-arvoihin sekä jatkuvuuden käsitteeseen. Analyysi 2 sisältää differentiaali- ja integraalilaskennan perusteet. Integraalin ja derivaatan käsitteet luovat perustan modernille matemaatiikalle ja luonnontieteelle, tekniikan, taloustieteiden ja tilastotieteen sovellutuksista puhumattakaan.

Tällä kurssilla pääpaino on peruskäsitteiden ymmärtämisessä, varsinaista laskutekniikkaa on melko vähän – sen kehittäminen jää pääosin opiskelijan oman harrastuksen varaan. Derivaattaa ja integraalia on käsitelty pinnallisesti jo koulukurssilla. Tämän kurssin tavoitteena on syventää ymmärrystä niin, että kyettäisiin opettamaan toisille differentiaali- ja integraalilaskennan alkeet sekä ymmärtämään, mikä on integroinnin tai derivaatan merkitys matemaattisissa malleissa, ja tasoittaa tietä useampiulotteisen differentiaali- ja integraalilaskennan oppimiselle.

Monissa alkeisoppikirjoissa tyydytään esittelemään integrointi ainoastaan antiderivaattana. Tällä kurssilla painotetaan integraalin perimmäistä luonnetta mittaamiseen liittyvänä käsitteenä. Tämä auttaa paremmin ymmärtämään integraalin käyttöä moineissa sovellutuksissa, kuten energian, odotusarvon tai virheen arvioinnin yhteyksissä, kuin myös integraaleja useampiulotteisissa avaruuksissa. Ensiksi siis määritellään integraali ja esitellään sen perusominaisuudet. Toisessa luvussa tarkastellaan derivaattaa ja siihen liittyviä perusilmiöitä. Derivaattaa pyritään hahmottamaan paitsi käyrän tangenttina, myös hetkellisenä muutosnopeutena.

Kolmannessa luvussa keskitytään integroinnin ja derivoinnin keskinäisiin suhteisiin ja todistetaan analyysin peruslause, jonka mukaan integrointi ja derivointi ovat usein toistensa käänteisoperaatioita.

Neljännessä luvussa käsitellään derivaatan laskusääntöjä sekä sen roolia funktioiden kulun analysoinnissa. Seuraavaksi esitellään perusintegrointitekniikoita, muuttujanvaihtoa ja osittaisintegrointia sekä tutustutaan rationaalifunktioiden integrointiin. Lopuksi käsitellään epäoleellisia integraaleja.

Kuten aina matematiikan opiskelussa, määritelmät on opeteltava huolella. Niiden käyttöä ja sisältöä oppii parhaiten todistuksia tarkastelemalla ja harjoitustehtäviä (jotka sisältävät esimerkkejä) tekemällä. Analyysi 1 -kurssin tiedot on syytä kerrata huolella, niitä käytetään monesti jatkossa.

Preliminäärejä

Muistellaan Analyysi 1 -kurssin tärkeitä määritelmiä: Funktio $f: I \rightarrow \mathbf{R}$, $I \subset \mathbf{R}$, on *jatkuva* pisteessä $x_0 \in I$, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ kun } |x - x_0| < \delta \quad (x, x_0 \in I).$$

Edelleen $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ on *jatkuva välillä* I , jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in I$.

Vielä: $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ on *tasaisesti jatkuva välillä* I , jos ” ε - δ - pari ei riipu tarkastelutavasta pisteestä”, ts. jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(z)| < \varepsilon, \text{ kaikilla } x, z \in I, \text{ joiilla } |x - z| < \delta.$$

Pätee lause: *Suljetulla ja rajoitetulla välillä* $[a, b]$ *jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.*

Jatkuvuus voidaan karakterisoida myös raja-arvojen avulla: muista, että luku $a \in \mathbf{R}$ on funktion f *raja-arvo* pisteessä x_0 , merkitään

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Nyt pätee lause: *Tällöin f on jatkuva pisteessä x_0 , jos ja vain, jos f :llä on raja-arvo $f(x_0)$ pisteessä x_0 , ts.*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Seuraavat lauseet on myös hyvä muistaa:

Bolzanon lause: välillä $[a, b]$ jatkuva funktio saa kaikki arvojen $f(a)$ ja $f(b)$ väliset arvot.

Suljetulla ja rajoitetulla välillä $[a, b]$ *jatkuva funktio f on rajoitettu (ts on olemassa $M > 0$ siten, että $f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$).*

Edelleen, *suljetulla ja rajoitetulla välillä* $[a, b]$ *jatkuva funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa (ts on olemassa $x_1, x_2 \in [a, b]$ siten, että $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ kaikilla $x \in [a, b]$).*

Eräs tärkeimmistä Analyysi 1 -kurssin käsitteistä on supremum (ja infimum). Muista, että epätyhjän joukon $A \subset \mathbf{R}$ *supremum* $\sup A$ on joukon A pienin yläraja. Ts. $\sup A$ on sellainen luku M , jolle pätee

- i) M on joukon A yläraja eli $a \leq M$ kaikilla $a \in A$, ja
- ii) M on joukon A ylärajoista pienin eli jos G on jokin joukon A yläraja, niin $G \geq M$.

Vastaavasti, joukon $A \subset \mathbf{R}$ *infimum* $\inf A$ on joukon A suurin alaraja. Ts. $\inf A$ on sellainen luku m , jolle pätee

- i) m on joukon A alaraja eli $a \geq m$ kaikilla $a \in A$, ja
- ii) m on joukon A alarajoista suurin eli jos g on jokin joukon A alaraja, niin $g \leq m$.

Reaalilukujen täydellisyysnojan nojalla jokaisella ylhäältä rajoitetulla joukolla $A \neq \emptyset$ on $\sup A \in \mathbf{R}$, ts. jos A :llä ylipäänsä on jokin (reaalinen) yläraja, niin eräs näistä ylärajoista on pienin. Samoin alhaalta rajoitetulla joukolla $A \neq \emptyset$ on $\inf A \in \mathbf{R}$.

Edelleen, $\sup A \in A$ täsmälleen silloin, kun A :ssa on suurin alkio, jolloin $\sup A = \max A$. Samoin, $\inf A \in A$ täsmälleen silloin, kun A :ssa on pienin alkio, jolloin $\inf A = \min A$.

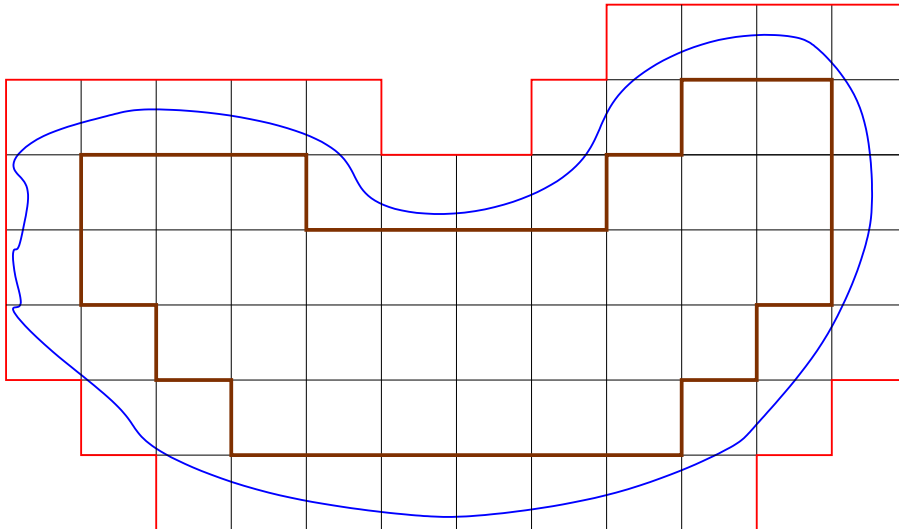
1. Riemann-integraali

Integrointi ja differentiointi (derivointi) ovat kaksi analyysin keskeisintä rajaprosessia. Aloitamme integraalin käsitteen esittelyllä, ja hetken päästä kohtaamme derivaatan. Eräs merkittävimmistä tuloksista (analyysin peruslause) ilmaisee, että derivointi ja integrointi ovat toistensa käänteisprosesseja - vaikka ensi näkemältä näillä ei näyttäisi olevan paljoakaan tekemistä toistensa kanssa. Monesti differentiaali- ja integraalilaskennan alkeisopetuksessa tyydytään esittelemään integraali vain antiderivaattana. Tällainen menettely antaa kuitenkin vain hailakan kuvan integraalin käsitteestä, joka on varsin keskeinen analyysissä. Siksi lähdemme liikkeelle nimenomaan integraalista, jotta sen itsenäinen asema korostuisi paremmin.

Lähinnä historiallisista syistä on tapana esitellä ensimmäisenä integraalin käsitteenä ns. *Riemann-integraali*, vaikka nykyisin käytetään lähinnä *Lebesgue-integraalia*, joka onkin tehokkaampi. Toisaalta Riemann-integraali on helpompi määritellä ilman esivalmisteluja ja mm. jatkuville funktioille tulos on sama.

Pinta-alasta intuition avulla.

Intuitiivisesti tasojokoukon pinta-ala on sen sisältämien yksikköneliöiden lukumäärä (tarkempia lukuja saadaan jakamalla yksikköneliöiden sivut esim. 10 yhtäsuureen osaan, jolloin saadaan sadasosan pinta-aloja, jne.).



Pinta-alalta olisi hyvä vaatia seuraavat ominaisuudet:

Pinta-ala on positiivinen luku.

Suorakaiteen pinta-ala on sen sivujen (eri) pituuksien tulo.

Alueen pinta-ala ei saa muuttua aluetta siirrettäessä.

Koko alueen pinta-ala on osa-alojen pinta-alojen summa.

Isommalla joukolla on suurempi pinta-ala.

Pinta-ala (tai integraali) raja arvona (intuitiivisesti).

Pyritään laskemaan ei-negatiivisen funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ graafin alle jäävän alan pinta-ala approksimoimalla.

Jaetaan väli $[a, b]$ äärellisen moneen (n kpl) osaväliin, jakopisteinä

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

ja piirretään graafin alle (mahdollisimman korkeat) suorakaiteet $\underline{S}_j$, joiden pohja on osaväli $[x_{j-1}, x_j]$. Siten $\underline{S}_j$ on karteesinen tulo

$$[x_{j-1}, x_j] \times [0, y_j],$$

missä

$$y_j = \inf\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}.$$

Suorakaiteiden $\underline{S}_j$ pinta-alat osataan laskea, ne ovat $y_j(x_j - x_{j-1})$, joten graafin alle piiretyn monikulmion

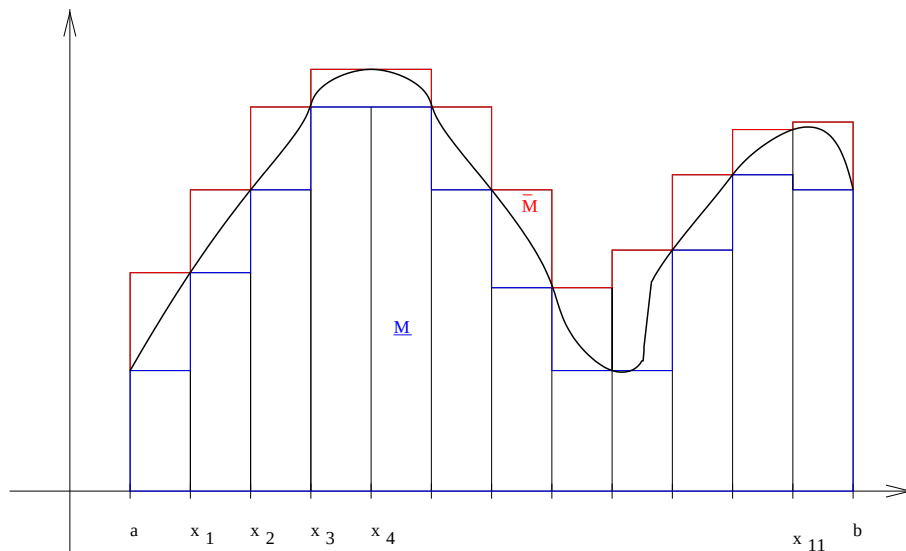
$$\underline{M} = \bigcup_{j=1}^n \underline{S}_j$$

pinta-ala on suorakaiteiden $\underline{S}_j$ pinta-alojen summa

$$\sum_{j=1}^n y_j(x_j - x_{j-1}).$$

Huomataan, että graafin alle jäävän alueen pinta-ala

$$A \geq \sum_{j=1}^n y_j(x_j - x_{j-1}).$$



Seuraavaksi, tehdään samanlainen approksimointi ”ulkopuolelta”: Piirretään (mahdollisimman matalat) suorakaiteet $\bar{S}_j$, joiden pohja on osaväli $[x_{j-1}, x_j]$ ja katto z_j f :n graafin yläpuolella. Ts. $\bar{S}_j$ on karteesinen tulo

$$[x_{j-1}, x_j] \times [0, z_j],$$

missä

$$z_j = \sup\{f(x) : x \in [x_{j-1}, x_j]\}.$$

Suorakaiteiden $\bar{S}_j$ pinta-alat ovat $z_j(x_j - x_{j-1})$, joten monikulmion

$$\bar{M} = \bigcup_{j=1}^n \bar{S}_j$$

pinta-ala on

$$\sum_{j=1}^n z_j(x_j - x_{j-1}).$$

Huomataan, että graafin alle jäävän alueen pinta-ala

$$A \leq \sum_{j=1}^n z_j(x_j - x_{j-1}).$$

Yhdistämällä nämä arviot saadaan graafin alle jäävän alueen pinta-alalle A arviot

$$\sum_{j=1}^n \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)(x_j - x_{j-1}) \leq A \leq \sum_{j=1}^n \sup_{z \in [x_{j-1}, x_j]} f(z)(x_j - x_{j-1}).$$

Jatkossa näytämme, että lisäämällä jakovälien määrää tällainen approksimointiprosessi usein johtaa halutun pinta-alan (integraalin) saamiseen rajalla. Kuitenkaan matematiikka ei pohjaudu intuitioon, vaikka intuitiivinen käsitys ja kuvien piirtely ovatkin erittäin tärkeä osa ongelmanratkaisuprosessia. Siksi pidämme tehdyt tarkastelut mielessä ja pyrimme kehittämään teorian, joka on riippumaton havainnoistamma, mutta selittää niitä.

Porrasfunktiot ja niiden integraalit.

Äsken lähdimme pinta-alan intuitiivisesta käsitteestä ja johdimme sen avulla integraalin approksimoivana raja-prosessina. Nyt teemme päinvastoin: integraalin tarkassa määritelmässä lähdimme approksimoivista (pinta-alojen) summista (jotka määritellään puhtaasti analyyttisesti) ja myöhemmin *osoitamme*, että ylhäältä ja alhaalta approksimoivat summat suppenevat kohti samaa lukua (ainakin, kun funktio on sopivan siisti). Tämä yhteinen raja-arvo on integraalin (ja pinta-alan) täsmällinen *määritelmä*.

Olkoon I rajoitettu väli, jonka päätepisteet ovat $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$.

Määritelmä. (jako, porrasfunktio)

Välin I jaon muodostavat luvut (äärellisen monta)

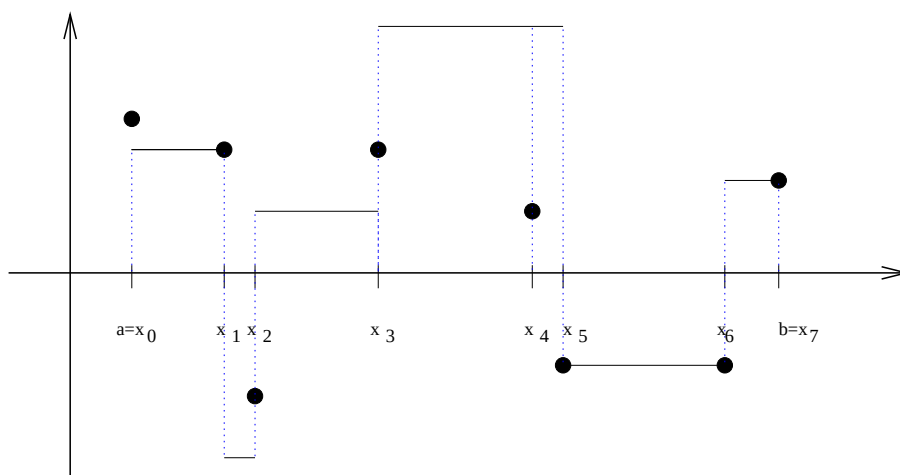
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Funktio $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ on *porrasfunktio*, jos on olemassa välin I jako

$$P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ja luvut $a_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$, joille

$$f(x) = a_j \text{ kaikilla } x \in]x_{j-1}, x_j[.$$



Huomautus. Porrasfunktion välijaon voi tehdä monella tapaa. Porrasfunktion arvoille jakopisteissä x_j ei aseteta mitään ehtoa. Porrasfunktion graafi muodostaa ”portaikon”.

Määritelmä. (porrasfunktion integraali) Porrasfunktio $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ *integraali* (yli välin $[a, b]$) on

$$\int_a^b f := \sum_{j=1}^n a_j \ell(I_j),$$

missä $P = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ on välin $[a, b]$ jako siten, että

$$f(x) = a_j \text{ kaikilla } x \in I_j =]x_{j-1}, x_j[$$

ja

$$\ell(I_j) = x_j - x_{j-1}$$

on osavälin $I_j =]x_{j-1}, x_j[$ *pituus*.

Huomautuksia. 1. Porrasfunktion integraali on hyvin määritelty: se ei riipu valitusta välijaosta (HT).

2. Jos f ja g ovat porrasfunktioita välillä $[a, b]$ ja $\lambda \in \mathbf{R}$, niin $f + g$ ja λf ovat porrasfunktioita ja

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g \quad \text{ja} \quad \int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f.$$

Riemann-integraali ja Riemann-integroituvuus.

Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ rajoitettu (ts. on olemassa $M > 0$, jolle $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$).

Määritellään f :n *alaintegraali* yli välin $[a, b]$

$$\text{ala} \int_a^b f := \sup \left\{ \int_a^b g : g \text{ porrasfunktio ja } g \leq f \text{ välillä } [a, b] \right\}$$

ja f :n *yläintegraali* yli välin $[a, b]$

$$\text{ylä} \int_a^b f := \inf \left\{ \int_a^b h : g \text{ porrasfunktio ja } h \geq f \text{ välillä } [a, b] \right\}.$$

Huomautus. Ei ole lainkaan selvää, onko

$$\text{ala} \int_a^b f = \text{ylä} \int_a^b f,$$

vai ei. Kuitenkin

$$\text{ala} \int_a^b f \leq \text{ylä} \int_a^b f,$$

sillä (HT) jos g ja h ovat porrasfunktioita ja $g \leq h$, niin

$$\int_a^b g \leq \int_a^b h.$$

Edelleen porrasfunktioille g pätee

$$\text{ala} \int_a^b g = \text{ylä} \int_a^b g.$$

Määritelmä. (Riemann-integraali ja Riemann-integroituvuus) Rajoitettu funktio $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on *(Riemann-)integroituva*, jos

$$\text{ala} \int_a^b f = \text{ylä} \int_a^b f.$$

Tällöin f :n *(Riemann-)integraali* yli välin $[a, b]$ on

$$\int_a^b f := \int_a^b f(x) dx := \text{ala} \int_a^b f = \text{ylä} \int_a^b f.$$

(Tässä dx ilmaisee, että integraalia lasketaan integrandin f muuttujan x suhteen).

Huomautus. Porrasfunktioit ovat Riemann-integroituvia.

Hetken päästä osoitamme, että (tasaisesti) jatkuvat funktiot ovat integroituvia, mikä intuitiivisesti on melko selvää. (Pienillä osaväleillä tasaisesti jatkuva funktio ei juurikaan heilahtele, joten ylä- ja alapuolisten porrasfunktioiden väliin ei jää merkittävästi pinta-alaa.)

Aloitetaan tekemällä yksinkertainen, mutta erittäin hyödyllinen havainto. Sen jälkeen laskemme määritelmän avulla esimerkkifunktioiden integraaleja. Myöhemmin kehitämme teoriaa integraalien laskemiseksi.

1.1. Lause. (Riemannin ehto) *Rajoitettu funktio $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on Riemann-integroituva, välillä $[a, b]$, jos ja vain jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa porrasfunktio g ja h siten, että*

$$g \leq f \leq h \text{ välillä } [a, b]$$

ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon.$$

Todistus. $\Rightarrow$: Jos f on integroituva, niin

$$\text{ylä} \int_a^b f = \text{ala} \int_a^b f.$$

Jos $\varepsilon > 0$, niin supremumin määritelmän nojalla voidaan valita porrasfunktio h siten, että $h \geq f$ ja

$$\int_a^b h < \text{ylä} \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Edelleen, infimumin määritelmän nojalla voidaan valita porrasfunktio g siten, että $g \leq f$ ja

$$\int_a^b g > \text{ala} \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nyt

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \text{ylä} \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} - (\text{ala} \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon,$$

koska

$$\text{ylä} \int_a^b f = \text{ala} \int_a^b f.$$

$\Leftarrow$: Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen ja h ja g porrasfunktioita siten, että

$$g \leq f \leq h \text{ välillä } [a, b]$$

ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon.$$

Tällöin

$$\text{ylä} \int_a^b f \leq \int_a^b h < \varepsilon + \int_a^b g \leq \varepsilon + \text{ala} \int_a^b f,$$

ts.

$$\text{ylä} \int_a^b f \leq \text{ala} \int_a^b f + \varepsilon \quad \text{kaikilla } \varepsilon > 0,$$

joten

$$\text{ylä} \int_a^b f \leq \text{ala} \int_a^b f \quad \left(\leq \text{ylä} \int_a^b f \right).$$

Siis

$$\text{ylä} \int_a^b f = \text{ala} \int_a^b f.$$

□

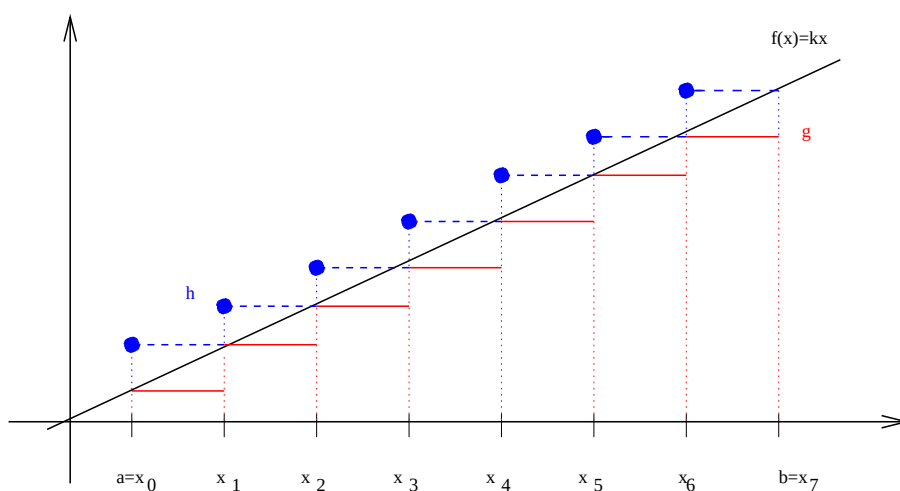
Huomautus. Riemannin ehdon hyödyllisyys tulee ilmi sinä, ettei f :n ala- ja ylä-integraaleja tarvitse osata laskea nähdäkseen, että funktio on integroituva: riittää osata arvioida alaporrasfunktion ja yläporrasfunktion graafien väliin jäävää pinta-alaa, sillä porrasfunktioille h ja g pätee

$$\int_a^b h - \int_a^b g = \int_a^b (h - g).$$

Esimerkkejä. Seuraavaksi laskemme määritelmän avulla eräitä integraaleja.

Esimerkki 1. (*Lineaarifunktion integraali*) Olkoon $f(x) = kx$, $k > 0$. Osoitetaan, että f on integroituva ja lasketaan

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b kx dx.$$



Jaetaan väli $[a, b]$ n yhtäsuureen osaväliin, jakopisteinä

$$a, a + t, a + 2t, \dots, a + nt = b,$$

missä

$$t = \frac{b - a}{n}.$$

Määritellään porrasfunktiot g ja h siten, että

$$g(x) = k(a + (j - 1)t), \text{ kun } x \in [a + (j - 1)t, a + jt[,$$

ja

$$h(x) = k(a + jt), \text{ kun } x \in [a + (j - 1)t, a + jt[,$$

ja $g(b) = h(b) = f(b)$. Tällöin $g \leq f \leq h$. Edelleen,

$$\begin{aligned} \int_a^b g &= tka + tk(a + t) + \dots + tk(a + (n - 1)t) \\ &= ntka + t^2k(0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)) \\ &= ntka + t^2k \frac{n(n - 1)}{2} \\ &= n \frac{b - a}{n} ka + \frac{(b - a)^2}{n^2} k \frac{n(n - 1)}{2} \\ &= (b - a)ka + \frac{(b - a)^2}{2} k \frac{n - 1}{n} \\ &\rightarrow (b - a)ka + \frac{(b - a)^2}{2} k, \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$. Samoin

$$\begin{aligned} \int_a^b h &= tk(a + t) + tk(a + 2t) + \dots + tk(a + nt) \\ &= ntka + t^2k(1 + 2 + \dots + n) \\ &= ntka + t^2k \frac{n(n + 1)}{2} \\ &= n \frac{b - a}{n} ka + \frac{(b - a)^2}{n^2} k \frac{n(n + 1)}{2} \\ &= (b - a)ka + \frac{(b - a)^2}{2} k \frac{n + 1}{n} \\ &\rightarrow (b - a)ka + \frac{(b - a)^2}{2} k, \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siten f on integroitava ja

$$\int_a^b f = \int_a^b kx \, dx = (b - a)ka + \frac{(b - a)^2}{2} k = \frac{k}{2}(b^2 - a^2).$$

Esimerkki 2. Olkoon $f(x) = x^2$. Osoitetaan, että f on integroituva ja lasketaan

$$\int_a^b x^2 dx.$$

Symmetriasystä voimme rajoittaa tilanteeseen $a \geq 0$. Muodostetaan jako, kuten edellisessä esimerkissä, jakopisteinä

$$a, a+t, a+2t, \dots, a+nt = b,$$

missä

$$t = \frac{b-a}{n}.$$

Määritellään porraskuodot g ja h siten, että

$$g(x) = f(a + (j-1)t) = (a + (j-1)t)^2, \text{ kun } x \in [a + (j-1)t, a + jt[,$$

ja

$$h(x) = f(a + jt) = (a + jt)^2, \text{ kun } x \in [a + jt, a + (j+1)t[,$$

ja $g(b) = h(b) = f(b)$. Tällöin $g \leq f \leq h$ ja

$$\begin{aligned} \int_a^b g &= a^2t + (a+t)^2t + \dots + (a+(n-1)t)^2t \\ &= na^2t + 2at^2(0+1+\dots+(n-1)) + t^3(0+1^2+2^2+\dots+(n-1)^2) \\ &= na^2t + 2at^2 \frac{n(n-1)}{2} + t^3 \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= a^2(b-a) + 2a \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} + \frac{(b-a)^3}{n^3} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &\rightarrow a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3}, \end{aligned}$$

missä käytimme kaavaa

$$\sum_{k=1}^m k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Kuten yllä, saadaan

$$\begin{aligned} \int_a^b h &= (a+t)^2t + (a+2t)^2t + \dots + (a+nt)^2t \\ &= na^2t + 2at^2(1+2+\dots+n) + t^3(1^2+2^2+\dots+n^2) \\ &= na^2t + 2at^2 \frac{n(n+1)}{2} + t^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= a^2(b-a) + 2a \frac{(b-a)^2}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(b-a)^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\rightarrow a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3}. \end{aligned}$$

Siten f on integroituva (Riemannin ehto) ja

$$\int_a^b x^2 dx = a^2(b-a) + a(b-a)^2 + \frac{(b-a)^3}{3} = \frac{1}{3}(b^3 - a^3).$$

Esimerkki 3. Olkoon $f(x) = x^k$, $k \in \mathbf{N}$. Osoitetaan, että f on integroituva ja lasketaan

$$\int_a^b x^k dx.$$

Jaetaan nyt väli $[a, b]$ tasavälijäon sijasta geometrisessa suhteessa (oletetaan $a > 0$), jakopisteinä

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^n,$$

missä siis

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}};$$

merkitään myös

$$x_j = aq^j, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Huomaa, että $q > 1$, joten viimeinen jakoväli on suurin ja $q \rightarrow 1$, kun $n \rightarrow \infty$. Jakovälin $[x_{j-1}, x_j]$ pituus on

$$x_j - x_{j-1} = \frac{q^j a(q-1)}{q}.$$

Lasketaan porraskfunktion h ,

$$h(x) = f(x_j) = (aq^j)^k, \text{ kun } x \in]x_{j-1}, x_j[$$

integraali (jolla arvioidaan f :n yläintegraalia). Nyt käyttämällä geometrisen summan kaavaa saadaan

$$\begin{aligned} \int_a^b h &= (aq)^k \frac{qa(q-1)}{q} + (aq^2)^k \frac{q^2a(q-1)}{q} + \dots + (aq^n)^k \frac{q^na(q-1)}{q} \\ &= a^{k+1} \frac{q-1}{q} \sum_{j=1}^n (q^{k+1})^j \\ &= a^{k+1} \frac{q-1}{q} q^{k+1} \frac{(q^{k+1})^n - 1}{q^{k+1} - 1} \\ &= a^{k+1} (q-1) q^k \frac{(\frac{b}{a})^{k+1} - 1}{q^{k+1} - 1} \\ &= (b^{k+1} - a^{k+1}) q^k \frac{q-1}{q^{k+1} - 1}. \end{aligned}$$

Havaitsemalla geometrisen summan kaavan avulla, että

$$\frac{q-1}{q^{k+1} - 1} = \frac{1}{1 + q + q^2 + \dots + q^k}$$

saamme

$$\begin{aligned} \int_a^b h &= (b^{k+1} - a^{k+1}) \frac{q^k}{1 + q + q^2 + \cdots + q^k} \\ &\rightarrow \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$, sillä tällöin $q \rightarrow 1$. Siten

$$\text{ylä} \int_a^b f \leq \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Samalla tavoin nähdään (HT), että

$$\text{ala} \int_a^b f \geq \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1},$$

joten f on integroituva ja

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Esimerkki 4. Rajoitettu funktio, joka ei ole Riemann-integroituva. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{jos } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Tällöin f ei ole Riemann-integroituva, sillä jos g on porraskunktio ja g on vakio välillä I , niin mikäli $g \leq f$ I :llä, on $g \leq 0$ siellä, sillä I sisältää irrationaalipisteitä. Siten

$$\text{ala} \int_a^b f \leq 0.$$

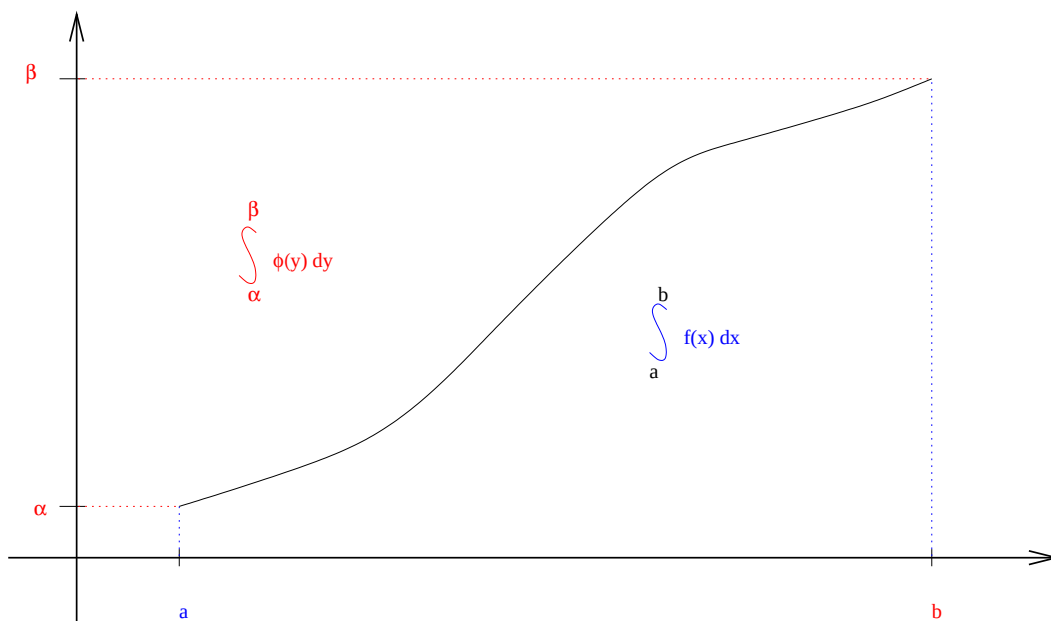
Toisaalta $g \equiv 0$ on porraskunktio ja $g \leq f$, joten

$$\text{ala} \int_a^b f = 0.$$

Samoin jos $g \geq f$ I :llä, on $g \geq 1$ siellä, sillä väli I sisältää rationaalipisteitä. Tästä saadaan, että

$$\text{ylä} \int_a^b f = 1 > 0 = \text{ala} \int_a^b f,$$

joten f ei ole Riemann-integroituva.



Esimerkki 5/ ovela havainto. Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ aidosti kasvava (jatkuva) funktio ja $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}$ f :n käänteisfunktio. Ts. $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ ja $\varphi(f(x)) = x$ kaikilla $x \in [a, b]$. Tällöin

$$\int_a^b f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(y) dy = b\beta - a\alpha.$$

Tämän kaavan havaitsee kuvasta käyttämällä integraalin pinta-alatulkintaa. Tarkka todistus jätetään harjoitustehtäväksi.

Esimerkiksi, jos $f(x) = x^{1/k}$, $k \in \mathbf{N}$ ja $a, b > 0$, niin integraali

$$\int_a^b x^{1/k} dx$$

saadaan helposti lasketuksi yo. kaavalla: $\varphi(y) = y^k$, $\alpha = a^{1/k}$, $\beta = b^{1/k}$, joten eo. kaavan ja esimerkin 3 nojalla

$$\begin{aligned} \int_a^b x^{1/k} dx &= b\beta - a\alpha - \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(y) dy \\ &= b^{1+1/k} - a^{1+1/k} - \frac{\beta^{k+1} - \alpha^{k+1}}{k+1} \\ &= (b^{1+1/k} - a^{1+1/k}) \left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{b^{1+1/k} - a^{1+1/k}}{1 + 1/k}. \end{aligned}$$

1.2. Lause. Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva. Tällöin f on Riemann-integroituva

Todistus. **Muista:** suljetulla ja rajoitetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f on tasaisesti jatkuva, on olemassa $n \in \mathbf{N}$ siten, että

$$\text{jos } |x - y| \leq \frac{b-a}{n}, \text{ niin } |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Otetaan jako $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, jakopisteinä

$$x_j = a + j \frac{b-a}{n}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Muodostetaan porraskunktiot g ja h :

$$g(x) = \min\{f(z) : z \in [x_{j-1}, x_j]\} =: m_j$$

ja

$$h(x) = \max\{f(z) : z \in [x_{j-1}, x_j]\} =: M_j$$

kun $z \in [x_{j-1}, x_j[$ ja $g(b) = f(b) = h(b)$. Tällön

$$g \leq f \leq h$$

ja koska jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa suljetulla välillä, on pisteet $\underline{z}_j, \bar{z}_j \in [x_{j-1}, x_j]$, joilla

$$f(\underline{z}_j) = m_j \text{ ja } f(\bar{z}_j) = M_j.$$

Koska

$$|\underline{z}_j - \bar{z}_j| \leq x_j - x_{j-1} = \frac{b-a}{n},$$

on

$$|M_j - m_j| = |f(\bar{z}_j) - f(\underline{z}_j)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Siten

$$\begin{aligned} \int_a^b h - \int_a^b g &= \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} ((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1})) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} (x_n - x_0) = \varepsilon, \end{aligned}$$

joten f on Riemannin ehdon 1.1 nojalla integroitava. □

Huomautus. Äärellisen monta pistettä ei vaikuta sitä eikä tätä integroitavuuteen eikä integraalin arvoon (koska ne jätettiin porraskunktioiden määrittelyssä huomioimatta).

Määritelmä. Funktio $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on *paloittain jatkuva* välillä $[a, b]$, jos välillä $[a, b]$ on korkeintaan äärellisen monta sellaista pistettä, jossa f ei ole jatkuva.

1.3. Seuraus. *Paloittain jatkuva funktio Riemann-integroituva.*

Riemannin summat.

Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ rajoitettu ja olkoon $P = (a = x_0, x_1, \dots, x_n = b)$ välin $[a, b]$ jako. Merkitään $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ja

$$|P| = \max\{\ell(I_k) = x_k - x_{k-1} : k = 1, 2, \dots, n\},$$

mikä on suurimman osavälin pituus. Valitaan *mielivaltainen* $\xi_k \in I_k$ ja merkitään

$$S_P := S_P(f, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\ell(I_k)$$

ja kutsutaan tätä f :n (jakoon P liittyväksi) *Riemannin summaksi*. Huomaa, että Riemannin summa on porraskfunktion g integraali, missä $g = f(\xi_k)$ välillä I_k .

”Tihennetään jako” niin, että $|P| \rightarrow 0$ ja tutkitaan ”raja-arvoa”

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(f, \xi)$$

ts.

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(f, \xi) = L,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla jaoilla P , joilla $|P| < \delta$ pätee

$$|S_P(f, \xi) - L| < \varepsilon$$

valittiinpa pisteet ξ_k miten hyvänsä.

Näin saadaan ekvivalentti määritelmä Riemann-integraalille:

1.4. Lause. *Rajoitettu funktio $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on Riemann-integroituva, jos ja vain, jos Riemannin summilla on raja-arvo*

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(f, \xi).$$

Tällöin

$$\int_a^b f = \lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(f, \xi).$$

Todistus. $\Rightarrow$: Olkoon f integroituva ja $\varepsilon > 0$. Valitaan Riemannin ehdon 1.1 avulla porraskfunktiot g ja h siten, että

$$g \leq f \leq h$$

ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Olkoon $P_0 = (z_0, z_1, \dots, z_{m_0})$ välin $[a, b]$ jako siten, että jaon pisteet ovat sekä h :n että g :n porraspisteitä. Tarkastellaan nyt välin $[a, b]$ jakoa $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$, jolle $|P| < |P_0|$. Tällöin Riemannin summa $S_P(f, \xi)$ on erään porraskfunktion s integraali. Edelleen

$$g \leq s = f(\xi_k) \leq h$$

kaikilla niillä osaväleillä $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, jotka eivät sisällä jaon P_0 pisteitä. Korjataan porraskfunktioita g ja h niillä osaväleillä, jotka sisältävät jaon P_0 pisteitä: olkoon $M > 0$ siten, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$ ja määritellään

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x), & \text{jos } x \in I_k \text{ ja } z_j \notin I_k \text{ kaikilla } j = 0, 1, \dots, m_0 \\ -M, & \text{jos } x \in I_k \text{ ja } z_j \in I_k \text{ jollakin } j = 0, 1, \dots, m_0 \end{cases}$$

ja

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(x), & \text{jos } x \in I_k \text{ ja } z_j \notin I_k \text{ kaikilla } j = 0, 1, \dots, m_0 \\ M, & \text{jos } x \in I_k \text{ ja } z_j \in I_k \text{ jollakin } j = 0, 1, \dots, m_0. \end{cases}$$

Tällöin $\tilde{g}$ ja $\tilde{h}$ ovat porraskfunktioita ja

$$\tilde{g} \leq s \leq \tilde{h}.$$

Voidaan olettaa, että $-M \leq g \leq h \leq M$, joten $\tilde{h} - \tilde{g} \leq 2M$. Siten (koska porraskfunktioiden arvoa muutettiin korkeintaan m_0 välillä)

$$\int_a^b \tilde{h} - \int_a^b \tilde{g} \leq \int_a^b h - \int_a^b g + m_0|P|2M < \frac{\varepsilon}{2} + m_0|P|2M.$$

Näin ollen, jos valitaan

$$\delta = \min(|P_0|, \frac{\varepsilon}{m_0 2M})$$

ja vaaditaan, että $|P| < \delta$, saadaan

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f - S_P \right| &= \left| \int_a^b f - \int_a^b s \right| \leq \int_a^b \tilde{h} - \int_a^b \tilde{g} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + m_0|P|2M < \frac{\varepsilon}{2} + m_0 2M \frac{\varepsilon}{m_0 2M} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Siis Riemannin summien raja-arvo on olemassa ja

$$\int_a^b f = \lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(f, \xi).$$

$\Leftarrow$: Olkoon

$$\lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(f, \xi) = L$$

kaikilla pisteiden ξ_k valinnoilla. Ts. jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että kaikilla jaoilla P , joilla $|P| < \delta$ pätee

$$|S_P(f, \xi) - L| < \varepsilon$$

valittiinpa pisteet ξ_k miten hyvänsä. Olkoon nyt $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ välin $[a, b]$ jako siten, että $|P| < \delta$ ja valitaan pisteet $\underline{\xi}_k, \bar{\xi}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ siten, että

$$f(\underline{\xi}_k) \leq \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f + \frac{\varepsilon}{b-a}$$

ja

$$f(\bar{\xi}_k) \geq \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f - \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Tällöin porrasfunktioille g ja h ,

$$g(x) = f(\underline{\xi}_k) - \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ kun } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

ja

$$h(x) = f(\bar{\xi}_k) + \frac{\varepsilon}{b-a}, \text{ kun } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

pätee $g \leq f \leq h$ ja

$$\begin{aligned} \int_a^b h - \int_a^b g &= \\ &= S_P(f, \bar{\xi}) + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1}) - S_P(f, \underline{\xi}) + \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{b-a} (x_k - x_{k-1}) \\ &\leq |S_P(f, \bar{\xi}) - L| + \varepsilon + |L - S_P(f, \underline{\xi})| + \varepsilon \\ &< 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Näin ollen f on Riemannin ehdon 1.1 nojalla integroituva. □

Integraalin ominaisuuksia.

Integraalin ominaisuuksia etsittäessä on pidettävä mielessä integraalin määrittely: ensin porrasfunktioiden integraali ja sitten rajalle (tai supremumin ja infimumin otto). Tästä seuraa, että *integraalien ominaisuuksien todistukset on yleensä aina parasta palauttaa porrasfunktioita koskeviksi väitteiksi* (joille ne on useinmiten helpoja) ja sitten vain todeta, ettei rajankäynti tuota vaikeuksia.

1.5. Lause. (additiivisuus) *Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ rajoitettu ja $c \in]a, b[$. Tällöin f on Riemann-integroituva välillä $[a, b]$, jos ja vain, jos f on Riemann-integroituva väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$. Tällöin*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Todistus. Väite seuraa siitä, että piste c voidaan ottaa porraskunktioiden (uudeksi) jakopisteeksi: Jos g on porraskunktio välillä $[a, b]$, niin rajoittumat

$$g|_{[a,c]} = p_1 \text{ ja } g|_{[c,b]} = p_2$$

ovat porraskunktioita väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$ (vastaavasti). Olkoon

$$P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

tähän liittyvä jako, missä $c = x_k$. Tällöin (tässä $\bar{x}_j \in]x_{j-1}, x_j[$)

$$\begin{aligned} \int_a^b g &= \sum_{j=1}^n g(\bar{x}_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \sum_{j=1}^k g(\bar{x}_j)(x_j - x_{j-1}) + \sum_{j=k+1}^n g(\bar{x}_j)(x_j - x_{j-1}) \\ &= \int_a^c g + \int_c^b g, \end{aligned}$$

joten väite tosi porraskunktioiden integraaleille. Yleinen tapaus seuraa ottamalla sup ja inf yli sopivien porraskunktioiden. $\square$

Tähän mennessä integraali $\int_a^b$ on määritely vain, kun $a < b$. Laajennetaan määritelmää:

Määritelmä. Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ Riemann-integroituva. Määritellään

$$\int_b^a f := - \int_a^b f$$

ja

$$\int_a^a g := 0,$$

on g mikä tahansa pisteessä a määritelty $\mathbf{R}$ -arvoinen funktio.

Huomautus. Integraalien additiivisuuslause säilyy voimassa: kaikilla $a, b, c \in \mathbf{R}$

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f,$$

kunhan f on integroituva po. väleillä.

1.6. Lause. (lineaarisuus) *Olkoot f ja g Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$ ja $\lambda \in \mathbf{R}$. Tällöin λf ja $f + g$ ovat Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$ ja*

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$$

ja

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Todistus. Joko havaitaan, että väite selvä porraskätköille, josta Lause seuraa ottamalla sup ja inf, tai Riemannin summien avulla:

$$S_P(f + g, \xi) = S_P(f, \xi) + S_P(g, \xi)$$

joten

$$\begin{aligned} \int_a^b (f + g) &= \lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(f + g, \xi) \\ &= \lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(f, \xi) + \lim_{|P| \rightarrow 0} S_P(g, \xi) \\ &= \int_a^b f + \int_a^b g. \end{aligned}$$

Vakiolla kertominen samaan tapaan. □

Esimerkki. Olkoon

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Tällöin p on jatkuvana funktiona integroitava ja lauseen 1.6 avulla saadaan esimerkiksi 3, että

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) dx &= \sum_{j=0}^n a_j \int_a^b x^j dx = \sum_{j=0}^n a_j \frac{b^{j+1} - a^{j+1}}{j+1} \\ &= \frac{a_n}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}) + \frac{a_{n-1}}{n} (b^n - a^n) + \dots + \frac{a_1}{2} (b^2 - a^2) + a_0 (b - a). \end{aligned}$$

Integraalien arviointia.

Integraaleja ei yleensä pystytä laskemaan tarkasti. Usein kuitenkin sopiva arviointi riittää. Seuraava havainto (muunnelmiseen) on eräs keskeisimmistä arviointikeinoista.

1.7. Lause. Olkoon f Riemann-integroituva ja ei-negatiivinen välillä $[a, b]$. Tällöin

$$\int_a^b f \geq 0.$$

Todistus. Porrasfunktioille $g \equiv 0$ pätee $g \leq f$, joten

$$0 = \int_a^b g \leq \int_a^b f.$$

□

1.8. Seuraus. Olkoot f ja g integroituvia välillä $[a, b]$ siten, että $f \geq g$. Tällöin

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Todistus. Lauseen 1.6 nojalla $f - g \geq 0$ on integroituva, joten

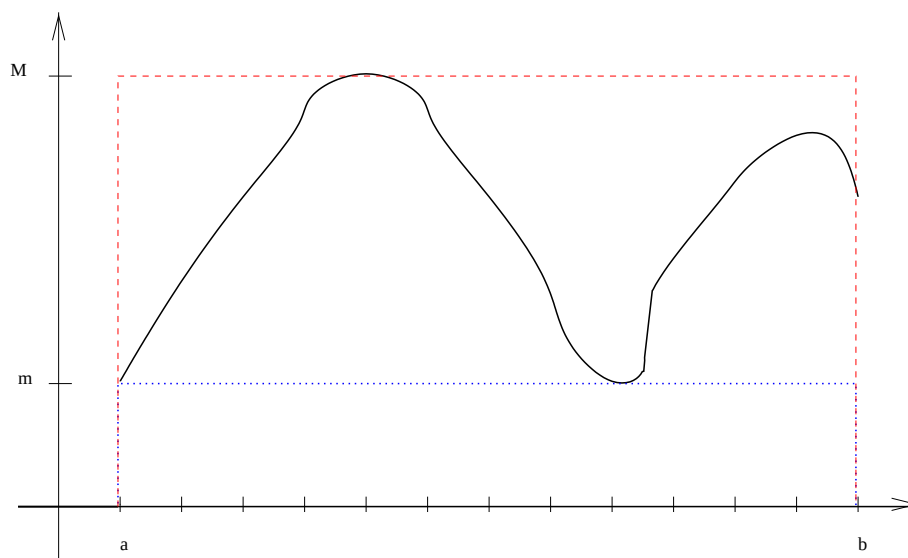
$$0 \leq \int_a^b (f - g) = \int_a^b f - \int_a^b g.$$

□

1.9. Seuraus. Olkoon f jatkuva välillä $[a, b]$. Jos $M = \max f$ ja $m = \min f$, niin

$$m(a - b) \leq \int_a^b f \leq M(a - b).$$

□



1.10. Lause. Olkoon f jatkuva ja ei-negatiivinen välillä $[a, b]$ ($a < b$). Jos

$$\int_a^b f = 0,$$

niin $f \equiv 0$ välillä $[a, b]$.

Todistus. Jos on $x_0 \in [a, b]$ siten, että $f(x_0) > 0$, niin (voidaan olettaa, että $x_0 \in]a, b[$ ja) on $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2} > 0 \quad \text{kaikilla } x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta],$$

joten

$$\begin{aligned} \int_a^b f &= \int_a^{x_0-\delta} f + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f + \int_{x_0+\delta}^b f \\ &\geq \int_a^{x_0-\delta} 0 + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{f(x_0)}{2} dx + \int_{x_0+\delta}^b 0 \\ &= 0 + 2\delta \frac{f(x_0)}{2} + 0 \\ &= \delta f(x_0) > 0, \end{aligned}$$

mikä on ristiriita ja väite tosi. □

Määritelmä. Olkoon $f: A \rightarrow \mathbf{R}$. Määritellään f :n *positiiviosa* $f^+: A \rightarrow \mathbf{R}$ ja f :n *negatiiviosa* $f^-: A \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f^+(x) := \max(f(x), 0) = \begin{cases} f(x), & \text{kun } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{kun } f(x) \leq 0, \end{cases}$$

ja

$$f^-(x) := \max(-f(x), 0) = \begin{cases} -f(x), & \text{kun } f(x) \leq 0 \\ 0, & \text{kun } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Tällöin f :n itseisarvo on $|f|: A \rightarrow \mathbf{R}$,

$$|f|(x) := |f(x)| = f^+(x) + f^-(x).$$

Huomautus. Huomaa, että $f^+ \geq 0$, $f^- \geq 0$ ja $|f| \geq 0$ ja

$$f = f^+ - f^-.$$

1.11. Lause. Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ rajoitettu. Tällöin f on Riemann-integroituva, jos ja vain, jos sekä f^+ ja f^- ovat Riemann-integroituvia. Tällöin

$$\int_a^b f = \int_a^b f^+ - \int_a^b f^-$$

ja myös $|f|$ on Riemann-integroituva.

Todistus. $\Leftarrow$: Seuraa Lauseesta 1.6, koska $f = f^+ - f^-$.

$\Rightarrow$: Jos g ja h ovat porrasfunktioita välillä $[a, b]$ siten, että $g \leq f \leq h$ ja

$$\int_a^b h - \int_a^b g < \varepsilon,$$

niin g^+ ja h^+ ovat porrasfunktioita ja $g^+ \leq f^+ \leq h^+$ sekä

$$h^+(x) - g^+(x) \leq h(x) - g(x). \quad (\text{miksi?})$$

Siten

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \int_a^b h - \int_a^b g = \int_a^b (h(x) - g(x)) dx \\ &\geq \int_a^b h^+(x) - g^+(x) dx = \int_a^b h^+(x) dx - \int_a^b g^+(x) dx, \end{aligned}$$

joten f^+ on Riemannin ehdon 1.1 nojalla integroituva. Koska $f^- = f^+ - f$, on myös f^- integroituva, ja edelleen $|f| = f^+ + f^-$ on myös. $\square$

1.12. Lause. Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ Riemann-integroituva. Tällöin

$$\left| \int_a^b f dx \right| \leq \int_a^b |f| dx.$$

Todistus. Koska $f \leq |f|$ ja $-f \leq |f|$, on

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \quad \text{ja} \quad - \int_a^b f = \int_a^b (-f) \leq \int_a^b |f|,$$

mistä väite. $\square$

Huomautuksia. a) Epäyhtälö edellä voi olla aito. Esimerkiksi,

$$\int_{-1}^1 x dx = 0 < 1 = \int_{-1}^1 |x| dx.$$

b) Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ graafin ja x -akselin väliin välillä $[a, b]$ olevan alueen pinta-ala on

$$\int_a^b |f| = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^-.$$

1.13. Lause. Olkoot f ja g Riemann-integroituvia. Tällöin tulo fg on myös Riemann-integroituva.

Varo. Yleensä

$$\int_a^b (fg) \neq \left(\int_a^b f \right) \left(\int_a^b g \right).$$

Todistus. (vrt. tulon jatkuvuuden tai raja-arvon todistus!) **1.** Oletetaan ensiksi, että $f, g \geq 0$.

Olkoon $M > 0$ sellainen, että $f, g \leq M$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan porrasfunktiot g_f, h_f ja g_g, h_g siten, että

$$g_f \leq f \leq h_f \leq M \quad \text{ja} \quad g_g \leq g \leq h_g \leq M$$

ja

$$\int_a^b h_f - \int_a^b g_f < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{ja} \quad \int_a^b h_g - \int_a^b g_g < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Tällöin $g_f g_g$ ja $h_g h_f$ ovat porrasfunktioita ja

$$g_f g_g \leq fg \leq h_f h_g$$

ja (koska $h_g \leq M$ ja $g_f \leq M$)

$$\begin{aligned} \int_a^b h_f h_g - \int_a^b g_f g_g &= \int_a^b (h_f - g_f) h_g + \int_a^b g_f (h_g - g_g) \\ &\leq M \int_a^b (h_f - g_f) + M \int_a^b (h_g - g_g) \\ &< M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

joten Riemannin ehdon 1.1 nojalla fg on integroituva.

2. Jos f ja g ovat mitä tahansa integroituvia funktioita, niin koska $f = f^+ - f^-$ ja $g = g^+ - g^-$, on

$$fg = f^+ g^+ - f^+ g^- - f^- g^+ + f^- g^-,$$

joka on kohdan **1.** nojalla Riemann-integroituvien funktioiden summana integroituva (ks. 1.6). $\square$

Huomautus. Riemann-integroituvat funktiot voidaan karakterisoida *Lebesguen ehdon* avulla (ei tod.):

Rajoitettu funktio $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on Riemann-integroituva, jos ja vain, jos f :n epäjatkuvuuspisteiden joukko on nollamittainen.

Tässä: joukko $A \subset \mathbf{R}$ on *nollamittainen* tarkoittaa, että kaikilla $\varepsilon > 0$ on jono avoimia välejä I_j , $j = 1, 2, \dots$, siten, että

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \ell(I_j) < \varepsilon.$$

Esimerkiksi $\mathbf{Q}$ on nollamittainen, mutta $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ei ole.

Integraalit keskiarvoina.

Äärellisen monen pisteen $x_1, x_2, \dots, x_n$ aritmeettinen keskiarvo on

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Jos halutaan laskea funktion f keskiarvo välillä $[a, b]$, on luonnollista laskea ensin f :n arvojen keskiarvo äärellisen monessa pisteessä,

$$\text{ka} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n},$$

ja antaa sitten pisteiden määrän n kasvaa, $n \rightarrow \infty$. Kun väli $[a, b]$ jaetaan tasavälein, jakopisteinä $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, on

$$x_j - x_{j-1} = \frac{b - a}{n}$$

ja

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} = \frac{1}{b - a} \sum_{j=1}^n f(x_j)(x_j - x_{j-1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx,$$

jos f on Riemann-integroituva (Riemannin summat!). Toisin sanoen, f :n äärellisen monen pisteen arvojen keskiarvo lähestyy kohti arvoa

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx = \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b dx} =: \int_a^b f(x) dx,$$

jota kutsutaan f :n keskiarvoksi välillä $[a, b]$.

Jatkuva funktio saa keskiarvonsa välillä $[a, b]$:

1.14. Lause. (Integraalilaskennan väliarvolause (IVAL)/ mean value thm)

Olko f jatkuva välillä $[a, b]$. Tällöin on olemassa $\xi \in [a, b]$, jolle

$$(*) \quad \int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Todistus. Olkoon $m = \min f$ ja $M = \max f$, jolloin

$$m(b - a) \leq \int_a^b f dx \leq M(b - a),$$

joten

$$m \leq \mu := \int_a^b f \leq M.$$

Koska f saa arvot m ja M , niin Bolzanon lauseen nojalla f saa myös niiden välissä olevan arvon μ , ts. on olemassa $\xi \in [a, b]$, jolle

$$f(\xi) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx.$$

□

Huomautus. IVALin 1.14 kaavassa (*) voi olla myös $b \leq \xi \leq a$.

Integraalilaskennan väliarvolauseesta on myös painotettujen keskiarvojen muoto:

1.15. Lause. Olkoot f ja p Riemann-integroituvia ja $p \geq 0$. Tällöin

$$m \int_a^b p \, dx \leq \int_a^b f p \, dx \leq M \int_a^b p \, dx,$$

missä $m = \inf f$ ja $M = \sup f$, ts. f :n painotettu keskiarvo

$$\mu = \frac{\int_a^b f p \, dx}{\int_a^b p \, dx} \quad (\text{mikäli } \int_a^b p > 0)$$

on f :n supremumin ja infimumin välissä.

Todistus. Koska $mp \leq fp \leq Mp$, on

$$m \int_a^b p = \int_a^b mp \leq \int_a^b fp \leq \int_a^b Mp = M \int_a^b p.$$

□

Koska jatkuva funktio saavuttaa suurimman ja pienimmän arvonsa välisetkin arvot (Bolzanon lause), saadaan

1.16. Lause. (Yleistetty integraalilaskennan väliarvolause)

Olkoon f jatkuva ja p ei-negatiivinen, Riemann-integroituva välillä $[a, b]$. Tällöin on olemassa $\xi \in [a, b]$, jolle

$$\int_a^b f p \, dx = f(\xi) \int_a^b p \, dx.$$

□

Integraali ylärajansa funktiona.

Määritelmä. (integraalifunktio)

Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ Riemann-integroituva. Funktio $F: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ on f :n (eräs) integraalifunktio,¹

jos on olemassa $\alpha \in [a, b]$, jolle

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(y) \, dy \text{ kaikilla } x \in [a, b].$$

¹Myöhemmin, Lauseen 3.3 jälkeen laajennamme integraalifunktion käsitettä niin, että myös $F + \text{vakio}$ on aina integraalifunktio, jos F on. Ole tarkkana, mitä kukin integraalifunktiolla tarkoittaa!

Huomautus. Vaihtamalla alarajaa $\alpha \leftrightarrow \tilde{\alpha}$ saadaan uusi integraalifunktio.

Huomautus. Määrätty integraali (eli Riemannin integraali) saadaan integraalifunktiosta: jos F on f :n integraalifunktio, niin

$$\begin{aligned}\int_a^b f(y) dy &= \int_a^{\alpha} f(y) dy + \int_{\alpha}^b f(y) dy \\ &= - \int_{\alpha}^a f(y) dy + \int_{\alpha}^b f(y) dy = -F(a) + F(b) \\ &=: \int_a^b F(y) =: F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Huomautus. Kaksi f :n integraalifunktiota eroavat toisistaan vakiolla:

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^x f(y) dy - \int_{\tilde{\alpha}}^x f(y) dy &= \int_{\alpha}^x f(y) dy + \int_x^{\tilde{\alpha}} f(y) dy \\ &= \int_{\alpha}^{\tilde{\alpha}} f(y) dy = \text{vakio kaikilla } x \in [a, b].\end{aligned}$$

1.17. Lause. Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ Riemann-integroituva. Tällöin f :n integraalifunktio on jatkuva.

Todistus. Kaikilla $x, y \in [a, b]$

$$\begin{aligned}|F(x) - F(y)| &= \left| \int_{\alpha}^x f(t) dt - \int_{\alpha}^y f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_{\alpha}^x f(t) dt + \int_y^{\alpha} f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_y^x f(t) dt \right| \leq \int_y^x |f(t)| dt \\ &\leq \sup |f| |x - y| < \varepsilon,\end{aligned}$$

kun

$$|x - y| < \frac{\varepsilon}{\sup |f| + 1} := \delta.$$

(Erityisesti F on Lipschitz-jatkuva.)

□

Huomautus. Ei-negatiivisen integroituvan funktion integraalifunktio on kasvava (ja ei-positiivisen vähenevä).

Logaritmin määrittely integraalin avulla.

Analyysi 1 -kurssilla määrittelimme logaritmifunktion eksponenttifunktion käänteisfunktiona – eksponenttifunktio taas määriteltiin rajaprosessin avulla. Nyt näytämme, että logaritmi voitaisiin yhtä hyvin määritellä integraalin avulla (ja käänteisfunktiona eksponenttifunktio). Vaihtoehtoisesti, alla olevan voi käsittää funktion $\frac{1}{x}$ integraalifunktion määrittämiseksi.

Olkoon $x > 0$. Merkitään $\frac{1}{z}$:n integraalifunktiota

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{z} dz.$$

(Koska $\frac{1}{z}$ on rajoitettu ja jatkuva kaikilla väleillä $[a, b]$, kun $a, b > 0$, on integraali hyvin määritelty. Osoitamme, että $f(x) = \log x$.)

Integraalifunktion ominaisuuksien perusteella $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$ on kasvava ja jatkuva. Edelleen, $f(1) = 0$, $f(x) < 0$, kun $0 < x < 1$ ja $f(x) > 0$, kun $x > 1$.

1.18. Lause. *Integraalifunktiolle $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$,*

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{z} dz, \quad x > 0,$$

pätee

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

kaikilla $x, y > 0$.

Todistus. Olkoon ensin $x > 1$. Tällöin yhteenlaskulause

$$f(xy) - f(y) = f(x)$$

on ekvivalentti lausekkeen

$$\int_y^{xy} \frac{1}{z} dz = \int_1^x \frac{1}{s} ds$$

kanssa (missä - selvyyden vuoksi - nimettiin integroimismuuttuja uudelleen). Näiden lausekkeiden yhtäsuuruus nähdään helposti Riemannin summan avulla. Jaetaan väli $[1, x]$ n (yhtäsuureen) osaväliin, jakopisteinä $1 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = x$, jolloin

$$\int_1^x \frac{1}{s} ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{s_j} (x_j - x_{j-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{s_j} \frac{x - 1}{n},$$

missä $s_j \in]x_{j-1}, x_j[$ on mv. Nyt pisteet $y = yx_0, yx_1, yx_2, \dots, yx_n = yx$ muodostavat välin $[y, yx]$ jaon ja $ys_j \in]yx_{j-1}, yx_j[$, joten

$$\begin{aligned} \int_y^{xy} \frac{1}{z} dz &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{ys_j} (yx_j - yx_{j-1}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{1}{s_j} \frac{x - 1}{n} \\ &= \int_1^x \frac{1}{s} ds. \end{aligned}$$

Väite on siten todistettu, jos $x > 1$.

Jos $x = 1$, on $f(x) = 0$, joten $f(xy) = f(y) = f(x) + f(y)$.

Tapaus $0 < x < 1$ saadaan hoidelluksi, kun havaitaan, että silloin $\frac{1}{x} > 1$, joten

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &= f(x) + f\left(\frac{1}{x}xy\right) \\ &= f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f(xy) = f\left(x\frac{1}{x}\right) + f(xy) \\ &= f(1) + f(xy) = f(xy). \end{aligned}$$

□

Nyt induktiolla nähdään, että

$$f(x^n) = nf(x) \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{N} \text{ ja } x > 0,$$

ja edelleen kaikilla $n \in \mathbf{N}$ ja $x > 0$

$$\begin{aligned} f(x^{-n}) &= f\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right) = nf\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= n\left(f\left(x\frac{1}{x}\right) - f(x)\right) = n(f(1) - f(x)) \\ &= -nf(x). \end{aligned}$$

Siten rationaalisilla $q = \frac{n}{m}$ pätee

$$(*) \quad f(x^q) = \frac{1}{m}f((x^q)^m) = \frac{1}{m}f(x^n) = \frac{n}{m}f(x) = qf(x).$$

Seuraavaksi muistamme, että

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

joten integraalifunktion jatkuvuuden nojalla

$$f(e) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Edelleen integraalilaskennan väliarvolauseen 1.14 nojalla

$$f\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{s} ds = \frac{1}{\xi} \frac{1}{n},$$

missä $1 \leq \xi \leq 1 + \frac{1}{n}$. Siten

$$f(e) = \lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Nyt kaavan (*) nojalla saamme kaikilla rationaalisilla q :

$$f(e^q) = qf(e) = q,$$

joten, koska f on jatkuva, pätee kaikilla $y \in \mathbf{R}$:

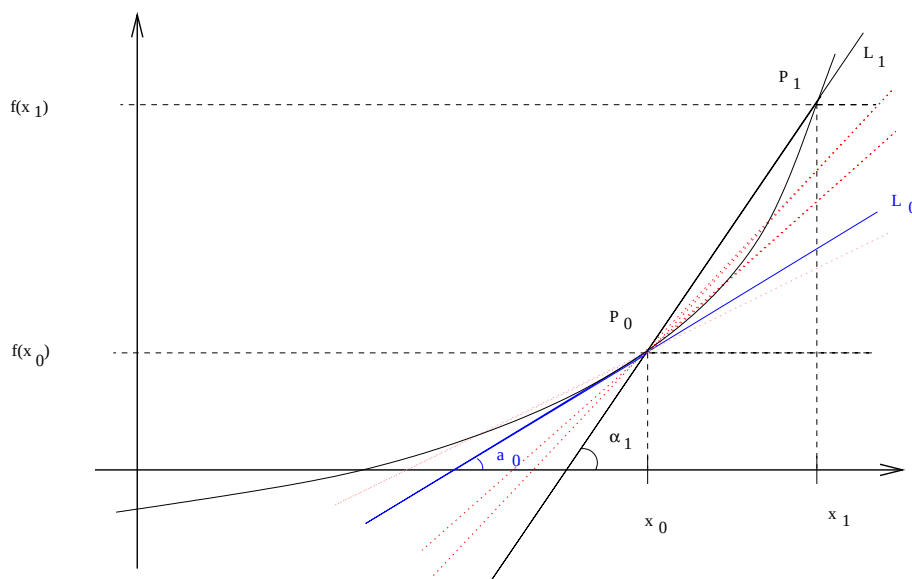
$$f(e^y) = y.$$

Siten f on eksponenttifunktion käänteisfunktio, eli

$$\log x = f(x) = \int_1^x \frac{1}{s} ds \quad \text{kaikilla } x > 0.$$

2. Derivaatta

Derivaatan määrittäminen on intuitiivisesti yhtä havainnollista kuin integraalin tulkinta pinta-alana. Tarkastellaan sileää käyrää $y = f(x)$ ja määritetään sen *tangentti* pisteessä $P_0 = (x_0, f(x_0))$. Geometrisen intuition mukaan tangentti saadaan kun piirretään suora L_1 (*sekantti*), joka kulkee pisteiden P_0 ja $P = (x_1, f(x_1))$ kautta ja viedään x_1 lähemmäksi ja lähemmäksi pistettä x_0 , jolloin piste P_1 ”liukuu” kohti pistettä P_0 pitkin käyrää $y = f(x)$. Lopulta L_1 lähestyy tangenttisuoraa L_0 , joka kulkee pisteen P_0 kautta.



Suoran L_0 karakterisoi se kulma α_0 , jonka L_0 muodostaa positiiviseen x -akseliin nähden. Analyttisesti tämä kulma α_0 voidaan määrittää seuraavasti: Olkoon α_1 sekantin L_1 ja positiivisen x -akselin välinen kulma, jolloin

$$\tan \alpha_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

jolloin rajakulma α_0 (paitsi, jos $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ – ja L_0 pystysuora tangentti) saadaan raja-arvona

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \rightarrow x_0} \tan \alpha_1 = \tan \alpha_0.$$

Tätä tangentin kulmakerrointa $\tan \alpha_0$ kutsutaan f :n derivaataksi pisteessä x_0 . Tarkkaavainen lukija tietysti kysyy yllä kuvatun päättelyn pätevyyttä: ei ole mitenkään selvää, että sekanttien kulmakertoimilla edellä on raja-arvoa, kun $x_1 \rightarrow x_0$.

On äärimmäisen tärkeitä, että annamme derivaatalle tarkan analyttisen merkityksen, joka selittää geometrista intuitioamme, eikä päinvastoin.

Määritelmä. (derivaatta, derivoituva) Olkoon $f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ ja $x \in]a, b[$ (huomaa: *avoin väli*!). Sanotaan, että f on *derivoituva pisteessä* x , jos raja-arvo

$$(2.1) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

on olemassa (ja reaaliluku!). Tällöin po. raja-arvoa sanotaan f :n *derivaataksi pisteessä* x ja merkitään²

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Osamäärää

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0,$$

kutsutaan f :n *erotusosamääräksi pisteessä* x .

Jos f on derivoituva jokaisessa pisteessä $x \in]a, b[$, niin sanotaan että f on *derivoituva välillä* $]a, b[$; tällöin derivaatta f' määrittelee funktion $f':]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$. Jos f' on lisäksi jatkuva funktio, niin sanotaan, että f on *jatkuvasti derivoituva välillä* $]a, b[$.

Huomaa, että derivaattaa eli erotusosamäärän raja-arvoa ei voi laskea vain sijoittamalla $h = 0$ siihen lausekkeeseen, koska se johtaa merkityksettömään $\frac{0}{0}$ tulokseen. Siksi on käytettävä Analyysi 1 -kurssilla opittua teoriaa. Huomaa edelleen, että raja-arvossa (2.1) h :n pitää sallia lähestyä nollaa *miten hyvänsä*.

Esimerkkejä.

i) (*Lineaarisen funktion derivaatta*)

Olkoon

$$f(x) = cx + d.$$

Tällöin

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c(x+h) + d - cx - d}{h} = \frac{ch}{h} = c,$$

joten f on derivoituva ja

$$f'(x) = c,$$

eli lineaarifunktion derivaatta on vakio. Erityisesti, jos f itse on vakiofunktio ts. kun $c = 0$, on $f'(x) \equiv 0$, ts. *vakiofunktion derivaatta häviää*.

ii) (*Monomin derivaatta*)

Olkoon $f(x) = x^n$, missä $n \in \mathbf{N}$. Tällöin

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = nx_0^{n-1},$$

koska (induktio) kaikilla $x \neq x_0$

$$\begin{aligned} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ &\rightarrow x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \dots + x_0 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ &= nx_0^{n-1}. \end{aligned}$$

²muita käytössä olevia merkintöjä ovat mm.

$$f'(x) = \frac{df}{dx}(x) = Df(x) \dots$$

Siis

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

iii) (*Sinin derivaatta*)

Ensiksi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

koska melkein suoraan sinin määrittelystä seuraa, että

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x},$$

kun $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ ja

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1;$$

(muista suppiloperiaate).

Edelleen,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0,$$

koska

$$\begin{aligned} \frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x + 1} \sin x \\ &\rightarrow -1 \frac{1}{2} 0 = 0. \end{aligned}$$

Näistä seuraa, että

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h} \\ &\rightarrow \cos x, \text{ kun } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Siis

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

Muistamalla, että $\cos x = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$ saadaan helposti (HT), että

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x.$$

Luvun alussa lähdimme naiivista geometrisesta tangentin mielikuvasta, mikä ohjasi meitä määrittelemään derivaatan käsitteen tarkasti. Nyt *määritellään*, mitä käyrän tangentilla tarkkaan ottaen tarkoitetaan – määritelmä vastaa geometrasta mielikuvaamme.

Määritelmä. (käyrän tangentti) Olkoon f derivoituva pisteessä x_0 . Käyrän $y = f(x)$ tangentti pisteessä $(x_0, f(x_0))$ on se pisteen $(x_0, f(x_0))$ kautta kulkeva suora L , jonka kulmakerroin on $f'(x_0)$, ts. tangentsuoran L yhtälö on

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Vaikka tangentti ja derivaatta on määriteltävä analyyttisen täsmällisesti, jotta niitä todella voitaisiin käyttää matematiikassa, niiden visuaalinen tulkinta äärimmäisen tärkeä apukeino. Esimerkiksi, intuitiivisesti väittämä

Funktio f on kasvava ($f(x) \leq f(y)$, kun $x < y$), kun $f' \geq 0$ ja vähenevä ($f(x) \geq f(y)$, kun $x < y$), kun $f' \leq 0$.

on ilmeinen, koska mikäli derivaatta $f'(x) \geq 0$, osoittaa käyrän tangentti yläviistoon (ja jos $f'(x) \leq 0$, osoittaa käyrän tangentti alaviistoon). Analyyttisen tarkasti tämä todistetaan myöhemmin (ks. 2.10).

Esimerkki. (*Derivaatta nopeutena*)

Tarve korvata intuitiivinen käsitys nopeudesta tai vauhdista johtaa myös samaan derivaatan käsitteeseen. Tarkastellaan suoralla liikkuvaa kappaletta (pistettä) (y -koordinaatti mitatkoon etäisyyttä suunnan huomioiden). Pisteen liike saadaan ajan funktiona lausekkeesta $y = f(t)$. Jos tämä on lineaarinen funktio, $f(t) = ct + b$, on liike tasaista, nopeudella c . Tällöin nopeus on

$$c = \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t},$$

kunhan $t_1 \neq t$. Jos taas liike ei ole tasaista, niin erotusosamäärä

$$\frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}$$

ilmaiseekin vain keskimääräisen nopeuden t :n ja t_1 :n välillä.

Hetkellinen nopeus ajanhetkellä t saadaan keskimääräisen nopeuden raja-arvona, kun $t_1 \rightarrow t$, eli se on f :n derivaatta (mikäli olemassa) t :n suhteen pisteessä t :

$$f'(t) = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}.$$

Esimerkiksi vapaasti putoavan kappaleen putoamismatka y ajan t funktiona on (kokemuspäisesti) verrannollinen putoamisajan neliöön,

$$y = f(t) = at^2,$$

a vakio, josta hetkellinen nopeus on

$$f'(t) = 2at.$$

Siis: putoamisnopeus on verrannollinen putoamisaikaan.

2.2. Lause. (Derivoinnin lineaarisuus) *Olkoot f ja g derivoituvia pisteessä $x \in]a, b[$ ja $c \in \mathbf{R}$. Tällöin $f + g$ ja cf ovat derivoituvia ja*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

ja

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

Todistus. Väite seuraa, koska

$$\frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \rightarrow f'(x) + g'(x)$$

ja

$$\frac{(cf)(x + h) - (cf)(x)}{h} = c \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \rightarrow cf'(x).$$

□

2.3. Seuraus. *n . asteen polynomi*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots a_1 x + a_0$$

on (jatkuvasti) derivoituva ja sen derivaatta on $(n - 1)$. asteen polynomi

$$p'(x) = na_n x^{n-1} + (n - 1)a_{n-1} x^{n-2} + \dots 2a_2 x + a_1.$$

Derivoituvuus ja jatkuvuus. Derivoituvuus on vahvempi ominaisuus kuin jatkuvuus:

2.4. Lause. *Jos f on derivoituva pisteessä x , niin f on jatkuva pisteessä x .*

Todistus. Koska

$$|f(x + h) - f(x)| = \left| \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \right| |h| \rightarrow |f'(x)| 0 = 0,$$

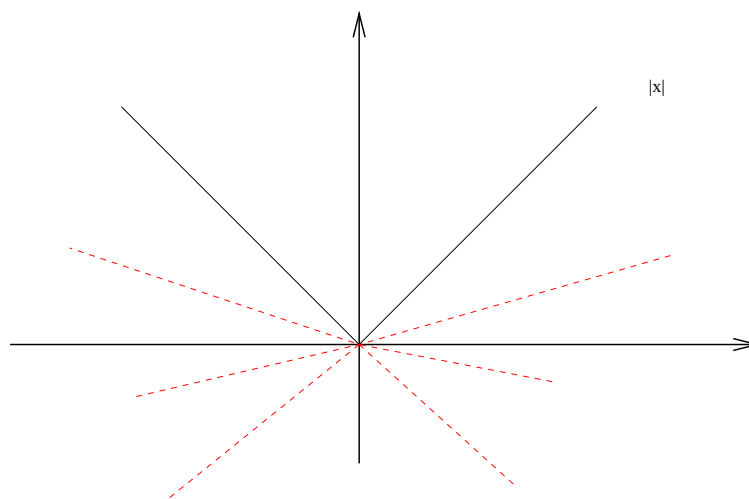
kun $h \rightarrow 0$, on

$$\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$$

ja f on siten jatkuva pisteessä x .

□

Lauseen 2.4 käänteinen väite ei ole tosi: on olemassa jatkuvia funktioita, jotka eivät ole derivoituvia. Weierstrass jopa konstruoi funktion, joka on kaikkialla jatkuva, mutta ei ole missään pisteessä derivoituva. Seuraavassa pari helppoa esimerkkiä.

Esimerkkejä.i) (*Kulmapiste*)

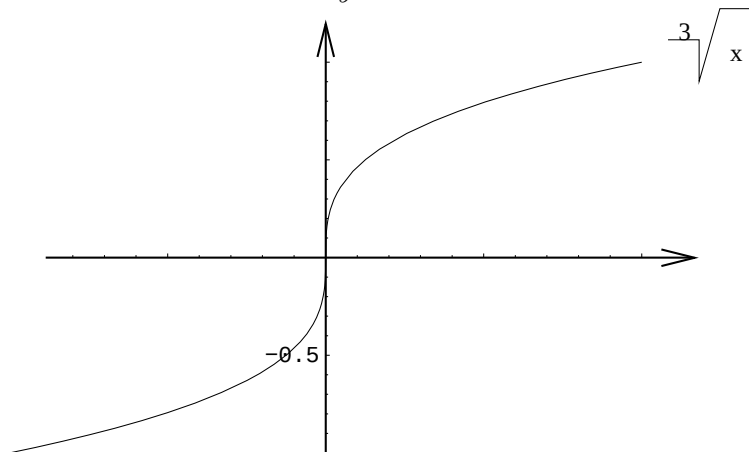
Jos funktion graafissa on terävä kulma tai kärki, ei funktio ole vastaavassa pisteessä derivoituva. Esim.

$$f(x) = |x|$$

on kaikkialla jatkuva. Sillä ei ole derivaattaa pisteessä $x = 0$, sillä

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1, & \text{jos } h > 0 \\ -1, & \text{jos } h < 0, \end{cases}$$

joten toispuoleiset raja-arvot, kun $h \rightarrow 0+$ ja $h \rightarrow 0-$ eivät ole samat, eikä raja-arvoa näin ole olemassa. Intuitiivisesti funktion *sileys* vastaa sen derivoituvuutta.

ii) (*Pystysuora tangentti*)

Olkoon

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}.$$

Tällöin f on määritelty kaikilla $x \in \mathbf{R}$ ja

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = h^{-\frac{2}{3}} \rightarrow \infty,$$

kun $h \rightarrow 0$. Siten f ei ole derivoituva origossa. Geometrisesti tämä tarkoittaa tangentin olevan pystysuora origossa.

Korkeammat derivaatat. Jos f on derivoituva välillä $]a, b[$, niin sen derivaatta f' määrittelee myös funktion $f':]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$, jolloin voidaan kysyä, onko derivaattafunktio f' derivoituva. Jos se on, niin sanotaan, että derivaatan derivaatta on f :n *toinen derivaatta*,

$$f''(x) = (f')'(x),$$

ts.

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h},$$

jos ko. raja-arvo on (reaalilukuna) olemassa.

Edelleen voidaan kysyä, onko toinen derivaattafunktio f'' derivoituva (mikäli se on jollain avoimella välillä olemassa), tämän derivaatta, mikäli olemassa on f :n *kolmas derivaatta* $f''' = f^{(3)}$ jne. Rekursiivisesti, olkoon f :n n . derivaatta $f^{(n)}$ olemassa välillä $]a, b[$. Funktio f ($n+1$). *derivaatta pisteessä* x on luku

$$f^{(n+1)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x)}{h},$$

mikäli ko. raja-arvo on (reaalilukuna) olemassa³.

Huomautus. Usein sanotaan, että funktio f itse on 0. derivaatta, $f = f^{(0)}$. Edelleen

$$f^{(1)} = f', \quad f^{(2)} = f''.$$

Jos kappaleen liikettä tulkitaan fysikaalisesti, kuten aiemmin, on toinen derivaatta nopeuden muutoksen mittari eli kappaleen *kiihtyvyys*. Vapaasti putoavan kappaleen esimerkkitapauksessa, putoamismatka oli hetkellä t

$$y = f(t) = at^2,$$

jolloin nopeus oli $f'(t) = 2at$ ja kiihtyvyys

$$f''(t) = 2a,$$

toisin sanoen putoamiskiihtyvyys on vakio (gravitaatio).

Negatiivinen toinen derivaatta tarkoittaa siten nopeuden hiipumista, positiivinen nopeuden kasvua.

Derivaatan ominaisuuksia.

Analyysi 1 -kurssilta muistamme, että suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio saavuttaa tällä välillä suurimman ja pienimmän arvonsa. Derivoituvalle funktiolle nämä maksimi- ja minimipisteet ovat joko derivaatan nollakohdissa tai välin päätepisteissä:

³Käytetään myös merkintöjä

$$f^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n} f = D^n f.$$

2.5. Lause. Olkoon f derivoituva pisteessä x_0 . Jos on olemassa sellainen x_0 :n sisältävä avoin väli I , jolla

$$f(x_0) \geq f(x)$$

kaikilla $x \in I$, niin $f'(x_0) = 0$.

Todistus. Jos $x \in I$, $x < x_0$, niin

$$0 \leq \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(x_0),$$

kun $x \rightarrow x_0^-$, joten $f'(x_0) \geq 0$. Edelleen, kun $z \in I$, $z > x_0$, niin

$$0 \geq \frac{f(z) - f(x_0)}{z - x_0} \rightarrow f'(x_0),$$

kun $z \rightarrow x_0^+$, joten $f'(x_0) \leq 0$. Siis $f'(x_0) = 0$. □

Derivaatta ilmaisee hetkellisen muutoksen suunnan:

2.6. Lause. Olkoon f derivoituva pisteessä x_0 .

i) Jos $f'(x_0) > 0$, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) < f(x_0) < f(t) \text{ kaikilla } x_0 - \delta < x < x_0 < t < x_0 + \delta.$$

ii) Jos $f'(x_0) < 0$, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) > f(x_0) > f(t) \text{ kaikilla } x_0 - \delta < x < x_0 < t < x_0 + \delta.$$

Todistus. Koska $i) \Rightarrow ii)$ selvästi, niin todistamme vain kohdan $i)$. Valitaan lukua $\varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2}$ vastaava $\delta > 0$ siten, että

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| < \varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2}$$

aina, kun $0 < |h| < \delta$. Siten kaikilla h , joilla $|h| \in]0, \delta[$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq f'(x_0) - \varepsilon = \frac{f'(x_0)}{2} > 0.$$

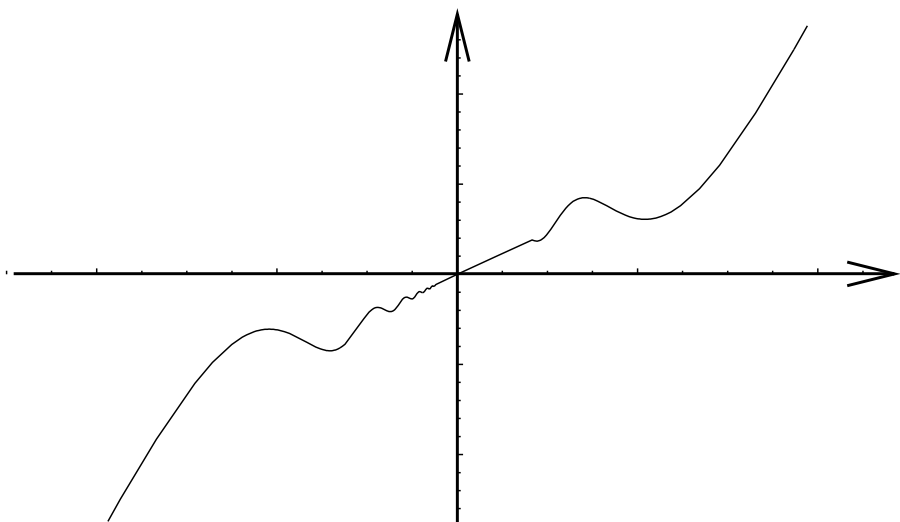
Erityisesti, jos $x_0 - \delta < x < x_0 < t < x_0 + \delta$, on

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0) \frac{f(x_0 + x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} < 0,$$

koska $x - x_0 < 0$, ja

$$f(t) - f(x_0) = (t - x_0) \frac{f(x_0 + t - x_0) - f(x_0)}{t - x_0} > 0,$$

koska $t - x_0 > 0$. □

**Huomautus.**

Ehdosta $f'(x_0) > 0$ **ei voi** päätellä, että f olisi kasvava x_0 :n missään ympäristössä. Tutki esimerkiksi funktiota

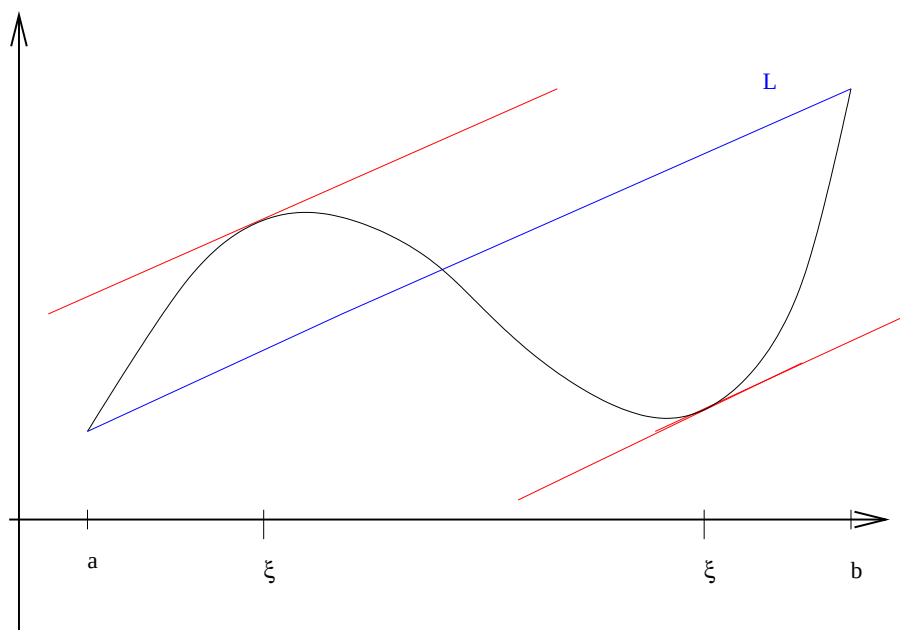
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{x}{2}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0, \end{cases}$$

mikä ei ole kasvava missään origon ympäristössä, vaikka $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$.

Seuraavaksi tarkastellaan erotusosamäärää

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ja oletetaan, että f on derivoituva välillä $[a, b]$, joten funktion graafilla on tangentti koko välillä. Yo. erotusosamäärä on pisteiden $(a, f(a))$ ja $(b, f(b))$ kautta kulkevan sekantin L kulmakerroin.



Jos tarkastellaan tämän sekantin L kanssa yhdensuuntaisia suoria, niin ainakin yksi niistä näyttäisi olevan graafin tangentti välillä $[a, b]$, ts. on piste $\xi \in]a, b[$, jolle

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Tämä ilmiö todistetaan *väliarvolauseessa*, joka on alkeisdifferentiaalilaskennan ehkä tärkein ja hyödyllisin lause.

2.7. Lause. (Väliarvolause, VAL) *Olko $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$. Tällöin on olemassa $\xi \in]a, b[$ siten, että*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

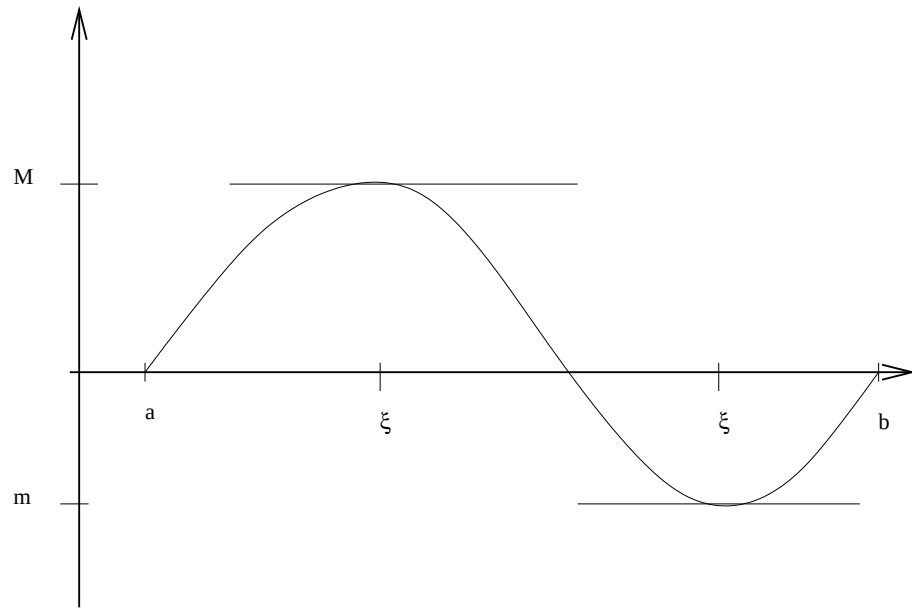
Jos derivaatta ei ole olemassa jokaisessa välin $]a, b[$ pisteessä, ei VALin väite enää päde, esim. $f(x) = |x|$ (HT).

Yleensä väliarvolauseen todistus on tapana palauttaa erääseen sen erikoistapaukseen, jonka todistamme ensiksi.

2.8. Lause. (Rolle) *Olko $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$ ja olko lisäksi*

$$f(a) = 0 = f(b).$$

Tällöin on olemassa $\xi \in]a, b[$ siten, että $f'(\xi) = 0$.



Todistus.

Jatkuvana funktiona f saavuttaa suurimman arvonsa M ja pienimmän arvonsa m välillä $[a, b]$. Koska $f(a) = 0 = f(b)$, on $m \leq 0 \leq M$. Jos $m = 0$ ja $M = 0$, niin $f \equiv 0$ ja $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, jolloin mikä hyvänsä $\xi \in]a, b[$ kelpaa.

Oletetaan sitten, että ainakin toinen luvuista m ja M on nolasta poikkeava. Silloin joko minimi tai maksimi saavutetaan jossakin pisteessä ξ *avoimella* välillä $]a, b[$. Lauseen 2.5 nojalla $f'(\xi) = 0$, ja lause on todistettu. $\square$

Esimerkki. Olko $P(x) = x^3 + 7x$. Tällöin $x = 0$ on P :n ainoa reaalinen nollakohta, koska jos olisi $x_0 \in \mathbf{R}$, jolle $P(x_0) = 0$, niin Rollen lauseen nojalla jollakin x 0 :n ja x_0 :n välillä, $x \neq 0$,

$$0 = P'(x) = 3x^2 > 0, \text{ kun } x \neq 0,$$

mikä on absurdia.

Väliarvolauseen 2.7 todistus. Tutkitaan apufunktiota

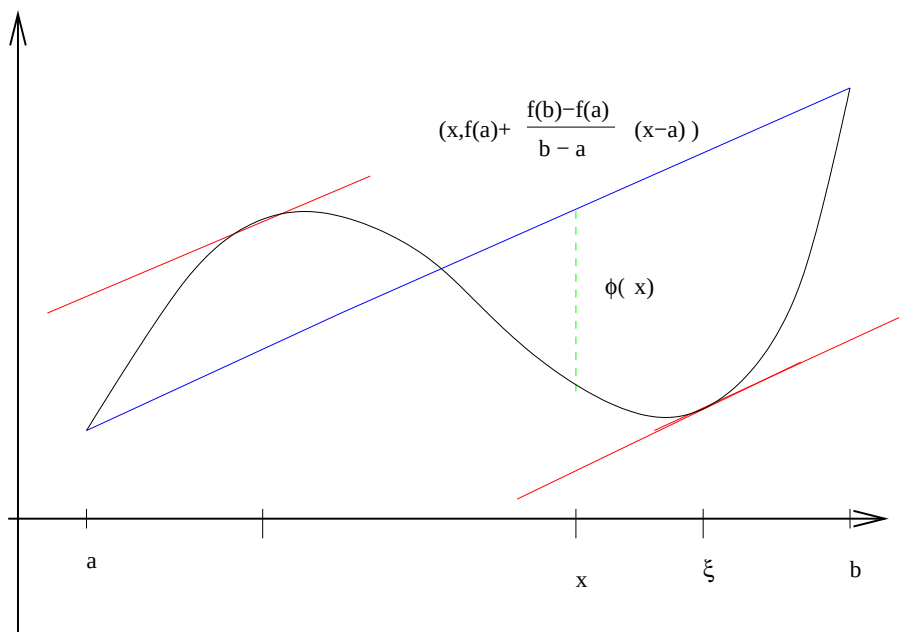
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b],$$

mikä geometrisesti tarkoittaa graafin pisteen $(x, f(x))$ pystysuoraa etäisyyttä sekantista. Koska φ on lineaarifunktion ja f :n summa on se derivoituva ja

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Koska lisäksi $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$, seuraa Rollen lauseesta, että on olemassa $\xi \in]a, b[$, jolle

$$0 = \varphi'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



□

Väliarvolauseen sovellutuksia.

Kirjataan muutamia väliarvolauseen lukuisista sovellutuksista.

Esimerkki. Kuinka suuri virhe tehdään, kun $\sqrt{2}$:lle käytetään likiarvoa 1.4?

Olkoon $f(x) = \sqrt{x}$, jolloin

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \text{kun } x > 0. \quad (\text{HT})$$

Huomataan, että f' on vähenevä. Koska

$$1.4^2 = 1.96 < 2,$$

on $1.4 < \sqrt{2}$. Väliarvolauseen nojalla on $\xi \in]1.4, \sqrt{2}[$, jolle

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sqrt{2} - 1.4 = f(2) - f(1.96) = f'(\xi)(2 - 1.96) \\ &\leq f'(1.96)(2 - 1.96) = \frac{0.04}{2 \cdot 1.4} \\ &= \frac{1}{70} \approx 0.0142857 \end{aligned}$$

2.9. Lause. Olkoon f derivoituva avoimella välillä $]a, b[$. Jos (jollain $M \in \mathbf{R}$)

$$|f'(x)| \leq M \text{ kaikilla } x \in]a, b[,$$

niin

$$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y| \text{ kaikilla } x, y \in]a, b[,$$

eli f on Lipschitz-jatkuva.

Todistus. Väliarvolauseen nojalla on ξ x :n ja y :n välissä siten, että

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| \leq M|x - y|.$$

□

Seuraava sovellus on havainnon mukaan ilmeinen, mutta sen todistaminen käyttämättä väliarvolauseetta olisi hieman tuskallista.

2.10. Lause. Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$.

- i) Jos $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, on f kasvava välillä $[a, b]$.
- ii) Jos $f'(x) \geq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$ ja jos $f' \not\equiv 0$ jokaisella osavälillä $]c, d[\subset]a, b[$, on f aidosti kasvava.
- iii) Jos $f'(x) \leq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$, on f vähenevä välillä $[a, b]$.
- iv) Jos $f'(x) \leq 0$ kaikilla $x \in]a, b[$ ja jos $f' \not\equiv 0$ jokaisella osavälillä $]c, d[\subset]a, b[$, on f aidosti vähenevä.

Todistus. Olkoot $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$. Tällöin on $\xi \in]x_1, x_2[$, jolle

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

joten $f(x_2) - f(x_1)$:llä ja $f'(\xi)$:llä on sama merkki. Kohdat i) ja iii) seuraavat.

Kohdat ii) ja iv). Yllä osoitetun nojalla f on monotoninen. Siten, jos $f(x_2) = f(x_1)$, on $f(x) = f(x_1)$ kaikilla $x \in]x_1, x_2[$. Siispä

$$f'(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in]x_1, x_2[,$$

mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa. □

2.11. Seuraus. Olkoon f derivoituva välillä I . Jos $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in I$, on f vakio.

Todistus. Lauseen 2.10 nojalla f on sekä kasvava että vähenevä, siis vakio. □

2.12. Seuraus. Välillä I derivoituville funktioille f ja g pätee

$$f'(x) = g'(x) \text{ kaikilla } x \in I$$

täsmälleen silloin, kun on olemassa vakio $c \in \mathbf{R}$, jolle

$$f(x) = g(x) + c \text{ kaikilla } x \in I$$

Todistus. Sovella Seurausta 2.11 funktioon $f - g$. □

2.13. Lause. (Yleistetty väliarvolause) Olkoon f ja g jatkuvia suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituvia avoimella välillä $]a, b[$. Jos

$$g'(x) \neq 0 \text{ kaikilla } x \in]a, b[,$$

niin on olemassa $\xi \in]a, b[$ siten, että

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Todistus. Havaitaan ensin, että väliarvolauseen nojalla on $x_0 \in]a, b[$ siten, että

$$g(b) - g(a) = g'(x_0)(b - a) \neq 0,$$

joten funktio

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

on jatkuva välillä $[a, b]$ ja derivoituva välillä $]a, b[$ (vertaa VALin todistus). Sovellaan Rollen lausetta tähän: koska $F(a) = 0$ ja

$$F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = 0,$$

niin Rollen lauseen 2.8 nojalla on $\xi \in]a, b[$ siten, että

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi),$$

joka onkin haluttu tulos. □

Yleistettyä väliarvolausetta käytetään todistettaessa seuraava, varsin näppärä keino raja-arvojen laskemiseksi, *l'Hospitalin sääntö*.

2.14. Lause. (l'Hospitalin sääntö) Olkoot f ja g derivoituvia avoimella välillä $]a, b[$ siten, että

$$g'(x) \neq 0 \text{ kaikilla } x \in]a, b[.$$

Jos

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0 \text{ ja } \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = 0$$

ja jos

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

niin osamäärällä $\frac{f(x)}{g(x)}$ on raja-arvo ja

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Todistus. Määrittelemällä

$$f(a) = 0 = g(a)$$

saadaan f ja g jatkuviksi suljetulla välillä $[a, x]$, on $x \in]a, b[$ mikä hyvänsä. Siten yleistettyä väliarvolauseetta 2.13 voidaan soveltaa välillä $[a, x]$. (Samalla havaitaan, että $g(x) \neq 0$ kaikilla $x \in [a, b[$.) Olkoon $\varepsilon > 0$ ja valitaan $\delta > 0$ siten, että

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon, \text{ kun } a < x \leq a + \delta.$$

Jos $z \in]a, a + \delta[$, niin yleistetyn väliarvolauseen nojalla on $\xi_z \in]a, z[$, jolle

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} - L \right| = \left| \frac{f'(\xi_z)}{g'(\xi_z)} - L \right| < \varepsilon,$$

koska $f(a) = 0 = g(a)$. □

Esimerkki. l'Hospitalin säännön avulla

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{40} - 1}{x^{39} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{40x^{39}}{39x^{38}} = \frac{40}{39}.$$

Huomautuksia. 1. Vastaava tulos pätee tietysti myös vasemmanpuoleisille raja-arvoille, ja siten myös varsinaisille raja-arvoille. Muista aina tarkistaa, että kaikki l'Hospitalin lauseen oletukset ovat voimassa!

2. Olkoon f ja g derivoituvia ja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ ja } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Jos raja-arvot

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = F \text{ ja } \lim_{x \rightarrow x_0} g'(x) = G \neq 0$$

ovat olemassa, niin

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{F}{G},$$

joten l'Hospitalin lauseen mukaan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}.$$

3. l'Hospitalin lausetta vastaava tulos pätee myös raja-arvoille $x \rightarrow \infty$ ja $x \rightarrow -\infty$ (muotoilu ja tod. HT).

4. l'Hospitalin lausetta vastaava tulos pätee myös " $\frac{\infty}{\infty}$ " muotoa oleville raja-arvoille (HT):

Olkoot f ja g derivoituvia avoimella välillä $]a, b[$ siten, että

$$g'(x) \neq 0 \text{ kaikilla } x \in]a, b[.$$

Jos

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \infty \text{ ja } \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$$

ja jos

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbf{R},$$

niin osamäärällä $\frac{f(x)}{g(x)}$ on raja-arvo ja

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Esimerkki. Mikä on raja-arvo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{2x^2},$$

vai onko sitä?

Määritellään

$$f(x) = 1 + x - e^x \text{ ja } g(x) = 2x^2,$$

jolloin f ja g derivoituvia sekä

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

ja

$$g'(x) = 4x \neq 0, \text{ kun } x \neq 0.$$

Siten l'Hospitalin säännön oletukset ovat voimassa ja saamme ($f'(x) = 1 - e^x$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{4x},$$

mikäli oikeanpuoleiset raja-arvot ovat olemassa. Koska derivaattojenkin osamäärän raja-arvo on muotoa $\frac{0}{0}$, sovellamme l'Hospitalin sääntöä derivaattafunktioihin f' ja g' (oletukset ovat voimassa!). Saamme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Siis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{2x^2} = -\frac{1}{4}.$$

Funktion approksimointi lineaarifunktioilla. Differentiaalit.

Olkoon f derivoituva pisteessä x , ts. f :n erotusosmäärällä pisteessä x on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Jos (kiinteällä h) merkitsemme

$$\epsilon(h) := \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x)$$

näemme, että derivaatan määrittelevä raja-arvoehto takaa, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Kääntäen, jos funktion f *muutos* tai *lisäys* pisteessä x voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x+h) - f(x) = Lh + h\epsilon(h) \text{ pienillä } h$$

(tässä, tarkkaan ottaen, sekä L että $\epsilon(h)$ riippuvat myös pisteestä x) ja mikäli ”virhetermille” $h\epsilon(h)$ pätee

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0,$$

on f :n erotusosamäärällä pisteessä x raja-arvo $= L$, ts. f on derivoituva pisteessä x ja $f'(x) = L$. Olemme siis saaneet lauseen:

2.15. Lause. (differentioituvuus) *Funktio $f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ on derivoituva pisteessä $x_0 \in]a, b[$, jos ja vain jos, on olemassa luku $L \in \mathbf{R}$ ja funktio ϵ siten, että*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Lh + h\epsilon(h), \text{ kun } x_0 + h \in]a, b[,$$

ja

$$\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0.$$

Tällöin

$$f'(x_0) = L.$$

□

Lauseessa 2.15 funktion ϵ pitää olla määritelty 0 :n ympäristössä; se voidaan kuitenkin aina määritellä välillä $]a - x_0, b - x_0[$ lauseen kaavalla.

Lauseessa 2.15 olevan ehdon toteutumista sanotaan usein f :n *differentioituvuudeksi* pisteessä x_0 . Edelleen, lisäyksen lineaarista osaa kutsutaan f :n *differentiaaliksi* pisteessä x_0 ja sitä merkitään

$$df(x_0, h) := f'(x_0)h.$$

Siten f :n muutos voidaan kirjoittaa muodossa⁴

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0) = df(x_0, h) + h\epsilon(h).$$

⁴Monissa yhteyksissä käytetään merkintöjä (kirjoitetaan $h = dx$)

$$dy = df(x_0, dx) = f'(x_0)dx,$$

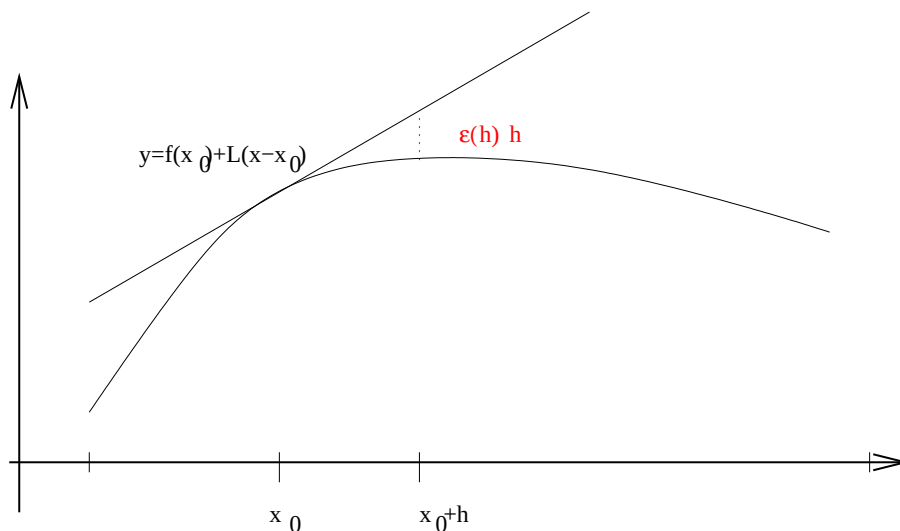
jolloin muutos saa muodon

$$\Delta y = dy + \epsilon dx.$$

Kirjoitetaan seuraavaksi differentiaalin ja muutoksen suhde muodossa

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \epsilon(h)h,$$

mistä nähdään, että $f(x_0 + h)$ on sama kuin (muutujan h suhteen) lineaarisen funktion $f(x_0) + f'(x_0)h$ arvo virheellä $h\epsilon(h)$. Differentioituvuusehto takaa sen, että pienillä h tämä approksimointivirhe on äärimmäisen pieni.



Arvoidaan seuraavassa tarkemmin tätä virhettä: Jos f on derivoituva pisteen x_0 ympäristössä, on väliarvolauseen nojalla

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(\xi)h$$

jollakin ξ pisteiden x_0 ja $x_0 + h$ välissä, joten

$$\epsilon(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) = f'(\xi) - f'(x_0).$$

Jos myös f' on derivoituva (eli f kahdesti derivoituva), voimme soveltaa väliarvolauseetta uudelleen (funktioon f') ja saamme

$$f'(\xi) - f'(x_0) = f''(\eta)(\xi - x_0)$$

jollakin η pisteiden x_0 ja ξ välissä, erityisesti η on pisteiden x_0 ja $x_0 + h$ välissä. Siten

$$|\epsilon(h)| = |f''(\eta)(\xi - x_0)| = |f''(\eta)||\xi - x_0| \leq Mh,$$

missä

$$M = \sup\{f''(t) : |t - x_0| \leq |h|\}.$$

Siten lineaariapproksimoinnin virheelle

$$\epsilon(h)h = f(x_0 + h) - (f(x_0) + f'(x_0)h)$$

pätee

$$|\epsilon(h)h| \leq Mh^2,$$

mikä on kovin pieni, kun h on lähellä nollaa. Siis, kun f'' on rajoitettu $|f''| \leq M$, niin

$$|f(x_0 + h) - (f(x_0) + f'(x_0)h)| \leq Mh^2.$$

Funktion approksimointi lineaarisella funktiolla on äärimmäisen hyödyllistä monissa sovellutuksissa.

Huomautus. Joskus myös toispuoleisista derivaatoista voi olla iloa (esimerkiksi välin päätepisteissä). Ne määritellään erotusosamäärän toispuoleisina raja-arvoina

$$D^+f(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (\text{oikeanpuoleinen derivaatta})$$

ja

$$D^-f(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad (\text{vasemmanpuoleinen derivaatta})$$

mikäli ko. raja-arvo on olemassa. Tässä f :n ei tarvitse olla määritelty kuin kyseisellä puolella pistettä x_0 .

Pätee: f on derivoituva pisteessä x_0 , jos ja vain, jos f :llä on toispuoleiset derivaatat $D^+f(x_0)$ ja $D^-f(x_0)$ sekä

$$D^+f(x_0) = D^-f(x_0),$$

mikä on tällöin myös derivaatan arvo.

3. Derivaatta ja integraali - analyysin peruslause

Tutkitaanpa derivoinnin ja integroinnin välistä yhteyttä:

Integraalin derivaatta.

Muistetaan, että integroituvan funktion f integraalifunktio on muotoa

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$$

oleva funktio.

3.1. Lause. (Analyysin peruslause (osa 1)) *Olkoon $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ Riemann-integroituva. Jos f on jatkuva pisteessä $x_0 \in]a, b[$, niin f :n integraalifunktio F ,*

$$F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt,$$

on derivoituva pisteessä x_0 ja $F'(x_0) = f(x_0)$.

Todistus. Seuraa integraalilaskennan väliarvolauseen 1.14 todistuksesta: Jokaisella $h > 0$ saadaan arviot

$$F(x_0 + h) - F(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt \begin{cases} \leq & h \sup\{f(x) : x \in [x_0, x_0 + h]\} \\ \geq & h \inf\{f(x) : x \in [x_0, x_0 + h]\}, \end{cases}$$

joten

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \begin{cases} \leq & \sup\{f(x) : x \in [x_0, x_0 + h]\} \rightarrow f(x_0) \\ \geq & \inf\{f(x) : x \in [x_0, x_0 + h]\} \rightarrow f(x_0), \end{cases}$$

kun $h \rightarrow 0$, koska f on jatkuva pisteessä x_0 . Samoin negatiivisille $h < 0$. Siis F on derivoituva pisteessä x_0 ja

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

□

Huomautus. Peruslauseen 3.1 mukaan siis derivointi palauttaa jatkuvan funktion integraalin takaisin alkuperäiseksi funktioksi, mikä voidaan kirjoittaa muotoon: *jatkuvalla funktiolla f*

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha}^x f(t) dt = f(x).$$

Esimerkkejä. Peruslauseen 3.1 nojalla voidaan laskea eräiden funktioiden derivaattoja. Koska

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt,$$

on logaritmi derivoituva ja

$$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Edelleen, koska a -kantaiselle logaritmille ${}^a\log x$ pätee

$${}^a\log x = \frac{\log x}{\log a},$$

seuraa derivoinnin lineaarisuudesta (Lause 2.2), että

$$\frac{d {}^a\log x}{dx} = \frac{1}{x \log a}.$$

Lopuksi, koska

$$e^x = \int_0^x e^t dt + 1,$$

on eksponenttifunktio derivoituva ja peruslauseen nojalla

$$\frac{d e^x}{dx} = \frac{d}{dx} \int_0^x e^t dt + \frac{d}{dx} 1 = e^x.$$

Primitiivi (antiderivaatta) ja integraali.

Analyysin peruslauseen 3.1 ensimmäinen muoto takaa, että jatkuvalla funktiolle f integraalifunktio on aina ratkaisu ongelmalle:

Olkoon f annettu. Määrittää sellainen funktio F , jolle

$$F'(x) = f(x) \text{ kaikilla } x.$$

Tässä halutaan siis kääntää derivointiprosessi.

Määritelmä. (primitiivi, antiderivaatta) Funktion $f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ *primitiivi* tai *antiderivaatta* on sellainen funktio $F:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$, jolle

$$F'(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \in]a, b[.$$

Huomautus/Varoitus. Primitiivi (antiderivaatta) on määritelmän mukaan derivoituva. Primitiivi ei ole yksikäsitteinen. Usein kirjallisuudessa kutsutaan mitä hyvänsä primitiivifunktiota f :n integraalifunktioksi. Meillä integraalifunktio-nimitys on (toistaiseksi) varattu niille funktiolle, jotka saadaan f :stä eksplisiittisesti integroimalla. Myöhemmin, Lauseen 3.3 jälkeen laajennamme integraalifunktion käsitettä niin, että myös $F + vakio$ on aina integraalifunktio, jos F on.

Analyysin peruslauseen 3.1 nojalla siis:

Jatkuvan funktion f jokainen integraalifunktio on f :n primitiivi.

Näin ei saada kuitenkaan kaikkia primitiivejä.

Esimerkki. Koska $\frac{d}{dx}(\sin x + 7) = \cos x$, on $F(x) = \sin x + 7$ funktion $\cos x$ primitiivi. Tätä ei kuitenkaan saada $\cos x$:stä integroimalla, koska

$$\left| \int_a^b \cos x \, dx \right| \leq \pi < 7 = F(0).$$

Seurauksen 2.12 nojalla kaksi f :n primitiivifunktiota eroavat toisistaan vakiolla:

3.2. Lause. (Analyysin peruslause (osa 2)) *Jos F_1 ja F_2 ovat saman funktion f primitiivejä, niin on olemassa vakio c , jolle*

$$F_1(x) = F_2(x) + c \text{ kaikilla } x.$$

Kääntäen, jos F_1 on eräs f :n primitiivi, niin jokainen muotoa

$$F(x) = F_1(x) + c,$$

missä c on vakio on myös f :n primitiivi.

□

Yhdistämällä peruslauseen molemmat osat saamme:

3.3. Lause. (Analyysin peruslause) *Olkoon $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva, missä $I \subset \mathbf{R}$ on avoin väli. Tällöin jokainen f :n primitiivi F on muotoa*

$$(*) \quad F(x) = c + \int_a^x f(t) \, dt,$$

missä $c \in \mathbf{R}$ ja $a \in I$ ovat vakioita.

Kääntäen, mikä hyvänsä muotoa () oleva funktio F on f :n primitiivi.*

□

Esimerkki. Oletus f :n jatkuvuudesta oleellinen: Olkoon F funktion f ,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \geq 0 \\ 0, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

integraalifunktio

$$F(x) = \int_0^x f(t) \, dt = \begin{cases} x, & \text{kun } x \geq 0 \\ 0, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

joten F ei ole primitiivi, sillä se ei ole derivoituva pisteessä $x = 0$.

Huomautus. Nyt voimme huoletta kutsua mitä hyvänsä *jatkuvan* funktion f :n primitiiviä integraalifunktioksi, ts. **tästä lähtien** funktion f **integraalifunktio** on mikä hyvänsä muotoa

$$F(x) = c + \int_a^x f(t) \, dt$$

oleva funktio. Siten jatkuvan funktion f tapauksessa samat funktiot sekä primitiivejä että integraalifunktioita.

Usein käytetään (hieman sekavaa) merkintää

$$F(x) = \int f(x) dx,$$

jolla tarkoitetaan, että F on f :n primitiivi, eli $F'(x) = f(x)$ tai että

$$F(x) = c + \int_a^x f(t) dt$$

sopivilla vakioilla a ja c . Jatkuvan funktion f tapauksessa molemmat tulkinnat johtavat samaan. Näin ei käy kaikille funktioille.

Analyysin peruslauseen avulla määrättyjä integraaleja voidaan laskea primitiivien avulla.

3.4. Lause. *Olkoon F jatkuvan funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ primitiivi. Tällöin*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

Todistus. Koska $F'(x) = f(x)$, on analyysin peruslauseen nojalla

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= c + \int_a^b F'(x) dx - (c + \int_a^a F'(x) dx) \\ &= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

□

Huomautus. Jos integrandi f on paloittain jatkuva, voidaan Lausetta 3.4 soveltaa, jakamalla integrointiväli osaväleihin, joissa f on jatkuva. Esim. jos

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \geq 0 \\ -1, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

on

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^1 x dx = -1 + 1 = 0.$$

3.5. Huomautus. Monesti Lausetta 3.4 käytetään muodossa: *jos f on jatkuvasti derivoituva, niin*

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x f'(t) dt.$$

Esimerkkejä. Monesti funktioita on helpompi derivoida kuin laskea integraaleja osasummien avulla. Esimerkiksi, on aivan helppoa nähdä, että

$$\begin{aligned}\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ &\rightarrow n x_0^{n-1},\end{aligned}$$

kun $x \rightarrow x_0$, joten

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}.$$

Integroimalla saadaan

$$\int_a^b n x^{n-1} dx = \int_a^b x^n = b^n - a^n,$$

tai merkitsemällä $m = n - 1$

$$\int_a^b x^m dx = \frac{1}{m+1} (b^{m+1} - a^{m+1}),$$

kun $m \in \mathbf{N}$.

Myös derivointikaavat

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \text{ ja } \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

oli helppo johtaa (niissä tarvittiin vain trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoja ja tietoa, että

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1).$$

Näistä saadaan integrointikaavat

$$\int_a^b \cos x dx = \int_a^b \sin x = \sin b - \sin a$$

ja

$$\int_a^b \sin x dx = \int_a^b (-\cos x) = \cos a - \cos b.$$

Lisää tällä tavalla saatavia integrointikaavoja on taulukossa 5.1.

4. Differentiaalilaskentaa

Derivointisääntöjä.

4.1. Lause. (summan, tulon ja osamäärän derivaatat) *Olkoot f ja g derivoituvia pisteessä $x \in]a, b[$. Tällöin*

i) *summafunktiio $f + g$ on derivoituva pisteessä $x \in]a, b[$ ja*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

ii) *tulofunktiio fg on derivoituva pisteessä $x \in]a, b[$ ja*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

iii) *jos lisäksi $g(x) \neq 0$, on osamääräfunktio $\frac{f}{g}$ derivoituva pisteessä $x \in]a, b[$ ja*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Todistus. i) Todistettiin jo lauseessa 2.2.

ii) Lasketaan erotusosamäärän raja-arvo

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x+h) - (fg)(x)}{h} &= \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &\rightarrow f(x)g'(x) + f'(x)g(x), \text{ kun } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

iii) Havaitaan ensiksi, että koska g on derivoituva pisteessä x , on se jatkuva pisteessä x . Siten ehdosta $g(x) \neq 0$ seuraa, että $g(z) \neq 0$, kun z on lähellä pistettä x . Erityisesti osamäärä $\frac{f}{g}$ on hyvin määritelty lähellä pistettä x . Lasketaan sen erotusosamäärän raja-arvo

$$\begin{aligned} \frac{\frac{f}{g}(x+h) - \frac{f}{g}(x)}{h} &= \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\ &= \frac{g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x)g(x+h)} \\ &\rightarrow \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}, \text{ kun } h \rightarrow 0, \end{aligned}$$

sillä g :n jatkuvuuden pisteessä x nojalla $g(x+h) \rightarrow g(x)$. □

Esimerkkejä. Muistetaan, että

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \text{ kun } n \in \mathbf{N},$$

mikä seuraa induktiolla tulon derivointisäännöstäkin, kunhan tietää, että $\frac{d}{dx}x = 1$. Käyttämällä summan ja osamäärän derivointikaavoja minkä hyvänsä rationaali-funktion (so. kahden polynomin osamäärän) derivaatta voidaan laskea. Erityisesti, jos n on negatiivinen kokonaisluku, niin merkitään $n = -m$, jolloin

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}x^n &= \frac{d}{dx}\frac{1}{x^m} = \frac{0x^m - 1mx^{m-1}}{(x^m)^2} = -mx^{m-1-2m} \\ &= nx^{n-1}.\end{aligned}$$

Siten

$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \text{ kaikilla } n \in \mathbf{Z}.$$

Edelleen, derivointikaavoista

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \text{ ja } \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

saadaan kaavat mm. tangentin ja kotangentin derivaatoille:

$$\begin{aligned}\frac{d \tan x}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,\end{aligned}$$

koska $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, ja

$$\begin{aligned}\frac{d \cot x}{dx} &= \frac{d}{dx} \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{(\sin x)^2} \\ &= -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).\end{aligned}$$

Nämä voidaan kirjoittaa myös integrointikaavoina

$$\begin{aligned}\int \sin x \, dx &= -\cos x, & \int \cos x \, dx &= \sin x, \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx &= \tan x, & \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx &= -\cot x.\end{aligned}$$

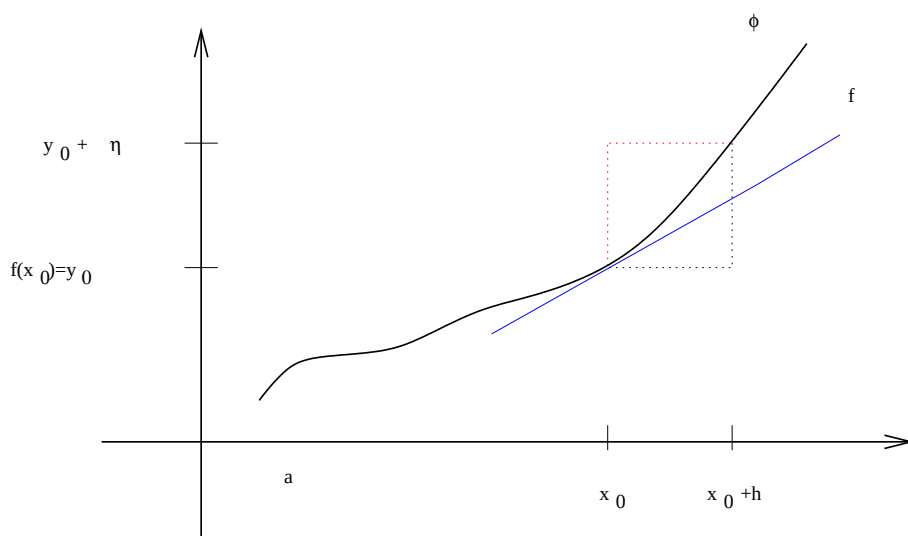
Muista varoa, ettet integroi näitä viimeksimainittuja yli nimittäjän nollakohtien!

4.2. Lause. (käänteisfunktion derivaatta) *Olko f derivoituva avoimella välillä $]a, b[$ ja olko $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]a, b[$. Tällöin f :n käänteisfunktio f^{-1} on myös derivoituva pisteessä $y = f(x)$ ja*

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Huomautus. Koska $f' > 0$, on f aidosti kasvava (Lause 2.10), joten f :llä on olemassa käänteisfunktio f^{-1} , joka on määritelty välillä $f(]a, b[)$. Se on myös jatkuva, koska f on (Analyysi 1).

Lause on tosi tietysti myös jos $f'(x) < 0$ kaikilla x .



Käänteiskuvauksen graafi saadaan peilaamalla f :n graafi suoran $y = x$ suhteen: silloin tangentsuoran peilisuoran kulmakerroin muuttuu tietysti käänteisluvukseen.

Käänteisfunktion ja funktion derivaattojen yhteys voidaan kirjoittaa muodossa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$

Todistus. Kirjoitetaan derivaatta erotusosamäärän raja-arvona

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}, \end{aligned}$$

missä $y = f(x)$ ja $y_0 = f(x_0)$. Koska f ja f^{-1} ovat jatkuvia, ovat rajankäynnit $x \rightarrow x_0$ ja $y \rightarrow y_0$ yhtäpitäviä. Siten viimeinen raja-arvo on olemassa ja koska se on $\neq 0$, on

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}} = \frac{1}{\frac{d}{dy} f^{-1}(y_0)}.$$

□

Huomautus. Aidosti kasvavalla, derivoituvalla funktiolla f voi derivaatta hävitä jossain pisteessä, $f'(x_0) = 0$. Tällöin käänteisfunktio ei kuitenkaan ole derivoituva pisteessä $y_0 = f(x_0)$. Esim. jos $f(x) = x^3$ on $f'(0) = 0$ ja käänteiskuvaus $g(y) = y^{\frac{1}{3}}$ ei ole derivoituva pisteessä $y_0 = 0$ (sillä on pystysuora tangentti siinä).

Esimerkkejä. 1. n . juuri. Funktio $f:]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbf{N},$$

on funktion $g:]0, \infty[\rightarrow \mathbf{R}$,

$$g(y) = y^n$$

käänteiskuvaus. Siten f on derivoituva ja kun $y = f(x)$, on

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{ny^{n-1}} = \frac{1}{n(x^{\frac{1}{n}})^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}},$$

eli

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

2. Trigonometrinen funktioiden käänteisfunktiot eli arcusfunktiot. Muistetaan Analyysi 1 -kurssilta, että trigonometrinen funktioiden käänteisfunktiot eli arcusfunktiot ovat

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \sin^{-1} x: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] && (\text{aidosti kasvava}), \\ \arccos x &= \cos^{-1} x: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi] && (\text{aidosti vähenevä}), \\ \arctan x &= \tan^{-1} x: \mathbf{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[&& (\text{aidosti kasvava}), \\ \operatorname{arccot} x &= \cot^{-1} x: \mathbf{R} \rightarrow]0, \pi[&& (\text{aidosti vähenevä}). \end{aligned}$$

Nämä ovat (määrittelyjoukkojensa sisäpisteissä) derivoituvia Lauseen 4.2 avulla ja derivaatat saadaan kätevästi lasketuksi: ($\sin y = x$)

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\frac{d}{dy} \sin y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

missä $+$ -merkki valitaan koska $y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, jolloin $\cos y > 0$. Siten

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Samanlaisella laskulla näemme

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arccos x &= \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, && (\text{tässä } x = \cos y) \\ \frac{d}{dx} \arctan x &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}, && (\text{tässä } x = \tan y) \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} x &= -\frac{1}{1 + \cot^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2}. && (\text{tässä } x = \cot y) \end{aligned}$$

Näistä saadaan vastaavat integraalikaavat:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} &= \arcsin x && \text{ja} && \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arccos x \\ \int \frac{dx}{1 + x^2} &= \arctan x && \text{ja} && \int \frac{dx}{1 + x^2} = -\operatorname{arccot} x. \end{aligned}$$

Huomaa, että samoille integrandeille on kaksi eri integraalifunktiota; selitys tälle on se, että integraalifunktiot eroavat vakiolla. Tässä

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$

onhan sinillä ja kosinilla $\frac{\pi}{2}$:n vaihe-ero.

Erityisesti tästä saadaan, että

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \int_a^b \arctan x = \arctan b - \arctan a,$$

josta mm.

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Nämä integraalikaavat voitaisiin ottaa trigonometristen funktioiden määrittelyn lähtökohdaksi, jolloin trigonometriset funktiot voitaisiin määritellä puhtaana analyttisesti ilman mitään viittausta ympyränkaariin tms. Esim. kulman y ja sen tangentin $x = \tan y$ välinen relaatio tulee täysin julistetuksi kaavalla

$$y = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2},$$

ainakin, kun $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Yhdistetty funktio. Muista, että jos $f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ ja $g: I \rightarrow \mathbf{R}$ on määritelty (vähintään) f :n kuvajoukossa, ts. $f([a, b]) \subset I$, on *yhdistetty funktio* $g \circ f:]a, b[\rightarrow \mathbf{R}$ ja

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

4.3. Lause. (ketjusääntö eli yhdistetyn funktion derivointi)

Olkkoon f derivoituva pisteessä x_0 ja g derivoituva pisteessä $f(x_0)$. Tällöin yhdistetty funktio $g \circ f$ on derivoituva pisteessä x_0 ja

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Huomautus. Jos merkitään $y = f(x)$ ja $h = g \circ f$, voidaan ketjusääntö kirjoittaa kätevästi Leibnizin notaation avulla:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{dh}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

Todistus. Merkitään

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + h) - f(x_0) \quad \text{ja} \\ \Delta g \circ f &= g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0), \end{aligned}$$

jolloin

$$\begin{aligned} \Delta g \circ f &= g(f(x_0 + h)) - g(f(x_0)) \\ &= g(f(x_0) + \Delta f) - g(f(x_0)) \\ &= g'(f(x_0))\Delta f + \Delta f \epsilon(\Delta f), \end{aligned}$$

missä Lauseen 2.15 nojalla $\epsilon(s) \rightarrow 0 =: \epsilon(0)$, kun $s \rightarrow 0$. Siten

$$\begin{aligned} \frac{\Delta g \circ f}{h} &= g'(f(x_0)) \frac{\Delta f}{h} + \epsilon(\Delta f) \frac{\Delta f}{h} \\ &= g'(f(x_0)) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \epsilon(f(x_0 + h) - f(x_0)) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \\ &\rightarrow g'(f(x_0))f'(x_0) + \epsilon(0)f'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0), \end{aligned}$$

kun $h \rightarrow 0$, koska $f(x_0 + h) - f(x_0) \rightarrow 0$ f :n jatkuvuuden nojalla. □

Huomaa, että käänteisfunktion derivaatan kaava saadaan myös ketjusäännöstä, mutta derivoituvuus pitää osoittaa ensin.

Esimerkkejä. 1. Olkoon $\alpha \in \mathbf{R}$ ja $x > 0$. Tällöin $f(x) = x^\alpha$ on derivoituva ja

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Tämä nähdään ketjusäännön avulla:

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x},$$

joten merkitsemällä

$$g(x) = \alpha \log x \text{ ja } h(y) = e^y$$

on $f = h \circ g$, joten ketjusäännön nojalla f on derivoituva ja

$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = e^{g(x)} \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Sama integraalikaavana

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \text{ kun } \alpha \neq -1.$$

2. Olkoon $f(x) = \log |x|$. Tällöin

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & \text{kun } x > 0 \\ \log(-x), & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

joten

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{kun } x > 0 \\ -\frac{1}{-x} \cdot 1 = \frac{1}{x}, & \text{kun } x < 0, \end{cases}$$

ts.

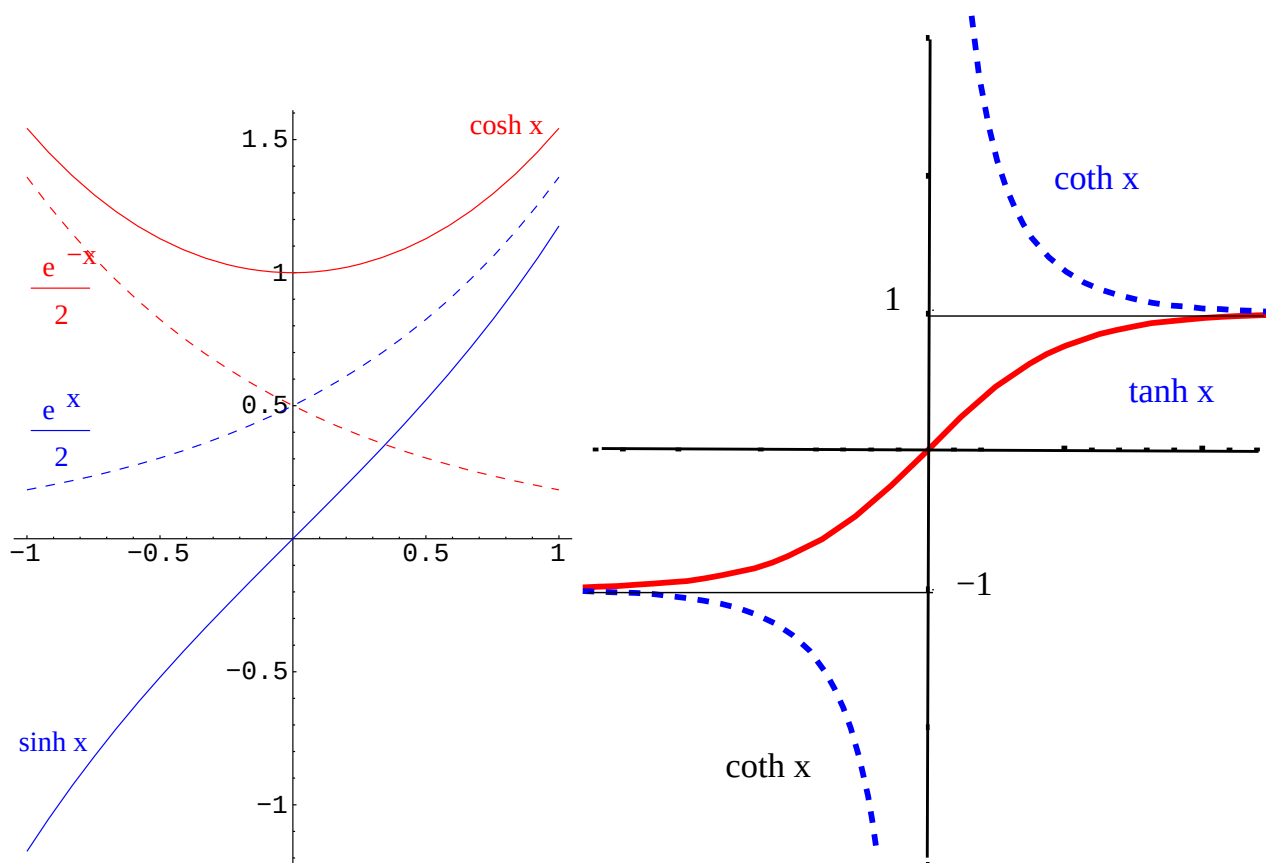
$$f'(x) = \frac{1}{x}, \text{ kun } x \neq 0.$$

Sama integraalikaavana

$$\int \frac{dx}{x} = \log |x|, \text{ kun } 0 \text{ ei ole integrointivälillä.}$$

3. Olkoon $a > 0$ ja $f(x) = a^x$. Tällöin $f(x) = e^{(\log a)x}$, joten

$$f'(x) = \frac{d}{dx}((\log a)x)e^{(\log a)x} = (\log a)a^x.$$



Hyperboliset funktiot.

Eksponttifunktio tulee vastaan monenkaltaisissa sovellutuksissa. Usein ne esiintyvät kombinaatioina

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \text{ tai } \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

Näitä kutsutaan *hyperboliseksi kosiniksi ja siniksi*

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ ja } \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

ja edelleen *hyperboliset tangentti ja kotangentti*

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ ja } \coth x := \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Huomautus. $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geq \cosh 0 = 1$ kaikilla x ja

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \text{ kaikilla } t.$$

Kirjoitetaan tämä kaava uudelleen merkitsemällä $x = \cosh t$ ja $y = \sinh t$, jolloin

$$x^2 - y^2 = 1,$$

ts. t :n liikkuessa piste (x, y) liikkuu pitkin hyperbeliä (tosin ei piirrä siitä kuin oikeanpuoleisen palasen, koska $x = \cosh t \geq 1$).

Hyperbolisille funktioille pätee yhteenlaskukaavat (HT)

$$\begin{aligned}\sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y \text{ ja} \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.\end{aligned}$$

Edelleen, derivointikaavat on helppo johtaa:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \sinh x &= \cosh x, & \frac{d}{dx} \cosh x &= \sinh x, \\ \frac{d}{dx} \tanh x &= \frac{1}{\cosh^2 x}, & \frac{d}{dx} \coth x &= -\frac{1}{\sinh^2 x}.\end{aligned}$$

Hyperbolinen sini ja tangenti ovat aidosti kasvavia bijektioita

$$\sinh: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ ja } \tanh: \mathbf{R} \rightarrow]-1, 1[,$$

hyperbolinen kotangenti on myös bijektio

$$\coth: \mathbf{R} \setminus \{0\} \rightarrow \{y \in \mathbf{R} : |y| > 1\}$$

ja aidosti vähenevä väleillä $] -\infty, 0[$ ja $]0, \infty[$ erikseen. Sen sijaan hyperbolinen kosini on parillinen funktio, joka määrittelee bijektiot

$$\begin{aligned}\cosh: [0, \infty[&\rightarrow [1, \infty[&& (\text{aidosti kasvava}) \\ \text{ja} \\ \cosh:]-\infty, 0] &\rightarrow [1, \infty[&& (\text{aidosti vähenevä}).\end{aligned}$$

Siten näillä on käänteisfunktiot ($\cosh$:lla kaksi käänteisfunktion haaraa), ns. *area-funktioita*:

$$\ar \sinh, \ar \cosh, \ar \tanh \text{ ja } \ar \coth .$$

Näiden kaavat voidaan helposti esittää logaritmin avulla, esimerkiksi merkitään $u = e^t$ kaavoissa

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ ja } y = \frac{e^t - e^{-t}}{2},$$

joista ratkaisemalla u :n suhteen saadut toisen asteen yhtälöt saadaan

$$u = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \text{ ja } u = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

– jälkimmäisestä hylätään $-$ -merkki, koska $u = e^t \geq 0$. Ensimmäiseen tulee $\pm$, koska $\cosh$ ei ole injektio ja siten sen käänteisfunktioillekin tulee kaksi haaraa. Edelleen,

$$\begin{aligned}t &= \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) = \pm \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) =: \ar \cosh x \quad \text{ja} \\ t &= \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) =: \ar \sinh y,\end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned}\log(x + \sqrt{x^2 - 1}): [1, \infty[&\rightarrow [0, \infty[\text{ ja} \\ -\log(x + \sqrt{x^2 - 1}): [1, \infty[&\rightarrow]-\infty, 0].\end{aligned}$$

Samaan tapaan

$$\operatorname{ar} \tanh x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}, \text{ kun } -1 < x < 1$$

ja

$$\operatorname{ar} \coth x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{x-1}, \text{ kun } |x| > 1.$$

Näistä saadaan derivointikaavat

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ar} \sinh x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ar} \cosh x = \pm \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{ar} \tanh x = \frac{1}{1-x^2}, \quad \frac{d}{dx} \operatorname{ar} \coth x = \frac{1}{1-x^2}.$$

Huomaa, että $\operatorname{ar} \tanh x$ on määritely vain, kun $|x| < 1$ ja $\operatorname{ar} \coth x$, kun $|x| > 1$. Nämä tulee erityisesti pitää mielessä, kun derivointikaavoista johdettuja integrointikaavoja käytetään.

Funktioiden ääriarvot.

Määritelmä. (ääriarvot) Funktiolla $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ on pisteessä $x_0 \in I$ *suurin arvo* (eli *globaali maksimi*) välillä I , jos

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ kaikilla } x \in I.$$

Merkitään,

$$f(x_0) = \max_I f$$

ja sanotaan, että x_0 on f :n *maksimikohta*.

Edelleen funktiolla f on pisteessä x_0 *lokaali maksimi*, jos $f(x_0)$ on f :n maksimi jossain x_0 :n ympäristössä, ts. on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x_0) \geq f(x) \text{ kaikilla } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I.$$

Vastaavasti määritellään f :n *pienin arvo* eli *(globaali) minimi*, *lokaali minimi* ja *minimikohta*. Silloin x_0 on f :n (lokaali) minimi, jos ja vain, jos x_0 on $-f$:n (lokaali) maksimi.

Yhteisnimitys (lokaaleilla) minimi- ja maksimiarvoilla on: *(lokaalit) ääriarvot*; vastaavat pisteet ovat *(lokaaleja) ääriarvokohtia*. Edelleen sanotaan, että kyseessä on *aito maksimi* tai *aito minimi*, jos epäyhtälöt yllä ovat aitoja, ts. esimerkiksi, f :llä on aito minimi pisteessä x_0 , jos

$$f(x) > f(x_0) \text{ kaikilla } x \in I, x \neq x_0.$$

Yleensä funktiolla ei ole ääriarvokohtia. Analyysi 1 -kurssilla osoitettiin, että jatkuva funktio saa suljetulla ja rajoitetulla välillä suurimman ja pienimmän arvonsa. Derivaatan avulla voidaan yrittää löytää näitä ääriarvoja. Lauseen 2.5 nojalla *kriittisiä pisteitä* ovat ne kohdat, joissa derivaatta häviää. Seuraavassa Lause 2.5 uudelleen muotoiltuna:

4.4. Lause. (f' -testi lokaalille ääriarvolle) *Jos f on derivoituva avoimen välin lokaalissa ääriarvokohdassa x_0 , niin $f'(x_0) = 0$.* $\square$

Derivaatan nollakohta ei kuitenkaan aina ole lokaali ääriarvokohta, esim. funktiolla $f(x) = x^5$, $f'(0) = 0$, vaikka f on aidosti kasvava eikä sillä ole lokaaleja ääriarvoja (kuin välien päätepisteissä). Jos derivaatta vaihtaa merkkinsä kriittisessä pisteessä on tämä lokaali ääriarvokohta:

4.5. Lause. (derivaatan merkkitestillä) *Olko f jatkuva välillä I ja derivoituva paitsi ehkä pisteessä $x_0 \in I$. Jos kaikilla $z < x_0 < t$ pätee*

$$f'(z) \geq 0 \text{ ja } f'(t) \leq 0,$$

on f :llä maksimi pisteessä x_0 .

Vastaavasti f :llä on minimi pisteessä x_0 , jos

$$f'(z) \leq 0 \text{ ja } f'(t) \geq 0,$$

kaikilla $z < x_0 < t$.

Vastaava aito ääriarvo, jos epäyhtälöt edellä ovat aitoja.

Todistus. Lauseen 2.10 nojalla f on (aidosti) kasvava välillä $I \cap]-\infty, x_0]$ ja (aidosti) vähenevä välillä $I \cap [x_0, \infty[$, joten x_0 on (aito) maksimikohta. $\square$

Esimerkki. Olko $f(x) = x(x-1)^3$. Mitkä ovat f :n lokaalit ääriarvokohdat? Koska f on derivoituva, niin tutkitaan derivaattaa:

$$f'(x) = (x-1)^3 + x3(x-1)^2 = (x-1)^2(x-1+3x) = (x-1)^2(4x-1),$$

joten

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ tai} \\ x = \frac{1}{4}, \end{cases}$$

Havaitaan, että koska

$$f'(x) = (x-1)^2(4x-1),$$

on (mieti huolella tämä!)

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x-1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{4}.$$

Siten Lauseen 4.5 nojalla piste $x = \frac{1}{4}$ on (aito) lokaali minimikohta, mutta f on (aidosti) kasvava välillä $[\frac{1}{4}, \infty[$, joten $x = 1$ ei ole ääriarvokohta.

Toinen derivaatta kuvaa derivaatan muutosta. Jos siis f :n toinen derivaatta f'' on positiivinen, kasvaa f :n derivaatta ja siten f :n itsensä kasvunopeus kiihtyy; tällöin f :n graafi kaartuu tangentista ylöspäin (sanotaan, että f on kupera eli *konvekssi*). Vastaavasti, jos $f'' < 0$, kaartuu f :n graafi alaspäin, jolloin f on *konkaavi* eli kovera. Tämä antaa oivan keinon tunnistaa ääriarvon tyyppiä.

4.6. Lause. (f'' -testi lokaalille ääriarvolle) Olkoon f derivoituva avoimella välillä I , $x_0 \in I$. Oletetaan, että f :llä on toinen derivaatta $f''(x_0)$ pisteessä x_0 ja, että $f'(x_0) = 0$.

- i) Jos $f''(x_0) > 0$, on x_0 f :n aito lokaali minimikohta.
- ii) Jos $f''(x_0) < 0$, on x_0 f :n aito lokaali maksimikohta.

Todistus. Jos $f''(x_0) > 0$, on Lauseen 2.6 nojalla $\delta > 0$ siten, että

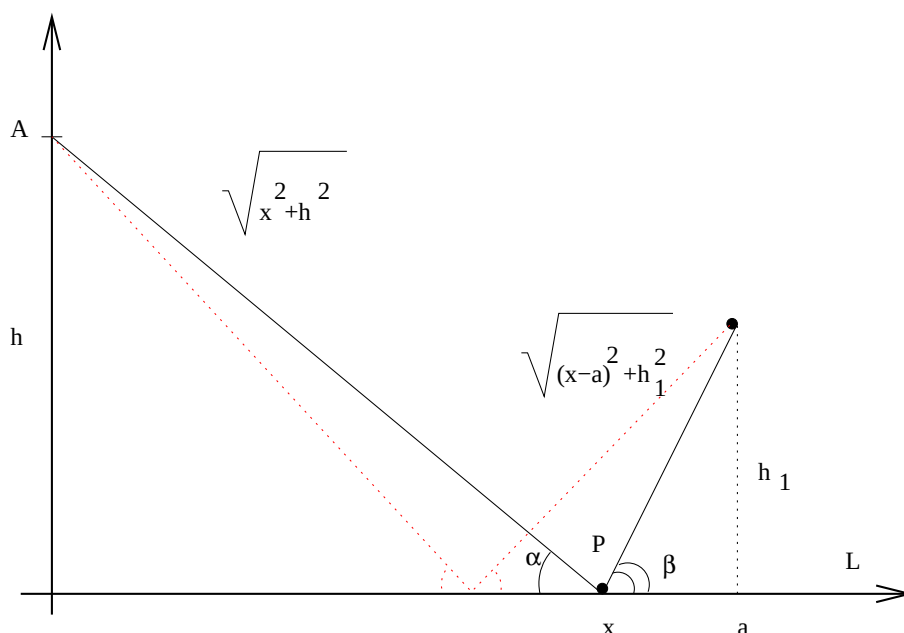
$$f'(x) < f'(x_0) = 0 < f'(t) \text{ kaikilla } x_0 - \delta < x < x_0 < t < x_0 + \delta,$$

joten derivaatan merkkitestin (Lause 4.5) nojalla kyseessä on aito lokaali minikohta. $\square$

Huomautus. Jos $f''(x_0) = 0$ kriittisessä pisteessä x_0 , ei voida tietää, onko kyseessä ääriarvo vai ei ilman lisätutkintaa.

Esimerkki. Olkoot pisteet A ja B samalla puolella suoraa L . Halutaan löytää piste P suoralta L , jonka etäisyyksien (pisteistä A ja B) summa on mahdollisimman pieni. Voidaan olettaa, että L on suora $y = 0$, $A = (0, h)$ ja $B(a, h_1)$, missä $a, h, h_1 > 0$. Tällöin suoran L pisteen $(x, 0)$ etäisyyksien (pisteistä A ja B) summafunktio on

$$f(x) = \sqrt{x^2 + h^2} + \sqrt{(x-a)^2 + h_1^2}.$$



Derivoimalla

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} + \frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2 + h_1^2}}$$

ja edelleen

$$f''(x) = \frac{h^2}{(x^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{h_1^2}{((x-a)^2 + h_1^2)^{\frac{3}{2}}} > 0.$$

Siten minimi on kriittisessä pisteessä $f'(x_0) = 0$ eli kun

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{a - x}{\sqrt{(x - a)^2 + h_1^2}},$$

mikä tarkoittaa, että janan $A, (0, x_0)$ ja x-akselin väliselle kulmalle α ja janan $B, (0, x_0)$ ja x-akselin väliselle kulmalle β pätee

$$\cos \alpha = \cos \beta$$

ja siis $\alpha = \beta$. Yo. tarkastelulla on sovellutus optiikassa: Valo etenee Fermat'n periaatteen mukaisesti suorinta tietä pitkin, joten jos L on peilipinta, niin valon tulokulma ja heijastuskulma peilistä ovat yhtäsuuret.

Huomautus. Jatkuva funktio f välillä $[a, b]$ saavuttaa maksiminsa ja miniminsä. Edellisen nojalla ääriarvokohta on

- i) välin päätepiste a tai b ,
- ii) piste x , jossa f ei ole derivoituva, tai
- iii) derivaatan nollakohta x_0 (jossa $f'(x_0) = 0$).

Kaikki pisteet on tutkittava erikseen. Derivaatan merkin vaihtuminen paljastaa lokaalin ääriarvokodan tyypin, samoin toisen derivaatan merkki.

Funktioiden kasvuvauhdeista.

Ilmiöiden kvalitatiivisessa analyysissä on usein tärkeää tietää, kuinka nopeasti tai hitaasti funktiot lähestyvät raja-arvojaan. Erityisen tärkeää on kyetä vertaamaan nopeuksia toisten funktioiden vastaaviin. Siksi käytetäänkin merkintöjä

$$f(x) = o(g(x)), \text{ kun } x \rightarrow x_0,$$

mikä tarkoittaa, että

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

ja

$$f(x) = O(g(x)), \text{ kun } x \rightarrow x_0,$$

mikä tarkoittaa, että on olemassa vakio $C > 0$ siten, että

$$|f(x)| \leq C|g(x)|,$$

kunhan x on tarpeeksi lähellä pistettä x_0 . Yllä on usein $x_0 = \pm\infty$.

Esimerkki. Esimerkiksi

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \text{ kun } x \rightarrow \infty,$$

koska

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x}} = \frac{2x - \sqrt{1+4x^2}}{2\sqrt{1+4x^2}} = \frac{2 - \sqrt{\frac{1}{x^2} + 4}}{2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 4}} \rightarrow 0.$$

Edelleen,

$$\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} = \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \text{ kun } x \rightarrow \infty,$$

koska

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{2x}}{\frac{1}{x^2}} &= \frac{2x^2 - x\sqrt{1+4x^2}}{2\sqrt{1+4x^2}} \\ &= \frac{2x - \sqrt{1+4x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 4}} \\ &= \frac{4x^2 - (1+4x^2)}{(2x + \sqrt{1+4x^2})2\sqrt{\frac{1}{x^2} + 4}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

4.7. Lause. Pätee:

i) Jos $a < b$, niin

$$\begin{aligned} x^a &= o(x^b), \text{ kun } x \rightarrow \infty \quad \text{ja} \\ x^b &= o(x^a), \text{ kun } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ii) Kaikilla $a > 0$

$$\begin{aligned} \log x &= o(x^a), \text{ kun } x \rightarrow \infty \quad \text{ja} \\ \log |x| &= o(|x|^{-a}), \text{ kun } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

iii) Kaikilla $a > 0$

$$\begin{aligned} e^{-x} &= o(x^{-a}), \text{ kun } x \rightarrow \infty \quad \text{ja} \\ e^{-\frac{1}{x}} &= o(x^a), \text{ kun } x \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

Todistus. i)

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{kun } x \rightarrow \infty \\ \infty, & \text{kun } x \rightarrow 0. \end{cases}$$

ii) l'Hospitalin säännöllä

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^a} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{a-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{ax^a} = 0$$

ja

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{x^{-a}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{ax^{-a-1}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{a}x^a = 0.$$

iii) Ensiksi, kun $x \geq 2a$, on

$$1 - \frac{a}{x} \geq 1 - \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

ja siten

$$\begin{aligned} -\log\left(\frac{e^{-x}}{x^{-a}}\right) &= x + (-a) \log x = \int_{2a}^x \left(1 - \frac{a}{t}\right) dt + a(2 - \log 2a) \\ &\geq \int_{2a}^x \frac{1}{2} dt + a(2 - \log 2a) = \frac{1}{2}(x - 2a) + a(2 - \log 2a) \\ &\rightarrow \infty, \text{ kun } x \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

joten

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{-x}}{x^{-a}} = 0.$$

Lopuksi, kun $x > 0$, niin merkitään $y = \frac{1}{x}$, jolloin

$$\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^a} = \frac{e^{-y}}{y^{-a}} \rightarrow 0$$

edellisen nojalla, sillä, kun $x \rightarrow 0$, niin $y \rightarrow \infty$. □

Tarkempaa tietoa kasvuvauhdeista saadaan analysoimalla derivaattaa. Lauseessa 2.15 todettiin, että differentiaalin ja funktion lisäyksen riippuvuus voidaan kirjoittaa muotoon

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + o(h), \text{ kun } h \rightarrow 0.$$

Edelleen, jos f on kahdesti derivoituva ja jos toinen derivaatta f'' on rajoitettu, niin (kuten Lauseen 2.15 jälkeen totesimme), saadaan väliarvolauseen avulla:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + O(h^2) \text{ kaikilla } h.$$

Esimerkkeinä,

$$e^x - 1 = xe^0 + o(x) = O(x), \text{ kun } x \rightarrow 0$$

ja

$$\cos x = 1 - x \sin 0 + O(x^2) = 1 + O(x^2) \text{ kaikilla } x.$$

Esimerkki. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Tällöin f :llä on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat ja

$$f^{(n)}(0) = 0 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{N};$$

derivoituvuus, kun $x \neq 0$, on selvää ketjusäännön avulla. Pisteessä $x = 0$:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h} \rightarrow 0$$

Lauseen 4.7 nojalla. Siis

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Jatkamalla nähdään, että f :n n . derivaatta on aina muotoa

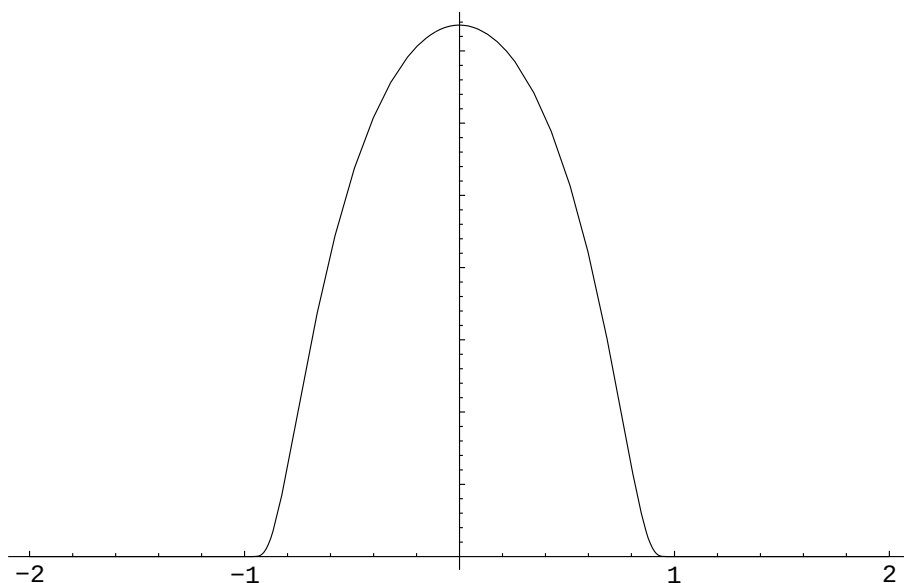
$$p\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ kun } x \neq 0,$$

missä p on polynomi. Siten erotusosamäärän raja-arvo, kun $x = 0$, on Lauseen 4.7 nojalla nolla.

Analyysissä tämä funktio osoittautuu (myöhemmin) äärimmäisen hyödylliseksi: määrittelemällä

$$g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(1-|x|)^2}}, & \text{kun } |x| < 1 \\ 0, & \text{kun } |x| \geq 1, \end{cases}$$

on g :llä on kaikkien kertalukujen jatkuvat derivaatat. Tällaista funktiota g tarvitaan approksimoitaessa funktioita sileillä funktioilla.



5. Integrointitekniikkaa

Monet funktiot saadaan alkeisfunktioista (so. polynomit ja rationaalifunktiot, trigonometriset funktiot, potenssifunktiot, eksponenttifunktiot ja näiden käänteisfunktiot) toistamalla rationaalioperaatioita (yhteen-, kerto- ja jakolasku), funktioiden yhdistelyjä ja käänteisfunktioiden muodostamisia. Tällaisten funktioiden sanotaan olevan *eksplisiittisiä* tai *suljetussa muodossa*. Differentiaalilaskennasta opitun avulla toteamme helposti, että suljettua muotoa olevien funktioiden (määrittelyjoukoissaan) derivoituvia ja niiden derivaatatkin ovat suljettua muotoa. Integrointi on kuitenkin yleensä tärkeämpää (ja valitettavasti vaikeampaakin) kuin derivointi. Analyysin peruslauseen avulla voidaan hoidella lukuisa joukko integrointiongelmia: jokaista derivointikaavaa

$$F'(x) = f(x),$$

missä f on jatkuva, vastaa ekvivalentisti kaava f :n primitiiveille tai integraalifunktioille

$$\int f = F(x)$$

tai tarkemmin

$$\int_{\alpha}^x f(t) dt = F(x) + \text{vakio}.$$

Näin saadaan taulukoiduksi eksplisiittisten funktioiden integraalifunktioista suljetussa muodossa (ks. taulukko 5.1). Kuitenkin, on olemassa vaarattoman näköisiä funktioita, joita *ei voida* integroida suljetussa muodossa. Voidaan todistaa, että esimerkiksi integraalifunktioita

$$\int \frac{e^x}{x} dx \text{ ja } \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, k \neq 0,$$

ei voida esittää alkeisfunktioiden avulla.

Onneksi on olemassa tekniikoita, joilla monet integrointiongelmien voidaan palauttaa jonkun taulukoidun alkeisfunktion integroinniksi. Tässä luvussa tarkastelemme näitä tekniikoita. Periaatteessa tekniikoita on kaksi todellista: sijoitusmenetelmä eli muuttujanvaihto ja osittaisintegrointi. Muut ovat lähinnä yksittäistapauksiin sopivia temppuja. On syytä vielä korostaa, että jatkuvalla funktiolla on aina olemassa integraalifunktio (Lause 1.2), vaikka sitä ei voitaisiinkaan esittää suljetussa muodossa.

5.1. Taulukko: Derivointikaavoista saatuja integrointikaavoja.

$f(x) = F'(x)$	$F(x) + C$	väli
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$(a \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\log x $	$] - \infty, 0[$ tai $]0, \infty[$
e^x	e^x	
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$(a > 0, a \neq 1)$
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\tan x$	$-\log \cos x $	$] - \frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi[$
$\cot x$	$\log \sin x $	$]n\pi, n+1\pi[$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	$]n\pi, (n+1)\pi[$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$] - \frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi[$
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\begin{cases} \arcsin x \\ -\arccos x \end{cases}$	$] - 1, 1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\begin{cases} \arctan x \\ -\operatorname{arccot} x \end{cases}$	
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{ar sinh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$	
$\frac{1}{\pm\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{ar cosh} x = \log(x \pm \sqrt{x^2-1})$	$] - \infty, -1[$ tai $]1, \infty[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar tanh} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$	$] - 1, 1[$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{ar coth} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{x-1}$	$] - \infty, -1[$ tai $]1, \infty[$

Sijoitusmenetelmä eli muuttujanvaihto.

Sijoitusmenetelmä pohjautuu yhdistetyn funktion derivoinnin ketjusääntöön:

Jos $G = F \circ \varphi$ ja jos F sekä φ ovat jatkuvasti derivoituvia, niin

$$\frac{d}{dt}G(t) = \frac{d}{dt}F \circ \varphi(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Nyt siis derivaatta $G'(t)$ on jatkuva, joten analyysin peruslauseen 3.3 nojalla saadaan integroimalla eo. kaava α :sta β :an

$$G(\beta) - G(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\alpha}^{\beta} F'(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Jos merkitään

$$a = \varphi(\alpha) \text{ ja } b = \varphi(\beta),$$

saamme

$$F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx.$$

Sijoittamalla tähän $f(x) = F'(x)$ saamme *perussijoituskaavan*

$$(5.1) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt,$$

$$x = \varphi(t), \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b,$$

mikä kirjoitettuna differentiaalin $d\varphi = \varphi'(t) dt$ avulla on

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi) d\varphi.$$

Huomaa, että kaavassa (5.1) funktio φ saa olla mikä hyvänsä välillä J (jonka päätepisteet ovat α ja β) jatkuvasti derivoituva funktio, jolle $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Edelleen funktion f tulee olla jatkuva välillä I , joka sisältää kuvajoukon $\varphi(J)$ (edelleen F saa olla mikä tahansa f :n primitiivi).

Esimerkkejä. Sovelletaan muuttujanvaihtokaavaa (5.1) integrandiin $f(x) = \frac{1}{x}$ ja oletetaan, että sijoitus $x = \varphi(t) \neq 0$ kaikilla t ko. välillä. Tällöin

$$\int \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \int \frac{dx}{x} = \log |x| = \log |\varphi(t)|.$$

Soveltamalla tätä kaavaa funktioihin $\varphi(x) = \log x$, $\varphi(x) = \sin x$ ja $\varphi(x) = \cos x$, saadaan

$$\int \frac{dx}{x \log x} = \log |\log x|,$$

$$\int \cot x dx = \log |\sin x|, \quad \int \tan x dx = -\log |\cos x|,$$

mitkä voidaan tietty derivoimalla tarkistaa. Muista, että oletettiin, että ko. välillä integrandin nimittäjä ei häviä!

Lisää esimerkkejä saadaan sijoittamalla eri funktioita $x = \varphi(t)$ seuraavaan kaavaan ($n \in \mathbf{Z}$, $n \neq -1$)

$$\int (\varphi(t))^n \varphi'(t) dt = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{(\varphi(t))^{n+1}}{n+1},$$

missä valitsemalla $\varphi(t) = \log t$ ja $\varphi(t) = \sin t$ saadaan

$$\int \frac{(\log t)^n}{t} dt = \frac{(\log t)^{n+1}}{n+1}$$

ja

$$\int \sin^n t \cos t dt = \frac{\sin^{n+1} t}{n+1}.$$

Monissa sovellutuksissa määrättävä integraali on muotoa

$$\int h(\varphi(t)) dt,$$

missä integrandista ”puuttuu” termi $\varphi'(t)$. Tällöin pyrimme kirjoittamaan integrandin muotoon

$$h(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Tämä onnistuu aina, jos tiedämme, että derivaatta φ' ei häviä, koska tällöin kuvaus $x = \varphi(t)$ on aidosti monotoninen, jolloin sillä on myös jatkuvasti derivoituva käänteiskuvaus $t = \psi(x)$ ja

$$\frac{dt}{dx} = \psi'(x) = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Nyt jos määritellään

$$f(x) = h(x)\psi'(x)$$

saamme

$$h(\varphi(t)) = \frac{f(\varphi(t))}{\psi'(\varphi(t))} = f(\varphi(t))\varphi'(t),$$

joten sijoituskaava saa muodon

$$\begin{aligned} \int h(\varphi(t)) dt &= \int f(\varphi(t))\varphi'(t) = \int f(x) dx \\ &= \int h(x)\psi'(x) dx = \int h(x) \frac{dt}{dx} dx, \end{aligned}$$

missä on muistettava oletus: $\varphi'(t) \neq 0$, joka takaa sen, että ψ on derivoituva.

Muistisäännönomaisesti sijoituskaava/muuttujanvaihtokaava (5.1) voidaan siis kirjoittaa (kun muuttujanvaihto $u(x)$ on aidosti monotoninen):

$$\begin{aligned} \int_a^b f(u(x)) dx &= \int_\alpha^\beta f(u) du, \text{ missä} \\ \alpha &= u(a), \beta = u(b) \text{ ja } du = \frac{du}{dx} dx \end{aligned}$$

Esimerkkejä. Tehdään muuttujanvaihto $t = 2x$ integraalissa

$$\int \sin 2x \, dx .$$

Saadaan ($dt = 2dx$)

$$\int \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \sin t \, dt = -\frac{1}{2} \cos t = -\frac{1}{2} \cos 2x ,$$

ja määrätty integraali

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = -\left/0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos t = \frac{1}{2} .$$

Tarkastellaan funktion $\sin \frac{1}{x}$ integraalia muuttujanvaihdon $t = \frac{1}{x}$ avulla: $dt = -x^{-2}dx$ tai $dx = -t^{-2}dt$, joten

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sin \frac{1}{x} \, dx = - \int_2^1 \frac{\sin t}{t^2} \, dt = \int_1^2 \frac{\sin t}{t^2} \, dt ,$$

minkä lopullinen integrointi tuottaa (ainakin vielä) tuskaa.

Todistetaan seuraavaksi muuttujanvaihtokaavan hyödyllisin erikoistapaus suoraan Riemannin summien avulla käyttämättä ketjusääntöä – todistus toimii Riemann-integroituvilla funktioilla.

5.2. Lause. (muuttujanvaihto/sijoitus) *Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ Riemann-integroituva ja $x : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ jatkuvasti derivoituva siten, että $x'(t) \neq 0$ kaikilla t . Tällöin*

$$\int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t))x'(t) \, dt .$$

Todistus. Oletetaan, että $x'(t) > 0$ kaikilla t , jolloin x on aidosti kasvava. Voidaan myös olettaa että $x(\alpha) = a$ ja $x(\beta) = b$. Jaetaan väli $[\alpha, \beta]$, jakopisteinä

$$\alpha = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = \beta ,$$

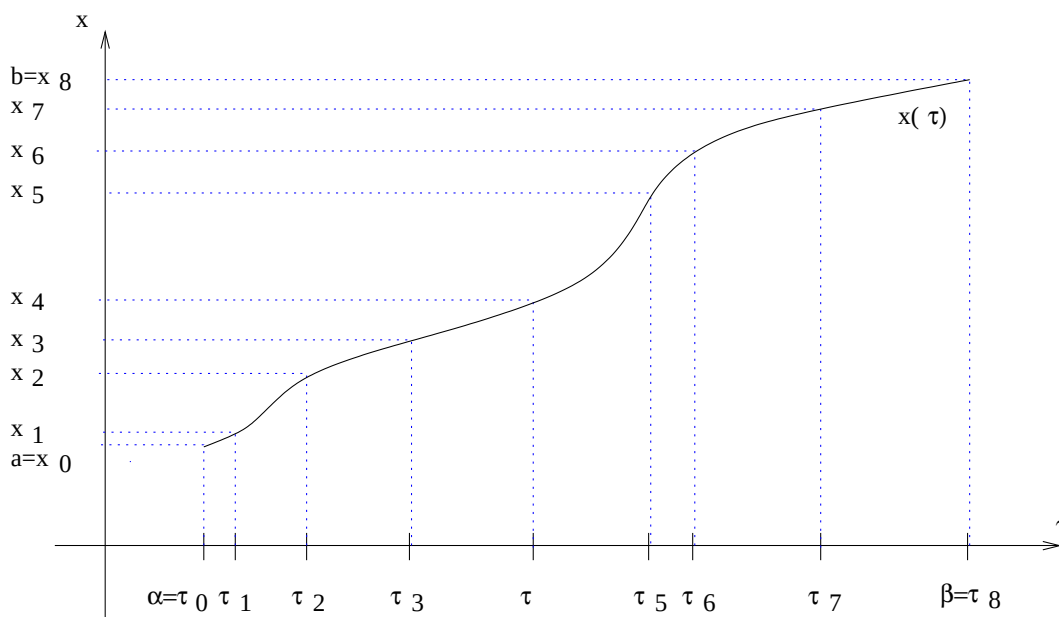
jolloin kuvat

$$a = x_0 = x(t_0), x_1 = x(t_1), x_2 = x(t_2), \dots, x_n = x(t_n) = b$$

muodostavat välin $[a, b]$ jaon, ja kääntäen.

Tällöin vasemalla oleva integraali on Riemannin summan

$$\sum_{k=1}^n f(\nu_k)(x_k - x_{k-1})$$



raja-arvo, missä luku $\nu_k \in [x_{k-1}, x_k]$ on mielivaltaisesti valittu. Kirjoitetaan tämä summa muodossa

$$\sum_{k=1}^n f(\nu_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} (t_k - t_{k-1}).$$

Nyt väliarvolauseen nojalla on $\xi_k \in]t_{k-1}, t_k[$, jolle

$$\frac{x_k - x_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} = x'(\xi_k).$$

Siten

$$\sum_{k=1}^n f(\nu_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\nu_k)x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}),$$

josta valitsemalla $\nu_k = x(\xi_k)$ saadaan

$$\sum_{k=1}^n f(\nu_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(x(\xi_k))x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}),$$

mistä raja-arvoina saadaan halutut integraalit eli

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t) dt.$$

□

Esimerkkejä. Integrintikaavoja.

1. Määritetään integraali

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a \neq 0,$$

sijoituksen $x = x(t) = at$ avulla, jolloin $dt = \frac{dx}{a}$ ja siten (jos $a > 0$)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{a dt}{\sqrt{a^2 - (at)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \\ &= \arcsin t = \arcsin \frac{x}{a}, \text{ kun } |x| < |a|,\end{aligned}$$

mikä on voimassa myös, kun $a < 0$ (huomaa negatiivisella a sijoitus on vähenevä, jolloin integraalifunktion rajat vaihtuvat, josta siihen tulee yksi ylimääräinen $-$ -merkki). Samalla sijoituksella saadaan samaan tapaan

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \int \frac{a dt}{a^2 + (at)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1 + t^2} \\ &= \frac{1}{a} \arctan t = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} &= \operatorname{ar sinh} \frac{x}{a}, \\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \operatorname{ar cosh} \frac{x}{a}, \text{ kun } |x| > |a|,\end{aligned}$$

ja

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \operatorname{ar tanh} \frac{x}{a}, & \text{ kun } |x| < |a|, \\ \frac{1}{a} \operatorname{ar coth} \frac{x}{a}, & \text{ kun } |x| > |a|. \end{cases}$$

2. Sijoituksella $t = 1 + x^2$, josta $dt = 2x dx$, saadaan

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}} &= \int \frac{\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t} = \sqrt{1 + x^2} \\ \text{ja} \\ \int \frac{x dx}{1 + x^2} &= \int \frac{\frac{1}{2} dt}{t} = \frac{1}{2} \log t = \frac{1}{2} \log(1 + x^2),\end{aligned}$$

ja samoin sijoituksella $t = 1 - x^2$

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}} &= -\sqrt{1 - x^2} \\ \text{ja} \\ \int \frac{x dx}{1 - x^2} &= -\frac{1}{2} \log |1 - x^2|,\end{aligned}$$

3. Sijoituksella $t = ax + b$, josta $dt = a dx$, kun $a \neq 0$, saadaan ($\alpha \neq -1$)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{ax + b} &= \int \frac{\frac{1}{a} dt}{t} = \frac{1}{a} \log |t| = \frac{1}{a} \log |ax + b| \\ \int (ax + b)^\alpha dx &= \frac{1}{a} \int t^\alpha dt = \frac{1}{a(\alpha + 1)} t^{\alpha+1} = \frac{1}{a(\alpha + 1)} (ax + b)^{\alpha+1}, \\ \text{ja} \\ \int \sin(ax + b) dx &= \int \frac{1}{a} \sin t dt = -\frac{1}{a} \cos(ax + b).\end{aligned}$$

4. Edelleen sijoituksella $t = \cos x$, josta $dt = -\sin x \, dx$, saadaan

$$\int \tan x \, dx = -\log |\cos x|$$

ja sijoituksella $t = \sin x$

$$\int \cot x \, dx = \log |\sin x|$$

5. Etsitään integraalifunktio

$$\int \frac{dx}{\sin x}.$$

Ensiksi kirjoitetaan

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \tan \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2},$$

jolloin sijoituksella

$$t = \tan \frac{x}{2}, \quad dt = \frac{1}{2} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

saadaan

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log |t| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$$

Osittaisintegrointi.

Jos f ja g ovat jatkuvasti derivoituvia, niin tulon derivointikaava

$$(fg)' = f'g + fg'$$

voidaan myös kirjoittaa integrointikaavana

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) \, dx + \int f(x)g'(x) \, dx$$

tai

$$\int f(x)g'(x) \, dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) \, dx,$$

tai lyhyesti

$$\int f \, dg = fg - \int g \, df,$$

mitä kutsutaan *osittaisintegrointikaavaksi*.

5.3. Lause. (osittaisintegrointi)

i) Olkoot f ja g jatkuvasti derivoituvia. Tällöin

$$\int f g' = fg - \int f' g.$$

ii) Olkoot f ja g derivoituvia ja f' ja g' Riemann-integroituvia välillä $[a, b]$. Tällöin

$$\int_a^b f g' \, dx = \left[fg \right]_a^b - \int_a^b f' g \, dx.$$

Todistus. Kohta i) todistettiin yllä. Kohta ii) seuraa samaan tapaan tulon derivointikaavasta, sillä derivaatta

$$(fg)' = f'g + fg'$$

on Riemann-integroituva, jolloin (ks. demot)

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \int_a^b (fg)' dx = \int_a^b f'g dx + \int_a^b fg' dx.$$

□

Esimerkkejä. Ensiksi

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x,$$

mikä on helppo tarkistaa derivoimalla.

Edelleen

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 e^x dx = e^x(x - 1).$$

Samoin osittaisintegroimalla

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x$$

ja

$$\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x.$$

Joskus osittaisintegroinnilla päädytään palautuskaavaan:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx dx &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx \\ &= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx dx, \end{aligned}$$

joten

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{b^2}{a^2 + b^2} \left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx \right) \\ &= \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx). \end{aligned}$$

Esimerkki. Tässä esimerkissä johdamme lausekkeen summalle $f(b) + f(a)$, kun peruslauseen kaavassa on lauseke erotukselle $f(b) - f(a)$. Jos f on jatkuvasti derivoituva, niin osittaisintegroimalla

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b f'(x)(x - m) dx = \int_a^b f(x)(x - m)' dx = f(b)(b - m) - f(a)(a - m),$$

missä m mv. vakio. Valitsemalla vakioksi keskiarvon $m = \frac{a+b}{2}$ saamme

$$\int_a^b f(x) dx + \int_a^b f'(x)(x - m) dx = f(b)\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right) - f(a)\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\right) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)).$$

Palautuskaavoja (rekursio). Toistuva osittaisintegrointi⁵ johtaa usein palautuskaavoihin. Esimerkiksi integraalit

$$\int \cos^n x \, dx, \quad \int \sin^m x \, dx \text{ ja } \int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

ovat tällaisia. Osittaisintegroimalla

$$\begin{aligned} \int \cos^n x \, dx &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \cos^n x \, dx, \end{aligned}$$

joka antaa palautuskaavan

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx.$$

Tällä kaavalla voidaan integrandin potenssia pudottaa askel askeleelta kunnes päädytään integraaleihin

$$\int \cos x \, dx = \sin x \text{ tai } \int dx = x.$$

Esimerkiksi, kun $n = 2$

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cos x \sin x + \frac{1}{2} \int dx = \frac{1}{2}(x + \cos x \sin x).$$

Vastaavalla tavalla saadaan palautuskaava

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx.$$

Tästä jälkimmäisestä palautuskaavasta saadaan hauska yhteys kokonaislukujen ja π :n välille: Havaitaan, että kaikilla $n > 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx,$$

joten kaikilla $m \geq 1$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx &= \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \\ \text{ja} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx &= \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx, \end{aligned}$$

⁵Uudemman kerran osittaisintegroidessa on varottava, ettei “vaihdakaan” f :n ja g :n rooleja:

$$\int_a^b f'g = \int_a^b f'g - \int_a^b fg' = \int_a^b fg - \left(\int_a^b fg - \int_a^b f'g \right) = \int_a^b f'g,$$

mikä ei juuri mieltä ylennä.

mistä

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx = \frac{2m-1}{2m} \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

ja

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx = \frac{2m}{2m+1} \frac{2m-2}{2m-1} \cdots \frac{2}{3}.$$

Jakamalla nämä saadaan

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \frac{2m \cdot 2m}{(2m-1) \cdot (2m+1)} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx}.$$

Oikealla oleva integraalien suhde lähestyy lukua 1, kun $m \rightarrow \infty$, sillä koska $0 < \sin x < 1$ välillä $]0, \frac{\pi}{2}[$, on

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx,$$

josta

$$1 \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx} \leq \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} x \, dx}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \, dx} = \frac{2m+1}{2m} \rightarrow 1,$$

missä viimeinen yhtäsuuruus seuraa palautuskaavasta. Lopputuloksena saamme

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \cdots \frac{2m}{2m-1} \frac{2m}{2m+1},$$

jota kutsutaan *Wallisin* kaavaksi.

Rationaalifunktioiden integrointi.

Muistetaan, että rationaalifunktiot ovat muotoa

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

missä p ja q ovat polynomeja, olevia funktiota. Pätee tulos:

5.4. Lause. *Rationaalifunktiot voidaan integroida alkeisfunktioita käyttäen.*

Emme todista tätä tulosta, mutta esittelemme karkeasti sen ideaa, mikä antaa käytännön vinkkejä, kuinka integroida rationaalifunktioita. Karkeasti menetelmä on seuraava:

- (1) Muokataan rationaalifunktiota niin, että sen nimittäjän asteluku on suurempi kuin osoittajan (ellei se jo ole sitä muotoa tai polynomi).

- (2) Jaetaan nimittäjä (mahdollisimman matalaa astetta oleviin) reaalikertoimiin tekijöihin,

$$q(x) = a(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdots \\ \cdots (x - \alpha_\ell)^{k_\ell}(x^2 + 2b_1x + c_1)^{j_1}(x^2 + 2b_2x + c_2)^{j_2} \cdots (x^2 + 2b_ix + c_i)^{j_i},$$

missä α_i :t ovat q :n reaalijuuret kertalukua k_i ja

$$x^2 + 2b_ix + c_i = (x - \beta_i)(x - \bar{\beta}_i),$$

missä β_i ja $\bar{\beta}_i$ ovat q :n kompleksikonjugaattijuuret kertalukua j_i .

- (3) Tehdään *osamurtokehitemä*: rationaalifunktio

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

(jonka nimittäjän aste on suurempi kuin osoittajan) voidaan esittää äärellisenä summana termeistä, jotka ovat muotoa

$$\frac{A_1}{x - \alpha} + \frac{A_2}{(x - \alpha)^2} + \cdots + \frac{A_\ell}{(x - \alpha)^\ell}$$

ja

$$\frac{B_1 + C_1x}{(x^2 + 2bx + c)} + \frac{B_2 + C_2x}{(x^2 + 2bx + c)^2} + \cdots + \frac{B_j + C_jx}{(x^2 + 2bx + c)^j},$$

missä α on q :n kertalukua ℓ oleva reaalijuuri ja $x^2 + 2bx + c$:n juuret ovat q :n kertalukua j olevat kompleksiset konjugaattijuuret.

- (4) Integroidaan osamurtokehitemät.

Seuraavaksi katsellaan hieman tarkemmin em. kohtia. Ensiksi havaitaan, että mikäli

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

ja p :n aste on n on vähintään q :n aste m , niin jakamalla löydetään jäännöspolynomi r , jonka aste on pienempi kuin m ja polynomi g siten, että

$$p(x) = g(x)q(x) + r(x).$$

Tällöin rationaalifunktion R integrointi redusoituu polynomin $g(x)$ ja rationaalifunktion

$$\frac{r(x)}{q(x)},$$

missä osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän, integroinniksi (kohta (1) edellä).

Seuraavaksi näytämme, kuinka osamurtokehitemä integroidaan: Lauseke

$$\frac{1}{(ax + b)^n},$$

voidaan integroida sijoituksella $t = ax + b$:

$$\int \frac{1}{(ax + b)^n} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t^n} dt.$$

Edelleen, koska

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}(ax + b)^2 + \frac{d^2}{a}, \text{ missä } d^2 = ac - b^2, d > 0,$$

saadaan sijoituksella $t = \frac{ax+b}{d}$

$$\int \frac{1 + Cx}{(ax^2 + 2bx + c)^n} dx = D \int \frac{1 + Ft}{(t^2 + 1)^n} dx.$$

Siten riittää keskittyä ns. perustyyppien

$$\frac{1}{x^n}, \quad \frac{1}{(x^2 + 1)^n}, \quad \text{ja} \quad \frac{x}{(x^2 + 1)^n}$$

integroimiseen. Näistä ensimmäinen on helppo

$$\int \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \log |x|, & \text{jos } n = 1 \\ -\frac{1}{n-1}x^{1-n} & \text{jos } n > 1. \end{cases}$$

Kolmatta tyyppiä olevat integraalit ratkeavat sijoituksella $t = x^2 + 1$, jolloin

$$\int \frac{x}{(x^2 + 1)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \log(x^2 + 1), & \text{jos } n = 1 \\ -\frac{1}{2(n-1)(x^2+1)^{n-1}} & \text{jos } n > 1. \end{cases}$$

Lopuksi haemme integraalin

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx$$

rekursion avulla: Jos $n = 1$, on

$$I_1 = \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctan x.$$

Jos taas $n > 1$, niin havaitaan, että

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^n} dx = \int \frac{1}{(x^2 + 1)^{n-1}} dx - \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx,$$

jonka osittaisintegroimme. Kun $f(x) = x$ ja

$$g'(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^n},$$

missä edellisen avulla

$$g(x) = -\frac{1}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}}$$

ja siten

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^n} dx = -\frac{x}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{1}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}}.$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{n-1}} \\ &= \frac{x}{2(n-1)(x^2 + 1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)} I_{n-1}. \end{aligned}$$

Prosessia voidaan jatkaa samalla tavalla, jos $n - 1 > 1$. Jos $n - 1 = 1$, on $I_{n-1} = \arctan x$. Siis: integraalifunktio I_n voidaan esittää rationaalifunktioiden ja $\arctan x$:n summana.

Esimerkkejä osamurtokehittelmistä. Emme todista tässä, että rationaalifunktiolle voidaan aina tehdä osamurtokehittelmä.⁶ Sen sijaan tarkastelemme tilannetta esimerkkien valossa. Olkoon

$$q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n), \quad \alpha_j \neq \alpha_i,$$

ts. q :lla on n reaalista, yksinkertaista nollakohtaa. Olkoon p polynomi, jonka aste on $< n$. Silloin osamurtokehittelmä on muotoa

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x - \alpha_1} + \frac{a_2}{x - \alpha_2} + \cdots + \frac{a_n}{x - \alpha_n},$$

mistä kertoimet a_j ovat ratkaistavissa (kerrotaan molemmat puolet tekijällä $(x - \alpha_j)$, supistetaan ja evaluoidaan tulos, kun $x = \alpha_j$). Esimerkiksi

$$a_1 = \frac{p(\alpha_1)}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \cdots (\alpha_1 - \alpha_n)}$$

Tulon derivoimissäännöstä näemme, että

$$q'(\alpha_1) = (\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3) \cdots (\alpha_1 - \alpha_n).$$

Tekemällä sama muille nollakohdille saamme

$$a_j = \frac{p(\alpha_j)}{q'(\alpha_j)}$$

ja siten

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(\alpha_1)}{q'(\alpha_1)(x - \alpha_1)} + \frac{p(\alpha_2)}{q'(\alpha_2)(x - \alpha_2)} + \cdots + \frac{p(\alpha_n)}{q'(\alpha_n)(x - \alpha_n)}.$$

⁶Karkeasti osamurtokehittelmä perustuu seuraavaan: Jos $q(x) = (x - \alpha)^k r(x)$, missä r on sellainen polynomi, jolle $r(\alpha) \neq 0$, niin yhtälön

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{p(\alpha)}{(x - \alpha)^k r(\alpha)} = \frac{1}{r(\alpha)} \frac{p(x)r(\alpha) - p(\alpha)r(x)}{(x - \alpha)^k r(x)}$$

oikean puolen osoittaja häviää, kun $x = \alpha$. Siten se on muotoa

$$r(\alpha)(x - \alpha)^m p_1(x),$$

missä $p_1(x)$ on polynomi ja $p_1(\alpha) \neq 0$ ja $m \in \mathbf{N}$. Merkitsemällä

$$\beta = \frac{p(\alpha)}{r(\alpha)}$$

saadaan tästä

$$\frac{p(x)}{q(x)} - \frac{\beta}{(x - \alpha)^k} = \frac{p_1(x)}{(x - \alpha)^{k-m} r(x)}.$$

Näin jatkamalla saadaan nimittäjässä oleva $(x - \alpha)$:n potenssi pudotettua nolnaan. Sitten jäljelle jääneelle osamäärälle tehdään sama prosessi, missä α korvataan $q(x)$:n toisella nollakohdalla ja käydään vuorotellen kaikki nollakohdat läpi.

Esimerkiksi siis

$$\begin{aligned}\frac{x^2+1}{x^3-x} &= \frac{x^2+1}{x(x-1)(x+1)} \\ &= \frac{0+1}{x(0-1)(0+1)} + \frac{1+1}{1(x-1)(1+1)} + \frac{1+1}{-1(-1-1)(x+1)} \\ &= \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}.\end{aligned}$$

Tarkastellaanpa sitten esimerkkiä, jossa nimittäjällä on korkeamman kertaluvun nollakohta. Koska

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2},$$

yritetään ratkaista vakiot a, b, c . Kerrotaan yhtälö tulolla $x^2(x-1)$, josta

$$1 = ax^2 + b(x-1)x + c(x-1) = (a+b)x^2 + (c-b)x - c \quad \text{kaikilla } x.$$

Siten $a+b=0=c-b$ ja $-c=1$ eli

$$c = -1, \quad b = -1, \quad \text{ja } a = 1.$$

Siis saimme osamurtokehityksen

$$\frac{1}{x^2(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2},$$

josta

$$\int \frac{dx}{x^2(x-1)} = \log|x-1| - \log|x| + \frac{1}{x}.$$

Seuraavassa kompleksiset juuret astuvat esiin:

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1},$$

josta kertoimille

$$1 = a(x^2+1) + x(bx+c) = x^2(a+b) + xc + 1,$$

mistä

$$a = 1, \quad b = -1 \quad \text{ja } c = 0,$$

eli

$$\frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}.$$

Siis

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1).$$

Trigonometrinen funktioiden integrointi.

Trigonometrisia funktioita sisältävien lausekkeiden integroimiseksi ei ole yleistä keinoa. Usein kannattaa katsella trigonometrisia muunnoskaavoja, joiden avulla integroitava saattaa luiskahtaa helpommin integroitavaan muotoon. Osittaisintegroitavia palautuskaavoineen ei myöskään sovi väheksyä.

Edelleen havaitaan, että sijoittamalla

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

saadaan

$$\frac{1}{1+t^2} = \cos^2 \frac{x}{2} \quad \text{ja} \quad \frac{t^2}{1+t^2} = \sin^2 \frac{x}{2},$$

joista edelleen

$$\sin x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} \tan \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{ja} \quad \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Siten $\cos x$ ja $\sin x$ voidaan esittää muuttujan $t = \tan \frac{x}{2}$ rationaalifunktioina. Edelleen derivoimalla

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2},$$

josta

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2},$$

eli myös derivaatta $\frac{dx}{dt}$ on t :n rationaalifunktio.

Saamme:

Funktio $R(\sin x, \cos x)$ **integrointi.** Tässä $R(\sin x, \cos x)$ tarkoittaa, että kyseessä on rationaalilauseke funktioista $\sin x$ ja $\cos x$. Sijoitus

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

muuttaa tämän rationaalifunktion integroinniksi:

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt,$$

jossa integroitava on t :n rationaalifunktio. Joskus osittaisintegrointi tuottaa helpommin tuloksen.

Samoin lausekkeen $R(\tan x)$ integrointi muuttuu rationaalifunktion integroinniksi sijoituksella $t = \tan x$.

Esimerkki. Integraali

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$$

muuttuu siis sijoituksella $t = \tan \frac{x}{2}$ integraaliksi

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x} &= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \int \frac{dt}{t(1+t)} \\ &= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{1+t} = \log \left| \frac{t}{1+t} \right| \\ &= \log \left| \frac{\tan \frac{x}{2}}{1 + \tan \frac{x}{2}} \right|. \end{aligned}$$

Eräiden muiden funktioiden integroinnista.

Funktioden $R(\sinh x, \cosh x)$ **ja** $R(x, \sqrt{x^2 - 1})$ **integrointi.** Samaan tapaan kuin trigonometrinen funktioiden tapauksessa sijoitus

$$t = \tanh \frac{x}{2}$$

antaa

$$\int R(\sinh x, \cosh x) dx = \int R\left(\frac{2t}{1-t^2}, \frac{1+t^2}{1-t^2}\right) \frac{2}{1-t^2} dt.$$

Sijoitus $t = e^x$ on myös usein hyödyllinen. Edelleen funktion $R(x, \sqrt{x^2 - 1})$ integrointi palautuu tähän sijoituksella $x = \cosh t$. sen voi hoidella myös suoraan sijoituksella $t = \tanh \frac{x}{2}$.

Funktio $R(x, \sqrt{x^2 + 1})$ **integrointi.** Sijoitus $x = \sinh t$ palauttaa tämän funktioiden $\sinh x$ ja $\cosh x$ rationaaliseksi lausekkeeksi. Rationaalifunktion integroinniksi palautetaan suoraan esimerkiksi sijoituksella

$$t = x + \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{tai} \quad \tau = \frac{-1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}.$$

Funktio $R(x, \sqrt{ax^2 + 2bx + c})$ **integrointi.** Tällaiset palautuvat aiempiin: Aina voimme olettaa, että $a > 0$. Koska

$$ax^2 + 2bx + c = \frac{1}{a}(ax + b)^2 + \frac{ac - b^2}{a},$$

niin tapauksessa $ac - b^2 = 0$ saamme

$$\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}\right),$$

jolloin intergrandi onkin rationaalinen.

Jos taas $ac - b^2 > 0$, sijoitamme

$$t = \frac{ax + b}{\sqrt{ac - b^2}}$$

on

$$\sqrt{ax^2 + 2bx + c} = \sqrt{\frac{ac - b^2}{a}} \sqrt{t^2 + 1},$$

mikä palautuu edelliseen.

Lopuksi, jos $ac - b^2 < 0$, sijoitus

$$t = \frac{ax + b}{\sqrt{b^2 - ac}}$$

palauttaa ongelman rationaalifunktion $R(t, \sqrt{t^2 - 1})$ integroinniksi.

Funktioden $R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{\alpha x + \beta})$ **ja** $R(x, \sqrt{\frac{ax+b}{\alpha x+\beta}})$ **integrointi.** Kahden eri lineaarifunktion neliöjuuria sisältävien rationaalifunktioiden lausekkeiden

$$R(x, \sqrt{ax + b}, \sqrt{\alpha x + \beta})$$

integrointi palautuu edellisiin sijoituksella

$$t = \sqrt{\alpha x + \beta},$$

josta

$$x = \frac{t^2 - \beta}{\alpha} \quad \text{ja} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2t}{\alpha}$$

ja siis

$$\int R(x, \sqrt{\alpha x + \beta}, \sqrt{\alpha x + \beta}) dx = \int R\left(\frac{t^2 - \beta}{\alpha}, \sqrt{\frac{1}{\alpha}(at^2 - a\beta + \alpha b)}, t\right) \frac{2t}{\alpha} dt,$$

joka on edellä käsiteltyä tyyppiä.

Edelleen sijoitus

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x + b}{\alpha x + \beta}},$$

jolloin

$$x = \frac{-\beta t^n + b}{\alpha t^n - a} \quad \text{ja} \quad \frac{dx}{dt} = \frac{a\beta - b\alpha}{(\alpha t^n - a)^2} n t^{n-1},$$

ja jälkimmäinen integraali muuttuu muotoon

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x + b}{\alpha x + \beta}}\right) dx = \int R\left(\frac{-\beta t^n + b}{\alpha t^n - a}, t\right) \frac{a\beta - b\alpha}{(\alpha t^n - a)^2} n t^{n-1} dt,$$

joka on rationaalifunktion integraali.

Huomautus. Edelliset esimerkit toimivat teoriassa hyvin. Käytännössä ne usein johtavat kuitenkin turhan monimutkaisiin laskutoimituksiin ja onkin syytä aina miettiä, johtaisiko erikoistapauksessa jokin muu menetelmä nopeammin tulokseen. Esimerkiksi integraali

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

palautuu sijoituksella $t = \tan x$ rationaalifunktion

$$\frac{1}{a^2 t^2 + b^2}$$

integroinniksi, sillä

$$\frac{1}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x (a^2 \tan^2 x + b^2)} = \frac{1 + \tan^2 x}{a^2 \tan^2 x + b^2}.$$

Teorian mukainen sijoitus $\tau = \tan \frac{x}{2}$ johtaa taas integraaliin

$$\int \frac{2 + 2\tau^2}{b^2 + \tau^2(4a^2 - 2b^2) + b^2\tau^4} d\tau.$$

6. Epäoleelliset integraalit

Integraalin määritelmässä olemme vaatineet, että integrandi f on *rajoitettu* funktio suljetulla ja *rajoitetulla* välillä $[a, b]$. Nyt laajennamme integraalin käsitettä niin, että voimme tutkia integraaleja, joissa joko integrandi tai integrointiväli ovat rajoitettuja. Tällaisia integraaleja sanotaan epäoleellisiksi (engl. improper). Epäoleellisia integraaleja on siis (pääosin) kahdenlaisia:

i) Integraali

$$\int_a^b f \, dx,$$

missä f ei ole rajoitettu välillä $[a, b]$, mutta kuitenkin f on Riemann-integroitava jokaisella välillä $[c, d] \subset]a, b[$.

ii) Integraalit

$$\int_{-\infty}^b f \, dx, \quad \int_a^{\infty} f \, dx \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f \, dx,$$

missä f on rajoitettu ja Riemann-integroitava jokaisella rajoitetulla osavälillä.

Tarkastellaan ensin tapausta **i**), jossa f on Riemann-integroitava jokaisella välin $]a, b[$ suljetulla osavälillä $[c, d] \subset]a, b[$. Siis integraali

$$\int_c^d f(x) \, dx$$

on hyvin määritelty kaikille $a < c < d < b$. Tutkitaan raja-arvoa

$$\lim_{c \rightarrow a+} \int_c^d f(x) \, dx.$$

Mikäli se on olemassa (ja reaaliluku!), sanotaan, että *epäoleellinen integraali*

$$\int_a^d f(x) \, dx$$

suppenee (konvergoi) ja merkitään

$$\int_a^d f(x) \, dx := \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^d f(x) \, dx.$$

(Tämän integraalin epäoleellisuus on siis integraalin alarajalla.)

Samoin, jos raja-arvo

$$\lim_{d \rightarrow b-} \int_c^d f(x) \, dx.$$

on olemassa (ja reaaliluku!), sanotaan, että *epäoleellinen integraali*

$$\int_c^b f(x) dx$$

suppenee (konvergoi) ja merkitään

$$\int_c^b f(x) dx := \lim_{d \rightarrow b-} \int_c^d f(x) dx.$$

(Tämän integraalin epäoleellisuus on siis integraalin ylärajalla.)

Ellei epäoleellinen integraali suppene, niin se *hajaantuu (divergoi)*.

Tämä yleistetään seuraavan periaatteen mukaisesti: jos väli $[a, b]$ voidaan jakaa äärellisen moneen suljettuun osaväliin $[c_{j-1}, c_j]$, missä

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b,$$

ja epäoleelliset integraalit

$$\int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x) dx$$

suppenevat kaikilla $j = 1, 2, \dots, n$, niin sanotaan, että *epäoleellinen integraali*

$$\int_a^b f(x) dx$$

suppenee (konvergoi) ja merkitään

$$\int_a^b f(x) dx := \sum_{j=1}^n \int_{c_{j-1}}^{c_j} f(x) dx.$$

Erityisesti siis, jos f on Riemann-integroitava jokaisella välin $]a, b[$ suljetulla osavälillä $[c, d] \subset]a, b[$, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

suppenee, jos ja vain, jos on olemassa $c \in]a, b[$ siten, että epäoleelliset integraalit

$$\int_a^c f(x) dx \quad \text{ja} \quad \int_c^b f(x) dx$$

suppenevat; tällöin asetetaan

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Esimerkkejä. Olkoon

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \text{missä } \alpha > 0.$$

Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(1 - \varepsilon^{1-\alpha}), & \text{kun } \alpha \neq 1, \\ \log \frac{1}{\varepsilon}, & \text{kun } \alpha = 1. \end{cases}$$

Siten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, & \text{kun } 0 < \alpha < 1, \\ \infty, & \text{kun } \alpha \geq 1, \end{cases}$$

joten epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

suppenee, kun $\alpha < 1$ ja hajaantuu, kun $\alpha \geq 1$.

Toisena esimerkkinä: epäoleellinen integraali

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

suppenee, koska

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{1-\varepsilon} \arcsin x = \arcsin(1-\varepsilon) \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Vertailemalla integrandeja tunnetusti suppenevien tai hajaantuvien integraalien integrandeihin, voidaan usein saada selville halutun integraalin suppeneminen.

6.1. Lause. (vertailu/majoranttiperiaate) Olkoon f ei-negatiivinen ja Riemann-integroituva välillä $[a, c]$ kaikilla $c \in]a, b[$.

i) Jos on olemassa funktio h , jolle

$$0 \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{kaikilla } x \in [a, b[$$

ja epäoleellinen integraali

$$\int_a^b h(x) dx$$

suppenee, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

suppenee.

ii) Jos on olemassa funktio g , jolle

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \text{kaikilla } x \in [a, b[$$

ja epäoleellinen integraali

$$\int_a^b g(x) dx$$

hajaantuu, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

hajaantuu.

Todistus. Koska

$$I(t) = \int_a^t f(x) dx$$

on kasvava (sillä $f \geq 0$), suppenee integraali

$$\int_a^b f(x) dx,$$

jos ja vain, jos

$$\lim_{t \rightarrow b-} I(t) < \infty.$$

Kohdassa *i*)

$$I(t) \leq \int_a^t h(x) dx \leq \int_a^b h(x) dx < \infty,$$

joten

$$\int_a^b f(x) dx$$

suppenee. Kohdassa *ii*)

$$I(t) \geq \int_a^t g(x) dx \rightarrow \int_a^b g(x) dx = \infty,$$

joten $I(t) \rightarrow \infty$ ja siten

$$\int_a^b f(x) dx$$

hajaantuu. □

Esimerkki. Integraali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x} \log x}$$

suppenee, koska

$$0 \leq -\frac{1}{\sqrt{x} \log x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{kaikilla } 0 < x < \frac{1}{2}$$

ja integraali

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2dx}{\sqrt{x}}$$

suppenee edellisen esimerkin nojalla.

Toisaalta integraali

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \log x}$$

hajaantuu, koska

$$-\frac{1}{\sqrt{x} \log x} \geq -\frac{1}{\log x} \quad \text{kaikilla } \frac{1}{2} \leq x < 1$$

ja väliarvolaseen nojalla on kaikilla $\frac{1}{2} \leq x < 1$ (olemassa $\frac{1}{2} < \xi < 1$, jolle)

$$|\log x| = |1 - x| \frac{1}{\xi} \leq 2|1 - x|,$$

joten

$$-\frac{1}{\log x} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{1 - x}.$$

Edelleen integraali

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{1 - x}$$

hajaantuu, koska

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{t} \rightarrow \infty, \quad \text{kun } \varepsilon \rightarrow 0+.$$

Huomautus. Edellisessä esimerkissä verrattiin integrandia tyyppiä $x^{-\alpha}$ oleviin integrandeihin. Tällainen toimii usein ja on hyvä muistaa, että jos f on ei-negatiivinen, integroitava väleillä $[a, c]$, kun $c \in]a, b[$, niin integraali

$$\int_a^b f dx$$

suppenee, jos

$$f(x) = O\left(\frac{1}{(b-x)^\alpha}\right) \text{ kun } x \rightarrow b- \text{ jollain } 0 < \alpha < 1$$

ja hajaantuu jos

$$\frac{1}{(b-x)^\alpha} = O(f(x)) \text{ kun } x \rightarrow b- \text{ jollain } \alpha \geq 1.$$

Toinen ryhmä epäoleellisia integraaleja koostuu sellaisista, joissa integroitava väli on rajoittamaton ja integrandi on rajoitettu ja Riemann-integroituva jokaisella suljetulla ja rajoitetulla osavälillä. Tarkastellaan siis muotoa

$$\int_{-\infty}^b f \, dx, \quad \int_a^\infty f \, dx \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^\infty f \, dx,$$

olevia integraaleja. Määrittely tapahtuu hyvin samaan tapaan kuin edelläkin: tarkastellaan (esimerkiksi) raja-arvoa:

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) \, dx.$$

Jos ko. raja-arvo on olemassa, niin sanotaan että *epäoleellinen integraali*

$$\int_a^\infty f \, dx$$

suppenee (konvergoi) ja merkitään

$$\int_a^\infty f \, dx := \lim_{c \rightarrow \infty} \int_a^c f(x) \, dx.$$

Edelleen, *epäoleelliset integraalit*

$$\int_{-\infty}^b f \, dx \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^\infty f \, dx$$

suppenevat (konvergoivat) ja

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^b f \, dx &:= \lim_{d \rightarrow -\infty} \int_d^b f(x) \, dx \\ \int_{-\infty}^\infty f \, dx &:= \lim_{d \rightarrow -\infty} \int_d^b f(x) \, dx + \lim_{c \rightarrow \infty} \int_b^c f(x) \, dx. \end{aligned}$$

jos eo. raja-arvot ovat olemassa (ja äärellisiä). Huomaa, että jälkimmäisessä tapauksessa molempien raja-arvojen täytyy olla erikseen olemassa ja äärellisiä. Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \, dx$$

suppenee, jos ja vain jos molemmat integraalit

$$\int_{-\infty}^a f \, dx \quad \text{ja} \quad \int_a^{\infty} f \, dx$$

suppenevat jollain (kaikilla) $a \in \mathbf{R}$.

Esimerkki. Olkoon

$$I = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}, \quad \text{missä } \alpha > 0.$$

Tällöin kaikilla $c > 1$

$$\int_1^c \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(c^{1-\alpha} - 1), & \text{kun } \alpha \neq 1, \\ \log c, & \text{kun } \alpha = 1. \end{cases}$$

Siten

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{kun } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{kun } 0 < \alpha \leq 1, \end{cases}$$

joten epäoleellinen integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$$

suppenee, kun $\alpha > 1$ ja hajaantuu, kun $\alpha \leq 1$. Vertaa saman epäoleellisen integraalin suppeneminen 0:ssa.

Edellä oleva esimerkki on erittäin hyödyllinen, koska kuten aiemmin (Lause 6.1) pätee seuraava vertailulause.

6.2. Lause. (vertailu/majoranttiperiaate) Olkoon f ei-negatiivinen ja Riemann-integroituva välillä $[a, c]$ kaikilla $c \geq a$.

i) Jos on olemassa funktio h , jolle

$$0 \leq f(x) \leq h(x) \quad \text{kaikilla } x \in [a, \infty[$$

ja epäoleellinen integraali

$$\int_a^{\infty} h(x) \, dx$$

suppenee, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

suppenee.

ii) Jos on olemassa funktio g , jolle

$$0 \leq g(x) \leq f(x) \quad \text{kaikilla } x \in [a, \infty[$$

ja epäoleellinen integraali

$$\int_a^{\infty} g(x) dx$$

hajaantuu, niin epäoleellinen integraali

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

hajaantuu.

Lauseen 6.2 todistus on samanlainen kuin Lauseen 6.1, joten se jätetään harjoitustehtäväksi.

6.3. Seuraus. *Olkoon f ei-negatiivinen ja Riemann-integroituva välillä $[a, c]$ kaikilla $c \geq a$. Jos*

$$f(x) = O\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad \text{kun } x \rightarrow \infty$$

jollain $\alpha > 1$, niin integraali

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

suppenee. Jos taas

$$\frac{1}{x} = O(f(x)), \quad \text{kun } x \rightarrow \infty,$$

niin integraali

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

hajaantuu.

Esimerkki. Koska

$$\frac{1}{1+x^2} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \text{ kun } x \rightarrow \infty,$$

suppenevat integraalit

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2}.$$

Tämä on helppo todeta suoraankin:

$$\int_0^c \frac{dx}{1+x^2} = \arctan c - \arctan 0 = \arctan c \rightarrow \frac{\pi}{2},$$

joten

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ja} \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Edellä käytiin jo seuraavaa yksinkertaista periaatetta pariinkin otteeseen.

6.4. Lause. *Olkoon $b \in \mathbf{R}$ tai $b = \infty$. Olkoon f ei-negatiivinen ja Riemann-integroituva välillä $[a, c]$ kaikilla $c \in [a, b[$. Tällöin integraali*

$$\int_a^b f(x) dx$$

suppenee, jos ja vain, jos on olemassa $M \in \mathbf{R}$ siten, että

$$\int_a^c f(x) dx \leq M \text{ kaikilla } c \in [a, b[.$$

Todistus. Seuraa siitä, että kasvavalla funktiolla

$$F(c) = \int_a^c f(x) dx$$

on aina raja-arvo L , kun $c \rightarrow b-$ ja

$$\int_a^c f(x) dx \leq L \text{ kaikilla } c \in [a, b[.$$

□

Lauseen 6.4 nojalla on perusteltua käyttää ilmaisua

$$\int_a^b f \, dx < \infty$$

tarkoittamaan, että *ei-negatiivisen* funktion f epäoleellinen integraali suppenee.

Vertailutestit 6.1 ja 6.2 antavat helposti seuraavan ”osamäärätestin” (todistus harjoitustehtävä).

6.5. Lause. Olkoon $b \in \mathbf{R}$ tai $b = \infty$ Olkoot f ja g ei-negatiivisia ja Riemann-integroituvia välillä $[a, c]$ kaikilla $c \in [a, b[$ siten, että

$$\lim_{x \rightarrow b-} \frac{f(x)}{g(x)} = A \in [0, \infty].$$

i) Jos $0 < A < \infty$, niin

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{suppenee, jos ja vain, jos} \quad \int_a^b g(x) \, dx \quad \text{suppenee}.$$

ii) Jos $A = 0$ ja

$$\int_a^b g(x) \, dx \quad \text{suppenee,}$$

niin

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{suppenee}.$$

iii) Jos $A = \infty$ ja

$$\int_a^b g(x) \, dx \quad \text{hajaantuu,}$$

niin

$$\int_a^b f(x) \, dx \quad \text{hajaantuu}.$$

Ei-negatiivisten funktioiden integraalien suppeneminen on (periaatteessa) helppo tarkistaa, koska riittää vain tietää, että integraalit pysyvät rajoitettuina. Jos integrandi vaihtaa merkkiään, voi integraaleissa tapahtua kumoutumisilmiöitä, esimerkiksi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = - \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x \, dx, \quad \text{joten} \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 0.$$

Määritelmä. Sanotaan, että epäoleellinen integraali

$$\int_a^b f(x) dx$$

suppenee itseisesti, jos integraali

$$\int_a^b |f(x)| dx$$

suppenee.

Koska $|f| = f^+ + f^-$ (ja siten $0 \leq f^+ \leq f$ ja $0 \leq f^- \leq f$), tarkoittaa integraalin

$$\int_a^b f(x) dx$$

itseinen suppeneminen samaa kuin, että molemmat integraalit

$$\int_a^b f^+(x) dx \quad \text{ja} \quad \int_a^b f^-(x) dx$$

suppenevat. Koska $f = f^+ - f^-$, saadaan tästä:

6.6. Lause. *Jos epäoleellinen integraali*

$$\int_a^b f(x) dx$$

suppenee itseisesti, niin se suppenee.

Esimerkki. Integraali

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$

suppenee, mutta ei itseisesti, ts. integraali

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

hajaantuu. Jälkimmäinen on helppo nähdä: Ensiksi,

$$|\sin x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{2} \quad \text{jos } x + n\pi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ jollain } n \in \mathbf{Z},$$

Edelleen kaikilla $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$,

$$\int_{\frac{\pi}{4}+n\pi}^{\frac{3\pi}{4}+n\pi} \frac{dx}{x} \geq \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}+n\pi}^{\frac{\pi}{4}+2n\pi} \frac{dx}{x},$$

joten

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+n\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx &= \sum_{k=1}^n \int_{\frac{\pi}{4}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{4}+k\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{\pi}{4}+(k-1)\pi}^{\frac{3\pi}{4}+(k-1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}+(k-1)\pi}^{\frac{3\pi}{4}+(k-1)\pi} \frac{dx}{x} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}+(k-1)\pi}^{\frac{\pi}{4}+k\pi} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+n\pi} \frac{dx}{x} \\ &\rightarrow \infty, \end{aligned}$$

kun $n \rightarrow \infty$. Siis

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty.$$

Näytetään, että kumoutumisilmiö saa integraalin

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

suppenemaan. (Koska

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

ei suppeneminen 0:ssa ole ongelma.) Osittaisintegroidaan: kun $0 < a < b < \infty$, niin

$$\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_a^b \frac{1 - \cos x}{x} + \int_a^b \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$$

Koska

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1 - \cos a}{a} = \sin 0 = 0$$

ja

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos b}{b} = 0, \quad (\text{koska } 0 \leq 1 - \cos b \leq 2)$$

saadaan

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0} \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx,$$

mikä suppenee 0:ssa edellä koska $\sin x/x \rightarrow 1$, kun $x \rightarrow 0$ ja ∞ :ssä, koska

$$0 \leq \frac{1 - \cos x}{x^2} \leq 2 \frac{1}{x^2}.$$

Huomautus. Osittaisintegrointi ja muuttujanvaihto toimivat suppeneville epäoleellisille integraaleillekin.

Esimerkki. (Gammafunktio)

Gammafunktio määritellään

$$\Gamma(n) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx, \quad n > 0.$$

Integraali suppenee, koska välillä $]0, 1[$

$$0 < e^{-x} x^{n-1} < \frac{1}{x^\alpha}, \quad \text{kun } \alpha = 1 - n < 1,$$

ja välillä $]1, \infty[$ integraali suppenee myös Lauseen 6.5 nojalla, koska

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-x} x^{n-1}}{\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Osittaisintegroimalla saadaan

$$\int e^{-x} x^{n-1} dx = -e^{-x} x^{n-1} + (n-1) \int e^{-x} x^{n-2} dx,$$

joten, kun $n > 1$, on

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} -e^{-x} x^{n-1} + (n-1) \Gamma(n-1) = (n-1) \Gamma(n-1).$$

Jatkamalla tätä rekursiivisesti saadaan: jos k on kokonaisluku ja $0 < k < n$, niin

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \cdots (n-k) \Gamma(n-k).$$

Erityisesti, jos $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, ja $k = n-1$,

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) = (n-1)! \int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

Koska

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = - \int_0^{\infty} e^{-x} = 1,$$

niin

$$\Gamma(n) = (n-1)!,$$

tai

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx, \quad \text{kun } n \in \mathbf{N}.$$