ANALYYSI 1

Tero Kilpeläinen

2000/2002

Sisällys

Johdanto

Matematiikka on paljon enemmän kuin vain kokoelma teorioita, lauseita, määritelmiä, ongelmia ja tekniikoita. Matematiikka on tapa ajatella. Sama pätee tietenkin myös matematiikan eri haaroihin, kuten (matemaattiseen) analyysiin. Analyysiä voidaan pitää yhteisnimekkeenä kaikelle matematiikalle, jossa käytetään rajaprosesseja. Rajaprosessien ymmärtäminen ja hallitseminen on ensiarvoisen tärkeää mm. sovellettaessa matematiikkaa luonnontieteissä. Näin pyritään ymmärtämään, miksi ja milloin mittaamalla voidaan saada suhteellisen luotettavaa tietoa ilmiöistä. Koulusta tuttuja analyysiin kuuluvia aiheita ovat mm. raja-arvot, jatkuvuus, derivaatat ja integraalit; näitä käsitellään perusteellisesti kursseilla Analyysi 1 ja 2. Tavoitteena on oppia ymmärtämään teorian perusteet melko hyvin lukuvuoden aikana. Nämä muistiinpanot sisältävät karuja merkintöjä lukuvuosina 2000−01 ja 2002 − 03 pidetyistä kursseista. Ne eivät millään kykene korvaamaan luentojen seuraamista eikä kunnollisen kirjan lukemista. Oppikirjaksi suosittelen teosta:

R. Courant & F. John: Introduction to Calculus and Analysis I.

Matematiikan oppiminen on usein vaikeaa, jopa epätoivoiselta tuntuvaa. Oivaltaminen saattaa kuitenkin olla lähempänä kuin miltä tuntuu: usein kannattaa kysyä opettajilta tai muilta opiskelijoilta – jo kysymyksen huolellinen muotoilu saattaa selvittää ongelmasi. Lisäksi on syytä pitää mielessä, että matematiikan opiskelu vaatii välillä koviakin ponnisteluja, pohtimista ja harjoittelua. Aiemmin opittu tukee uuden oppimista. Luovuttamiseen ei ole mitään syytä, vaikka välillä eteen tulisikin asioita, joita ei tunnu ymmärtävän. Vaikeisiin kohtiin voi ja tulee palata myöhemmin, jolloin vaikeudet usein selviävät. Analyysin kursseilla 1 ja 2 ei ole "ylimääräisiä" asioita, vaan kaikki tulisi oppia. Niillä tutustutaan matemaattiseen kielenkäyttöön ja muutamiin perusajattelutapoihin, jotka tulevat eri muodoissaan vastaan matematiikan opintojen myöhäsemmissä vaiheissa. Ajattelutapojen sisäistäminen vie yleensä melko lailla aikaa eikä pidä hämmästyä, vaikka aluksi ei oikein näkisikään metsää puilta. Oppimiseen kannattaa kuitenkin panostaa, sillä se avaa kokonaisen uuden maailman ja auttaa huomattavasti jatko-opinnoissa.

Matematiikan ymmärtäminen on monimutkainen prosessi. Se käsittää yksityiskohtaisen päättelyn seuraamisen ja todentamisen lisäksi myös suurempien strategioiden hallinan; kuinka päättely rakentuu, miten yksittäiset oletukset tulevat käyttöön ja kuinka kokonainen teoria muodostuu osista, lauseista ja määritelmistä.

Kenties tärkeimpiä palasia näillä kursseilla ovat *määritelmät*. Määritelmän tarkoituksena on antaa nimi jollekin ilmiölle tai objektille. Esimerkiksi virke: "Kahden kokonaisluvun osamäärää kutsutaan *murtoluvuksi*." on murtoluvun määritelmä. Matematiikassa määritelmät ovat tarkkoja: (periaatteessa) aina voidaan ratkaista, toteuttaako joku objekti määritelmän ehdon vai ei. Määritelmän tekstissä jokaisella sanalla on tärkeä roolinsa. Ne on osattava ulkomuistista! Tärkeää on myös saada mielikuva siitä, mitä määritelmä tarkoittaa. Tämän oppimiseksi on yleensä luotava esimerkkejä ja vastaesimerkkejä – kuvien piirtämistä ei myöskään sovi unohtaa! Pidä kuitenkin huoli, ettet sekoita mielikuvia ja tarkkaa määritelmää keskenään. Esimerkiksi reaalilukua r sanotaan *rationaaliluvuksi* tai *rationaaliseksi*, jos on olemassa murtoluku $\frac{p}{q}$, jolle

$$r = \frac{p}{q}\,.$$

Huomaatko rationaaliluvun ja murtoluvun käsitteiden eron?

Määritelmien avulla muodostetaan väittämiä, joita kutsutaan yleensä *lause*iksi tms. Lause sisältää yleensä *oletuksia* ja *väitteen*. Karkeasti matemaattiset väittämät (lauseet) ovat muotoa: "Jos oletukset *plää plää* ovat voimassa, niin väite *jäkäti jäkäti* on tosi". Esimerkki:

Lause. *Päättyvä desimaaliluku on rationaalinen.*

Tästä lauseesta oletukset ja väite eristetään seuraavasti:
Oletus: Luku x on päättyvä desimaaliluku.
Väite: x on rationaaliluku.

Tarkkaan ottaen väittämä ei ole lause, ellei sitä ole todistettu. Mikä sitten on todistus? *Todistus* on loogisesti pitävä perustelu sille, että väite on tosi tehtyjen oletusten vallitessa. Käytännössä todistus on usein pienin askelin etenevä kertomus tai selitys, miksi väite on totta. Todistuksen tulee edetä niin pienin askelin, että mahdollinen lukija pystyy helposti vakuuttautumaan päättelyketjun pitävyydestä, rivi riviltä ja sana sanalta.

Kuinka sitten keksii todistuksen? Entä kirjoittaa sellaisen? Usein ensimmäinen tehtävä on lauseen purkaminen väitteeksi ja oletuksiksi. Sitten on mietittävä, mitä oletukset ja väite oikein tarkoittavat ja koitettava muistella, tunteeko samantapaisia tilanteita. Esimerkkejä kannattaa myös tarkastella, jotta näkisi yleisen idean tai mallin.

Eo. lauseen tilanteessa oletus x on päättyvä desimaaliluku tarkoittaa, että

$$x = a, bcdefg...t\,,$$

missä kirjaimet ovat kokonaislukuja ja niitä on vain äärellinen määrä (esimerkkilukuja 1, $2,7$, $-3,12346577778$ jne.).

Väite x on rationaaliluku taas tarkoittaa sitä, että on olemassa murtoluku $\frac{p}{q}$, jolle

$$x = \frac{p}{q}\,.$$

Siis olisi löydettävä kokonaisluvut p ja q, joille

$$a, bcdefg...t = \frac{p}{q}\,.$$

Esimerkkitapauksissa $1 = \frac{1}{1}$, mikä oli helppoa,

$$2,7 = \frac{27}{10} \quad \text{ja} \quad -3,12346577778 = \frac{-312346577778}{100000000000}\,,$$

mistä havaitaankin, että laventamalla luvulla jossa on yhtä monta nollaa kuin desimaaleja näytettäisiin päästävän toivottuun tulokseen. Nyt olemmekin valmiita kirjoittamaan varsinaisen todistuksen.

Esimerkkitodistus em. lauseelle. Olkoon n luvun

$$x = a, bcdefg...t\,,$$

desimaalien lukumäärä. Tällöin

$$x = \frac{x \cdot 10^n}{10^n} = \frac{abcdefg...t}{10^n}$$

ja

$$\frac{x \cdot 10^n}{10^n}$$

on murtoluku, joten x on rationaalinen. □

Lauseiden ja väittämien todistukset ovat olennaisinta osaa kurssista. Todistuksilla on ainakin kolme tehtävää:

- Vakuuttaa, että väite on tosi.
- Auttaa ymmärtämään lauseen ja määritelmien sisältöä ja merkitystä.
- Toimia malleina ja esimerkkeinä.

Mitä tarkoittaa todistusten ja lauseiden ymmärtäminen? Ymmärtämisessä on monta eri tasoa. Ensimmäisellä tasolla lukijan tulee lukea todistus huolellisesti ja vakuuttua siitä, että sen kaikki yksityiskohdat ovat oikein. Todistus ei ole ”uskottelua”, vaan tarkistaessasi todistusta on se käytävä läpi rivi riviltä ja sana sanalta ja tarkastettava kaikki vaiheet, jotka esitetään (kuin myös täydennettävä ne yksityiskohdat, jotka on jätetty mainitsematta). Lukiessasi, kysele: ”Miksi?”! Merkitse kohdat, joita et ymmärrä ja palaa niihin myöhemmin. Kysele!

Seuraavalla ymmärryksen tasolla pitäisi hahmottaa todistuksen rakenne. Mitkä ovat päätulokset, joita käytetään, päävaikeudet ja kuinka ne voitetaan, kontsruktiot yms? Tällä tasolla pitäisi pystyä muodostamaan karkea todistuksen runko, joka sisältää vielä vihjeitä, kuinka yksityiskohdat saadaan täytetyiksi. Tämän avulla sinun tulisi kyetä kirjoittamaan todistus myöhemmin itse – opettelematta todistusta ulkoa.

Kolmannella tasolla pitäisi pystyä analysoimaan yksittäisten oletusten käyttö: missä ja miten mitäkin oletusta käytetään ja tarvitaanko oletusta koko voimallaan, vai voisiko niitä kenties heikentää. Tämän tason saavuttaminen edellyttää, että todistus puretaan osiin ja kasataan uudelleen, jotta nähdään selvemmin, kuinka palaset sopivat yhteen.

Näiden tasojen jälkeen tulee vielä pyrkiä näkemään todistukset, lauseet ja määritelmät laajemmissa yhteyksissä: kuinka lauseita käytetään ja voidaanko niitä yleistää jne.

Usein lauseet ja todistukset esitetään hyvin yleisessä muodossa, mikä tekee ne tehokkaammiksi, mutta samalla vaikeuttaa ymmärtämistä. Siksi hyvä keino helpottaa lauseiden ja todistusten ymmärtämistä on kirjoittaa ne esimerkkitapauksissa; tällöin ideat usein pelkistyvät (mutta toisaalta konkreettiset esimerkit tuovat usein mukanaan suuriakin teknisiä vaikeuksia). Huomaa kuitenkin, että esimerkit parhaimmillaankin vain auttavat ymmärtämään teoriaa: esimerkit eivät vahvista teoriaa, vaan teoria selittää esimerkit.

Mitä edellä sanottiin todistuksen ymmärtämisestä pätee myös matemaattisten teorioiden, esimerkiksi Analyysi 1 ja 2 -kurssien ymmärtämiseen, ja laajemmin koko matematiikan ymmärtämiseen. Erityisesti on huomattava, että ymmärtääksesi todistuksen tai teorian myöhempiä vaiheita myös alkuosa täytyy olla hallinnassa (ja siihen on uudelleen ja uudelleen palattava), sillä matematiikassa tieto kumuloituu.

Matematiikassa mitään ei voi unohtaa. Ulkoaopeteltavaa ei myöskään ole paljoa: ainoastaan määritelmät ja päälauseiden väitteet (ja muutamat kaavat) tulee muistaa ulkoa.

Lopuksi haluan vielä muistuttaa siitä, että matematiikka on taitolaji. Siksi harjoittelu on ainoa keino oppia. Kurssiin liittyvien lukuisten harjoitustehtävien tarkoituksena on auttaa sinua ymmärtämään teoriaa paremmin. Niissä on myös paljon esimerkkejä, jotka auttavat teorian omaksumista. Vain itse tekemällä – yksin tai ryhmässä – oppii.

Analyysi.
Mitä on analyysi? Karkeasti määriteltynä analyysiä ovat ne matematiikan alat, joissa on rajaprosesseja. Analyysin kursseilla perehdytään erilaisiin rajaprosesseihin. Esimerkkeinä

1. **Raja-arvo:** Raja-arvo on matemaattinen käsite, jolla kuvataan funktioiden yms. kulun tendenssiä, kun muuttuja lähestyy tiettyä arvoa. Raja-arvot ja funktion jatkuvuus ovat läheisessä yhteydessä toisiinsa. Ne ovat Analyysi 1 -kurssin pääaiheita.
2. **Derivaatta:** Derivaatta määritellään raja-arvona ja sen avulla saadan muutosnopeuksia ja käyrien tangentteja. Derivaattoja käsittelevää aineistoa kutsutaan *differentiaalilaskennaksi* - siihen tartumme Analyysi 2 -kurssilla. Differentiaalilaskennan sovelluksina tutkitaan mm. funktion kulkua ja ääriarvoja (maksimit ja minimit).
3. **Integraali:** Integraali saadaan määritellyksi erityisellä rajankäynnillä. Integraaleja käsittelevää aineistoa kutsutaan *integraalilaskennaksi*, mikä on jälleen Analyysi 2 -kurssin aiheita. Pinta-alat, tilavuudet ja käyrien pituudet ovat integraalilaskennan sovellutuksia; sovellutuksia on paljon myös stokastiikassa ja fysiikassa. Osoittautuu, että hämmästyttävästi integrointi ja derivointi ovat toisilleen tavallaan käänteisiä operaatioita.

1. Reaaliluvut ja epäyhtälöt

Merkintöjä.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{luonnollisten lukujen joukko (0 mukana, jos tarvitaan)}$$
$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad \text{kokonaislukujen joukko}$$
$$\mathbf{Q} := \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbf{Z}, m \neq 0 \right\} \quad \text{rationaalilukujen joukko}$$
$$\mathbf{R} = \text{ reaalilukujen joukko}$$
$$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \text{ irrationaalilukujen joukko } = \{x \in \mathbf{R} : x \notin \mathbf{Q}\}.$$

Järjestys.
Lukujen a ja b järjestysrelaatiota merkitään $a \leq b$ (luetaan *a pienempi tai yhtäsuuri kuin b*). Järjestyksellä on ominaisuudet:

i) $a \leq a$ kaikilla $a \in \mathbf{R}$. (refleksiivisyys)
ii) Jos $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$. (antisymmetrisyys)
iii) Jos $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$. (transitiivisuus)

Reaalilukujen järjestys on lisäksi täydellinen: kaikilla $a, b \in \mathbf{R}$ on voimassa $a \leq b$ tai $b \leq a$.

*Väli*ä merkitään usein kirjaimella I. Väli I on aina epätyhjä , $I \neq \emptyset$, ja $I \subset \mathbf{R}$. Väli on joku seuraavista:

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\} && \text{(suljettu väli)}, \\ [a, b[&:= \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\} && \text{(puoliavoin väli)}, \\ ]a, b] &:= \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\} && \text{(puoliavoin väli)}, \\ ]a, b[&:= \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\} && \text{(avoin väli)} \end{aligned}$$

tai

$$\begin{aligned}]-\infty, b] &:= \{x \in \mathbf{R} : x \leq b\}, \quad]-\infty, b[:= \{x \in \mathbf{R} : x < b\}, \\ ]a, \infty[&:= \{x \in \mathbf{R} : x > a\}, \quad [a, \infty[:= \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\} \quad \text{tai} \\ ]-\infty, \infty[&:= \mathbf{R}. \end{aligned}$$

Luvun $x \in \mathbf{R}$ *itseisarvo* on

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x < 0, \end{cases}$$

lukujen a:n ja b:n *välinen etäisyys* on $|a - b|$, jos $a, b \in \mathbf{R}$. Erityisesti siis luvun x itseisarvo on sen etäisyys origosta eli luvusta 0.

Huomautus. Rationaaliluvut ovat tiheässä: Olkoon $x, y \in \mathbf{R}$ ja $x < y$. Tällöin on olemassa rationaaliluku $q \in \mathbf{Q}$ siten, että $x < q < y$ (itse asiassa on äärettömän monta monta tällaista lukua $q \in \mathbf{Q}$): Koska $y - x > 0$, niin on olemassa $n \in \mathbf{N}$ siten, että $y - x > 10^{-n}$ (sillä $10^n > \frac{1}{y-x}$ jollain n).

Tällöin luvun 10^{-n} joku monikerta on etsitty rationaaliluku, sillä muutoin löydetään $k \in \mathbf{Z}$ siten, että

$$x, y \in \left[(k-1)10^{-n}, k10^{-n}\right],$$

jolloin

$$y - x \leq k10^{-n} - (k-1)10^{-n} = 10^{-n} < y - x,$$

mikä on ristiriitaista. (Soveltamalla tätä tulosta toistuvasti löydetään äärettömän monta väitteen toteuttavaa rationaalilukua: korvaamalla y q:lla löydetään $q_2 \in \mathbf{Q}$ siten, että $x < q_2 < q$ ja jatkamalla samaan tapaan $q_3 \in \mathbf{Q}$ siten, että $x < q_3 < q_2 < q < y$ ja niin edelleen.)

Siispä mitä hyvänsä reaalilukua voidaan approksimoida halutulla tarkkuudella rationaaliluvuilla.

Vaikka rationaaliluvut ovat tiheässä, se ei ole riittävän laaja lukujoukko hyvän teorian muodostukseen.

Esimerkki. Yksikköneliön halkaisija on Pythagoraan mukaan $\sqrt{2}$, joka on *irrationaaliluku.*

Todistus. Jos $\sqrt{2}$ on rationaalinen, niin $k\sqrt{2} \in \mathbf{N}$ jollain luvulla $k \in \mathbf{N}$. Olkoon k_0 pienin mahdollinen luku $k_0 \in \mathbf{N}$, jolle $k_0\sqrt{2} \in \mathbf{N}$. Olkoon

$$k_1 = k_0\sqrt{2} - k_0\,,$$

jolloin $0 < k_1 < k_0$, koska

$$k_1 = k_0(\sqrt{2}-1) \text{ ja } \sqrt{2}-1 \in [0,1].$$

Edelleen

$$k_1 = k_0\sqrt{2} - k_0 \in \mathbf{N},$$

koska $k_0\sqrt{2} \in \mathbf{N}$ ja $k_0 \in \mathbf{N}$. Lopuksi,

$$\begin{aligned} k_1\sqrt{2} &= \left(k_0\sqrt{2} - k_0\right)\sqrt{2} \\ &= k_0 2 - k_0\sqrt{2} \in \mathbf{N}\,. \end{aligned}$$

Tämä on ristiriidassa sen kanssa, että k_0 oli pienin tällainen luku. Siispä antiteesi on väärin ja väite todistettu. □

Huomautus. Irrationaalilukuja on oleellisesti enemmän kuin rationaalilukuja. Myös ne ovat tiheässä: kun $x < y$, on olemassa $z \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ siten, että $x < z < y$. (Todistus on samanlainen kuin rationaalilukujen tapauksessa: koska

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \quad \text{kaikille } k \in \mathbf{Z}, k \neq 0$$

löytyy haluttu luku z jonkin tällaisen luvun monikertojen joukosta.)

Rationaaliluku $\frac{p}{q}$ voidaan visualisoida jakamalla (harpilla ja viivaimella) yksikön pituinen jana q yhtäsuureen osaan ($q \in \mathbf{N}$) ja ottamalla niitä p kappaletta.

Entä irrationaaliluvut?

Olkoon $x \in \mathbf{R}$. Valitaan rationaaliluvut a_1 ja b_1 siten, että $a_1 < x < b_1$. Toisin sanoen

$$x \in [a_1, b_1] = I_1.$$

Koska rationaaliluvut ovat tiheässä, on olemassa $a_2, b_2 \in \mathbf{Q}$ siten, että $a_1 < a_2 < x$ ja $x < b_2 < b_1$, toisin sanoen

$$x \in [a_2, b_2] = I_2.$$

Jatketaan samaan malliin: kun väli $I_k = [a_k, b_k]$ on valittu, valitaan seuraava väli $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$ siten, että $a_{k+1}, b_{k+1} \in \mathbf{Q}$.

$$a_1 < a_k < a_{k+1} < x < b_{k+1} < b_k < b_1.$$

Saadaan sisäkkäinen jono *suljettuja* välejä

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_k \supset \ldots$$

ja

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\,,$$

toisin sanoen $x \in I_k$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Jos välit I_k valitaan niin, että niiden pituus

$$|I_k| = b_k - a_k \overset{k \to \infty}{\to} 0,$$

niin

$$\{x\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k.$$

Näin voidaan mikä tahansa reaaliluku x määritellä yksikäsitteisellä tavalla.

Aksiooma (aksiomi). (*Sisäkkäisten välien periaate*)[1]
Jos $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ on jono sisäkkäisiä suljettuja välejä $I_k \subset \mathbf{R}$, niin

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \emptyset\,.$$

Toisin sanoen, on olemassa $x \in \mathbf{R}$ siten, että $x \in I_k$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$.
Tämä on eräs formulointi aksioomasta, joka takaa, että *reaaliakselilla ei ole reikiä.*

[1] Sisäkkäisten välien periaatetta voisi kutsua myös jatkuvuusaksioomaksi tai täydellisyysaksioomaksi. Aksioomassa riittäisi tarkastella välejä, joiden päätepisteet ovat rationaalisia ja todistaa sen avulla sama kaikenlaisille väleille.

Desimaalikehitelmä

Seuraavassa esitetään geometrisesti havainnollinen tapa tehdä luvulle desimaalikehitelmä. (Geometrisen sarjan käyttö tarjoaisi toisen helpon lähestymistavan.)

Jaetaan lukusuora **R** kokonaisluvuilla ykkösen pituisiksi osiksi. Siis on (ainakin yksi) $k_0 \in \mathbf{Z}$ siten, että

$$k_0 \leq x \leq k_0 + 1$$

(toisin sanoen $x \in I_0 = [k_0, k_0+1]$). Jaetaan sitten väli I_0 kymmeneen yhtä suureen osaan, jakopisteinä siis

$$k_0, k_0 + \frac{1}{10}, k_0 + \frac{2}{10}, \dots, k_0 + \frac{9}{10}, k_0 + 1.$$

Koska x kuuluu jollekin näistä osaväleistä, on luku $k_1 \in \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$ siten, että

$$k_0 + k_1\frac{1}{10} \leq x \leq k_0 + k_1\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = k_0 + (k_1 + 1)\frac{1}{10}.$$

Näin löydetään (suljettu) väli

$$I_1 = \left[k_0 + k_1\frac{1}{10}, k_0 + (k_1 + 1)\frac{1}{10}\right],$$

joka sisältää pisteen x ja $I_1 \subset I_0$. Jaetaan tämä uusi väli I_1 kymmeneen yhtä suureen osaan (koska välin I_1 pituus on $\frac{1}{10}$ ovat osien pituudet $\frac{1}{100}$): jakopisteinä ovat nyt

$$k_0 + k_1\frac{1}{10}, k_0 + k_1\frac{1}{10} + \frac{1}{100}, k_0 + k_1\frac{1}{10} + \frac{2}{100}, \dots, k_0 + k_1\frac{1}{10} + \frac{9}{100}, k_0 + (k_1 + 1)\frac{1}{10}.$$

Koska x kuuluu välille I_1, se kuuluu myös ainakin yhteen näistä osaväleistä, toisin sanoen on olemassa luku $k_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

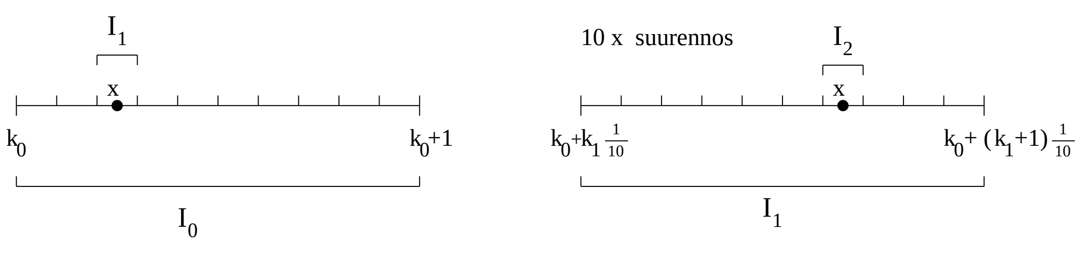
$$k_0 + k_1\frac{1}{10} + k_2\frac{1}{100} \leq x \leq k_0 + k_1\frac{1}{10} + k_2\frac{1}{100} + \frac{1}{100} = k_0 + k_1\frac{1}{10} + (k_2 + 1)\frac{1}{100},$$

joten merkitsemällä tätä suljettua väliä

$$I_2 = \left[k_0 + k_1\frac{1}{10} + k_2\frac{1}{100}, k_0 + k_1\frac{1}{10} + (k_2 + 1)\frac{1}{100}\right],$$

pätee

$$x \in I_2 \subset I_1 \subset I_0.$$



Jatketaan näin loputtomiin: n. vaiheessa löydetään suljettu väli $I_n \subset I_{n-1}$, jonka pituus on 10^{-n} ja

$$I_n = \left[k_0 + k_1\frac{1}{10} + k_2\frac{1}{100} + \cdots + k_n\frac{1}{10^n}, k_0 + k_1\frac{1}{10} + k_2\frac{1}{100} + \cdots + (k_n+1)\frac{1}{10^n}\right]$$

ja $x \in I_n$ (tässä $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}$). Sisäkkäisten välien periaatteen nojalla

$$\{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n.$$

Koska luvut $k_0, k_1, k_2, \ldots, k_n$ määräävät välin I_n (yksikäsitteisesti), vastaa lukua x "desimaalikehitelmä"

$$k_0, k_1k_2k_3 \cdots = k_0 + 0, k_1k_2k_3 \cdots = x,$$

jos $x \geq 0$; missä $k_0 \in \{0,1,2,\ldots\}$ ja $k_j \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}$, kun $j = 1,2,\ldots$. Negatiivisille luvuille desimaalikehitelmää voitaisiin merkitä kuten yllä, mutta tavallisempi tapa on tällöin noudattaa sääntöä

$$\text{luvun } x \text{ desimaalikehitelmä} = -(\text{luvun } -x : \text{ desimaalikehitelmä})\,.$$

Tämä tulkittuna em. konstruktion merkinnöin antaa seuraavaa: kun $x < 0$ ja $k_0 \in \{-1,-2,-3,\ldots\}$ sekä luvut $k_j \in \{0,1,2,3,\ldots,9\}$, kun $j = 1,2,\ldots$, määräytyvät eo. konstruktion mukaisesti, on

$$x = \tilde{k}_0, \tilde{k}_1\tilde{k}_2\tilde{k}_3\tilde{k}_4 \cdots = k_0 + 0, k_1k_2k_3\ldots\,,$$

missä

$$\begin{aligned}\tilde{k}_0 &= k_0 + 1\,,\\ \tilde{k}_1 &= 9 - k_1\,,\\ \tilde{k}_2 &= 9 - k_2\,,\\ \tilde{k}_3 &= 9 - k_3\,,\\ &\ldots.\end{aligned}$$

Siten esimerkiksi

$$\frac{1}{10} = 0,1000\cdots = 0,1 \quad \text{ja} \quad -\frac{1}{10} = -0,1\,;$$

kehitelmän lopusta 0-jonot jätetään yleensä merkitsemättä.

Huomautus. Yllä oleva desimaaliesitys ei ole yksikäsitteinen. Esimerkiksi

$$1 = 0,999\cdots = 1,000\ldots$$

Kuitenkin, edellä olevassa konstruktiossa x määrää k_0:n yksikäsitteisesti, ellei x satu olemaan kokonaisluku. Jos taas $x \in \mathbf{Z}$, voidaan k_0 valita kahdella tavalla: joko

$k_0 = x$ tai $k_0 = x - 1$. Kun tämä valinta on tehty, määräytyvät loput luvut k_j yksikäsitteisesti:

$$\text{jos } k_0 = x\,, \quad \text{niin} \quad k_1 = 0 = k_2 = k_3 = \dots$$
$$\text{jos } k_0 = x - 1\,, \quad \text{niin} \quad k_1 = 9 = k_2 = k_3 = \dots$$

Edelleen, jos x ei ole kokonaisluku, niin k_j:t määräytyvät yksikäsitteisesti, ellei x satu olemaan välin I_j päätepiste. Jos x on I_j:n päätepiste, niin joko

1. x on I_j:n oikea päätepiste, jolloin x on myös jokaisen I_l:n oikea päätepiste, kaikilla $l \geq j$, joten

$$x = k_0 + 0, k_1 k_2 \dots k_{j-1}(k_j - 1)999\dots,$$

   toisin sanoen $k_l = 9$ kaikilla $l > j$

tai

2. x on I_j:n vasen päätepiste, jolloin x on myös jokaisen I_l:n vasen päätepiste, kaikilla $l > j$, joten

$$x = k_0 + 0, k_1 k_2 \dots k_j 000.$$

Siispä: sopimalla, ettei desimaalikehitelmä saa loppua päättymättömään 9-jonoon, on desimaalikehitelmä yksikäsitteinen.

Epäyhtälöitä

Muista.

i) $a \leq a$.
ii) Kun $a \leq b$ ja $b \leq a$, niin $a = b$.
iii) Kun $a \leq b$ ja $b \leq c$, niin $a \leq c$.

Edelleen: kun $a, b > 0$, niin $a + b > 0$ ja $ab > 0$.

Huomautus. On hyvä muistaa, että

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad a - b > 0.$$

1.1. Lemma.

i) *Jos $a > b$ ja $c > d$, niin $a + c > b + d$.*
ii) *Jos $a > b$ ja $c > 0$, niin $ac > bc$.*
iii) *Jos $a > b$ ja $c < 0$, niin $ac < bc$.*
iv) *Kun $a, b > 0$, niin $a < b \quad \Leftrightarrow \quad a^2 < b^2$.*

Todistus.

i)

$$a + c - (b + d) = (a - b) + (c - d) > 0,$$

koska $a - b > 0$ ja $c - d > 0$. Tästä seuraa, että $a + c > b + d$. $\not\square$

ii)

$$ac - bc = c(a - b) > 0,$$

koska $c > 0$ ja $a - b > 0$. $\not\square$

iii) HT.
iv) Olkoon $a < b$. Väite: $a^2 < b^2$.

$$a^2 = aa \overset{ii)}{<} ab \overset{ii)}{<} bb = b^2 .$$

Olkoon $a^2 < b^2$. Väite: $a < b$.

$$b - a = \frac{b+a}{b+a}(b-a) = \frac{1}{b+a}(b^2 - a^2) > 0,$$

koska $b + a > 0$ ja $b^2 - a^2 > 0$.

□

1.2. Lause. *Jos $a < b + c$ kaikilla $c > 0$, niin $a \leq b$.*

Todistus. Antiteesi: $a > b$. Olkoon $c = a - b > 0$, jolloin oletuksen nojalla

$$a < b + c = b + (a - b) = a,$$

mikä on ristiriitaista (nimittäin, että olisi $a < a$). Väite on siten tosi. □

Esimerkki. $1,4 < \sqrt{2}$, koska

$$(1,4)^2 = (1 + 0,4)^2 = 1 + 0,8 + 0,16 = 1,96 < 2$$

ja $\sqrt{2} < 1,5$, koska $(1,5)^2 = 2,25 > 2$. Edelleen $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$, koska $(1,41)^2 = 1,9881$ ja $(1,42)^2 = 2,0164$.

Tärkeimmät epäyhtälöt ovat luvun itseisarvon arvioita. Näillä arvioidaan esimerkiksi approksimointitarkkuutta, virhettä yms.

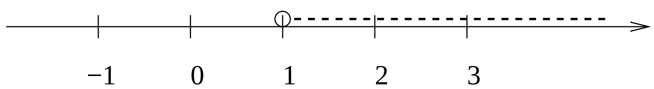
Muista! Kun $x \in \mathbf{R}$, on luvun x *itseisarvo* luku

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{jos } x \geq 0 \\ -x, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Geometrisesti $|x|$ tarkoittaa luvun x *etäisyyttä* 0:sta.
Tällöin

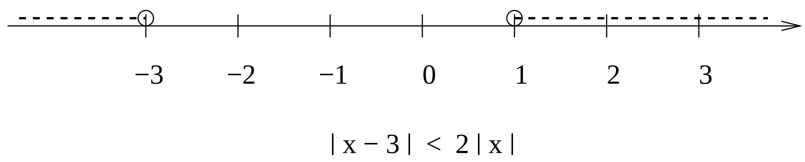
i) $|x| \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$
ii) $|x| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$
iii) $|xy| = |x|\,|y|$ kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$; erityisesti $|x| = |-x|$.
iv) $-|x| \leq x \leq |x|$ kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

Esimerkki. Ratkaise $|x+1| > |x-3|$, toisin sanoen, x:n on oltava lähempänä lukua 3 kuin lukua -1. Lukujen 3 ja -1 keskipiste on $\frac{-1+3}{2} = 1$, joten ratkaisu on $x > 1$.



| x + 1 | > | x − 3 |

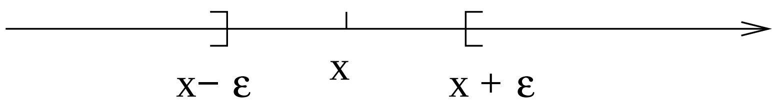
Esimerkki. Ratkaise $|x-3| < 2|x|$, toisin sanoen etäisyys nollasta on vähintään puolet x:n ja luvun 3 välisestä etäisyydestä. Jaetaan $[0,3]$ suhteessa $1:2$, jolloin jakopiste on 1. Jos $x > 1$, on x lähempänä lukua 3 kuin $2|x|$. Toinen mahdollinen kriittinen kohta on -3, jolloin $x < -3$ toimii yhtä hyvin.



Esimerkki. Epäyhtälö $|2x-3| \leq 4$ on yhtäpitävä epäyhtälön $|x-\frac{3}{2}| \leq 2$ kanssa, jonka ratkaisun näkee heti: $-\frac{1}{2} \leq x \leq 3\frac{1}{2}$.

Ympäristö.
Luvun x *ε-ympäristö* $B(x,\varepsilon)$ koostuu niistä pisteistä $y \in \mathbf{R}$, joiden etäisyys x:stä on alle ε ($\varepsilon > 0$). Toisin sanoen

$$B(x,\varepsilon) := \{y \in \mathbf{R} \colon |x-y| < \varepsilon\} =]x-\varepsilon, x+\varepsilon[.$$



Seuraava viattomanoloinen epäyhtälö on erittäin keskeinen analyysissä.

1.3. Lause. (Kolmioepäyhtälö, Δ-ey)
Kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$

$$|x+y| \leq |x| + |y|\,.$$

Todistus. Ensiksi

$$x + y \leq |x| + y \leq |x| + |y|,$$

sillä $x \leq |x|$ ja $y \leq |y|$, ja toisaalta

$$-(x+y) = -x + (-y) \leq |-x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Siispä

$$|x+y| = \begin{cases} x+y \leq |x|+|y|, & \text{jos } x+y \geq 0 \\ -(x+y) \leq |x|+|y|, & \text{jos } x+y \leq 0. \end{cases}$$

□

1.4. Seuraus. (Käänteinen kolmioepäyhtälö)
Kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$

$$\Big| |x| - |y| \Big| \leq |x+y| \quad (\leq |x| + |y|).$$

Todistus. Kolmioepäyhtälön nojalla

$$|x| - |y| = |(x+y) - y| - |y| \leq |x+y| + |-y| - |y| = |x+y|.$$

Samoin

$$-(|x|-|y|) = |y|-|x| \le |y+x| = |x+y|,$$

joten

$$\Big||x|-|y|\Big| \le |x+y|.$$

□

Esimerkki.

$$|x^2-y^2| \le 1 \quad \Rightarrow \quad \Big||x|-|y|\Big| \le 1,$$

sillä käänteisen kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} 1 &\ge |x^2-y^2| = \Big|(x+y)(x-y)\Big| \ge \Big||x|-|-y|\Big|\Big||x|-|y|\Big| \\ &= \Big||x|-|y|\Big|^2, \end{aligned}$$

josta haluttu epäyhtälö seuraa.

Esimerkki. Jos $x > 1$ ja $y > 2$, niin

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| \le \frac{|x-y|}{2}.$$

Tämä voidaan todistaa seuraavasti:

$$\begin{aligned} \left|\sqrt{x}-\sqrt{y}\right| &= \left|\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right| \Big|x-y\Big| \\ &\le \frac{1}{1+\sqrt{y}}|x-y| \le \frac{1}{1+\sqrt{2}}|x-y| \\ &\le \frac{1}{2}|x-y|. \end{aligned}$$

Summamerkintä.
Jos $x_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, 2, \ldots$, niin

$$\sum_{j=1}^{n} x_j := x_1 + x_2 \cdots + x_n,$$

ts.

$$\sum_{j=1}^{1} x_j := x_1 \quad \text{ja} \quad \sum_{j=1}^{n} x_j := x_n + \sum_{j=1}^{n-1} x_j \text{ kaikilla } n > 1\,.$$

Kolmioepäyhtälöstä seuraa induktiolla (HT)

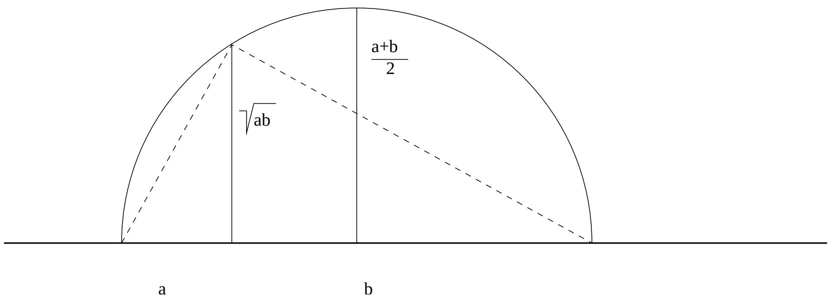
$$\Big|\sum_{j=1}^{n} x_j\Big| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

1.5. Lause. (Cauchy-Schwarzin epäyhtälö)
Olkoon $a_j, b_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. *Tällöin*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

Huomautus. Erikoistapaus[2] Cauchy-Schwarzin epäyhtälöstä on ns. *aritmeettis-geometrinen epäyhtälö*

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad \text{kaikilla } a, b \geq 0\,.$$



Tämän voi todistaa helposti myös suoraan siitä havainnosta, että reaaliluvun neliö on aina ≥ 0:

$$0 \leq \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 = \sqrt{a}^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + \sqrt{b}^2 = a - 2\sqrt{ab} + b.$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälö voidaan myös todistaa tähän yksinkertaiseen ideaan perustuen, alla kuitenkin erilainen todistus (missä käytetään koulusta tuttuja derivaatan ominaisuuksia).

Todistus. Voidaan olettaa, että $\sum\limits_{j=1}^{n} b_j^2 \neq 0$. Määritellään

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} (a_j + t b_j)^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(a_j^2 + 2t a_j b_j + t^2 b_j^2\right).$$

Tällöin $f(t) \geq 0$ kaikilla $t \in \mathbf{R}$. Minimoidaan f:

$$f'(t) = 2\sum a_j b_j + 2t \sum b_j^2 = 0,$$

[2] Valitse $a_1 = b_2 = \sqrt{a}$ ja $a_2 = b_1 = \sqrt{b}$.

jos $t = -\frac{\sum a_j b_j}{\sum b_j^2}$. Sijoitetaan tämä f:n lausekkeeseen ja saadaan

$$\begin{aligned}
0 &\le f\left(-\frac{\sum a_k b_k}{\sum b_k^2}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 + 2\left(-\frac{\sum a_k b_k}{\sum b_k^2}\right) a_j b_j + \left(-\frac{\sum a_k b_k}{\sum b_k^2}\right)^2 b_j^2 \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right) - 2\left(-\frac{\sum a_k b_k}{\sum b_k^2}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right) + \frac{\left(\sum a_k b_k\right)^2}{\left(\sum b_k^2\right)^2} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \frac{\left(\sum a_k b_k\right)^2}{\sum\limits_{l=1}^{n} b_l^2},
\end{aligned}$$

mistä haluttu epäyhtälö seuraa. □

Esimerkki. Aritmeettis-geometrinen epäyhtälön nojalla

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 \cdot 2} \le \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2},$$

joten $\sqrt{2} \in [1, \frac{3}{2}]$. Samoin

$$\sqrt{10001} = \sqrt{100 \cdot 100,01} \le \frac{100 + 100,01}{2} = 100,005\,,$$

joten $\sqrt{10001} \in [100, 100.005]$.

Taso ja avaruus ($\mathbf{R}^n$)

Karteesista tuloa $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2$ kutsutaan (xy-)*tasoksi.*

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A \quad b \in B\},$$

siis

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}^2 &= \{(x, y) : x \in \mathbf{R} \text{ ja } y \in \mathbf{R}\} \\
&= \{(x_1, x_2) : x_j \in \mathbf{R} \quad j = 1, 2\}.
\end{aligned}$$

Yhteenlasku koordinaateittain: jos

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \text{ ja } y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2,$$

niin

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Reaaliluvulla $\lambda \in \mathbf{R}$ kertominen:

$$(\lambda x) := (\lambda x_1, \lambda x_2) \in \mathbf{R}^2.$$

Pisteiden $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ välinen *etäisyys* on

$$||x - y|| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

erityisesti, jos $y = 0$ ts. $y = (0, 0)$, niin

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Yleisemmin, jos $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \colon x_j \in \mathbf{R}\} = \underbrace{\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}}_{n \text{ kertaa}}$$

on *n-ulotteinen euklidinen avaruus.* $\mathbf{R}^n$:n pisteiden $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ja $y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ summa on

$$x + y := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Jos $\lambda \in \mathbf{R}$, niin

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Euklidinen pituus on

$$||x|| := \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

x:n ja y:n etäisyys on

$$||x - y|| = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cauchy-Schwarzin epäyhtälöstä seuraa kolmioepäyhtälö

$$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$$

2. Funktiot

Useimmat koulukurssin funktioista määritellään yksinkertaisilla lausekkeilla. Lisäksi niillä on usein myös derivaatat kaikkialla ym. Yleensä funktiot eivät ole näin sileitä, esimerkiksi funktioille $\frac{1+x^2}{x}$ tai $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ei saada derivaattaa, kun $x = 0$, vaikka ne määriteltäisiin miten 0:ssa.

2.1. Funktio. Olkoon $A, B \subset \mathbf{R}$. *Funktio* eli *kuvaus* $f : A \to B$ on sääntö, joka liittää jokaiseen pisteeseen $x \in A$ (joukon A alkioon) tasan yhden pisteen $y \in B$ (joukon B alkion). Tätä alkiota $y \in B$ kutsutaan alkion $x \in A$ *kuvaksi (kuvapisteeksi)* ja sitä merkitään[3] $y =: f(x)$. Joukko A on f:n *määrittely- eli lähtöjoukko* ja joukko B sen *maalijoukko.* A:n *kuvajoukko* (funktiossa f) on

$$f(A) = \{y \in B \colon y = f(x) \text{ jollakin } x \in A\}.$$

Huomautus.

i) Aina $f(A) \subset B$, mutta voi olla $f(A) \neq B$. Esimerkiksi, kun

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad f(x) = 0 \text{ kaikilla } x \in \mathbf{R}\,,$$

niin kuvajoukko on $f(\mathbf{R}) = \{0\} \neq \mathbf{R}$.

ii) Jokaista alkiota $x \in A$ vastaa tasan yksi kuvapiste $y = f(x) \in B$, mutta voi olla, että piste $y \in B$ on useamman kuin yhden A:n alkion kuvapiste.

iii) Funktiot $f : A \to B$ ja $g : C \to D$ ovat samat, jos

a) $A = C$
b) $B = D$ ja
c) $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in A = C$.

Esimerkki.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \quad f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ f(\mathbf{R}) &= [0, \infty] \subsetneqq \mathbf{R} \\ f(-x) &= f(x) \quad \text{kaikilla } x, \text{ erityisesti } f(-1) = 1 = f(1). \end{aligned}$$

Myöskin kun

$$g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad g(x) = \begin{cases} x, & \text{jos } x \notin Z \\ 7, & \text{jos } x \in Z\,, \end{cases}$$

niin

$$g(\mathbf{R}) = \{7\} \cup (\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}), \quad g(\mathbf{Z}) = \{7\}.$$

Huomautus. Yleensä tällä kurssilla oletetaan, että funktioiden määrittelyjoukko on mahdollisimman suuri, ellei toisin mainita.

Huomautus. Funktio voidaan määritellä monella eri tavalla: esimerkiksi geometrisesti, tai vaikkapa: $g(x) = x$:n etäisyys Helsingistä rataverkkoa pitkin.

[3] Joskus käytetään myös merkintää $x \mapsto f(x)$.

Esimerkki. Yhtälöt

$$a = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad b = \frac{y}{x^2+y^2}$$

määräävät a:n ja b:n x:n ja y:n funktioina $(x,y) \mapsto a$ ja $(x,y) \mapsto b$, jotka voidaan määritellä kaikilla $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0,0\}$, eli kun $x^2+y^2 \neq 0$.
HT: Määrää x ja y a:n ja b:n funktioina, kun

$$(x,y) \mapsto (a,b) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Ts. ratkaise x ja y a:n ja b:n avulla, eli määrittele kuvaus

$$(a,b) \mapsto (x,y)\,.$$

Piste (a,b) on samalla origon lähtevällä puolisuoralla kuin piste (x,y), mutta sen etäisyys origosta on pisteen (x,y) etäisyyden käänteisluku.

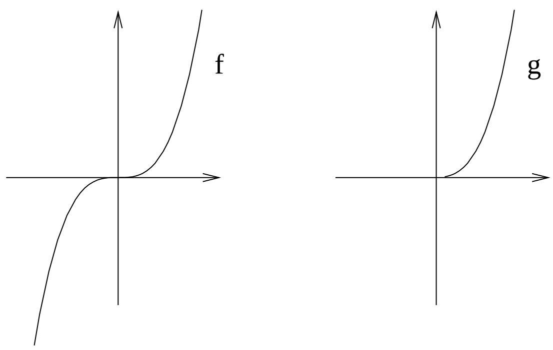
Esimerkkejä. $A = a^2$ (a-sivuisen neliön ala),
$f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $|x| \leq 1$ (suorakulmaisen kolmion hypotenuusa kateettien 1 ja $|x|$ funktiona),
$t \mapsto (t, -t^2)$ (pisteen liike pitkin paraabelia).

Jos $f : A \to B$ ja $g : C \to D$ ja $C \subset A$, niin mikäli $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in C$, niin sanotaan, että g on f:n *rajoittumafunktio* joukkoon C, mikä merkitään $g = f|_C$.

Esimerkki. Jos

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \quad f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ g(x) &= x^3 \quad g : [0,\infty] \to \mathbf{R}, \end{aligned}$$

niin $g = f|_{[0,\infty]}$. Yllä olevat funktiot f ja g ovat siis tarkkaan ottaen eri funktioita.



Määritelmä. Funktio $f : A \to B$ on

- *surjektio*, jos $f(A) = B$ eli jokainen B:n alkio y on jonkin A:n alkion x kuva, $y = f(x)$ (”onto”)
- *injektio*, jos eri pisteet kuvautuvat eri pisteiksi, eli ehdosta $x_1 \neq x_2 \in A$ seuraa $f(x_1) \neq f(x_2)$ (”one-to-one”)
- *bijektio*, jos f on sekä surjektio että injektio.

Huomautus. Se, että $f : A \to B$ on bijektio, tarkoittaa siis sitä, että jokaista A:n alkiota x vastaa täsmälleen yksi B:n alkio y ja kääntäen; jokaista B:n alkiota y vastaa täsmälleen yksi A:n alkio x. Näin voidaan määritellä $g : B \to A$ asettamalla

$$g(y) = x, \text{ missä } y = f(x).$$

Tällöin g on f:n *käänteiskuvaus*, mitä merkitään

$$g =: f^{-1}.$$

Selvästi myös $f^{-1} : B \to A$ on bijektio, jonka käänteiskuvaus on $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

Siis, jos f on bijektio, $f : A \to B$, niin sillä on käänteiskuvaus $f^{-1} : B \to A$ siten, että

$$f^{-1}\left(f(x)\right) = x \text{ kaikilla } x \in A$$
$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y \text{ kaikilla } y \in B.$$

Esimerkki. Tässä on eräs bijektio:

$$f : \mathbf{N} \to P, \quad f(n) = 2n, \quad f^{-1}(n) = \frac{n}{2};$$

yllä P on positiivisten, parillisten kokonaislukujen joukko.

Huomautus. Jos $f : A \to B$ on injektio, niin kuvaus

$$g : A \to f(A), \quad g(x) = f(x) \text{ kaikilla } x \in A$$

on bijektio, ts. injektio on bijektio kuvajoukolleen.

Esimerkki. Funktio $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$, ei ole injektio eikä surjektio:

$$f(-1) = f(1) = 1 \text{ ja } f(x) \neq -1 \text{ kaikilla } x \in \mathbf{R}.$$

Toisaalta $f|_{[0,\infty[}$ on injektio, edelleen $g : [0,\infty[\to [0,\infty[$, $g(x) = x^2$ on bijektio. Lopuksi $f : \mathbf{R} \to [0,\infty[$, $f(x) = x^2$, on surjektio, mutta ei injektio.

Tärkeä keino havainnollistaa funktiota on piirtää siitä *kuvaaja* eli *graafi* (joka on eri asia kuin kuvajoukko!). Jos $f : A \to \mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}^n$), niin f:n kuvaaja on joukko

$$Gr(f) := \{(x, f(x)) : x \in A\} \subset A \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^{n+1}.$$

Kun $f : A \to \mathbf{R}$ on reaalimuuttujan funktio eli kun $A \subset \mathbf{R}$, on graafi erittäin hyödyllinen. Sitä vastoin, jos lähtö- tai maalijoukko on korkeampiulotteinen, on parempi etsiä muita havainnollistamiskeinoja. Jos $A \subset \mathbf{R}^2$, kätevän keinon tarjoaa ns. *tasa-arvokäyrät* (vertaa kartat).

Useamman muuttujan funktioita ovat esimerkiksi

$$f(x,y) = x^2 + y^2 \quad \text{ja} \quad g(x,y) = x^2 - y^2.$$

Graafinen hahmotus tasa-arvokäyrien avulla: Tasa-arvokäyrät koostuvat niistä pisteistä (x,y), joilla $f(x,y) =$ vakio. Esimerkiksi funktion $f(x,y) = x^2 + y^2$ tasa-arvokäyrät ovat ympyrän kehiä, esim.

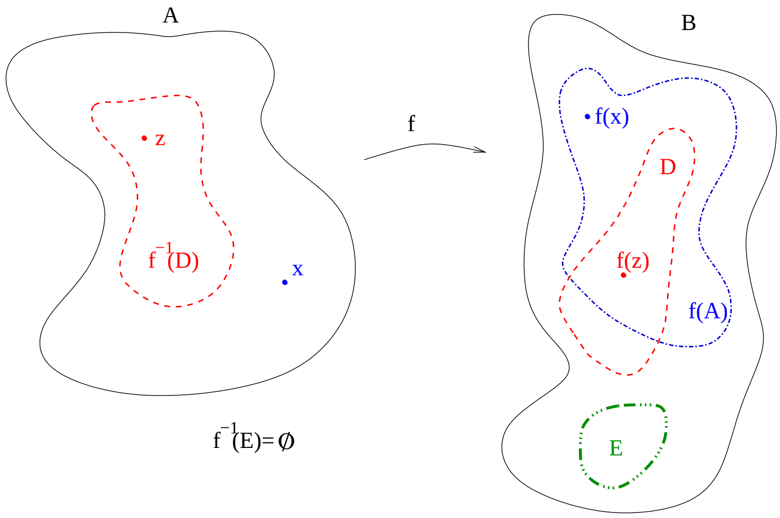
$$x^2 + y^2 = 1$$
$$x^2 + y^2 = 4.$$

Määritelmä.
Jos on $f : A \to B$ ja $D \subset B$, niin joukon D *alkukuva* funktiossa f on joukko

$$f^{-1}(D) := \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

Älä sekoita alkukuvaa ja käänteiskuvausta!

Huomautus. Alkukuva $f^{-1}(D)$ on aina joukko, f:n määrittelyjoukon osajoukko, $f^{-1}(D) \subset A$. Se voi olla myös $\emptyset$. (Esimerkiksi, jos $f(x) = x^2$, niin $f^{-1}([-2,-1]) = \emptyset$.)



Sopimuksia. Jos $f, g : A \to \mathbf{R}$ ovat funktioita, niin määritellään

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (fg)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ jos } g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

2.2. Yhdistetty kuvaus. Olkoot $f : A \to B$ ja $g : C \to D$. Jos $f(A) \subset C$, niin määritellään kuvauksista f ja g *yhdistetty kuvaus* $g \circ f : A \to D$

$$g \circ f(x) := g(f(x)).$$

Huomautus. Yhdistetyn funktion $g \circ f$:n määritelmässä on g:n oltava määritelty pisteessä $f(x)$.

Esimerkki. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{jos } |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{|x|} - 1 & \text{jos } |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

ja

$$g(x) = x^2,$$

missä $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Yhdistetyt funktiot $f \circ g$ ja $g \circ f$ ovat siis määritellyt.

$$g \circ f(x) = g\left(f(x)\right) = \begin{cases} g\left(\sqrt{1-x^2}\right) = 1 - x^2, & \text{jos } |x| < \frac{1}{2} \\ g\left(\frac{1}{|x|} - 1\right) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{|x|} + 1, & \text{jos } |x| \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Havainnoidaan, että

$$|g(x)| < \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$f \circ g(x) = f\left(g(x)\right) = \begin{cases} \sqrt{1 - g(x)^2}, & \text{jos } |g(x)| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{|g(x)|} - 1, & \text{jos } |g(x)| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

eli

$$f \circ g(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^4}, & \text{jos } |x| < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{x^2} - 1, & \text{jos } |x| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Huomautus. Olkoon $f : A \to B$ ja $g : B \to A$.

i) Jos $g \circ f(x) = x$ kaikilla $x \in A$, niin f on injektio ja g surjektio.
ii) Jos myös f on surjektio, niin $f \circ g(y) = y$ kaikilla $y \in B$ ja $f = g^{-1}$. (HT)

2.3. Monotoniset funktiot. Olkoon $I \subset \mathbf{R}$ väli ja $f : I \to \mathbf{R}$. Sanotaan, että f on

i) *kasvava* (nouseva), jos kaikilla $x, y \in I$

$$\text{ehdosta} \quad x \leq y \quad \text{seuraa} \quad f(x) \leq f(y).$$

ii) *aidosti kasvava*, jos kaikilla $x, y \in I$

$$\text{ehdosta} \quad x < y \quad \text{seuraa} \quad f(x) < f(y).$$

iii) *vähenevä* (laskeva), jos kaikilla $x, y \in I$

$$\text{ehdosta} \quad x \leq y \quad \text{seuraa} \quad f(x) \geq f(y).$$

iv) *aidosti vähenevä*, jos kaikilla $x, y \in I$

$$\text{ehdosta} \quad x < y \quad \text{seuraa} \quad f(x) > f(y).$$

v) *vakio(funktio)* jos kaikilla $x, y \in I$ pätee

$$f(x) = f(y).$$

vi) *(aidosti) monotoninen*, jos f on joko (aidosti) kasvava tai (aidosti) vähenevä. Huomaa, että aidosti monotoninen funktio on injektio.

2.4. Lause. *Olkoon $f : I \to \mathbf{R}$ aidosti kasvava. Tällöin f on injektio. Erityisesti $f : I \to f(I)$ on bijektio ja tällöin myös käänteiskuvaus $f^{-1} : f(I) \to I$ on aidosti kasvava.*

Todistus. f on injektio: Kun $x_1 \neq x_2 \in I$, niin joko

$$x_1 < x_2, \text{ jolloin } f(x_1) < f(x_2)$$

tai

$$x_1 > x_2, \text{ jolloin } f(x_1) > f(x_2),$$

joten joka tapauksessa $f(x_1) \neq f(x_2)$. Siten f on injektio.

f^{-1} on aidosti kasvava: Ellei f^{-1} ole aidosti kasvava, on $y_1, y_2 \in f(I)$ siten, että $y_1 < y_2$ ja

$$f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2).$$

Koska f on aidosti kasvava, niin

$$f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y))$$

ja siten

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2.$$

Tämä on ristiriita, koska $y_1 < y_2$. Siis f^{-1} on aidosti kasvava. □

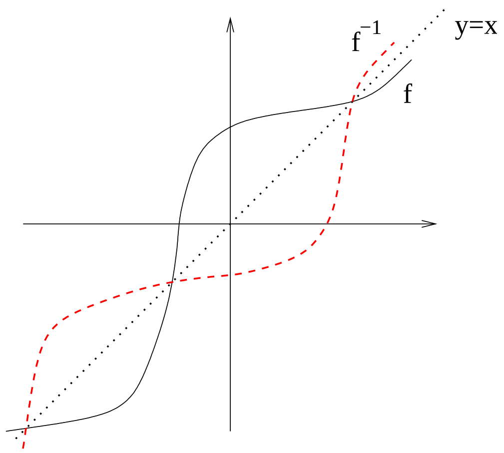
Huomautus.

(1) **Varo!** $f(I)$ ei ole välttämättä väli, vaikka f olisi aidosti monotoninen (jos f ei ole jatkuva).

(2) Lausetta 2.4 vastaava on totta tietysti myös aidosti väheneville funktioille.

Huomautus. Aidosti monotoninen funktio on injektio.

Jos $y = f(x)$, niin $f^{-1}(y) = x$, joten f:n käänteiskuvauksen graafi löydetään peilaamalla f:n graafi suoran $y = x$ suhteen, sillä peilauksessa f:n graafin piste $\big(x, f(x)\big) = (x, y)$ kuvautuu pisteeksi $(y, x) = \big(y, f^{-1}(y)\big)$, joka on f^{-1}:n graafilla.



Esimerkki. $f(x) = x^3$ on aidosti kasvava funktio. Jos taas

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{jos } x < 0 \\ 0, & \text{jos } 0 \leq x \leq 1 \\ -3, & \text{jos } x \geq 1, \end{cases}$$

niin g on vähenevä funktio (ei aidosti vähenevä).

2.5. Parilliset ja parittomat funktiot. Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Jos

$$f(-x) = f(x) \quad \text{kaikilla } x,$$

niin f on *parillinen* (graafi symmetrinen y-akselin suhteen). Jos taas

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{kaikilla } x,$$

niin f on *pariton* (graafi symmetrinen origon suhteen).

Esimerkki. Parillisia funktioita ovat mm. x^2, x^{2n} ja $\cos x$. Parittomia funktioita ovat vaikkapa x, x^{2n+1} ja $\sin x$.

Esimerkki. Olkoot

$$f(x) = \sqrt{x},$$

jossa määrittely- ja kuvajoukko ovat kumpikin $[0, \infty[$ sekä

$$g(x) = x + 1,$$

jossa sekä määrittely- että kuvajoukkona on $\mathbf{R}$. Silloin

$$g \circ f = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x} + 1,$$

jonka määrittely- ja kuvajoukko ovat molemmat $[0, \infty[$, ja

$$f \circ g = f(x + 1) = \sqrt{x + 1},$$

jonka määrittelyjoukko on $[-1, \infty[$ ja kuvajoukko $[0, \infty[$. Edelleen

$$f \circ f = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}},$$

jonka määrittely- ja kuvajoukko ovat kumpikin $[0, \infty[$, ja

$$g \circ g = g(x + 1) = x + 2,$$

jossa sekä määrittely- että kuvajoukkona on $\mathbf{R}$.

Esimerkki.

$$f(x) = \frac{1 - x}{1 + x},$$

joka on määritelty, kun $x \neq -1$. Myös $f(x) \neq -1$ kaikilla x. Siten

$$f \circ f(x) = \frac{1 - f(x)}{1 + f(x)} = \frac{1 - \frac{1-x}{1+x}}{1 + \frac{1-x}{1+x}} = \frac{1 + x - (1 - x)}{1 + x + (1 - x)} = \frac{2x}{2} = x\,, \qquad \text{kun } x \neq -1.$$

Esimerkki. Kun

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{jos } x \neq 0 \\ 0, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

on f bijektio $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$: f on injektio (HT). Osoitetaan, että se on surjektio. Olkoon $y \in \mathbf{R}$. Ratkaistaan $y = f(x)$:
Jos $y = 0$, niin $x = 0$. Jos $y \neq 0$, niin $x = \frac{1}{y}$, jolloin

$$f(x) = f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y.$$

2.6. Alkeisfunktiot

A. Polynomit.
Funktio $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ on *polynomi*, jos se voidaan esittää muodossa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

missä $n \in \mathbf{N}$, $a_j \in \mathbf{R}$ ja $a_n \neq 0$. Tällöin n on polynomin *asteluku* ja luvut a_j, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, ovat polynomin *kertoimia*. n. asteen polynomi on derivoituva koko $\mathbf{R}$:ssä ja sen derivaatta on $(n-1)$. asteen polynomi, kun $n \geq 1$.

Esimerkki. Ensimmäisen asteen polynomi

$$p(x) = ax + b$$

on *(affinisti) lineaarinen* polynomi. Polynomi

$$q(x) = ax^2 + bx + c$$

on *kvadraattinen* eli *toisen asteen* polynomi.

2.7. Lause. *Jos P on n. asteen polynomi ja $P(x_1) = 0$, niin $P(x)$ on jaollinen $(x - x_1)$:llä. Toisin sanoen on olemassa $(n-1)$. asteen polynomi Q siten, että*

$$P(x) = (x - x_1)Q(x) \text{ kaikilla } x.$$

Todistus. Induktiolla nähdään, että kaikilla $n \in \mathbf{N}$ pätee

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

joten

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(x_1) \\ &= a_n(x^n - x_1^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - x_1^{n-1}) + \cdots + a_1(x - x_1) \\ &= (x - x_1)\underbrace{(b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0,)}_{=:Q(x)} \end{aligned}$$

missä

$$\begin{aligned} &b_{n-1} = a_n \neq 0, \\ &b_{n-2} = a_n x_1 + a_{n-1}, \\ &\ldots \\ &b_1 = a_n x_1^{n-2} + \cdots + a_2 \\ &b_0 = a_n x_1^{n-1} + \cdots + a_1. \end{aligned}$$

$\square$

2.8. Seuraus. *Jos n. asteen polynomilla P on nollakohdat $x_1, x_2, \dots, x_n$, niin*

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_n) \text{ kaikilla } x \in \mathbf{R}.$$

(a_n on n. asteen termin kerroin.)

2.9. Seuraus. *n. asteen polynomilla voi olla korkeintaan n kappaletta nollakohtia.*

Esimerkki. Polynomilla $P_1(x) = x^2 + 1$ ei ole reaalisia nollakohtia. Polynomilla $P_2(x) = x^3$ on sama nollakohta kolme kertaa:

$$P_2(x) = x^3 = (x - 0)(x - 0)(x - 0).$$

2.10. k-kertainen nollakohta. Jos n. asteen polynomille pätee

$$P(x) = (x - x_1)^k Q(x) \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R},$$

missä $k \in \mathbf{N}$, $x_1 \in \mathbf{R}$ ja Q on polynomi siten, että $Q(x_1) \neq 0$, niin sanotaan, että x_1 on polynomin P *k-kertainen nollakohta* (eli yhtälön $P(x) = 0$ k-kertainen juuri).

Huomautus. Algebran peruslauseen (todistetaan laudatur-kurssilla) nojalla on jokaisella n. asteen polynomilla ainakin yksi kompleksinen nollakohta. Induktiolla ja Lauseen 2.7 avulla nähdään, että n. asteen polynomilla on (kertaluvut huomioiden) tasan n kompleksista nollakohtaa. (Reaalisia nollakohtia ei välttämättä ole.)

B. Rationaalifunktiot.
Kahden polynomin P ja Q osamäärää $R = \frac{P}{Q}$ sanotaan *rationaalifunktioksi*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

joka on määritelty, kun $Q(x) \neq 0$.

Esimerkki. $R(x) = \frac{1}{x}$ on rationaalifunktio (kuvaaja hyperbeli). Samoin $R(x) = \frac{1}{x^2+1}$ on rationaalifunktio.

Funktio f on *algebrallinen*, jos on olemassa kahden muuttujan polynomi

$$F(x, y) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{n-k}$$

siten, että

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ kaikilla } x.$$

Rationaalifunktio $R = \frac{P}{Q}$ on algebrallinen, mikä nähdään valitsemalla

$$F(x, y) = yQ(x) - P(x).$$

C. Potenssifunktio $x \mapsto x^q$, missä $x > 0$ ja $q \in \mathbf{Q}$.
Olkoon $n \in \mathbf{Z}$, $n > 0$. Tällöin funktio $f :]0, \infty[\to \mathbf{R}$

$$f(x) = x^n$$

on aidosti kasvava (seuraa Lemmasta 1.1) ja sen kuvajoukko on $]0, \infty[$. Siten sillä on aidosti kasvava käänteisfunktio $f^{-1} :]0, \infty[\to]0, \infty[$. Merkitään:

$$f^{-1}(x) =: x^{\frac{1}{n}},$$

n*. juuri*. Edelleen merkitään

$$x^{-n} := \left(\frac{1}{x}\right)^n, \quad \text{kun } x > 0,$$

jolloin

$$g(x) = x^{-n}$$

määrää aidosti vähenevän funktion $g :]0, \infty[\to]0, \infty[$. Edelleen, jos

$$q = \frac{m}{n} \in \mathbf{Q}$$

$(m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0)$, niin määritellään

$$x^q := (x^m)^{\frac{1}{n}}.$$

Toisin sanoen, yhdistämällä kuvaukset

$$x \overset{f}{\mapsto} x^m \quad \text{ja} \quad x \overset{g}{\mapsto} x^{\frac{1}{n}}$$

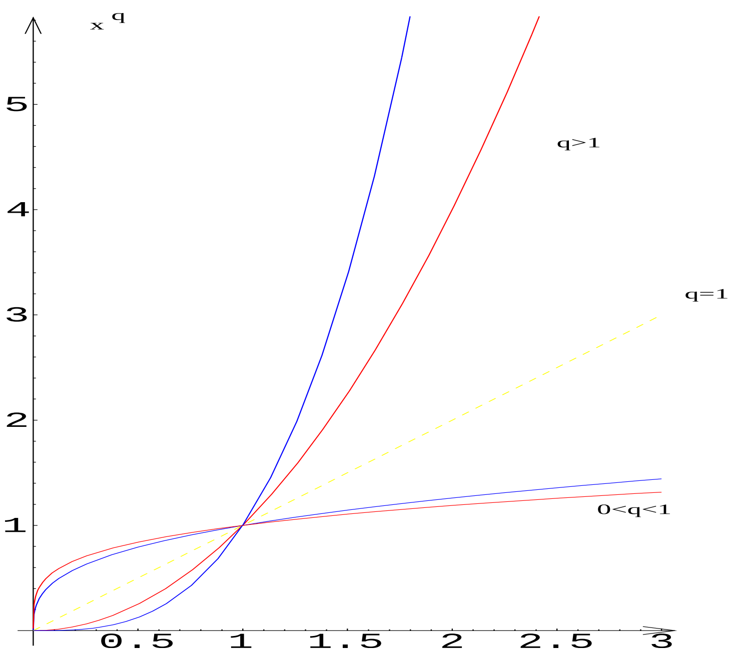
saadaan

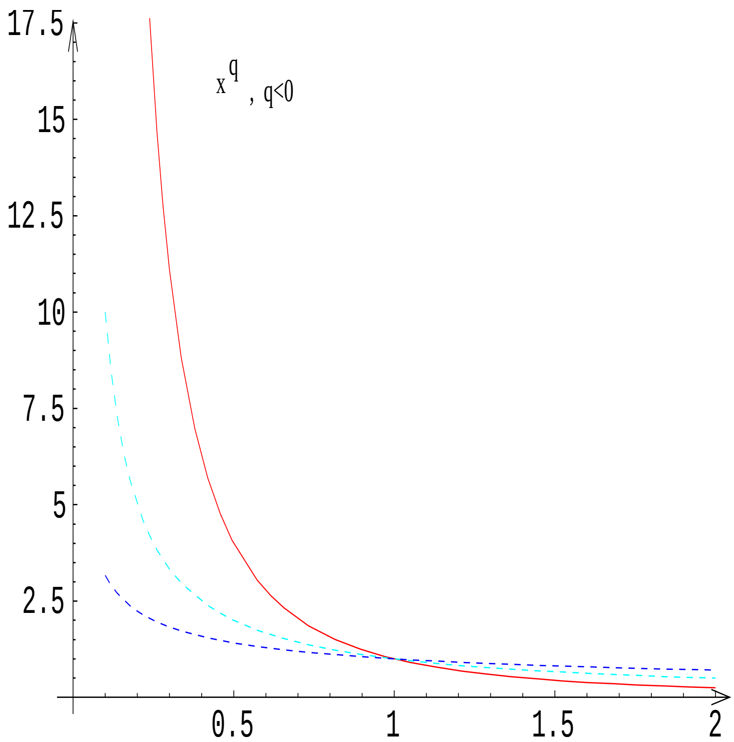
$$x^q = g \circ f(x).$$

Havaitaan, että funktio $x \mapsto x^q$, $q \in \mathbf{Q}$ (rationaalinen potenssifunktio) on

(1) aidosti kasvava funktio, jos $q > 0$
(2) aidosti vähenevä funktio, jos $q < 0$
(3) vakio $= 1$, jos $q = 0$.

Huomaa, että $x > 0$ koko ajan! Tällöin potenssifuktio on bijektio $]0, \infty[\to]0, \infty[$, jos $q \neq 0$.





Huomautus. Irrationaaliset potenssit määritellään myöhemmin.

Huomautus.

i) $(x^p)^q = x^{pq}$
ii) $x^p x^q = x^{p+q}$
iii) $x^q > 0$ kaikilla $q \in \mathbf{Q}$, $x > 0$. (HT)

D. Eksponenttifunktiot ja logaritmifunktiot.
Eksponenttifunktioksi kutsutaan funktiota $x \mapsto a^x$, jossa $a > 0$.

Äsken määriteltiin a^x, kun x on rationaalinen (eli $x \in \mathbf{Q}$). Kun $x, y \in \mathbf{Q}$ ja $y > x$, on

$$a^y = a^{x+(y-x)} = a^x a^{y-x}.$$

Koska $x \mapsto x^q$ on aidosti kasvava, $q > 0$, $q \in \mathbf{Q}$, niin

$$a^{y-x} > 1^{y-x} = 1, \text{ jos } a > 1$$
$$a^{y-x} < 1^{y-x} = 1, \text{ jos } a < 1$$
$$a^{y-x} = 1, \text{ jos } a = 1.$$

Niinpä

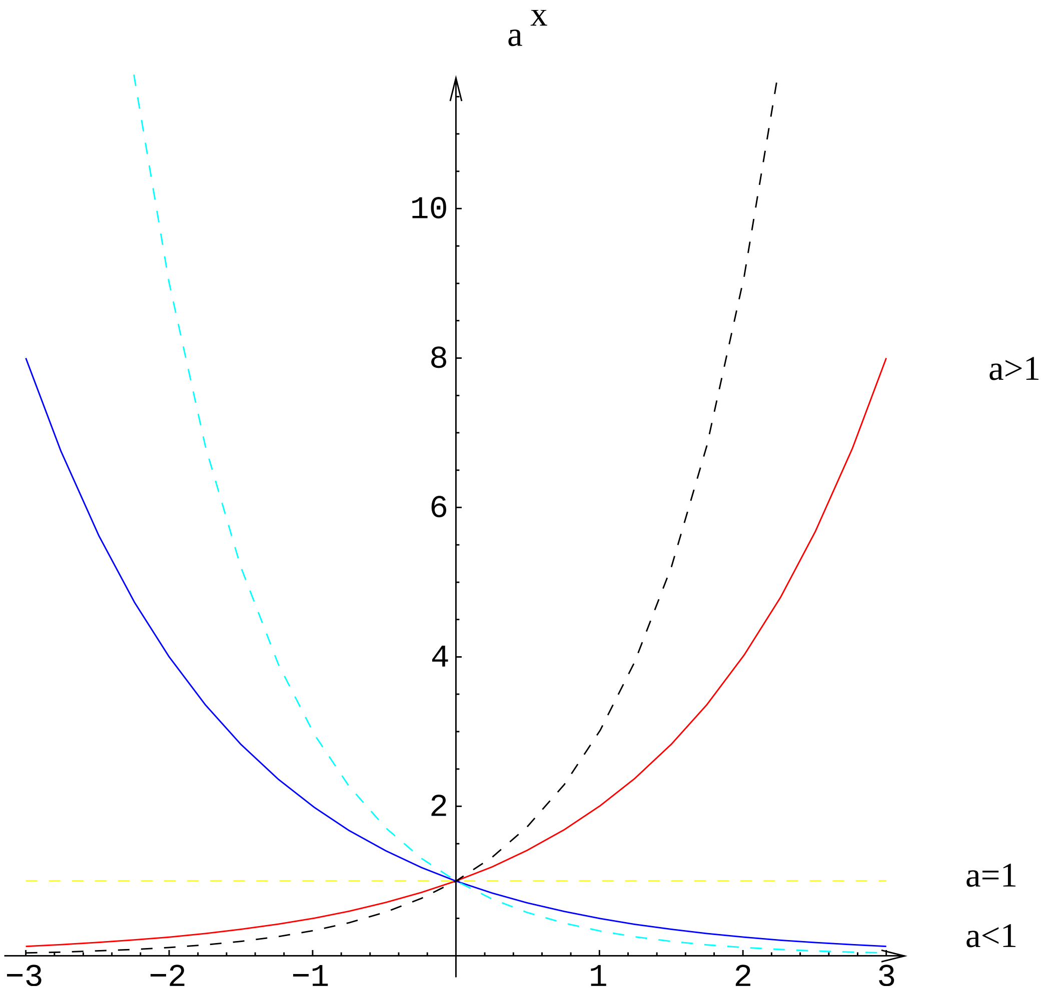
$$a^y = a^x a^{y-x} \begin{cases} > a^x, & \text{jos } a > 1 \\ < a^x, & \text{jos } a < 1 \\ = a^x = 1, & \text{jos } a = 1. \end{cases}$$

Siispä $f(x) = a^x$ on

(1) aidosti kasvava, jos $a > 1$
(2) aidosti vähenevä, jos $0 < a < 1$
(3) vakio $= 1$, jos $a = 1$.

Irrationaaliselle x:lle määritellään a^x siten, että funktiosta $f(x) = a^x$ tulee tulee aidosti monotoninen funktio $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, kun $a \neq 1$ (tai jatkuva – tämän lauseen sisältö selviää myöhemmin).

Funktion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = a^x$, jossa $a > 0$, $a \neq 1$, kuvajoukko on $]0, \infty[$ (todistetaan myöhemmin).



Kun $a > 0, a \neq 1$, on eksponenttifunktio a^x aidosti monotoninen. Sillä on siis käänteisfunktio $g :]0, \infty[\to \mathbf{R}$, *$a$-kantainen logaritmi*

$$g(x) = {}^a\log x, \quad x > 0.$$

Toisin sanoen,

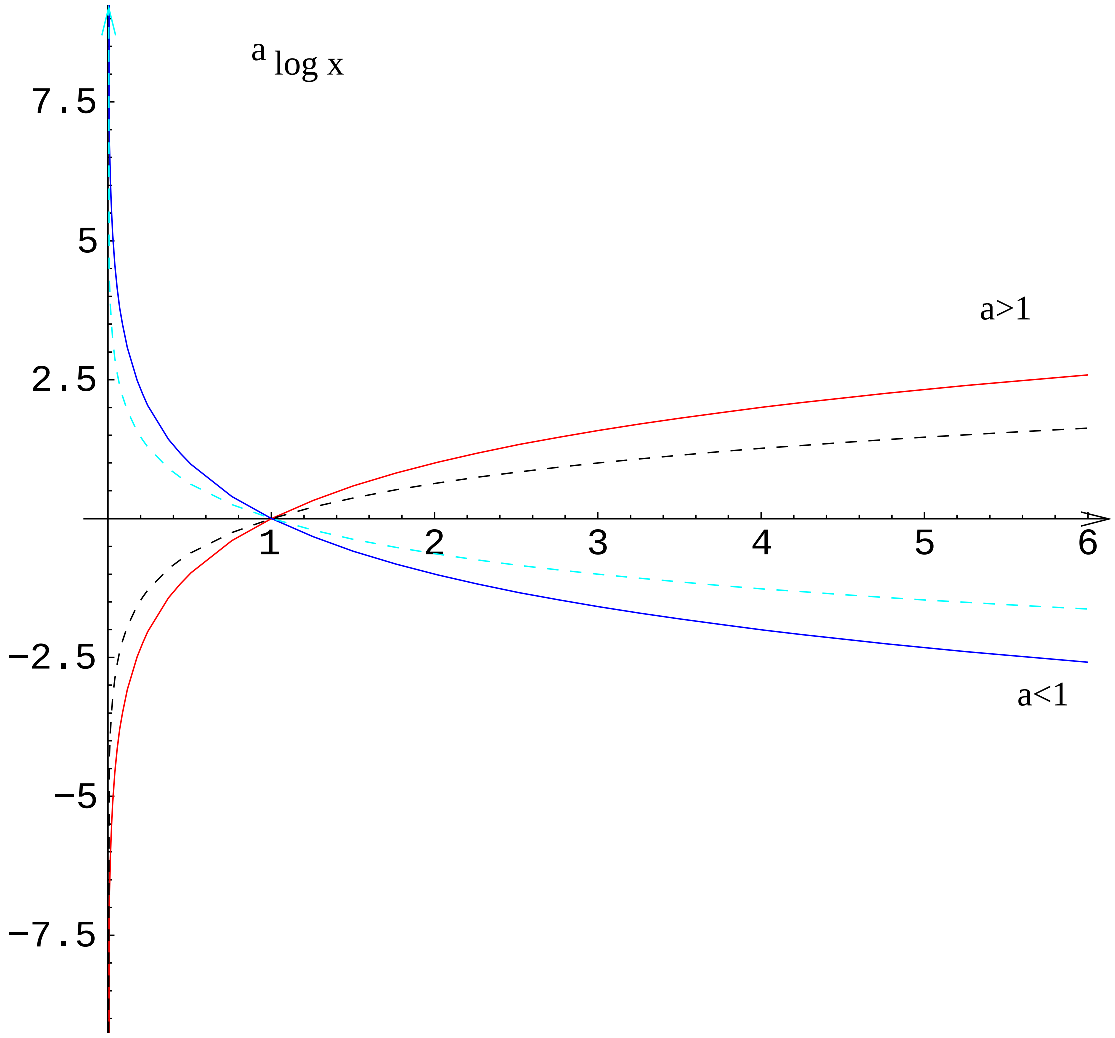
$$y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = {}^a\log y,$$

$a, x, y > 0$, $a \neq 0$. Huomaa, joskus a-kantaista logaritmia merkitään myös

$${}^a\log x =: \log_a x.$$

Huomautus. $x \mapsto {}^a\log x$ on

(1) aidosti kasvava, jos $a > 1$,
(2) aidosti vähenevä, jos $0 < a < 1$,
(3) ei määritelty, jos $a = 1$.



Tärkein yleisistä eksponenttifunktioista on *eksponenttifunktio*

$$\exp(x) := e^x,$$

missä e on ns. *Neperin luku*,

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7128.$$

Sen käänteisfunktio on logaritmifunktio[4] (ns. *luonnollinen logaritmi*)

$$\log x := {}^e\!\log x \quad (= \ln x).$$

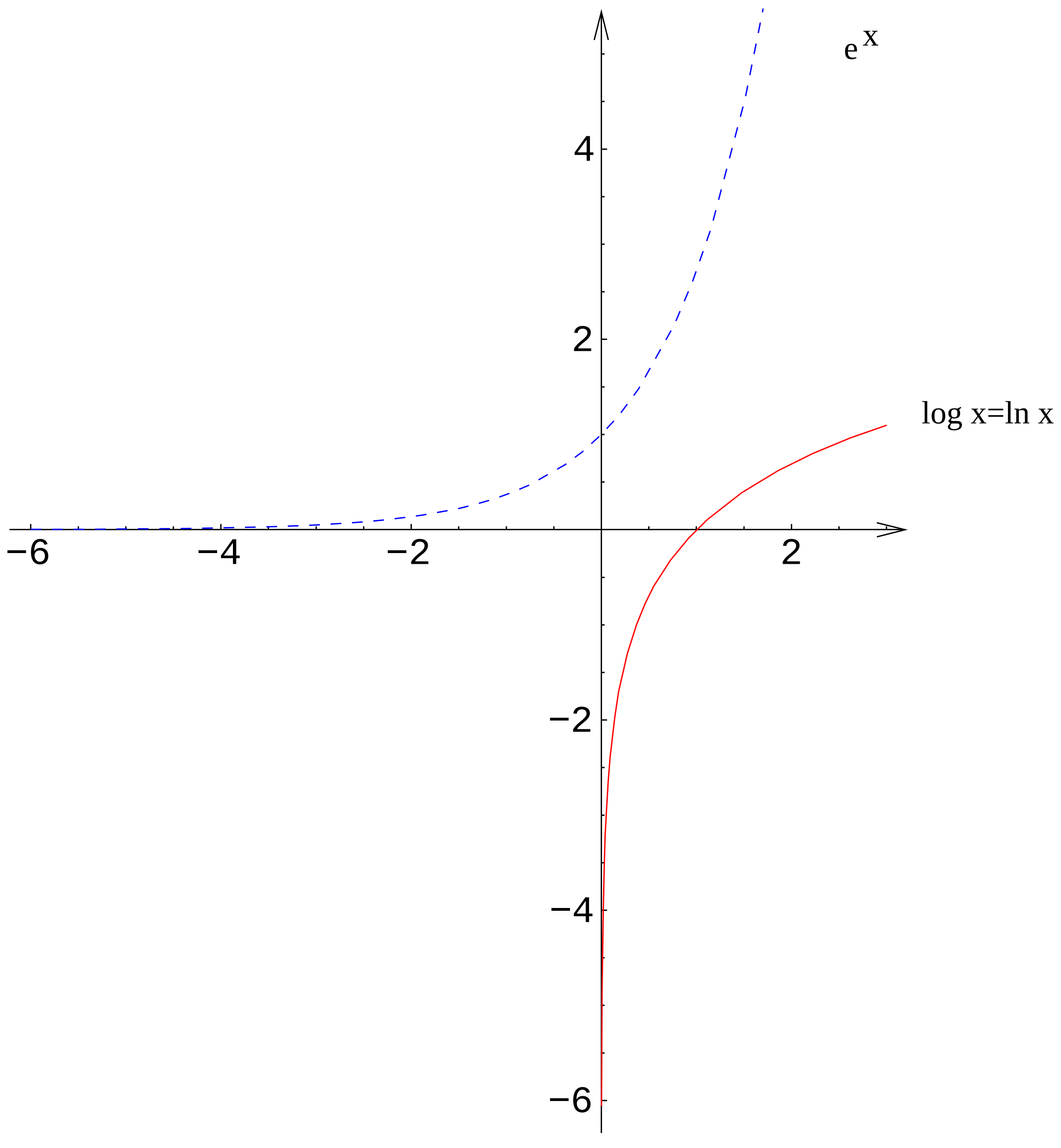
Toisin sanoen kaikilla $x > 0$ pätee

$$e^{\log x} = x$$

[4]**Varoitus:** yliopistopiireissä $\log x$ on yleensä luonnollinen logaritmi eikä 10-kantainen.

ja kaikilla $x \in \mathbf{R}$

$$\log(e^x) = x.$$



Huomautus/Harj.teht..

i) Kaikilla $x \in \mathbf{R}, a > 0$ pätee

$$a^x = e^{x \log a} \qquad \left(\text{esim. } \sqrt{x} = e^{\frac{1}{2}\log x}\right).$$

ii) ${}^a\log x = \frac{\log x}{\log a}$.

iii) Kaikilla $x \in \mathbf{R}, a > 0$ pätee

$$\begin{cases} a^{x+y} & = a^x a^y, \quad e^{x+y} = e^x e^y \\ (a^x)^y & = a^{xy}. \end{cases}$$

iv)
$$\begin{cases} {}^a\log(xy) &= {}^a\log x + {}^a\log y, \quad \log(xy) = \log x + \log y \\ {}^a\log(b^x) &= x({}^a\log b). \end{cases}$$

Esimerkki.
$$e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^y$$
kaikilla $x, y \in \mathbf{R}$, koska aritmeettis-geometrisen epäyhtälön nojalla
$$e^{\frac{x+y}{2}} = \left(e^{x+y}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e^{x+y}} = \sqrt{e^x e^y} \leq \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^y.$$

E. Trigonometriset funktiot.
Suorakulmaisessa kolmiossa, jonka terävät kulmat ovat α ja β, on kulman α

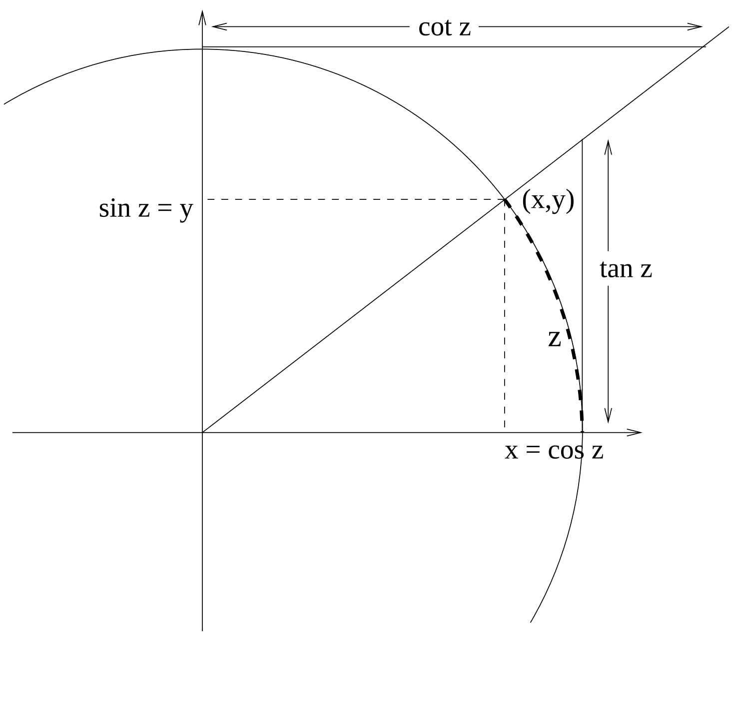
(1) sini
$$\sin\alpha = \frac{\alpha\text{:n vast. kateetti}}{\text{hypotenuusa}}$$

(2) kosini
$$\cos\alpha = \frac{\alpha\text{:n vier. kateetti}}{\text{hypotenuusa}} = \sin\beta$$

(3) tangentti
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\alpha\text{:n vast. kateetti}}{\alpha\text{:n vier. kateetti}} = \tan\alpha$$

(4) kotangentti
$$\operatorname{cotan}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\alpha\text{:n vier. kateetti}}{\alpha\text{:n vast. kateetti}}.$$

Huomautus. Trigonometriset funktiot voidaan määritellä kunnolla analyyttisesti. Tämä tehdäänkin myöhemmin.



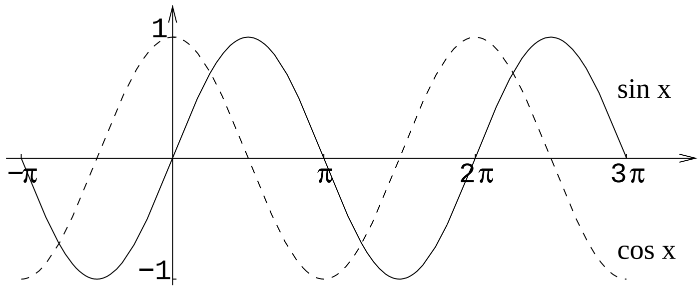
Tarkastellaan yksikköympyrän kehää

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\right\},$$

jossa kehän pituus $|S| = 2\pi$. Lähdetään liikkeelle positiiviselta x-akselilta, pisteestä $(1, 0)$, ja kuljetaan vastapäivään z:n pituinen matka. Näin saavutaan pisteeseen (x, y) ja merkitään

$$\begin{cases} \sin z & := y \\ \cos z & := x. \end{cases}$$

Jos kuljetaan myötäpäivään, merkitään kuljettua matkaa negatiivisella luvulla $z = -|z|$ ja määritellään $\sin z$ ja $\cos z$ kuten yllä. Siten $\sin z$ ja $\cos z$ saadaan määritellyksi kaikilla $z \in \mathbf{R}$.



Tangentti määritellään näin:

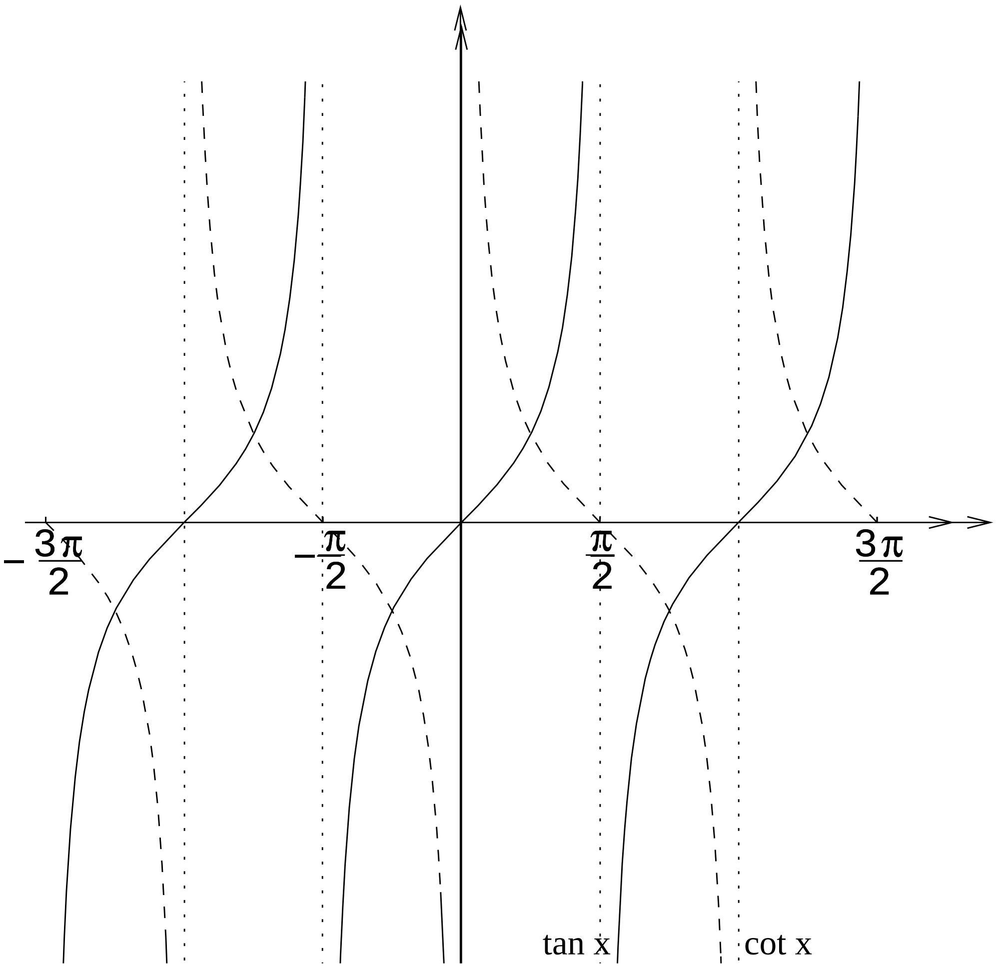
$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}, \text{ kun } \cos z \neq 0 \text{ eli } z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}.$$

Kotangentti määritellään käänteisarvona

$$\cot z := \frac{\cos z}{\sin z} \text{ kun } \sin z \neq 0 \text{ eli } z \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}.$$

Siten

$$\cot z = \frac{1}{\tan z}, \text{ kun } z \neq n\frac{\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}.$$



Koska yksikköympyrän kehän pituus on 2π, saadaan kaikilla $z \in \mathbf{R}$ ja $n \in \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned}
&\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \qquad \sin^2 z := (\sin z)^2 \\
&\sin(z + 2\pi n) = \sin z \\
&\cos(z + 2\pi n) = \cos z \\
&\sin(-z) = -\sin z \\
&\cos(-z) = \cos z, \qquad \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
&\sin(\pi - z) = \sin z, \qquad \sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
&\cos(\pi - z) = -\cos z \\
&\sin z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = n\pi \\
&\cos z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \frac{\pi}{2} + n\pi \\
&|\sin z| \le 1 \\
&|\cos z| \le 1.
\end{aligned}$$

Muita hyödyllisiä kaavoja:

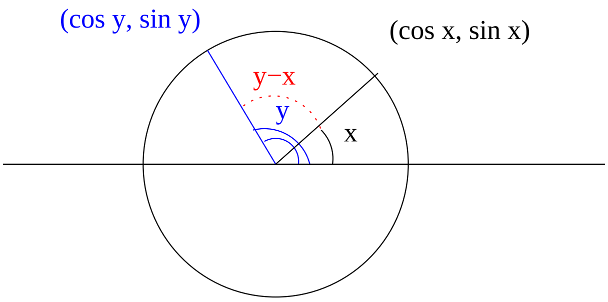
$$\begin{cases} \sin(x+y) & = \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \cos(x+y) & = \cos x \cos y - \sin x \sin y. \end{cases}$$

Näistä ensimmäinen seuraa helposti toisesta ja toinen todetaan esimerkiksi vektorilaskennolla: kun

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \bar{i}\cos x + \bar{j}\sin x \\ \bar{b} &= \bar{i}\cos y + \bar{j}\sin y, \end{aligned}$$

niin koska $|\bar{a}| = |\bar{b}| = 1$, on

$$\begin{aligned} \bar{a}\cdot\bar{b} &= \cos(\bar{a},\bar{b}) \\ &= \cos\big(\pm(x-y)\big) \\ &= \cos(x-y). \end{aligned}$$



Toisaalta

$$\bar{a}\cdot\bar{b} = \cos x\cos y + \sin x\sin y,$$

mistä yo. yhteenlaskukaava seuraa.

Muita hyödyllisiä peruskaavoja:

$$\begin{aligned} \sin(2x) &= 2\sin x\cos x \\ \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \end{aligned}$$

sekä edelleen:

$$\begin{aligned} \tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \\ \tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x\tan y}. \end{aligned}$$

Suoraan määritelmästä saadaan seuraava tärkeä arvio:

2.11. Lemma. *Kaikilla* $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ *pätee*

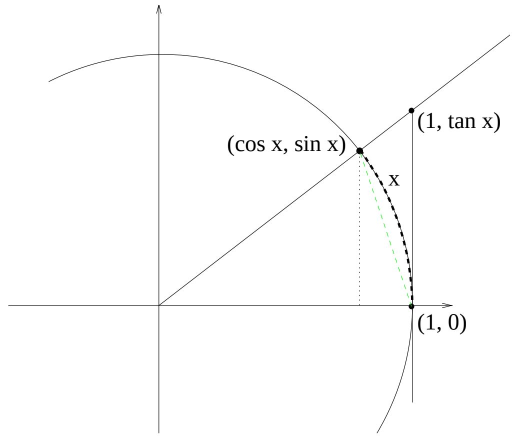
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 < \frac{1}{\cos x}.$$

Erityisesti, jos $|x| < \frac{\pi}{4}$, *niin*

$$\frac{|x|}{2} \le |\sin x| \le |x|.$$

"Todistus". Olkoon ympyräsektorin kaaren pituus x. Sektorin pinta-ala on tällöin

$$\pi \cdot \frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}.$$



Nyt (piirtämällä kuvan, jossa on yksikköympyrä ja kolme kolmiota, joiden kärjet ovat pisteissä $(0,0)$, $(\cos x, \sin x)$ ja $(\cos x, 0)$, pisteissä $(0,0)$, $(\cos x, \sin x)$ ja $(1,0)$ sekä $(0,0)$, $(1, \tan x)$ ja $(1,0)$ vakuuttautuu epäyhtälöistä)

$$\underbrace{\frac{\sin x \cos x}{2}}_{\text{pienen kolmion ala}} < \underbrace{\frac{1}{2}\sin x}_{\text{keskimmäisen kolmion ala}} < \underbrace{\frac{x}{2}}_{\text{sektorin ala}} < \underbrace{\frac{\tan x}{2}}_{\text{ison kolmion ala}}.$$

Siis

$$\sin x \cos x < \sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Kun $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on $\sin x > 0$, joten

$$\cos x < 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

mistä seuraa väite (toinen väite on suora seuraus tästä, HT). □

Huomautus. Sinin ja kosinin määritelmistä voidaan helposti johtaa myös seuraavat huomiot.

Jos $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ ja $(x,y) \neq (0,0)$, niin

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \in S = \{(x,y) \colon x^2+y^2 = 1\}.$$

Merkitään

$$r := \sqrt{x^2+y^2}.$$

Jos φ on kulma x-akselin ja janan $\overline{(0,0),(x,y)}$ välillä kierrettäessä positiiviseen suuntaan (siis vastapäivään), niin

$$\begin{cases} \frac{x}{r} = \cos\varphi \\ \frac{y}{r} = \sin\varphi, \end{cases}$$

toisin sanoen

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Siispä (r,φ) on pisteen (x,y) koordinaatit ns. *napakoordinaatistossa.*

Määritelmästä nähdään heti, että rajoittumille pätee

(1) $\sin x$ on aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $(+2n\pi)$ ja siten sinin rajoittuma on bijektio

$$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

(2) $\cos x$ on aidosti vähenevä välillä $[0,\pi]$ $(+2n\pi)$ ja siten cos:n rajoittuma on bijektio

$$[0,2\pi] \to [-1,1]$$

(3) $\tan x$ on aidosti kasvava välillä $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ $(+n\pi)$ ja siten tan:n rajoittuma on bijektio

$$\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbf{R}$$

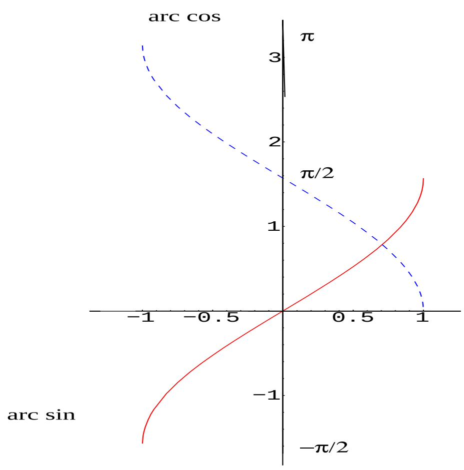
(4) $\cot x$ on aidosti vähenevä välillä $]0,\pi[$ $(+n\pi)$ ja siten cot:n rajoittuma on bijektio

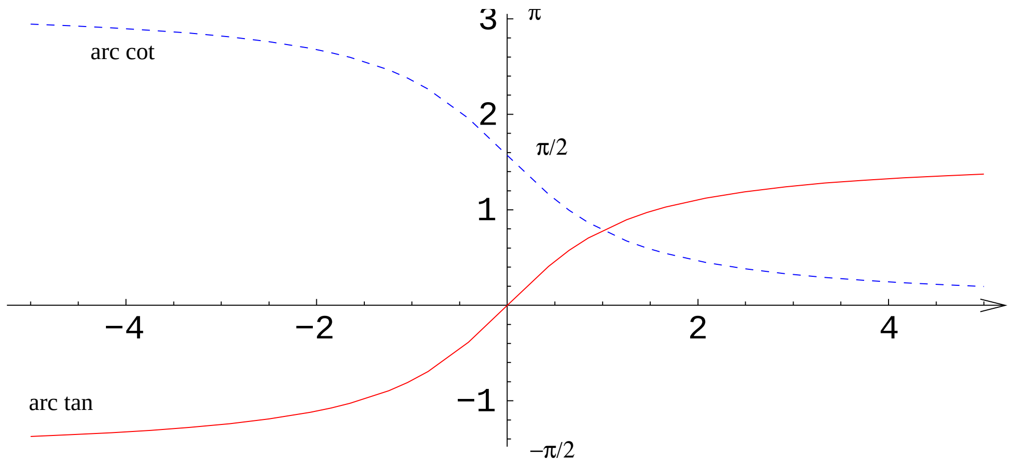
$$]0,\pi[\to \mathbf{R}.$$

Näillä on siis on olemassa käänteiskuvaukset (sovituilla väleillä), ns. *arcusfunktiot*:

$$\begin{aligned}
&\arcsin x = \sin^{-1} x : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{(aidosti kasvava)}\\
&\arccos x = \cos^{-1} x : [-1,1] \to [0,\pi] \quad \text{(aidosti vähenevä)}\\
&\arctan x = \tan^{-1} x : \mathbf{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad \text{(aidosti kasvava)}\\
&\operatorname{arc}\cot x = \cot^{-1} x : \mathbf{R} \to]0,\pi[\quad \text{(aidosti vähenevä).}
\end{aligned}$$

Huomaa määrittelyvälit; esimerkiksi arc sin on aidosti kasvava sinin rajoittuman käänteiskuvauksena välille $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.




arc cot
arc tan
π
π/2
−π/2
3
2
1
−1
−4
−2
2
4

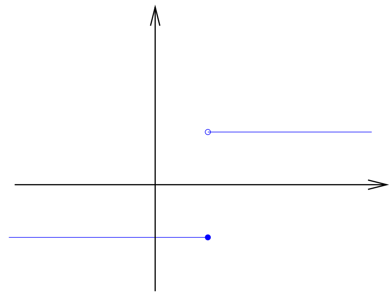
3. Jatkuvuus

Intuitiivisesti jatkuvuus tarkoittaa sitä, että pieni muutos lähtöarvoissa ei aiheuta myöskään kuva-arvoissa suuria muutoksia.

Esimerkki. Seuraavat kaksi epäjatkuvuuden tyyppiä ovat ilmeisiä.

"Hyppäysepäjatkuvuus": esimerkiksi funktio

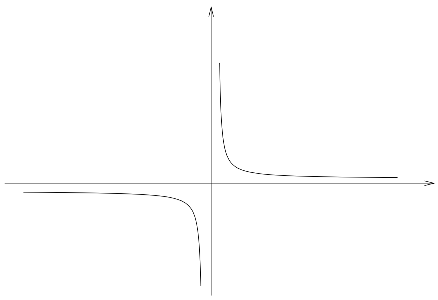
$$f(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{kun } x > 1 \\ -1\,, & \text{kun } x \le 1. \end{cases}$$



on epäjatkuva, kun $x = 1$.

"Karkailu äärettömyyteen": esimerkiksi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{jos } x \neq 0 \\ 0, & \text{jos } x = 0. \end{cases}$$



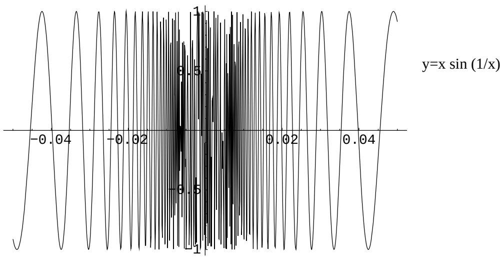
Huomautus. Jotta funktion ominaisuudesta pisteessä x_0 olisi edes mielekästä puhua, on funktion oltava määritelty ko. pisteessä (siis $f(x_0)$ pitää olla määritelty!).

Aiemmin törmättiin jatkuvuuden ongelmaan, kun yritettiin määritellä potensseja eksponentin ollessa irrationaalinen. Jatkuvilla funktioilla riittää se, että arvot tunnetaan tiheässä joukossa; silloin ne tunnetaan kaikkialla. Intuitiivinen kuva jatkuvuudesta joutuu vaikeuksiin esimerkiksi seuraavien funktioiden kohdalla.

Esimerkki. (Heilahteluepäjatkuvuus) Oleellinen epäjatkuvuuden tyyppi on "paha heilahtelu": esimerkiksi funktio

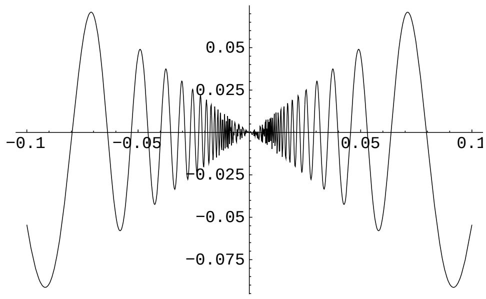
$$f(x) = \sin\frac{1}{x},$$

heiluu 0:n lähistöllä rajusti; se saa kaikki arvot väliltä $[-1, 1]$, kun $x \neq 0$, vaikka se rajoitettaisiin kuinka pienelle 0:n sisältävälle välille hyvänsä. Siten f:stä ei saada 0:ssa jatkuvaa, riippumatta siitä, miten $f(0)$ määritellään.



Sen sijaan vaimeneva heilahtelu näyttäisi jatkuvalta, kuten

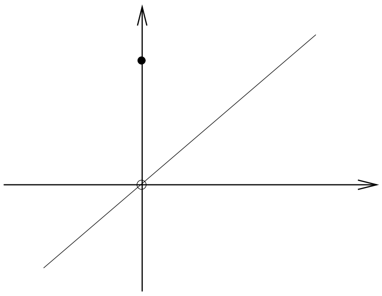
$$f(x) = \begin{cases} x \sin 1/x\,, \text{ jos } x \neq 0 \\ 0\,, \text{ jos } x = 0\,. \end{cases}$$



Esimerkki. (Poistuva epäjatkuvuus) Funktio

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{jos } x \neq 0 \\ 7, & \text{jos } x = 0 \end{cases}$$

on epäjatkuva, kun $x = 0$, mutta "korjaamalla" sen arvo 0:ssa 0:ksi, siitä tulisi



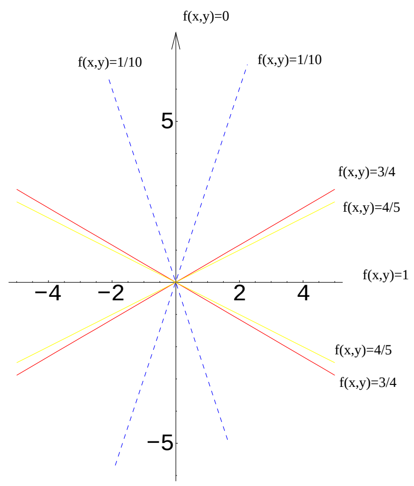
jatkuva.

Esimerkki. Seuraavan kahden muuttujan funktio auttanee ymmärtämään, miksi jatkuvuus täytyy määritellä huolellisesti. Olkoon

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2},$$

$(x, y) \neq (0, 0)$. Piirretään tasa-arvokäyriä

$$\begin{aligned} f(x,y) = 1 &\quad \Rightarrow \quad y^2 = 0 \\ f(x,y) = \frac{3}{4} &\quad \Rightarrow \quad x^2 = 3y^2, \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x \\ f(x,y) = \frac{4}{5} &\quad \Rightarrow \quad y = \pm\frac{1}{2}x \\ f(x,y) = \frac{1}{10} &\quad \Rightarrow \quad 9x^2 = y^2, \quad y = \pm 3x. \end{aligned}$$



Havaitaan, että tasa-arvokäyrät ovat origon kautta kulkevia suoria (suorapareja). Siten lähestyttäessä origoa pitkin suoraa f:llä on raja-arvo origossa – jos suoraa vaihdetaan, vaihtuu (yleensä) raja-arvonkin arvo. Siispä tämä funktio on epäjatkuva origossa, riippumatta siitä, miten $f(0, 0)$ määritellään.

Määritelmä. Pisteen x_0 ε-ympäristö on

$$B(x_0, \varepsilon) := \{x \in \mathbf{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\quad (\varepsilon > 0),$$

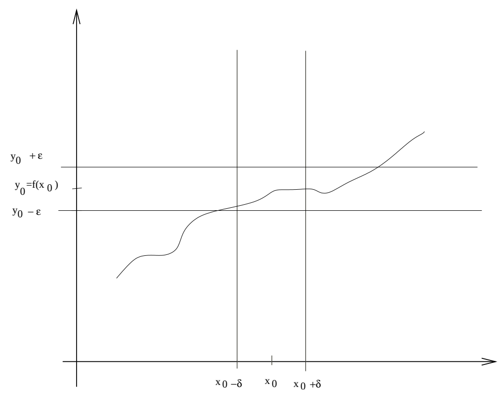
$\{||x - x_0|| < \varepsilon\}$.

Seuraavaksi esitellään jatkuvuuden tarkka määritelmä.

Määritelmä. Olkoon $I \subset \mathbf{R}$ väli ja $x_0 \in I$ ja $f : I \to \mathbf{R}$. Funktio f on *jatkuva* pisteessä x_0, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

kun $x \in I$ ja $|x - x_0| < \delta$.



Huomautus. Luku $\delta = \delta(\varepsilon, x_0, f) > 0$, toisin sanoen, se riippuu paitsi funktiosta f, myös pisteestä x_0 ja erityisesti luvusta ε.

Jatkuvuus tarkoittaa sitä, että olipa $\varepsilon > 0$ miten pieni hyvänsä, niin funktion f graafi jää suorien $y = f(x_0) + \varepsilon$ ja $y = f(x_0) - \varepsilon$ väliin pisteen x_0 lähellä.

Funktio f on siis jatkuva pisteessä x_0, mikäli jokaista $\varepsilon > 0$ kohden on x_0:n δ-ympäristö $B(x_0, \delta)$, joka kuvautuu $f(x_0)$:n ε-ympäristön sisään,

$$f\big(B(x_0, \delta)\big) \subset B(f(x_0), \varepsilon)\,.$$

Sanotaan, että f on *jatkuva välillä* I, jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in I$. Edelleen f on *epäjatkuva* pisteessä $x_0 \in I$, jos f ei ole jatkuva pisteessä $x_0 \in I$; toisin sanoen, jos on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että jokaisella $\delta > 0$ löytyy joku piste $x \in I$, jolle $|x - x_0| < \delta$, mutta

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Huomautus. Jatkuvuus on *lokaali ominaisuus*, toisin sanoen f:n jatkuvuuteen pisteessä x_0 vaikuttaa vain f:n käyttäytyminen lähellä pistettä x_0.

Tarkastetaan seuraavaksi, että intuitiivisesti epäjatkuvat funktiot todella ovat epäjatkuvia eo. määritelmän mukaan.

Esimerkki. ("Hyppäysepäjatkuvuus")
Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \geq 0 \\ 0, & \text{jos } x < 0. \end{cases}$$

Funktio on epäjatkuva pisteessä $x = 0$. Jos $\varepsilon < 1$, esim. $\varepsilon = \frac{1}{2}$, niin jokainen 0:n ympäristö sisältää pisteen $x < 0$, jolle $f(x) = 0$. Siten

$$|f(x) - f(0)| = |0 - 1| = 1 > \varepsilon,$$

vaikka $|x - 0| = |x|$ olisi kuinka pieni.

Seuraavan lauseen nojalla osoitetaan, ettei "katoaminen äärettömyyksiin" ole mahdollista jatkuvalle funktiolle.

3.1. Lause. *Olkoon $f : I \to \mathbf{R}$ jatkuva pisteessä $x_0 \in I$. Tällöin f on rajoitettu pisteen x_0 ympäristössä, toisin sanoen on olemassa luvut $M > 0$ ja $\delta > 0$ siten, että*

$$|f(x)| \leq M$$

kaikilla $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I$ (ts. $x \in I$ ja $|x - x_0| < \delta$).

Todistus. Valitaan $\varepsilon = 1$. Koska f on jatkuva pisteessä x_0, on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon = 1,$$

kunhan $x \in]x_0 + \varepsilon, x_0 - \varepsilon[\cap I =: \mathcal{U}$. Nyt, jos $x \in \mathcal{U}$, niin

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |f(x_0) - f(x_0) + f(x)| \\ &\leq |f(x_0)| + \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{<1} \leq |f(x_0)| + 1 =: M. \end{aligned}$$

□

Esimerkkejä.

i) Vakiofunktio $f(x) = c$ kaikilla x, on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in I$: Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Silloin

$$|f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

pätee kaikilla $x \in I$, joille $|x - x_0| < \delta$, oli $\delta > 0$ mikä tahansa.

ii) Identtinen kuvaus, $f(x) = x$ on jatkuva $\mathbf{R}$:ssa: Jos $x_0 \in \mathbf{R}$ ja $\varepsilon > 0$, niin

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon,$$

mikäli valitaan $< \delta := \varepsilon$ ja $|x - x_0| < \delta$.

iii) Itseisarvo $f(x) = |x|$ on jatkuva $\mathbf{R}$:ssa. Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|.$$

Valitaan $\delta = \varepsilon$, jolloin saamme

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,,$$

mikäli $|x - x_0| < \delta$.

iv) Potenssi $f(x) = x^2$ on jatkuva $\mathbf{R}$:ssa. Olkoon $x_0 \in \mathbf{R}$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin

$$|f(x) - f(x_0)| = |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0)(x + x_0)| = |x - x_0||x + x_0|.$$

Haluamme, että olisi

$$|x - x_0||x + x_0| < \varepsilon.$$

Näin on, mikäli

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{M} \text{ ja } |x + x_0| < M.$$

Keksitäänpä sovelias M:

$$\begin{aligned} |x + x_0| &\leq |2x_0 + x - x_0| \\ &\leq 2|x_0| + |x - x_0| \\ &\leq 2|x_0| + 1 =: M, \end{aligned}$$

jos $|x - x_0| \leq 1$. Siksi valitaan

$$\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1}\right).$$

Tällöin aina, kun $|x - x_0| < \delta$, on (edellä todetun perusteella)

$$|x + x_0| \leq 2|x_0| + 1\,,$$

koska $|x - x_0| < 1$. Siten myös

$$|x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0| < \frac{\varepsilon}{2|x_0| + 1} \cdot (2|x_0| + 1) = \varepsilon.$$

Huomaa, että tässä esimerkissä luku δ riippuu pisteestä x_0. Tämän funktion kohdalla tämä riippumuus on väistämätön.

v) (Heilahteluepäjatkuvuus) Funktio f,

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{jos } x \neq 0, \\ 0, & \text{jos } x = 0, \end{cases}$$

on epäjatkuva pisteessä $x_0 = 0$. Olkoon $\delta > 0$ mielivaltainen, ja valitaan esimerkiksi $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Valitaan $n \in \mathbf{N}$ siten, että $n > \frac{2}{\delta\pi}$. Tällöin

$$\delta > \frac{2}{\pi n} > \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)}$$

ja

$$\left| f\left(\frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)}\right) - f(0) \right| = \left| \sin \frac{(2n+1)\pi}{2} \right| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

f ei ole siis jatkuva 0:ssa.

vi) Funktio f,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{jos } x \in \mathbf{Q} \\ 0, & \text{jos } x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$$

on epäjatkuva kaikilla $x \in \mathbf{R}$. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Olkoon $\delta > 0$ mielivaltainen. Jos $x_0 \in \mathbf{Q}$, niin on olemassa $y \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ ja $y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Tällöin

$$|f(y) - f(x_0)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

joten f on epäjatkuva, kun $x_0 \in \mathbf{Q}$. Jos taas $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, niin on olemassa $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \mathbf{Q}$. Tällöin

$$|f(x) - f(x_0)| = |1 - 0| = 1 > \varepsilon,$$

joten f on epäjatkuva, kun $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.

Merkintä. Jos $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbf{R}$, niin $\max(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ on suurin luvuista $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Siten

$$\max(a, b) := \frac{1}{2}(a + b) + \frac{1}{2}|a - b|.$$

Vastaavasti $\min(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ on pienin luvuista $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Siten

$$\min(a, b) := \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}|a - b|.$$

3.2. Lause. *Olkoot $f : I \to \mathbf{R}$, $g : I \to \mathbf{R}$ ja $x_0 \in I$. Olkoot f ja g jatkuvia funktioita pisteessä x_0. Tällöin myös h on jatkuva pisteessä x_0, jos*

i) *$h = f + g$, toisin sanoen $h(x) = f(x) + g(x)$,*
ii) *$h = fg$, toisin sanoen $h(x) = f(x)g(x)$,*
iii) *$h = \lambda f$, missä $\lambda \in \mathbf{R}$ on vakio, toisin sanoen $h(x) = \lambda f(x)$,*
iv) *$h = \frac{f}{g}$, jos $g(x_0) \neq 0$, toisin sanoen $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$,*
v) *$h = |f|$, toisin sanoen $h(x) = |f(x)|$.*

Todistus. i) Olkoon $\varepsilon > 0$. Arvioidaan:

$$\begin{aligned} |h(x) - h(x_0)| &= |f(x) + g(x) - \big(f(x_0) + g(x_0)\big)| \\ &\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \,. \end{aligned}$$

Nyt f:n jatkuvuuden nojalla on $\delta_1 > 0$, jolle

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kun $|x - x_0| < \delta_1$, ja g:n jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta_2 > 0$, jolle

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

mikäli $|x - x_0| < \delta_2$. Siis, kun $|x - x_0| < \min(\delta_1, \delta_2) =: \delta$, niin

$$|h(x) - h(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

$\not\subset$

ii) Olkoon $\varepsilon > 0$. Havaitaan[5] ensiksi, että

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\ &= f(x)(g(x) - g(x_0)) + g(x_0)(f(x) - f(x_0)), \end{aligned}$$

joten kolmioepäyhtälön nojalla

$$(*) \qquad |h(x) - h(x_0)| \leq |\underbrace{f(x)}_{\leq M}||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{< \frac{\varepsilon}{2|g(x_0)|+2}}|.$$

Nyt Lauseen 3.1 nojalla on olemassa $M > 0$ ja $\delta_1 > 0$ siten, että

$$|f(x)| \leq M,$$

kun $|x - x_0| < \delta_1$. Siten

$$(**) \qquad |f(x)||g(x) - g(x_0)| \leq M|g(x) - g(x_0)| < M\frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2},$$

[5]Edellä todistettiin, että x^2 on jatkuva. Tässä pyrimme matkimaan sitä todistusta.

kun

$$|x - x_0| < \delta_1 \quad \text{ja } |x - x_0| < \delta_2,$$

missä δ_2 on g:n jatkuvuuden määritelmän lukua $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2M$ vastaava δ. Edelleen

$$(***) \qquad |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \leq |g(x_0)|\frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)| + 1)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

kun $|x - x_0| < \delta_3$ ja δ_3 on f:n jatkuvuuden määritelmän lukua $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{2(|g(x_0)|+1)}$ vastaava δ. Yhdistetään (*), (**) ja (***), mitkä ovat voimassa kun kaikki ehdot

$$\begin{aligned} &|x - x_0| < \delta_1 \\ &|x - x_0| < \delta_2 \quad \text{ja} \\ &|x - x_0| < \delta_3 \end{aligned}$$

täyttyvät. Nämä toteutuvat valinnalla

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3),$$

kun $|x - x_0| < \delta$. Silloin

$$\begin{aligned} |h(x) - h(x_0)| &\leq |f(x)||g(x) - g(x_0)| + |g(x_0)||f(x) - f(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

$\not\square$

iii) Kohdan ii) nojalla on $h = \lambda \cdot f$ jatkuva pisteessä x_0, koska $g(x) \equiv \lambda$ on vakiofunktiona jatkuva pisteessä x_0. $\not\square$

iv) Tämän todistamiseksi tarvitaan itsessäänkin tärkeä aputulos:

3.3. Lemma. *Olkoon $f : I \to \mathbf{R}$ jatkuva pisteessä $x_0 \in I$. Jos $f(x_0) > 0$, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että $f(x) > \frac{f(x_0)}{2} > 0$ kaikilla $x \in I$, joilla $|x - x_0| < \delta$.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2}$, jolloin f:n jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2} = \varepsilon,$$

kun $|x - x_0| < \delta$ $(x \in I)$. Tällöin kaikille $x \in]x_0 - \delta, x - \delta[\cap I$ pätee

$$\begin{aligned} f(x) &= (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) \\ &\geq f(x_0) - \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{<\varepsilon} \\ &> f(x_0) - \varepsilon = f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} \\ &= \frac{f(x_0)}{2} > 0. \end{aligned}$$

$\square$

Jatkamme Lauseen 3.2 todistusta.

Lauseen 3.2 todistus jatkuu. iv)

Huomautus. Lemman 3.3 nojalla on $g(x) \neq 0$ kaikilla x jossain x_0:n ympäristössä, joten $h = \frac{f}{g}$ on hyvin määritelty jollakin avoimella välillä $J \ni x_0$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Osoitetaan, että $\frac{1}{g}$ on jatkuva pisteessä x_0, jolloin myös $h = f \cdot \frac{1}{g}$ on jatkuva pisteessä x_0. Ensiksi

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| = \left|\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)}\right| = \frac{1}{|g(x)||g(x_0)|}\left|g(x) - g(x_0)\right|.$$

Lemman 3.3 nojalla on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että

$$|g(x)| > \frac{|g(x_0)|}{2},$$

kun $|x - x_0| < \delta_1$. Tällöin

$$\left|\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x)g(x_0)}\right| \leq \frac{2|g(x) - g(x_0)|}{(g(x_0))^2}.$$

Funktion g jatkuvuuden nojalla on olemassa (lukua $\tilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon g(x_0)^2}{2}$ vastaava) luku $\delta_2 > 0$ siten, että kun $|x - x_0| < \delta_2$, niin

$$|g(x) - g(x_0)| < \frac{\varepsilon g(x_0)^2}{2}.$$

Siten tällaisilla x

$$\frac{2|g(x) - g(x_0)|}{(g(x_0))^2} < \frac{2}{g(x_0)^2}\frac{\varepsilon g(x_0)^2}{2} = \varepsilon,$$

joten

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}\right| \leq \frac{2|g(x) - g(x_0)|}{(g(x_0))^2} < \varepsilon.$$

Siispä $\frac{1}{g}$ on jatkuva pisteessä x_0, joten kohdan ii) nojalla

$$h = \frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$$

on kahden jatkuvan tulona jatkuva pisteessä x_0. $\not\square$

v) Olkoon $\varepsilon > 0$. Käyttämällä käänteistä kolmioepäyhtälöä saamme

$$\begin{aligned}|h(x) - h(x_0)| &= \big||f(x)| - |f(x_0)|\big| \\ &= \big||f(x)| - |-f(x_0)|\big| \\ &\leq \big|f(x) + (-f(x_0))\big| \\ &= |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,\end{aligned}$$

kun $|x - x_0| < \delta$. $\square$

3.4. Seuraus. *Polynomit ovat jatkuvia koko* $\mathbf{R}$*:ssa ja rationaalifunktiot määrittelyjoukossaan (eli kun nimittäjä* $\neq 0$*).*

3.5. Lause. (Yhdistetyn funktion jatkuvuus)
Olkoon $f : I \to \mathbf{R}$ *jatkuva pisteessä* x_0 *ja* $g : J \to \mathbf{R}$ *jatkuva pisteessä* $f(x_0) \in J$*, missä* I *ja* J *ovat välejä. Tällöin* $g \circ f : I \to \mathbf{R}$ *on jatkuva pisteessä* x_0*.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska g on jatkuva pisteessä $f(x_0)$, on olemassa $\delta_g > 0$ siten, että

$$|g(y) - g(f(x_0))| < \varepsilon,$$

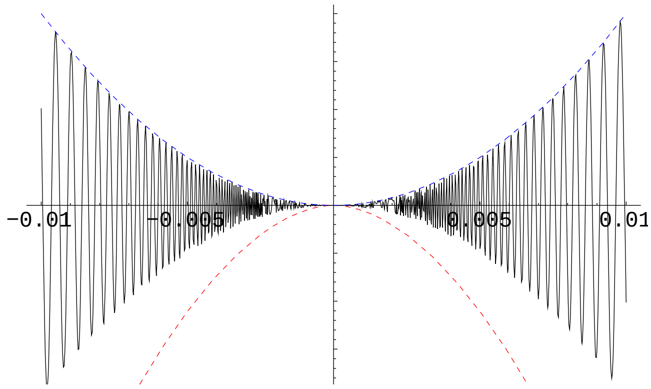
kunhan $y \in J$ ja $|y - f(x_0)| < \delta_g$. Edelleen, koska f on jatkuva pisteessä x_0, on (f:n jatkuvuuden määritelmäsaä lukua $\tilde{\varepsilon} = \delta_g$ vastaava luku) $\delta_f > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta_g,$$

kunhan $x \in I$ ja $|x - x_0| < \delta_f$. Siispä kun $|x - x_0| < \delta_f$, on

$$|g \circ f(x) - g \circ f(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon,$$

koska $f(x) \in J$ ja $|\underbrace{f(x)}_{y} - f(x_0)| < \delta_g$. □



3.6. Lause. (Suppiloperiaate)
Olkoot $f, g, h : I \to \mathbf{R}$ *funktioita ja* f, g *jatkuvia pisteessä* $x_0 \in I$*. Jos*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

kaikilla $x \in I$ *ja*

$$f(x_0) = h(x_0) = g(x_0),$$

niin myös h *on jatkuva pisteessä* x_0*.*

Todistus.

$$\begin{aligned} h(x) - h(x_0) &\leq g(x) - h(x_0) = g(x) - g(x_0) \\ &\leq |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

kun $|x - x_0| < \delta_g$, sillä g on jatkuva pisteessä x_0. Samoin

$$h(x) - h(x_0) \geq f(x) - f(x_0) \geq -|f(x) - f(x_0)| > -\varepsilon,$$

kun $|x - x_0| < \delta_f$, sillä f on jatkuva pisteessä x_0. Siispä

$$|h(x) - h(x_0)| \leq \max\Big(|f(x) - f(x_0)|, |g(x) - g(x_0)|\Big) < \varepsilon,$$

kunhan $|x - x_0| < \min(\delta_f, \delta_g)$. □

Seuraavassa nähdään, ettei jatkuva funktio jätä yhtään arvoa väliin.

3.7. Lause. (Bolzano) (Intermediate value theorem eli välissäoleva arvo -lause) *Olkoon f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja*

$$f(a) \leq c \leq f(b).$$

Tällöin on olemassa $x_0 \in [a, b]$ siten, että

$$f(x_0) = c.$$

Huomautus. Piste x_0 ei yleensä ole yksikäsitteinen, vaan f voi saada arvon c monessa eri pisteessä. Oleellista on se, että c on $f(a)$:n ja $f(b)$:n välissä (siis $f(a) \leq c \leq f(b)$ tai $f(a) \geq c \geq f(b)$).

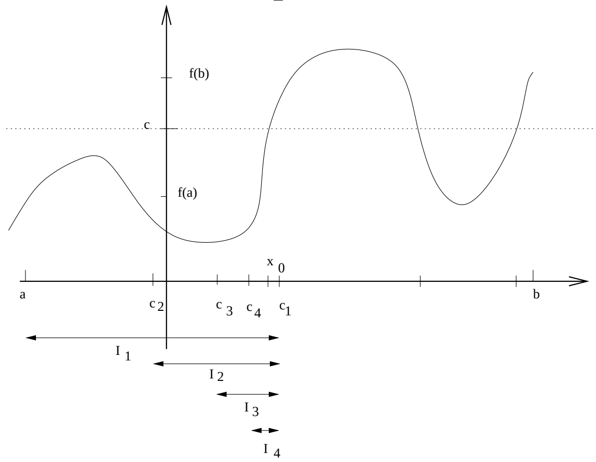
3.8. Seuraus. *Jos välillä $[a, b]$ on jatkuva funktio $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, joka saa erimerkkiset arvot välin päätepisteissä (toisin sanoen $f(a)\,f(b) \leq 0$), niin on olemassa $x_0 \in [a, b]$ siten, että $f(x_0) = 0$.*

Huomautus. Lauseet 3.7 ja 3.8 ovat yhtäpitäviä:

- Lause 3.8 seuraa Lauseesta 3.7 soveltamalla jälkimmäisenä mainittua funktioon $\pm f$ ja valitsemalla $c = 0$.
- Lause 3.7 voidaan johtaa Lauseesta 3.8 tutkimalla funktiota $g(x) = f(x) - c$

Seuraavassa etsitään Bolzanon lauseelle kaksi eri todistusta. Ensimmäistä voitaisiin kutsua "haarukoinniksi". Toisessa piste x_0 kaivetaan esille "viimeisenä pisteenä", jolle $f(t) \leq c$ kaikilla $t \leq x$. Tämä vaatii täsmällisen määritelmän sille mitä viimeisellä pisteellä tarkoitetaan.

Todistus. (Haarukointi eli sisäkkäisten välien periaate)
Muodostetaan jono sisäkkäisiä suljettuja välejä $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots$ seuraavasti: $I_0 = [a, b]$ ja $c_0 = \frac{a+b}{2}$ on välin I_0 keskipiste. ($a = a_0, b = b_0$.)



Jos $f(c_0) \leq c$, valitaan

$$a_1 = c_0 \quad \text{ja} \quad b_1 = b.$$

Jos taas $f(c_0) > c$, valitaan

$$a_1 = a \quad \text{ja} \quad b_1 = c_0.$$

Kummassakin tapauksessa saadaan väli

$$I_1 = [a_1, b_1]$$

siten, että

$$f(a_1) \leq c \leq f(b_1) \quad \text{ja} \quad |I_1| = \frac{1}{2}|I_0| = \frac{b-a}{2}.$$

Jatketaan samaan tapaan, korvataan väli

$$I_0 = [a, b] \quad \text{välillä} \quad I_1 = [a_1, b_1],$$

ja olkoon c_1 välin I_1 keskipiste, toisin sanoen

$$c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}.$$

Jos $f(c_1) \leq c$, valitaan

$$a_2 = c_1 \quad \text{ja} \quad b_2 = b_1,$$

ja jos $f(c_1) > c$, valitaan

$$a_2 = a_1 \quad \text{ja} \quad b_2 = c_1.$$

Molemmissa tapauksissa saadaan väli $I_2 = [a_2, b_2]$, jolle $f(a_2) \leq c \leq f(b_2)$ ja välin I_2 pituus on

$$|I_2| = \frac{1}{2}|I_1| = \frac{b-a}{4}.$$

Jatketaan edelleen: n. vaiheessa olkoon c_n välin $I_{n-1} := [a_{n-1}, b_{n-1}]$ keskipiste, toisin sanoen

$$c_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}.$$

Jos $f(c_n) \leq c$, valitaan

$$a_n = c_n \quad \text{ja} \quad b_n := b_{n-1},$$

ja jos $f(c_n) > c$, valitaan

$$a_n = a_{n-1} \quad \text{ja} \quad b_n := c_n.$$

Tällöin välille $I_n = [a_n, b_n]$ pätee: $f(a_n) \leq c \leq f(b_n)$ ja välin I_n pituus on

$$|I_n| = \frac{1}{2}|I_{n-1}| = \frac{b-a}{2^n}.$$

Saatiin siis jono sisäkkäisiä suljettuja välejä I_n, $[a, b] \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \ldots$, joiden pituudet

$$|I_n| = b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = 2^{-n}(b-a) \to 0.$$

Sisäkkäisten välien periaatteen nojalla on olemassa piste

$$x_0 \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \subset [a, b].$$

Osoitetaan, että x_0 on etsitty piste, toisin sanoen $f(x_0) = c$. Jos $f(x_0) \neq c$, niin joko $f(x_0) > c$ tai $f(x_0) < c$. Jos $f(x_0) > c$, niin $f(x_0) - c > 0$. Tällöin on Lemman 3.3 nojalla olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) - c > 0 \quad \text{kaikilla } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I.$$

Koska $b_n - a_n \to 0$, on olemassa n, jolle $|b_n - a_n| < \delta$. Koska $a_n \leq x_0 \leq b_n$, on tällöin

$$a_n \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I,$$

joten

$$f(a_n) - c > 0\,.$$

Tämä on ristiriita, koska $f(a_n) \leq c$. (Samoin voidaan tutkia tilanne, jossa $f(x_0) < c$, mikä johtaa ristiriitaan tiedon $f)b_n) \geq c$ kanssa.)

Siispä $f(x_0) = c$ ja etsitty piste löytyi. □

Toinen tapa vaatii ”viimeisen pisteen” käsitteen tarkan määrittelyn:

Määritelmä. Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$.
Sanotaan, että A on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa luku $M \in \mathbf{R}$ siten, että

$$(*) \qquad a \leq M \quad \text{kaikilla } a \in A.$$

Tällöin luku M on A:n (eräs) *yläraja*.
Edelleen A on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa luku $m \in \mathbf{R}$ siten, että

$$(**) \qquad a \geq m \quad \text{kaikilla } a \in A.$$

Tällöin luku m on A:n (eräs) *alaraja*.
Joukko A on *rajoitettu*, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu.

Esimerkki.

$$A := x \in \mathbf{R} : \left\{ x = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{jollain } n \in N \right\}.$$

Tällöin 3 000 000 000 on eräs yläraja. Pienin yläraja on 2 ja suurin alaraja 1.

Huomautus.

i) Jos M on A:n yläraja, niin jokainen $M' \in \mathbf{R}$, jolle $M' \geq M$, on myös A:n yläraja. Edelleen $A \subset] - \infty, M]$.
Samoin, jos m on A:n alaraja, niin jokainen $\tilde{m} \leq m$ on myös A:n alaraja.

ii) A on rajoitettu
$\Leftrightarrow \quad A \subset [a, b]$ joillain $a, b \in \mathbf{R}$
$\Leftrightarrow \quad A \subset [-M, M]$ jollain $M > 0$
$\Leftrightarrow \quad$ on olemassa $M > 0$ siten, että $|a| \leq M$ kaikilla $a \in A$.

Esimerkki.

$$A =]1, \infty[$$

on alhaalta rajoitettu. Esimerkiksi $a \geq 0$ kaikilla $a \in A$ johtaa siihen, että 0 on eräs alaraja. A ei kuitenkaan ole ylhäältä rajoitettu, sillä jos $M \in \mathbf{R}$, niin $|M| + 1 > M$ ja $|M| + 1 \in A$, jolloin M ei mitenkään voi olla A:n yläraja.

Esimerkki.
$$B = \{2 - n^2 : n \in N\} = \{2, 1, -2, -7 \dots\}.$$

B:n suurin alkio on $\max B = 2$, joten 2 on B:n pienin yläraja. B ei ole alhaalta rajoitettu.

Huomautus. Jos on olemassa $\max A :=$ A:n suurin alkio, niin $\max A$ on A:n pienin yläraja. Vastaavasti jos on olemassa $\min A$, on se A:n suurin alaraja.
Varoitus! Yleensä ei edes rajoitetulla joukolla ole suurinta tai pienintä alkiota (esim. $A =]-1, 1[$). Kuitenkin rajoitetulla joukolla on aina paras mahdollinen ylä- tai alaraja.

3.9. Lause. (Täydellisyysaksiooma)
Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$. Jos A on ylhäältä rajoitettu, on olemassa luku $G \in \mathbf{R}$, joka on pienin A:n ylärajoista (ts. G on joukon A yläraja ja kaikille joukon A ylärajoille M pätee: $G \leq M$).

Jos A on alhaalta rajoitettu, on olemassa luku $g \in \mathbf{R}$, joka on suurin A:n alarajoista.

Huomautus. Lauseen 3.9 antamat pienin yläraja ja suurin alaraja ovat erittäin tärkeitä käsitteitä.

Lausetta 3.9 kutsutaan täydellisyysaksioomaksi, koska se usein oletetaan aksiomana. Tällä kurssilla aksiooman asemassa on sisäkkäisten välien periaate, josta Lause 3.9 seuraa. Voidaan myös osoittaa, että sisäkkäisten välien periaate seuraa Lauseesta 3.9.

Määritelmä. Olkoon $\emptyset \neq A \subset \mathbf{R}$. Jos A on ylhäältä rajoitettu, niin A:n pienin yläraja on joukon A *supremum*, merkitään $\sup A$, toisin sanoen $G = \sup A$, jos ja vain, jos

i) $a \leq G$ kaikilla $a \in A$ (eli G on A:n yläraja)
ii) $G \leq M$, oli $M \in \mathbf{R}$ mikä hyvänsä joukon A yläraja, ts. jos $a \leq M$ kaikilla $a \in A$, niin $G \leq M$ (G on ylärajoista pienin).

Vastaavasti määritellään: joukon A *infimum* $\inf A$ on A:n suurin alaraja, toisin sanoen Lauseen 3.9 antama luku g on joukon A infimum, $g = \inf A$.

Huomautus. Merkitään

$$\begin{aligned} \sup A := +\infty \quad &\Leftrightarrow \quad A \text{ ei ole ylhäältä rajoitettu} \\ \inf A := -\infty \quad &\Leftrightarrow \quad A \text{ ei ole alhaalta rajoitettu.} \end{aligned}$$

Joskus käytetään myös sopimusta

$$\sup \emptyset = -\infty,$$

mitä tällä kurssilla ei tarvittane.

Huomautus.

i) $\sup A \in A \quad \Leftrightarrow \quad$ on olemassa joukon A suurin alkio ($\max A$).
Tällöin $\sup A = \max A$.
Vastaavasti $\inf A \in A \quad \Leftrightarrow \quad$ on olemassa joukon A pienin alkio ($\min A$), jolloin $\inf A = \min A$.

ii) Yleensä $\sup A, \inf A \notin A$ (esim. $A =]-1,1[$).
iii) A:n supremum on yksikäsitteisesti määrätty: jos S ja S' ovat supremumeja, niin koska S' on yläraja ja S ylärajoista pienin, on $S \leq S'$. Samoin $S' \leq S$, joten $S = S'$.
Myös infimum on yksikäsitteinen.
iv) $\inf A \leq \sup A$ ja jos $A \subset B$, niin

$$\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B \quad \text{(HT)}.$$

Esimerkki.

$$A = \left\{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbf{N}\right\} = \left\{1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, 1\frac{4}{5}, 1\frac{5}{6}, \dots\right\}.$$

Mitkä ovat A:n supremum ja infimum? $1 \leq 2 - \frac{1}{n} \leq 2$ kaikilla $n \in \mathbf{N}$, joten 1 on A:n eräs alaraja ja 2 eräs yläraja.
Jos m on A:n alaraja, niin

$$m \leq 2 - \frac{1}{1} = 2 - 1 = 1,$$

joten $1 = \inf A = \min A$.
Näytetään, että $\sup A = 2$: Muistetaan, että 2 on joukon A yläraja. Jos M on A:n yläraja, on osoitettava, että $M \geq 2$. Jos $M < 2$, niin valitaan $n \in \mathbf{N}$,

$$n > \frac{1}{2 - M},$$

jolloin $2 - M > \frac{1}{n}$. Siten

$$2 - \frac{1}{n} > 2 - (2 - M) = M,$$

eli M ei olisikaan A:n yläraja. Siispä $M \geq 2$ ja $2 = \sup A$ (joukon A suurinta alkiota ei ole olemassa).

Uskotaan Lause 3.9 hetkeksi ennen sen todistamista ja todistetaan Bolzanon lause 3.7 toisella tavalla käyttämällä sitä.

Bolzanon lauseen todistus. (Tapa 2: Supremum)
Olkoon

$$x_0 := \sup \{\underbrace{t \in [a,b] : f(t) \leq c}_{A}\}$$

Tällöin $A \neq \emptyset$, koska $a \in A$ sillä $f(a) \leq c$. Edelleen, A on ylhäältä rajoitettu, ylärajana b sillä $A \subset [a,b]$. Nyt Lauseen 3.9 mukaan on olemassa $x_0 = \sup A \in [a,b]$. Osoitetaan, että $f(x_0) = c$.

Jos $x \in [a,b]$ on sellainen, että $x_0 < x \leq b$, niin $f(x) > c$, koska $x > \sup A$ (ks. joukon määritelmä). Siten $f(x_0) \geq c$, koska jos olisi $f(x_0) < c$, niin Lemman 3.3 nojalla $f(x) < c$ jollain $x > x_0$, mikä olisi ristiriitaista.

Edelleen: mikäli $f(x_0) > c$, niin $x_0 \neq a$ ja Lemman 3.3. nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) > c \quad \text{kaikille } x \in]x_0 - \delta, x_0[.$$

Tällöin $x_0 - \frac{\delta}{2}$ on joukon A yläraja, jolloin

$$x_0 - \frac{\delta}{2} \geq \sup A = x_0 > x_0 - \frac{\delta}{2}.$$

Syntyy ristiriita, joten kaikesta päättäen $f(x_0) = c$. □

Esimerkki. (Bolzanon lause)

$$f(x) = 6x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 6.$$

Koska

$$f(0) = -6 < 0 < 1 = f(1),$$

on välillä $]0,1[$ vähintään yksi x_0 siten, että $f(x_0) = 0$. Etsitään nollakohta tarkkuudella $0,1$.

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{78}{16} < 0\,, \quad \text{joten nollakohta löytyy väliltä } \left[\frac{1}{2}, 1\right] \\
f\left(\frac{3}{4}\right) &= -\frac{786}{256} < 0\,, \quad \text{joten nollakohta löytyy väliltä } \left[\frac{3}{4}, 1\right] \\
f\left(\frac{7}{8}\right) &= -\frac{5802}{4096} < 0\,, \quad \text{joten nollakohta löytyy väliltä } \left[\frac{7}{8}, 1\right] \\
f\left(\frac{15}{16}\right) &= -\frac{10\,413}{32\,768} < 0\,, \quad \text{joten nollakohta löytyy väliltä } \left[\frac{15}{16}, 1\right].
\end{aligned}$$

Koska $1 - \frac{15}{16} = \frac{1}{16} < 0,1$, on haluttu tarkkuus saavutettu. Tarkemmin $x_0 \approx 0,953624$.

Huomautus. Supremumin ja infimumin olemassaolo on yhtäpitävä sisäkkäisten välien periaatteen kanssa.

Lauseen 3.9 todistus. (Sisäkkäisten välien periaate)
Olkoon $a_0 \in A$ ja b_0 jokin A:n yläraja. Jos on olemassa $\sup A$, niin se on välillä $I_0 := [a_0, b_0]$. Olkoon $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$ (välin I_0 keskipiste).

1) Jos c_0 on A:n yläraja, niin valitaan $a_1 = a_0$ ja $b_1 = c_0$.
2) Jos c_0 ei ole A:n yläraja, niin välillä I_0 on ainakin yksi $a_1 \in A$ siten, että $a_1 > c_0$. Valitaan sellainen $a_1 \in A$ ja olkoon $b_1 = b_0$.

Molemmissa tapauksissa tutkitaan väliä $[a_1, b_1]$. Nyt

$$[a_1, b_1] = I_1 \subset I_0,$$

$$|I_1| \leq \frac{1}{2}|I_0| = \frac{b_0 - a_0}{2},$$

$a_1 \in A$ ja b_1 on A:n yläraja.

Jatketaan (samaan tapaan) eteenpäin: Jos väli $I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$ on valittu, niin olkoon $c_{n-1} = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$. Kuten yllä, jos c_{n-1} on A:n yläraja, niin valitaan $a_n = a_{n-1}$ ja $b_n = c_{n-1}$. Jos taas c_{n-1} ei ole A:n yläraja, niin välillä I_{n-1} on ainakin yksi $a_n \in A$ siten, että $a_n \geq c_{n-1}$. Valitaan sellainen $a_n \in A$ ja olkoon silloin $b_n = b_{n-1}$.

Näin löydetään jono välejä

$$I_n = [a_n, b_n] \subset I_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}] \subset \cdots \subset I_0, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

missä b_n on joukon A yläraja, $a_n \in A$, ja

$$b_n - a_n \leq \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} \leq 2^{-n}(b_0 - a_0) \to 0.$$

Sisäkkäisten välien periaatteen mukaan on olemassa $x_0 \in \mathbf{R}$ siten, että

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Väite. $x_0 = \sup A$.
Todistus.
1) x_0 on A:n yläraja. Olkoon $a \in A$ ja $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Valitaan n siten, että

$$2^{-n}(b_0 - a_0) < \varepsilon,$$

jolloin

$$x_0 + \varepsilon > x_0 + 2^{-n}(b_0 - a_0) \geq a_n + 2^{-n}(b_0 - a_0) \geq b_n \geq a,$$

eli

$$a \leq x_0 + \varepsilon \quad \text{kaikilla } \varepsilon > 0.$$

Niinpä Lauseen 1.2 nojalla $a \leq x_0$.
2) x_0 on pienin yläraja. Olkoon $\mathcal{Y}$ mielivaltainen A:n yläraja, jolloin $\mathcal{Y} \geq a_n$ kaikilla n. Kun $\varepsilon > 0$, valitaan $n \in \mathbf{N}$ siten, että

$$2^{-n}(b_0 - a_0) < \varepsilon.$$

Silloin

$$x_0 \leq b_n \leq a_n + (2^{-n}(b_0 - a_0)) < a_n + \varepsilon \leq \mathcal{Y} + \varepsilon.$$

Niinpä $x_0 \leq \mathcal{Y} + \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$, siis $x_0 \leq \mathcal{Y}$. Siispä $x_0 = \sup A$. $\square$

Huomautus. Infimumin olemassaolon voi todistaa samoin tai soveltamalla lausetta 3.9 joukkoon

$$-A = \{x \in \mathbf{R} \colon -x \in A\},$$

sillä

$$\inf A = -\sup(-A) \quad \text{ja} \quad \sup A = -\inf(-A)\,.$$

3.10. Lause. *Olkoon M joukon $A \in \mathbf{R}$ ($A \neq \emptyset$) joku yläraja. Tällöin $M = \sup A$, jos, ja vain jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on $a \in A$ siten, että $a \geq M - \varepsilon$.*

Todistus. ("$\Rightarrow$") Antiteesi: on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $a < M - \varepsilon$ kaikilla $a \in A$. Silloin $M - \varepsilon$ on joukon A yläraja, jolle $M - \varepsilon < M = \sup A$. Tämä on kuitenkin ristiriidassa supremumin (pienin yläraja) määritelmän kanssa. $\boxslash$

("$\Leftarrow$") Olkoon kaikilla $\varepsilon > 0$ olemassa $a \in A$, jolle $M - \varepsilon \leq a$. Väite: $M = \sup A$. Olkoon $\mathcal{Y}$ joukon A yläraja. On siis olemassa $a \in A$ siten, että

$$M - \varepsilon \leq a \leq \mathcal{Y},$$

toisin sanoen

$$\mathcal{Y} + \varepsilon \geq M \quad \text{kaikilla } \varepsilon > 0.$$

Lauseen 1.2 nojalla $\mathcal{Y} \geq M$, joten $M = \sup A$. $\square$

3.11. Lause. *Olkoon* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *aidosti kasvava ja jatkuva. Tällöin* $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ *on bijektio ja käänteiskuvaus* $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ *on myös jatkuva.*

Todistus.
1) Osoitetaan ensiksi, että f on surjektio $[f(a), f(b)]$:lle eli

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)].$$

Koska f on kasvava, niin

$$f(a) \leq f(x) \leq f(b) \quad \text{kaikilla } x \in [a, b]$$

eli

$$f([a, b]) \subset [f(a), f(b)].$$

Toisaalta, jos $c \in [f(a), f(b)]$, niin Bolzanon lauseen nojalla on olemassa $x_0 \in [a, b]$ siten, että $f(x_0) = c$. Siten

$$f([a, b]) \subset [f(a), f(b)].$$

Siispä f on surjektio $[f(a), f(b)]$:lle.
2) Koska f on aidosti kasvava, on se Lauseen 2.4 nojalla injektio.
3) Koska $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ on sekä surjektio että injektio, on se bijektio.
4) Varsinainen väite: $f^{-1}[f(a), f(b)] \to [a, b]$ on jatkuva.
Olkoon $y_0 \in]f(a), f(b)[$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska

$$a < x_0 = f^{-1}(y_0) < b,$$

voidaan olettaa, että

$$a < x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon < b.$$

Valitaan x_1 ja x_2 siten, että

$$x_0 - \varepsilon < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \varepsilon.$$

Olkoot $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ ja $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$. Koska f on aidosti kasvava, on

$$y_1 < y_0 < y_2.$$

Koska myös f^{-1} on (Lauseen 2.4 nojalla) aidosti kasvava, niin

$$f^{-1}([y_1, y_2]) \subset [f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)] = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

Valitaan $\delta = \min(y_2 - y_0, y_0 - y_1) > 0$. Nyt jos $y \in [f(a), f(b)]$ siten, että $|y - y_0| < \delta$, niin

$$|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq \begin{cases} x_2 - x_0 < x_0 + \varepsilon - x_0 = \varepsilon\,, & \text{jos } y_0 \leq y < y_0 + \delta \leq y_2 \\ x_0 - x_1 < x_0 - (x_0 - \varepsilon) = \varepsilon\,, & \text{jos } y_1 \leq y_0 - \delta < y \leq y_0\,. \end{cases}$$

Siispä f^{-1} on jatkuva pisteessä y_0.
Tapaukset $y_0 = f(a)$ ja $y_0 = f(b)$ vaativat pienen (teknisen) muutokseen, mutta menevät lähes samoin (HT). $\square$

3.12. Seuraus. *Rationaalipotenssit ja rationaalijuuret $x \to x^q$, $q \in \mathbf{Q}$, ovat jatkuvia, kun $x > 0$.*

Määritelmä. Olkoon $f : A \to \mathbf{R}$. Sanotaan, että f on *rajoitettu* joukossa A, jos on olemassa $M \in \mathbf{R}$ siten, että

$$|f(x)| \leq M \quad \text{kaikilla } x \in A.$$

Huomautus. f on rajoitettu A:ssa $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f(A)$ on rajoitettu (HT).

3.13. Lause. *Suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ on rajoitettu.*

Todistus. **Antiteesi**: f ei ole rajoitettu.
Jaetaan väli $I_0 = [a,b]$ kahtia, keskipisteenä $c_0 = \frac{a+b}{2}$. Koska f ei ole rajoitettu välillä I_0, niin se ei ole rajoitettu vähintään toisella osaväleistä $[a, c_0]$ ja $[c_0, b]$. Merkitään sellaista väliä $I_1 = [a_1, b_1]$:llä. ($a_1 = a_1$ ja $b_1 = c_0$ tai $a_1 = c_0$ ja $b_1 = b_1$.)
Näin jatkettaessa saadaan vähenevä sisäkkäinen jono suljettuja välejä $I_n := [a_n, b_n]$ siten, että

$$[a,b] \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots,$$

$$|I_n| \leq \frac{1}{2}|I_{n-1}| = 2^{-n}|I_0| = 2^{-n}(b-a) \to 0$$

(eli välien pituus $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a) \to 0$) ja f **ei** ole rajoitettu välillä I_n kaikilla $n \in \mathbf{N}$. Siispä sisäkkäisten välien periaatteen nojalla on olemassa $x_0 \in [a,b]$ siten, että

$$\{x_0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Lauseen 3.1 nojalla on olemassa $\delta > 0$ ja $M > 0$ siten, että

$$|f(x)| \leq M \quad \text{kaikilla }]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap [a,b] = I_0.$$

Koska $\underbrace{|I_n|}_{b_n - a_n} \to 0$, niin on olemassa indeksi n (esim. kun $2^{2-n} < \frac{\delta}{b-a}$), jolle

$$I_n \subset]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap I_0 .$$

Siispä $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in I_n$. Tämä ei voi olla mahdollista, koska f ei ollut rajoitettu välillä I_n. Näin ollen antiteesi johti ristiriitaan ja lause on todistettu.
□

Huomautus. Lauseessa 3.13 on oleellista että tarkasteltava väli on suljettu; se ei päde puoliavoimilla tai avoimilla väleillä eikä rajoittamattomilla väleillä. Esim.

$$f :]0, \infty[\to \mathbf{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x} + x.$$

ei ole rajoitettu väleillä $]0,1]$, $]0,1[$ tai $[1, \infty[$.

3.14. Lause. *Suljetulla välillä jatkuva funktio $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ saa suurimman ja pienimmän arvonsa. Toisin sanoen on olemassa $x_0, x_1 \in [a,b]$ siten, että*

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0) \quad \textit{kaikilla } x \in [a,b].$$

Siis

$$\begin{aligned} f(x_0) &= \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ &= \max\{f(x) : x \in [a,b]\} \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} f(x_1) &= \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ &= \min\{f(x) : x \in [a,b]\}. \end{aligned}$$

Todistus. Lauseen 3.13 perusteella f on rajoitettu. Olkoon

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \in \mathbf{R}\,.$$

Antiteesi: $M > f(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$.
Olkoon

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}\,.$$

Tällöin funktio $g : [a,b] \to [0,\infty]$ on jatkuva, joten se on rajoitettu Lauseen 3.13 nojalla. Toisin sanoen on olemassa $\widetilde{M} > 0$ siten, että

$$g(x) \leq \widetilde{M} \quad \text{kaikilla } x \in [a,b].$$

Näin ollen

$$0 < g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leq \widetilde{M}$$

eli

$$\frac{1}{\widetilde{M}} \leq M - f(x),$$

eli

$$f(x) \leq \underbrace{M - \frac{1}{\widetilde{M}}}_{<M} \quad \text{kaikilla } x \in [a,b],$$

joten $M - \frac{1}{\widetilde{M}}$ on joukon $\{f(x) : x \in [a,b]\}$ yläraja. Siten

$$M > M - \frac{1}{\widetilde{M}} \geq \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} = M.$$

Tästä päädyimmekin selvään ristiriitaan!
(Pienimmän arvon olemassaolon voi todistaa soveltamalla tätä funktioon $-f$). $\square$

Huomautus. Lauseessa 3.14 on olennaista, että väli on suljettu! Katso esimerkkiä Lauseen 3.13. jälkeen.

3.15. Seuraus. *Suljetulla välillä* $[a, b] = I$ *jatkuvan funktion* f *kuvajoukko* $f(I)$ *on joko suljettu väli* $[c, d]$ *tai piste* $\{f(a)\}$ *(mikäli* f *on vakio).*

Todistus. Olkoon

$$m := \min\{f(x) : x \in I\} \text{ ja } M := \max\{f(x) : x \in I\}.$$

Jos f on vakio, niin $M = m$, jolloin $f(I)$ on yksiö eli $f(I) = \{m\}$ on piste.

Jos taas f ei ole vakio, on $m < M$. Edelleen tällöin $f(I) = [m, M]$: ensiksi, koska

$$m \leq f(x) \leq M \text{ kaikilla } x \in I\,,$$

pätee

$$f(I) \subset [m, M].$$

Toiseksi, Lauseen 3.14 nojalla on olemassa $x_0, x_1 \in I$ siten, että

$$f(x_0) = m$$
$$f(x_1) = M.$$

Jos $y \in [m, M]$, niin Bolzanon lauseen 3.7 mukaan on olemassa x_2, joka on x_0:n ja x_1:n välillä siten, että

$$f(x_2) = y,$$

toisin sanoen

$$f(I) \supset [m, M].$$

Siispä $f(I) = [m, M]$. □

4. Jonot

Tähän mennessä olemme tarkastelleet ns. *jatkuvan muuttujan* funktioita. Nyt siirrymme diskreetteihin muuttujiin, ts. tarkastelemme funktioita, jotka on määritelty (esim.) luonnollisten lukujen (osa)joukossa.

Funktiota $x\colon \mathbf{N} \to A$ sanotaan *(äärettömäksi) jonoksi* joukossa A; tässä A voi olla mv. joukko, vaikkakin se jatkossa on yleensä $\mathbf{R}$, joskus yleisemmin $\mathbf{R}^n$, $n = 2, 3, \dots$.

Käytännössä jonot kirjoitamme aina muodossa $x_n := x(n)$ ja jonon termit luetellaan alaindeksien kasvujärjestyksessä

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots .$$

Aina ei ole mukava määritellä jonoa *kaikilla* indekseillä $n \in \mathbf{N}$, joten käytämme jono-nimitystä myös $\mathbf{N}$:n äärettömillä osajoukoilla määritetyille funktioille. (Huomaa, että jos B on $\mathbf{N}$:n ääretön osajoukko eli siinä on äärettömän monta alkiota, niin on olmassa bijektio $b\colon B \to \mathbf{N}$.)

Usein kirjoitamme jonon myös muodossa (x_n).

Esim.

i) n ensimmäisen kokonaisluvun summa

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

antaa lukujonon

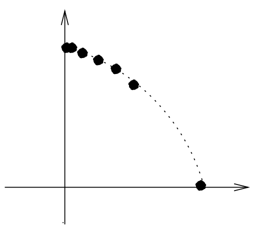
$$1, 3, 6, 10, 15, 21, \dots .$$

ii) Kaava $x_n = \frac{n-1}{n+1}$ määrittelee lukujonon

$$0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \dots$$

iii) Pistejono tasossa

$$x_n = (\frac{1}{n}, \frac{\sqrt{n^2-1}}{n})$$



Induktioperiaate on varsin hyödyllinen jonoja käsittelevien väitteiden todistamisessa.

Induktioperiaate. *Olkoon* $\emptyset \neq A \subset \mathbf{N}$. *Jos* $1 \in A$ *ja* $n+1 \in A$ *aina, kun* $n \in A$, *niin* $A = \mathbf{N}$.

Induktioperiaatteen nojalla väitteen todistamiseksi kaikilla $n \in \mathbf{N}$ riittää:

1. todistaa väite, kun $n = 1$
2. tehdä *induktio-oletus*: väite pätee, kun $n = k$, ja
3. todistaa väite induktio-oletuksen avulla, kun $n = k + 1$.

Siis induktioperiaatteessa esiintyvä joukko on

$$A = \{n \in \mathbf{N}\colon \text{ väite pätee } n : \text{lle}\}.$$

Esimerkki. (**Bernoullin epäyhtälö**) Olkoon $x > -1$ ja $n \in \mathbf{N}$. Tällöin

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Induktiolla ($n = 1$ OK): koska $1 + x > 0$

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \overset{ind.ol.}{\geq} (1+x)(1+kx) \\ &= 1 + x + kx + kx^2 \geq 1 + (k+1)x.\end{aligned}$$

Binomikaavan voi myös todistaa helposti induktiolla.

4.1. Lemma. (Binomikaava) *Olkoon* $a, b \geq 0$ *ja* $n \in \mathbf{N}$. *Tällöin*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\,,$$

missä

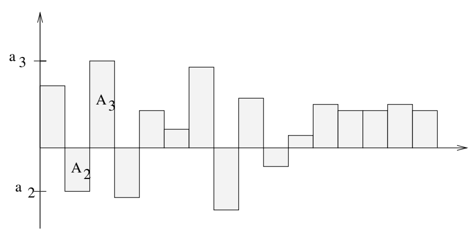
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

Todistus. HT. ks. esim. [Courant-John, s. 59]. □

Jonojen raja-arvot.

Matemaattinen analyysi perustuu raja-arvon käsitteelle, erityisesti jonon raja-arvoon. Usein jonoa a_n käytetään luvun a approksimoimiseen, jolloin ideana on se, että luku a voidaan halutulla tarkkuudella korvata luvulla a_n, kunhan on tehty tarpeeksi monta approksimaatiota $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (ts. alaindeksi n on tarpeeksi suuri). Luvun desimaalikehitelmä on eräs esimerkki tällaisesta approksimaatiosta (olkoon vaikka a_n luvun a desimaalikehitelmä n desimaalin tarkkuudella).

Tarkastellaan ensiksi raja-arvon käsitettä esimerkkien valossa ja muotoillaan sitten tarkka määritelmä. Huomaa, että joskus on kiva kuvata jonoa (a_n) xy-tason suorakaiteina: alkio a_n vastaa suorakaidetta $[n-1, n] \times A_n$, missä



$$A_n = \begin{cases} [0, a_n] & \text{jos } a_n \geq 0 \\ [a_n, 0] & \text{jos } a_n \leq 0. \end{cases}$$

Esimerkkejä.

1. $a_n = \frac{1}{n}$

Selvästikin a_n tulee lähemmäksi ja lähemmäksi nollaa n:n kasvaessa, vaikkakin kaikki termit ovat aidosti positiivisia. Sanotaan, että jono a_n *lähestyy* nollaa (tai sen *raja-arvo* on 0): merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{tai} \quad a_n \to 0.$$

Sama pätee *heilahtelevaan* (oskilloivaan) jonoon $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$,

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots,$$

jolloin $b_n \to 0$.

2. $a_{2m} = \frac{1}{m}$, $a_{2m-1} = \frac{1}{2m}$

Saamme jonon:

$$\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{\frac{n}{2}}, \ldots.$$

Tämänkin jonon raja-arvo on nolla, koska kuinka pieni 0:n sisältävä väli hyvänsä sisältää jonon a_n pisteet jostakin n alkaen. Kuitenkin jonossa parillisilla indekseillä a_n on kauempana 0:sta kuin edeltävä piste!

3. $a_n = \frac{n}{n+1}$

Tässä jono on muotoa:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, a_n = \frac{n}{n+1}, \ldots,$$

joka lähestyy kohti lukua 1, mikä havaitaan kaavasta

$$a_n = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

ts. a_n poikkeaa luvusta 1 ”virheen” $\frac{1}{n+1}$ verran, jonka edellä totesimme lähestyvän nollaa.

Sama ilmiö kohdataan jonossa

$$b_n = \frac{n^2-1}{n^2+n+1},$$

koska

$$b_n = \frac{n^2-1}{n^2+n+1} = 1 - \frac{n+2}{n^2+n+1} = 1 - r_n,$$

missä ”virhetermi” $r_n \to 0$: kun $n > 2$, niin

$$0 < r_n = \frac{n+2}{n^2+n+1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \to 0.$$

Tästä esimerkistä on syytä oppia, että osoittajassa ja nimittäjässä esiintyvistä potensseista suurimmat määräävät raja-arvon.

4. $a_n = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, missä $a > 0$.

Näytetään, että
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Käsitellään erikseen tapaukset $a > 1$ ja $a < 1$ (jos $a = 1$, on $a_n = 1$ kaikilla n eikä todistamista ole). Jos $a > 1$, on $a^{1/n} > 1$, joten voidaan kirjoittaa
$$a_n = a^{\frac{1}{n}} = 1 + b_n,$$
missä $b_n = a_n - 1 > 0$. Nyt Bernoullin epäyhtälön nojalla
$$a = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n$$
ja siis
$$0 < b_n \leq \frac{a-1}{n} \to 0.$$

Jos $a < 1$, on $b = \frac{1}{a} > 1$, joten edellisen nojalla
$$\frac{1}{a_n} = b^{\frac{1}{n}} \to 1.$$
Tällöin myös $a_n \to 1$ (tod. myöhemmin tarkasti).

5. $a_n = a^n$, missä $a \in \mathbf{R}$.

Olkoon ensiksi $0 < a < 1$. Tällöin $a_n \to 0$: kirjoitetaan a muodossa
$$a = \frac{1}{1+b},$$
missä $b > 0$ (itse asiassa $b = \frac{1}{a} - 1$, mikä ei ole tärkeää). Siten Bernoullin epäyhtälön nojalla
$$a_n = \frac{1}{(1+b)^n} \leq \frac{1}{1+nb} < \frac{1}{nb}.$$
Koska b ja siten $1/b$ riippuvat vain a:sta, $1/nb \to 0$, kun $n \to \infty$. Siis $a_n \to 0$, kun $0 < a < 1$. Samoin käy tietysti, kun $a = 0$. Edelleen, jos $-1 < a < 0$, on $0 < |a| < 1$ ja koska $|a|^n \to 0$, myös $a_n \to 0$.

Jos $a = 1$, on $a_n = 1^n = 1$ kaikilla n, joten $a_n \to 1$.

Jos $a > 1$, kirjoitamme $a = 1 + c$, missä $c > 0$. Bernoullin epäyhtälön nojalla
$$a_n = (1+c)^n \geq 1 + nc\,,$$
joka kasvaa rajatta (so. mitä hyvänsä ennalta annettua lukua suuremmaksi). Tällöin sanomme, että $a_n = a^n$ *lähestyy ääretöntä*, merkitään
$$\lim_{n\to\infty} a^n = \infty \quad \text{kun } a > 1.$$

Muista ∞ on vain symboli, ei luku!

Jos $a = -1$, jono $a_n = (-1)^n$ on

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots ,$$

mikä ei lähesty mitään lukua, vaan pomppii edes takaisin. Samoin käy, kun $a < -1$, jolloin a^n tulee itseisarvoltaan suuremmaksi ja suuremmaksi, mutta peräkkäiset luvut ovat eri merkkisiä. Näissä tapauksissa *raja-arvoa ei ole olemassa.*

6. Geometrinen sarja

Olkoon

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

n termin geometrinen summa, missä kahdella peräkkäisellä yhteenlaskettavalla on aina sama suhde q. On helppo todeta, että

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q},$$

kunhan $q \neq 1$ (jos $q = 1$ on $S_n = n$). Jos n kasvaa rajatta, niin

$$(*) \qquad S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q},$$

mikäli $-1 < q < 1$, koska tällöin $q^n \to 0$. Tällön sanotaan, että ääretön geometrinen sarja suppenee ja

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Jos $q \geq 1$ on $S_n \geq n \to \infty$. Jos $q = -1$, niin S_n:n arvot vuorottelevat:

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

eikä raja-arvoa ole. Jos $q < -1$, niin S_n:n arvot hyppelevät myös: kahden peräkkäisen arvon välinen etäisyys on

$$|q|^n \to \infty$$

eikä S_n:llä ole raja-arvoa.

Huomaa, että jos $q \in \mathbf{Q}$, $|q| < 1$, on myös qeometrisen sarjan summa rationaalinen. Tätä voi käyttää osoittamaan, että *jaksollinen desimaaliluku edustaa aina rationaalilukua.* Esim.

$$\begin{aligned}
0.123123123123\ldots &= \frac{123}{1000} + \frac{123}{1000^2} + \dots \\
&= \frac{123}{1000}\left(1 + \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000^2} + \frac{1}{1000^3} + \dots\right) \\
&= \frac{123}{1000}\frac{1}{1-\frac{1}{1000}} = \frac{123}{999} \\
&= \frac{41}{333}
\end{aligned}$$

7. $a_n = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}$

Saadaan siis jono

$$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, \dots,$$

ja näytetään, että

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1\,.$$

Kirjoitetaan taas $a_n = 1 + b_n$, missä $b_n \geq 0$, jolloin (binomikaavan nojalla) (kun $n \geq 2$)

$$\begin{aligned} n &= (a_n)^n = (1+b_n)^n \\ &\geq 1 + nb_n + \frac{n(n-1)}{2}b_n^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}b_n^2. \end{aligned}$$

Siis, kun $n > 1$, on

$$b_n^2 \leq \frac{2}{n-1}$$

ja siis

$$b_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}.$$

Tästä saadaan

$$1 \leq a_n = 1 + b_n \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}} \to 1.$$

Siis

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

8. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Tässä molemmat termit lähestyvät ääretöntä, joten erotus rajalla on formaalisti $\infty - \infty$, jolla ei ole sisältöä. Kuitenkin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0,$$

sillä

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \to 0.$$

9. $a_n = \frac{n}{a^n}$, missä $a > 1$.

Tässä taas raja-arvo näyttäisi olevan määräämätöntä muotoa $\frac{\infty}{\infty}$. Kuitenkin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0\,,$$

koska kirjoittamalla jälleen $a = 1 + b$, missä $b > 0$, saadaan binomikaavasta

$$(1+b)^n \geq 1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 \geq \frac{n(n-1)}{2}b^2,$$

joten

$$0 < a_n = \frac{n}{(1+b)^n} \leq \frac{2}{(n-1)b^2} \to 0\,.$$

10. $a_n = \frac{1}{\log(\log(\log(\log(n))))}$

Lukujono

$$a_n = \frac{1}{\log(\log(\log(\log(n))))}$$

lähenee nollaa, koska nimittäjä kasvaa rajatta, kun n kasvaa, vaikka sitä onkin laskimella vaikea havaita (Muista: log on eksponenttifunktion käänteisfunktio ja $e^n \to \infty$, joten myös $\log(n) \to \infty$). Esimerkiksi, kun $n = 10^{1000\,000}$, on

$$a_n \approx 1.0127.$$

Nyt olemme valmiit määrittelemään täsmällisesti, mitä jonon suppeneminen tarkoittaa:

Määritelmä. (*Suppeneminen, raja-arvo*)
Olkoon $x_1, x_2, \ldots$ jono reaalilukuja. Sanotaan, että jono (x_n) *suppenee (konvergoi)* kohti reaalilukua a, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa luku $N = N(\varepsilon, jono) \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } n \geq N.$$

Tällöin sanotaan, että a on jonon (x_n) *raja-arvo* ja merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{tai } x_n \to a \text{ kun } n \to \infty.$$

Huomautus. Jos jono (x_n) ei suppene kohti mitään reaalilukua a, sanotaan, että jono (x_n) *hajaantuu (divergoi)* tai jono on *hajaantuva.* (Vast. jos jono (x_n) suppenee kohti jotain $a \in \mathbf{R}$, on jono (x_n) *suppeneva.*)

Kuitenkin erikoistapauksessa kun jonon alkiot kasvavat tai vähenevät rajatta, niin sanotaan että jonon raja-arvo on ∞ tai $-\infty$, vaikka jono hajaantuukin yo. määritelmän nojalla. Siis:

Jonon (x_n) *raja-arvo on* ∞, jos kaikilla $M \in \mathbf{R}$ on N siten, että

$$x_n \geq M \text{ kaikilla } n \geq N.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

Vastaavasti, jonon (x_n) *raja-arvo on* $-\infty$, jos kaikilla $m \in \mathbf{R}$ on N siten, että

$$x_n \leq m \text{ kaikilla } n \geq N.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Huomautus. Olk. (x_n) jono. Tällöin $x_n \to a$ joss a jokainen ympäristö U sisältää kaikki paitsi ehkä äärellisen monta jonon (x_n) termeistä.

Edelleen, jos $x_n \to a$, niin jonosta (x_n) voidaan unohtaa kuinka monta termiä hyvänsä (kunhan jäljelle jää ∞ monta) ja jäljelle jääneiden termien muodostama jono suppenee myös kohti lukua a. Selvästikään *äärellisen monen* termin lisääminen tai poisottaminen ei vaikuta mitään suppenemiseen/hajaantumiseen.

4.2. Lemma. *Jonon raja-arvo (mikäli on olemassa) on yksikäsitteinen. Ts. jos*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \qquad \textit{ja } \lim_{n\to\infty} x_n = b,$$

niin $a = b$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ valitaan luvut N_a ja N_b siten, että

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n \geq N_a$$

ja

$$|x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } n \geq N_b.$$

Tällöin kaikilla $n \geq \max(N_a, N_b)$

$$|a - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

joten $|a - b| = 0$ ja siis $a = b$. $\square$

4.3. Lemma. *Suppeneva jono on rajoitettu. Ts. jos jono (x_n) suppenee, niin on olemassa luku $M > 0$, jolle*

$$|x_n| \leq M \ \textit{kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

Todistus. Olkoon $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Valitaan $\varepsilon = 1$ ja

$$M = \max\{|a|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\} + 1\,,$$

missä $N = N(\varepsilon = 1)$. Tällöin

$$|x_n| \leq M \text{ kaikilla } n \leq N$$

ja

$$|x_n| \leq |x_n - a| + |a| \leq 1 + |a| \leq M \text{ kaikilla } n \geq N\,.$$

$\square$

4.4. Lemma. *(Rationaalioperaatiot jonoille)*
Olkoot (x_n) ja (y_n) suppenevia jonoja ja

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \textit{ja} \lim_{n\to\infty} y_n = b.$$

Tällöin

i) *summajono $(x_n + y_n)$ suppenee ja*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b.$$

ii) *tulojono $(x_n y_n)$ suppenee ja*

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab.$$

iii) *jos $b \neq 0$, niin osamäärien jono $(\frac{x_n}{y_n})$ suppenee ja*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

Todistus. (vertaa Lauseen 3.2. todistus)
i)

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

kunhan $n \geq N = \max(N_{a,\frac{\varepsilon}{2}}, N_{b,\frac{\varepsilon}{2}})$.

ii) Havaitaan ensin:

$$|x_n y_n - ab| = |b(x_n - a) + x_n(y_n - b)| \leq |b||x_n - a| + |x_n||y_n - b|\,.$$

Nyt on $M > 0$, joka ei riipu n:stä s.e. $|x_n| \leq M$ (Lemma 4.3), joten

$$|x_n||y_n - b| \leq M|y_n - b|.$$

Siten

$$|x_n y_n - ab| \leq |b||x_n - a| + M|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

kunhan $n \geq N$ missä N on niin iso, että

$$|y_n - b| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \text{ja } |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2|b| + 2}$$

kaikilla $n \geq N$.

iii) Kirjoitetaan

$$|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b - y_n}{y_n b}|.$$

Jos $|y_n - b| \leq \frac{|b|}{2}$ (kuten on isoilla n), on

$$|y_n| \geq |b| - |y_n - b| \geq \frac{|b|}{2} > 0$$

ja siten (osamääräjono on määritelty! isoilla n ja) $|y_n b| \geq \frac{b^2}{2}$. Siis valitsemalla N niin iso, että

$$|y_n - b| \leq \frac{|b|}{2} \quad \text{ja } |y_n - b| \leq \frac{b^2\varepsilon}{2}$$

kaikilla $n \geq N$, saadaan

$$|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}| = |\frac{b - y_n}{y_n b}| \leq \frac{2|b - y_n|}{b^2} < \varepsilon,$$

ts.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b}.$$

Väite seuraa kohdasta ii). $\square$

Huomautuksia.

i) Jos $x_n \to a$ ja jono (y_n) hajaantuu niin summajono $(x_n + y_n)$ hajaantuu. Syy:

$$y_n = (x_n + y_n) - x_n \to d - a,$$

mikäli $x_n + y_n \to d$. Tulojono hajaantuu myös, mikäli $a \neq 0$, koska tällöin

$$y_n = x_n y_n \frac{1}{x_n} \to ac,$$

mikäli $x_n y_n \to c$.

ii) Mikäli jonot (x_n) ja (y_n) hajaantuvat, voi summajono $(x_n + y_n)$ tai tulojono $(x_n y_n)$ silti supeta, esim. $x_n = (-1)^n$ ja $(y_n) = (-1)^{n+1}$, jolloin

$$x_n + y_n = 0 \to 0 \quad \text{ ja } x_n y_n = -1 \to -1\,.$$

Esim.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + n + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1\,.$$

4.5. Lause. (Suppiloperiaate) *Olkoot (x_n), (y_n) ja (z_n) reaalilukujonoja siten, että*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \quad \textit{kaikilla } n \in \mathbf{N}.$$

Jos jonot (x_n) ja (z_n) suppenevat kohti samaa pistettä,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n\,,$$

niin myös jono (y_n) suppenee kohti tätä samaa pistettä,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a\,.$$

Todistus. Koska $x_n \leq y_n \leq z_n$, on

$$|y_n - a| \leq |x_n - a| + |z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

kunhan $n \geq \max\big(N(\frac{\varepsilon}{2}, (x_n)), N(\frac{\varepsilon}{2}, (z_n))\big)$. $\square$

Konvergenssikriteerioita.

On usein erittäin tärkeää tietää, että jono suppenee, vaikkakaan sen raja-arvoa ei osattaisi heti määrittää. Näin käy mm. monissa sovellutuksissa, jossa jotain tuntematonta lukua pyritään approksimoimaan. Mikäli approksimoiva jono ei suppene, on koko prosessi mieletön.

Suppeneva jono x_n *määrittelee* luvun a, jonon raja-arvon. Näin määritellään esimerkiksi Neperin luku

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n .$$

Jonon suppenemisen määritelmässä edellytetään, että raja-arvo tunnetaan, jotta voitaisiin tietää jonon suppenevan. Seuraavaksi kehitetään *sisäisiä* testejä, joiden avulla voidaan jonosta itsestään päätellä suppeneeko se (vaikka raja-arvoa ei pystyttäisikään määräämään).

Määritelmä. (*Monotoninen jono*)
Jono (x_n) on *monotoninen*, jos se on joko

- *kasvava* (*nouseva*), ts. $x_n \leq x_{n+1}$ kaikilla n, tai
- *vähenevä* (*laskeva*), ts. $x_n \geq x_{n+1}$ kaikilla n.

Muista: Jono x_n on *ylhäältä rajoitettu*, jos on $M \in \mathbf{R}$ s.e. $x_n \leq M$ kaikilla n.
Jono x_n on *alhaalta rajoitettu*, jos on $m \in \mathbf{R}$ s.e. $x_n \geq m$ kaikilla n.
Jono x_n on *rajoitettu*, jos on $M \in \mathbf{R}$ s.e. $|x_n| \leq M$ kaikilla n.

4.6. Lause. *Ylhäältä rajoitettu, kasvava jono on suppeneva, ts. jos x_n on ylhäältä rajoitettu, nouseva jono, niin on olemassa $a \in \mathbf{R}$ s.e.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a .$$

Todistus. Olkoon $a = \sup\{x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots\}$ (Lauseen 3.9. nojalla $a \in \mathbf{R}$!). Osoitetaan, että a on etsitty raja-arvo: Olkoon $\varepsilon > 0$. Lauseen 3.10 nojalla on $n_0 \in \mathbf{N}$ siten, että

$$x_{n_0} > a - \varepsilon .$$

Koska jono x_n on kasvava, on kaikilla $n \geq n_0$

$$|x_n - a| = a - x_n \leq a - x_{n_0} < a - (a - \varepsilon) = \varepsilon$$

ja siten

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a .$$

□

4.7. Seuraus. *Rajoitettu monotoninen jono on suppeneva.*

Huomautus. Rajoitetun monotonisen jonon suppeneminen (Seuraus 4.7) on yhtäpitävä sisäkkäisten välien periaatteen kanssa ja edelleen yhtäpitävää rajoitetun joukon supremumin ja infimumin olemassaolon kanssa.

Esimerkki. Raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

on olemassa: Olkoon $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$. Tällöin jono x_n on nouseva, koska

$$\begin{aligned}
\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = (1+\frac{1}{n})\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \\
&= (1+\frac{1}{n})\left(\frac{n(n+1+1)}{(n+1)(n+1)}\right)^{n+1} \\
&= (1+\frac{1}{n})\left(\frac{(n+1)(n+1)+n-(n+1)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&= (1+\frac{1}{n})\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\
&\overset{Bernoulli}{\geq} (1+\frac{1}{n})(1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2}) \\
&= (1+\frac{1}{n})(1-\frac{1}{(n+1)}) \\
&= \frac{n+1}{n}\frac{n+1-1}{n+1} = 1\,.
\end{aligned}$$

Osoitetaan lisäksi, että jono x_n on ylhäältä rajoitettu. Tätä varten tarvitsemme tietoa, että myös jono

$$y_n = (1-\frac{1}{n})^n$$

on kasvava (tämä nähdään samanlaisella laskulla kuin jonon x_n kasvavuus, HT). Nyt kaikilla $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
x_n = (1+\frac{1}{n})^n &= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}(1-\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})\right)^n \\
&= \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}(1-\frac{1}{n^2})\right)^n \leq \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}}\right)^n \\
&= \frac{1}{y_n} \leq \frac{1}{y_2} \\
&= 4\,,
\end{aligned}$$

sillä

$$1-\frac{1}{n^2} \leq 1$$

ja jono y_n oli kasvava. Siis jono x_n on monotonisena rajoitettuna jonona suppeneva ja siis Neperin luku

$$e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

on olemassa.

Huom. Voidaan myös kohtuullisen helposti osoittaa (HT), että

$$e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots .$$

Lemmassa 4.3 näytettiin, että suppeneva jono on rajoitettu. Käänteinen ei aivan päde, mutta hetken kuluttua todistamme, että rajoitettu jono sisältää aina suppenevan jonon. Sitä varten:

Määritelmä. (*Osajono*)
Olkoon (x_n) reaalilukujono $n \in \mathbf{N}$. Jono (y_k), $k \in \mathbf{N}$ on jonon (x_n) *osajono*, jos on olemassa kasvava jono luonnollisia lukuja $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ s.e.

$$y_k = x_{n_k} \text{ kaikilla } k \in \mathbf{N},$$

ts.

$$y_1 = x_{n_1},\ y_2 = x_{n_2},\ y_3 = x_{n_3}, \dots .$$

Siis osajono saadaan alkuperäisestä jonosta (x_n) jättämällä välistä pisteitä pois ja indeksoimalla jonon alkiot uudelleen. Yleensä jonon (x_n) osajonoa merkitään (x_{n_j}):llä.

Huomautus. Jos jono (x_n) suppenee, niin sen jokainen osajono suppenee (HT).

4.8. Lause. (Bolzano-Weierstrass) *Rajoitetulla reaalilukujonolla on aina suppeneva osajono.*

Todistus. **Tapa 1. (jonot)**: Olkoon (x_n) rajoitettu jono. Olkoon

$$a_k = \sup\{x_n : n \geq k\} = \sup\{x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots\}.$$

Tällöin a_k on vähenevä, rajoitettu jono, joten se suppenee. Olkoon

$$a = \lim_{k\to\infty} a_k.$$

Valitettavasti a_k ei ole aina x_n:n osajono, mutta sitä hieman muovaamalla löydämme halutun osajonon. Olkoon $n_1 \in \mathbf{N}$ sellainen indeksi, jolle

$$x_{n_1} \geq a_1 - \frac{1}{1} = a_1 - 1.$$

Tällainen on olemassa (Lause 3.10). Jatketaan: olkoon $n_{k+1} \in \mathbf{N}$ sellainen indeksi, jolle $n_{k+1} \geq n_k + 1$ ja

$$x_{n_{k+1}} \geq a_{n_k+1} - \frac{1}{k+1}.$$

Tällainen on olemassa (Lause 3.10). Nyt saadulle osajonolle (x_{n_k}) pätee:

$$a_{n_k+1} - \frac{1}{k+1} \leq x_{n_{k+1}} \leq a_{n_k+1}$$

kaikilla $k \in \mathbf{N}$. Koska epäyhtälön molemmat laidat suppenevat kohti lukua a, seuraa suppiloperiaatteesta (Lause 4.5), että myös $x_{n_k} \to a$. $\square_{\text{Tapa 1}}$

Tapa 2. (metsästys/sisäkkäisten välien periaate): Koska jono (x_n) on rajoitettu, on olemassa sellainen väli $[a,b]$, joka sisältää kaikki jonon pisteet, $x_n \in [a,b]$ kaikilla n.

Olkoon $c_0 = \frac{a+b}{2}$ välin $[a,b]$ keskipiste. Nyt ainakin toinen väleistä $[a,c_0]$ ja $[c_0,b]$ sisältää ∞ monta jonon (x_n) alkiota. Valitaan se (siis sellainen väleistä, joka sisältää ∞ monta jonon (x_n) alkiota) ja merkitään sitä $I_1 = [a_1,b_1]$.

Jatketaan samaan malliin: olkoon c_n välin $I_k = [a_k,b_k]$ keskipiste. ts.

$$c_k = \frac{a_k + b_k}{2},$$

ja valitaan $I_{k+1} = [a_{k+1},b_{k+1}]$ siten, että $I_{k+1} = [a_k,c_k]$ tai $I_{k+1} = [c_k,b_k]$ ja I_{k+1} sisältää ∞ monta jonon (x_n) alkiota.

Koska

$$|I_k| = b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} = \dots 2^{-k}(b-a) \to 0,$$

seuraa sisäkkäisten välien periaatteesta, että

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{x_0\}$$

jollakin $x_0 \in [a,b]$.

Valitaan osajono: Valitaan $n_1 \in \mathbf{N}$ s.e. $x_{n_1} \in I_1$ ja induktiivisesti $n_{j+1} \in \mathbf{N}$ s.e. $n_{j+1} > n_j$ ja $x_{n_{j+1}} \in I_{j+1}$, $j = 1,2,\dots$ (tämä on mahdollista, koska jokainen I_j sisältää ∞ monta jonon (x_n) alkiota). Nyt

$$x_{n_j} \to x_0 ,$$

koska

$$|x_{n_j} - x_0| \le 2^{-j}(b-a) \to 0 ,$$

joten (x_{n_j}) on etsitty osajono. $\square$

Esimerkki. Olkoon

$$x_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n}) .$$

Tällöin jono (x_n) on rajoitettu, $-1 \le x_n \le 1$, ja sillä on suppenevia osajonoja, esimerkiksi

$$x_{n_j} = (-1)^{2j}(1 - \frac{1}{2j}) \to 1 \qquad \text{(parilliset indeksit)}$$

ja

$$x_{n_j} = (-1)^{2j-1}(1 - \frac{1}{2j-1}) \to -1. \qquad \text{(parittomat indeksit)}$$

Seuraavaksi muotoilemme erään tärkeimmistä konvergenssikriteerioista.

Määritelmä. (*Cauchy-jono*)
Jono (x_n) on *Cauchy-jono*, jos kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{kaikilla } m,n \ge N .$$

Siis jono on Cauchy, mikäli sen häntä saadaan aina puristetuksi halutun pienelle välille.

4.9. Lause. (Cauchyn suppenemiskriteerio)
Olkoon (x_n) *reaalilukujono. Tällöin* (x_n) *suppenee (kohti jotain lukua* $a \in \mathbf{R}$*), jos ja vain, jos* (x_n) *on Cauchy-jono.*

Huomautus. Cauchyn suppenemiskriteerio ei anna mitään keinoa löytää jonon raja-arvoa.

Todistus. $\Rightarrow$: Olkoon $x_n \to a$. Osoitetaan, että (x_n) on Cauchy-jono. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $N \in \mathbf{N}$ s.e.

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kaikilla } n \geq N\,.$$

Tällöin, jos $n, m \geq N$, on

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

joten (x_n) on Cauchy-jono.

$\Leftarrow$: Olkoon sitten (x_n) Cauchy-jono. Osoitetaan, että se suppenee kohti jotain reaalilukua a.

Osoitetaan ensin, että jono (x_n) on rajoitettu: Lukua $\varepsilon = 1$ vastaa $N \in \mathbf{N}$ s.e.

$$|x_n - x_m| < \varepsilon = 1 \quad \text{kaikilla } m, n \geq N\,.$$

Siten kaikilla $n \geq N$

$$|x_n| \leq |x_N| + |x_n - x_N| \leq |x_N| + 1,$$

joten

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\} + 1 \text{ kaikilla } n \in \mathbf{N}\,,$$

ts. jono (x_n) on rajoitettu.

Koska (x_n) on Cauchy-jono, on $N_0 \in \mathbf{N}$ s.e.

$$|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{kaikilla } m, n \geq N_0\,.$$

Edelleen, jonolla (x_n) on Bolzano-Weierstrassin lauseen (4.8) nojalla suppeneva osajono (x_{n_j}), ts. on olemassa $a \in \mathbf{R}$ s.e. kaikilla $\varepsilon > 0$ on $J \in \mathbf{N}$, jolle $n_J \geq N_0$ ja

$$|x_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kunhan } j \geq J\,.$$

Siten, kaikilla $n \geq n_J$

$$|x_n - a| \leq |x_{n_J} - a| + |x_n - x_{n_J}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

eli

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a\,.$$

$\square$

5. Funktiot ja raja-arvot

Seuraavaksi tutkimme raja-arvon käsitettä funktioiden yhteydessä. Aloitamme lauseella:

5.1. Lause. (Jonot ja jatkuvuus) *Olkoot I väli, $x_0 \in I$ ja $f\colon I \to \mathbf{R}$. Tällöin f on jatkuva pisteessä x_0, jos ja vain, jos jokaisella jonolla (x_n), $x_n \in I$ ehdosta $x_n \to x_0$ seuraa, että $f(x_n) \to f(x_0)$.*

Todistus. $\Rightarrow$: Olkoon $x_n \to x_0$. ja $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\,, \text{ kun } |x - x_0| < \delta.$$

Tällöin on olemassa $N \in \mathbf{N}$ siten, että

$$|x_n - x_0| < \delta\,, \text{ kun } n \geq N.$$

Tällöin, kun $n \geq N$,

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon\,,$$

ts.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)\,.$$

$\Leftarrow$: **Antiteesi**: f epäjatkuva pisteessä x_0, ts. on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla $\delta > 0$ on olemassa $x = x(\delta) \in I$, jolle $|x - x_0| < \delta$ ja

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\,.$$

Valitaan kaikilla $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$, edellä mainittu $x(\delta)$ ja merkitään $x_n = x(\frac{1}{n})$. Tällöin $x_n \to x_0$, mutta

$$|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon \text{ kaikilla } n \in \mathbf{N}\,,$$

mikä on ristiriita oletuksen kanssa. □

Määritelmä. (*Funktion raja-arvo*)
Sanotaan, että luku $a \in \mathbf{R}$ on funktion f *raja-arvo* pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a\,,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

Huomautuksia. i) f:n ei tarvitse olla määritelty lainkaan pisteessä x_0. Muutoinkin ehto $|f(x) - a| < \varepsilon$ tarkistetaan vain niillä x, joilla f on määritelty.

ii) Merkitään myös $f(x) \to a$ kun $x \to x_0$, kun tarkoitetaan, että

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a\,.$$

iii) Funktion raja-arvo on yksikäsitteisesti määrätty, ts. jos

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \text{ ja } \lim_{x\to x_0} f(x) = b\,,$$

niin $a = b$ – tämä todistetaan aivan kuten jonoille (Lemma 4.2).

Seuraava tärkeä havainto seuraa suoraan määritelmistä.

5.2. Lause. (raja-arvot ja jatkuvuus) *Olkoot I väli, $x_0 \in I$ ja $f\colon I \to \mathbf{R}$. Tällöin f on jatkuva pisteessä x_0, jos ja vain, jos f:llä on raja-arvo pisteessä x_0 ja*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,.$$

Huomautus. Lauseen 5.2 nojalla funktio f voidaan *määritellä* pisteessä x_0 siten, että f:stä tulee siinä jatkuva, jos ja vain, jos raja-arvo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

on olemassa. Tällöin asetetaan $f(x_0) := a$.

Monet jonojen raja-arvojen ominaisuudet ovat voimassa funktion raja-arvolle, lähes samoin todistuksin. Esimerkiksi,

5.3. Lemma. *Olkoot f:llä ja g:llä raja-arvot pisteessä x_0,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \mathbf{R} \text{ ja } \lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \mathbf{R}.$$

Tällöin

i) *f on rajoitettu pisteen x_0 ympäristössä, ts. on olemassa luvut $M > 0$ ja $\delta > 0$, joille*

$$|f(x)| \le M \text{ aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

ii) *Summafunktiolla $f + g$ on raja-arvo ja*

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = a + b\,.$$

iii) *Tulofunktiolla fg on raja-arvo ja*

$$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = ab.$$

iv) *Jos $b \ne 0$, niin osamääräfunktiolla $\frac{f}{g}$ on raja-arvo ja*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{a}{b}.$$

Todistus. Kuten Lauseet 3.1 ja 3.2 tai Lemmat 4.3 ja 4.4. (HT!) □

Luvussa 3 näytettiin, että kahden jatkuvan funktion yhdistetty funktio on jatkuva. Tämän vastine raja-arvoille vaatii hieman tarkkuutta:

5.4. Lause. (Yhdistetyn funktion raja-arvo) *Olkoot f:llä raja-arvo pisteessä x_0,*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,,$$

ja olkoon g on määritelty jollakin välillä $]c,d[$ siten, että $a \in]c,d[$. Jos g on jatkuva pisteessä a, on yhdistetyllä funktiolla $g \circ f$ raja-arvo pisteessä x_0 ja

$$\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(a)\,.$$

Todistus. (vertaa lauseen 3.5 todistus) Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska g on jatkuva pisteessä a on $\delta_g > 0$, jolle

$$|g(y) - g(a)| < \varepsilon \text{ aina, kun } |y - a| < \delta_g\,.$$

Edellen, koska

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a\,,$$

on olemassa $\delta_f > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \delta_g \text{ aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta_f\,.$$

Siten, kun $0 < |x - x_0| < \delta_f$, on

$$|(g \circ f)(x) - g(a)| = |g(f(x)) - g(a)| < \varepsilon\,,$$

koska tällöin

$$|f(x) - a| < \delta_g\,.$$

$\square$

Huomautus. Jos Lauseessa 5.3 oletetaan g:n jatkuvuuden sijasta vain, että g:llä on raja-arvo pisteessä a, niin yhdistetyllä funktiolla $g \circ f$ ei välttämättä ole lainkaan raja-arvoa pisteessä x_0. Esimerkiksi, jos

$$g(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{jos } x \neq 0 \\ 0\,, & \text{jos } x = 0 \end{cases} \qquad \text{ja } f(x) = x \sin \frac{1}{x}\,,$$

niin

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \text{ ja } \lim_{x \to 0} g(x) = 0\,,$$

mutta yhdistetyllä funktiolla $g \circ f$ ei ole raja-arvoa pisteessä 0, koska se saa jokaisessa 0:n ympäristössä sekä arvon 0 että arvon 1.

Huomautus. Toki myös suppiloperiaate on voimassa ja se on hyvä muistaa myös funktioiden raja-arvoille: jos $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ kaikilla x "lähellä" x_0:aa ja jos f:n ja g raja-arvot ovat olemassa ja

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a = \lim_{x \to x_0} g(x)\,,$$

niin h:lla on myös raja-arvo ja

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = a\,.$$

Esimerkkejä. i) (*Monomin derivaatta*) Olkoon

$$f(x) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}\,, \quad x \neq x_0\,,$$

missä $n \in \mathbf{N}$. Tällöin

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = n x_0^{n-1}\,,$$

koska (induktio) kaikilla $x \neq x_0$

$$\begin{aligned}\frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots x x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ &\to x_0^{n-1} + x_0^{n-2}x_0 + \ldots x_0 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ &= n x_0^{n-1}\,.\end{aligned}$$

ii) (*Sinin derivaatta*) Ensiksi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

koska Lemman 2.11 nojalla

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}\,,$$

kun $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$ ja

$$\lim_{x \to 0} \cos x = \cos 0 = 1\,;$$

pidä suppiloperiaate mielessäsi.

Edelleen,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0\,,$$

koska

$$\begin{aligned}\frac{\cos x - 1}{x} &= \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= -\frac{\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\cos x + 1}\sin x \\ &\to -1\,\frac{1}{2}\,0 = 0\,.\end{aligned}$$

Näistä seuraa, että

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \cos x \frac{\sin h}{h} + \sin x \frac{\cos h - 1}{h} \\ &\to \cos x\,, \text{ kun } h \to 0\,.\end{aligned}$$

Siis $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.

Tasainen jatkuvuus.

Jatkuvuuden määritelmässä kiinnitetään ensin piste x_0, jonka jälkeen jokaiselle $\varepsilon > 0$ löydetään $\delta > 0$ (joka siis *yleensä riippuu pisteestä* x_0) siten, että

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ aina, kun } |x - x_0| < \delta \,.$$

Jos jokaiselle pisteelle x_0 annetussa joukossa A kelpaa *sama* $\varepsilon - \delta$ -pari, sanotaan funktiota f tasaisesti jatkuvaksi A:ssa.

Määritelmä. (*Tasainen jatkuvuus*)
Sanotaan, että funktio $f\colon A \to \mathbf{R}$ on *tasaisesti jatkuva joukossa* A, jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

aina, kun $x_1, x_2 \in A$ ovat siten, että $|x_1 - x_2| < \delta$.

Huomautuksia. i) Tasaisesti jatkuva funktio on jatkuva A:ssa.

ii) Jatkuva funktio ei välttämättä ole tasaisesti jatkuva (ks. esimerkkejä alla). Huomaa kuitenkin Lause 5.5 alla.

iii) Tasaista jatkuvuutta tarvitaan usein, erityisesti integraalilaskennassa.

Esimerkkejä. i) Olkoon $f\colon]0,1] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x} \,.$$

Tällöin f on jatkuva, mutta ei tasaisesti jatkuva $]0,1]$:llä. Syy: Valitaan $\varepsilon = 1$ ja olkoon $\delta > 0$ mv. Tarkastellaan lukuja

$$x_1 = \frac{1}{n} \text{ ja } x_2 = \frac{1}{n+1} \,,$$

jolloin

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |n - (n+1)| = 1 \geq \varepsilon \,,$$

mutta

$$|x_1 - x_2| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}| = |\frac{1}{n(n+1)}| < \delta \,,$$

kun (esimerkiksi) $n > \frac{1}{\delta}$.

ii) Olkoon $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = x^2 \,.$$

Tällöin f on jatkuva, mutta ei tasaisesti jatkuva $\mathbf{R}$:llä. Lasketaan:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)| \\ &= |x_1 + x_2||x_1 - x_2| \,. \end{aligned}$$

Havaitaan, että, jos $|x_1|$ kasvaa ja x_2 pysyy vakioetäisyydellä x_1:stä, niin tekijä $|x_1 + x_2|$ kasvaa hallitsevaksi. Toisaalta, jos $|x_1|$ pysyy vakiorajan alapuolella, niin myös $|x_1 + x_2|$ pysyy vakiorajan alpuolella, koska

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \,.$$

Päättelemme: f on tasaisesti jatkuva jokaisella rajoitetulla välilä $[a,b]$, mutta f ei ole tasaisesti jatkuva koko $\mathbf{R}$:ssä (yksityiskohdat HT).

Tämä ilmiö on yleinen:

5.5. Lause. *Suljetulla välillä $I = [a, b]$ jatkuva funktio f on tasaisesti jatkuva I:ssä.*

Todistus. **Antiteesi:** f ei ole tasaisesti jatkuva, toisin sanoen, on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla $\delta > 0$ on sellaiset pisteet $x, z \in I$, joille

$$|f(x) - f(z)| \geq \varepsilon\,,$$

vaikka $|x - z| < \delta$. Erityisesti, kaikilla n (vlitaan yllä $\delta = \frac{1}{n}$) on pisteet $x_n, z_n \in I$ siten, että $|x_n - z_n| < \frac{1}{n}$ ja

$$|f(x_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon\,.$$

Bolzano-Weierstrassin lauseen (4.8) nojalla on olemassa jonon (x_n) osajono (jota merkitään edelleen (x_n):llä), joka suppenee kohti pistettä x_0. Tällöin $x_0 \in [a, b] = I$ ja, koska $|x_n - z_n| < \frac{1}{n}$, myös jonon (z_n) vastaava osajono suppenee kohti samaa lukua x_0. Koska f on jatkuva, on

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(z_n)$$

(Lause 5.1). Tämä on kuitenkin mahdotonta, sillä

$$|f(x_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon \text{ kaikilla } n \in \mathbf{N}\,.$$

Siis antiteesi on epätosi ja lause todistettu. □

Huomautus. Lausetta 5.5 edeltävien esimerkkien valossa välin I on edellä oltava sekä suljettu että rajoitettu muutoin väite ei yleisesti ole tosi.

Toispuoleiset raja-arvot.

Usein on hyödyllistä tarkastella funktioiden raja-arvoja *pitkin joukkoa* A, missä tarkasteluun otetaan vain f arvot joukossa A, ts. sanotaan, että luku $a \in \mathbf{R}$ on funktion f *raja-arvo pisteessä* x_0 *pitkin joukkoa* A, merkitään

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in A}} f(x) = a\,,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ aina, kun } x \in A \text{ ja } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

Tämä määritelmä on järkevä vain, jos joukko A on mielivaltaisen lähellä pistettä x_0, ts. jos on olemassa jono $x_n \in A$ siten, että $x_n \to x_0$.

Reaaliakselin funktioille tärkeät erikoistapaukset raja-arvoista pitkin jotain joukkoa ovat toispuoleiset raja-arvot (vasemmanpuoleinen raja-arvo saadaan valinnalla $A =]-\infty, x_0[$ ja oikeanpuoleinen raja-arvo valinnalla $A =]x_0, \infty[$).

Määritelmä. (*Toispuoleiset raja-arvot*)
Sanotaan, että luku $a \in \mathbf{R}$ on funktion f *oikeanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = a\,,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ aina, kun } 0 < x - x_0 < \delta\,.$$

Vastaavasti, luku $b \in \mathbf{R}$ on funktion f *vasemmanpuoleinen raja-arvo* pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = b\,,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ aina, kun } -\delta < x - x_0 < 0\,.$$

Seuraava lause on ilmeinen (todistus harjoitustehtävä).

5.6. Lause. *Funktiolla f:llä on raja-arvo a pisteessä x_0, jos ja vain, jos f:llä on sekä oikean- että vasemmanpuoleiset raja-arvot pisteessä x_0 ja*

$$\lim_{x \to x_0+} f(x) = a = \lim_{x \to x_0-} f(x)\,.$$

Raja-arvot äärettömyydessä ja ääretön raja-arvona.
Tähän mennessä olemme aina vaaatineet, että sekä tarkasteltavan rajapisteen x_0 että raja-arvon a on oltava reaalilukuja (siis äärellisiä!). On kuitenkin hyödyllistä puhua raja-arvoista äärettömyydessä ja äärettömästä raja-arvona, kun joko argumentti x tai arvo $f(x)$ kasvavat tai pienenevät yli kaikien rajojen.

Määritelmä. (*Raja-arvo ∞:ssä*)
Sanotaan, että luku $a \in \mathbf{R}$ on funktion f *raja-arvo* äärettömyydessä ∞ merkitään

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = a\,,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on luku $M > 0$ siten, että

$$|f(x) - a| < \varepsilon \text{ aina, kun } x > M\,.$$

Vastaavasti, määritellään: luku $b \in \mathbf{R}$ on funktion f *raja-arvo* negatiivisessa äärettömyydessä $-\infty$ merkitään

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b\,,$$

jos jokaisella $\varepsilon > 0$ on luku $M > 0$ siten, että

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ aina, kun } x < -M\,.$$

Edelleen määritellään

Määritelmä. (∞ *raja-arvona*)
Sanotaan, että funktion f *raja-arvo* pisteesä x_0 on *ääretön* merkitään

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty\,,$$

jos jokaisella $M > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) > M \text{ aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

Vastaavasti, funktion f *raja-arvo* pisteesä x_0 on $-\infty$, merkitään

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\,,$$

jos jokaisella $M > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) < -M \text{ aina, kun } 0 < |x - x_0| < \delta\,.$$

Huomautuksia. Symbolit ∞ ja $-\infty$ eivät ole lukuja eikä niitä voida manipuloida tavallisin laskutoimituksin.

Esimerkkejä. Funktio

$$f(x) = \frac{x}{x+1}\,, \quad x \neq -1\,.$$

on jatkuva paitsi pisteessä $x = -1$, missä sitä ei ole määriteltykään. Nyt

$$\lim_{x\to -1+} f(x) = -\infty \text{ ja } \lim_{x\to -1-} f(x) = \infty\,.$$

Näytetään oikeanpuoleinen raja-arvo: Olkoon $-1 < x < 0$. Tällöin

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1} < -M &\Leftrightarrow x < -M(x+1) \Leftrightarrow x(1+M) < -M \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{M}{M+1} = -1 + \frac{1}{M+1}\,.\end{aligned}$$

Toinen raja-arvo samoin.
Edelleen, jos

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}\,,$$

niin

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 1\,,$$

koska

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = \frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}} \to \frac{1+0}{1-0} = 1\,.$$

6. Paluu alkeisiin: eksponenttifunktiot ja logaritmit

Tässä luvussa määrittelemme eksponenttifunktiot täsmällisesti. Luvussa 4 näytimme Neperin luvun e olemassaolon,

$$e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n .$$

Rationaalisille $q \in \mathbf{Q}$ potenssin e^q määrittely sujui jo aiemmin kitkatta, nyt määrittelemme yleisen potenssin: jos $x \in \mathbf{R}$, niin

$$\exp(x) := e^x := \sup\{e^q \colon q \in \mathbf{Q} \text{ ja } q < x\} .$$

(Muista: kaikilla $x \in \mathbf{R}$: $x = \sup\{q < x \colon q \in \mathbf{Q}\}$.)

Huomautus. Määritelmä on järkevä, sillä se yhtyy jo tunnettuun e^x:n määritelmään, kun $x \in \mathbf{Q}$:

Ensiksi,

$$\exp(0) = 1 \ :$$

Koska $e > 1$, on $e^q < 1$ kaikilla $q \in \mathbf{Q}$, $q < 0$. Toisaalta, koska Bernoullin epäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{n} &= (1 - n\frac{1}{n^2}) \le (1 - \frac{1}{n^2})^n \\ &= (1 - \frac{1}{n})^n(1 + \frac{1}{n})^n \le 1 . \end{aligned}$$

Siten, koska $(1 + \frac{1}{n})^n \to e$, nähdään, että

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e} ;$$

koska tämä jono on nouseva (ks. 4.7:n jälkeinen esimerkki), saadaan

$$\frac{1}{e} \ge (1 - \frac{1}{n})^n = (\frac{n-1}{n})^n ,$$

joten

$$e^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} \ge \frac{n-1}{n} \to 1 .$$

Siis

$$\exp(0) = 1 .$$

Edelleen kaikilla $r \in \mathbf{Q}$:

$$\exp(r) := e^r \ :$$

syy

$$\begin{aligned} \exp(r) &= \sup\{e^q \colon q \in \mathbf{Q} \text{ ja } q < r\} \\ &= \sup\{e^q e^r \colon q \in \mathbf{Q} \text{ ja } q < 0\} \\ &= e^r \sup\{e^q \colon q \in \mathbf{Q} \text{ ja } q < 0\} \\ &= e^r \exp(0) \\ &= e^r . \end{aligned}$$

Määritelmästä seuraa heti, että eksponenttifunktio on kasvava. Lisäksi:

6.1. Lause. *Eksponenttifunktiolle pätee:*

i) $e^{x+y} = e^x e^y$ *kaikilla* $x, y \in \mathbf{R}$.
ii) $e^x > 0$ *kaikilla* $x \in \mathbf{R}$.
iii) *Eksponenttifunktio on jatkuva koko* $\mathbf{R}$*:ssä.*
iv) *Eksponenttifunktio on aidosti kasvava.*
v) $\exp(\mathbf{R}) =]0, \infty[$,

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \text{ ja } \lim_{x \to \infty} e^x = \infty\,.$$

Todistus.
i) : Olkoot $x, y \in \mathbf{R}$ ja $r \in \mathbf{Q}$, $r < x + y$. Valitaan $p, q \in \mathbf{Q}$ s.e.

$$p < x \quad q < y \quad \text{ja } p + q > r\,. \text{ (onnistuu!)}$$

Tällöin

$$e^r \le e^{p+q} = e^p e^q \le e^x e^y\,,$$

joten ottamalla sup yli kaikkien $r \in \mathbf{Q}$, joilla $r < x + y$, saadaan

$$e^{x+y} \le e^x e^y\,.$$

Toisaalta kaikille $p, q \in \mathbf{Q}$, joilla $p < x$ ja $q < y$, on $p + q < x + y$; siten

$$e^p e^q = e^{p+q} \le e^{x+y}\,.$$

Siispä ottamalla supremum yli tällaisten p ja q saadaan

$$e^x e^y \le e^{x+y}$$

ja siten

$$e^{x+y} = e^x e^y\,.$$

$\square_i$

ii) : Selvä. $\square_{ii}$
iii) : Koska

$$\lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \text{ ja } \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}\,,$$

ja molemmat jonot ovat nousevia, saadaan

$$\frac{1}{n} \le e^{\frac{1}{n}} - 1 \le \frac{1}{n-1}\,.$$

Siten

$$\lim_{n \to \infty} e^{\frac{1}{n}} = 1\,,$$

joten myös

$$\lim_{n \to \infty} e^{-\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{n}}} = 1\,.$$

Nyt eksponenttifunktion kasvavuudesta seuraa, että

$$\lim_{x \to 0} e^x = 1 = e^0\,,$$

eli exp on jatkuva 0:ssa.

Edelleen, kohdan i) nojalla

$$\lim_{x\to x_0} e^x = \lim_{x\to x_0} e^{x-x_0}e^{x_0} = (\lim_{y\to 0} e^y)e^{x_0} = e^{x_0}\,,$$

eli exp on jatkuva pisteessä x_0. $\square_{iii}$

iv) : Osoitetaan ensiksi, että $e^{x_0} > 1$ kaikilla $x_0 > 0$. Jos olisi $x_0 > 0$ siten, että $e^{x_0} = 1$, niin kohdan i) nojalla

$$e^{kx_0} = (e^{x_0})^k = 1 \text{ kaikilla } k \in \mathbf{N}\,.$$

Erityisesti, kun valitaan $k \geq \frac{1}{x_0}$, saadaan kasvavuudesta

$$e = e^1 \leq (e^{x_0})^k = 1\,,$$

mikä on ristiriita. Siis $e^{x_0} > 1$ kaikilla $x_0 > 0$.

Nyt jos $x < y$, niin $y - x > 0$ ja siis

$$e^y = e^{y-x+x} = e^{y-x}e^x > e^x,.$$

$\square_{iv}$

v) : Tämä seuraa helposti eksponenttifunktion kasvavuudesta (ja ominaisuudesta i), sillä

$$e^n \geq 2^n \to \infty$$

ja

$$0 \leq e^{-n} = \frac{1}{e^n} \leq 2^{-n} \to -\infty\,.$$

Kuvajoukkoväite seuraa nyt Bolzanon lauseesta. $\square$

Koska logaritmifunktio log on eksponenttifunktion exp käänteisfunktio, seuraa seuraava lause 6.1:stä (ja 2.4:stä sekä 3.11:stä).

6.2. Lause. *Logaritmifunktiolle* $\log\colon]0,\infty[\to \mathbf{R}$ *pätee:*

i) $\log(xy) = \log x + \log x$ *kaikilla* $x, y \in \mathbf{R}$.
ii) *Logaritmifunktio on jatkuva koko* $\mathbf{R}$*:ssä.*
iii) *Logaritmifunktio on aidosti kasvava.*
iv) $\log(]0,\infty[) = \mathbf{R}$,

$$\lim_{x\to 0} \log x = -\infty \text{ ja } \lim_{x\to\infty} \log x = \infty\,.$$

Edelleen yleiselle eksponenttifunktiolle a^x, $a > 0$, ja a-kantaiselle logaritmille pätee seuraava lause, koska (miksi?)

$$a^x = e^{x\log a}$$

ja

$$^a\!\log x = \frac{\log x}{\log a}\,, \quad a \neq 1\,.$$

6.3. Lause. *Olkoon $a > 0$. Tällöin*

i) $a^{x+y} = a^x a^y$ *kaikilla* $x, y \in \mathbf{R}$.

ii) $a^x > 0$ *kaikilla* $x \in \mathbf{R}$.

iii) *Eksponenttifunktio* $x \mapsto a^x$ *on jatkuva koko* $\mathbf{R}$*:ssä.*

iv) *Eksponenttifunktio* $x \mapsto a^x$ *on aidosti kasvava, jos* $a > 1$ *ja aidosti vähenevä, jos* $0 < a < 1$.

v) $a^{(\mathbf{R})} = \{a^x : x \in \mathbf{R}\} =]0, \infty[$, *jos* $a \neq 1$.

Edelleen, jos $a \neq 1$

vi) ${}^a\log(xy) = {}^a\log x + {}^a\log y$ *kaikilla* $x, y \in \mathbf{R}$.

vii) *Logaritmifunktio* $x \mapsto {}^a\log x$ *on jatkuva koko* $\mathbf{R}$*:ssä.*

ix) *Logaritmifunktio* $x \mapsto {}^a\log x$ *on aidosti kasvava, jos* $a > 1$ *ja aidosti vähenevä, jos* $0 < a < 1$.

x) ${}^a\log(]0, \infty[) = \mathbf{R}$.

Todistus. HT $\square$