Matemaattisen kirjoitelman rakenteesta

Ari Lehtonen

1. Teksti

”Tavallisen” kirjoitelman (romaani tms) teksti jaetaan kappaleisiin. Useampia kappaleita yhdistetään usein eri tasoisin väliotsikoin laajemmiksi kokonaisuuksiksi. Matemaattisessa tekstissä näiden peruselementtien lisäksi on muutamia esityksen rakenteelle tärkeitä osia. Tärkeimmät näistä ovat määritelmät ja lauseet (sekä niiden todistukset). Seuraavassa tarkastellaan näiden ”luonnetta”. Aloitetaan kuitenkin alusta.

1.1. Aksiooma. Aksioomat ovat matemaattisessa tekstissä (harvoin) esiintyviä perusolettamuksia, joiden pohjalle muu esitys rakennetaan. Aksioomia ei todisteta, vaan ne hyväksytään sellaisenaan. Useimmiten aksioomat käsittelevät siinä määrin yksinkertaisen oloisia asioita, että niitä pidetään itsestäänselvyyksinä.

Tarkastellaan esimerkkinä *Peanon aksioomia*, joiden avulla luonnolliset luvut usein otetaan käyttöön[1]. Eräs tapa Peanon aksioomien esittämiseen on käyttää ns. *seuraaja(funktiot)a.* Oletetaan, että

1° jokaisella luonnollisella luvulla n on seuraaja $s(n)$, joka sekin on luonnollinen luku;
2° on olemassa luonnollinen luku 0, joka ei ole minkään luonnollisen luvun seuraaja;
3° kahden eri luonnollisen luvun n ja m seuraajat $s(n)$ ja $s(m)$ ovat keskenään erisuuria.

Arkisemmin ilmaistuna kohdassa 1° vaaditaan, että jokaiselle luonnolliselle luvulle n myös luku $n+1$ on luonnolllinen. Kohta 2° puolestaan erottaa luonnolliset luvut kokonaisluvuista: luonnollisten lukujen joukossa on pienin luku 0. Kolmas ehto puolestaan sanoo, että ehdosta $n \neq m$ seuraa, että $n+1 \neq m+1$. Nämä kolme ehtoa eivät kuitenkaan riitä kaikkia luonnollisia lukuja koskevien väitteiden todistamiseen. Luonnollisten lukujen joukkoa merkittäköön tuttuun tapaan symbolilla $\mathbb{N}$. Viimeiseksi valittava aksiooma olkoon *hyvän järjestyksen periaate*

4° jokaisessa epätyhjässä joukossa $A \subset \mathbb{N}$ on pienin luku.

Tämän avulla voidaan osoittaa, että luonnollisten lukujen joukossa on voimassa *induktiotodistusperiaate.* Vaihtoehtoisesti ehdon 4° sijasta aksioomaksi voitaisiin

[1] Luonnolliset luvut voidaan määritellä myös puhtaasti joukko-opillisesti, mutta tämä menetelmä on jossakin määrin ”raskas”. Ainakin se tarvitsee varsin vahvan joukko-opin tuntemuksen pohjakseen. Samalla aksioomat siirtyvät koskemaan joukkoja.

ottaa induktiotodistusperiaate, jonka pohjalta puolestaan ehto 4° voitaisiin todistaa lauseena.

Aksioomien valinnassa pyritään yleensä aksioomien pieneen lukumäärään. Jos aksioomia otetaan käyttöön monta, voidaan aksioomista joskus saada helpommin ymmärrettäviä. Tärkeätä on kuitenkin huolehtia, että eri aksioomat eivät saa johtaa ristiriitaisin tuloksiin.

Muita tuttuja aksioomia matematiikan peruskursseilta ovat reaalilukujen perusominaisuudet. Aritmeettiset ominaisuudet (yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolasku) ja lukujen suuruusjärjestystä koskevat vaatimukset ovat sen verran ”ilmeisiä”, ettei niitä juuri huomaa aksioomiksi. Sen sijaan reaalilukujen *täydellisyysaksiooma* on hieman miettimistä kaipaa kohta. Sillekin voidaan esittää useita eri muotoja, jotka ovat keskenään ekvivalentteja. Yksinkertaistetussa muodossaan reaalilukujen täydellisyysaksiooma on jokin seuraavista:

a) Jokaisella epätyhjällä, ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla on pienin yläraja.
b) Jokainen reaalilukujen Cauchyn jono suppenee.
c) Jokainen reaaliakselin suljettujen, epätyhjien välien vähenevän jonon leikkaus on myös epätyhjä.

Jokaisessa näistä kolmesta ehdosta esiintyy useampia *käsitteitä*, jotka ymmärretyksi tullakseen kaipaavat täsmentäviä selityksiä, *määritelmiä*.

1.2. Määritelmä. Matemaattisen esityksen eräs keskeinen elementti on *määritelmä*. Määritelmä on kohta, jossa otetaan käyttöön uusia *käsitteitä* selittäen, mitä ne tarkoittavat. Määritelmästä voi ”sivuvaikutuksena” jäädä käyttöön *merkintöjä*.

Tarkastellaan esimerkkinä reaalilukujen täydellisyysaksiooman ensimmäistä muotoa. Ennekuin tämä ehto voidaan asettaa aksioomaksi pitää selvitettynä olla

(i) joukko-opin yksinkertaisia perusasioita (joukon osajoukko; joukon ja alkion välinen suhde; joukon epätyhjyys);
(ii) mitä tarkoittaa ylöspäin rajoitettu reaalilukujoukko;
(iii) mitä tarkoittaa reaalilukujoukon yläraja;
(iv) mitä tarkoittaa pienin yläraja.

Kaikki yllä listattujen kohtien ongelmat ratkaistaan määrittelemällä esiintyvät käsitteet. Varsin yleinen tapa nykyisessä matematiikan esittämisessä on, että määritelmät ”nostetaan” esiin ympäröivästä tekstistä esimerkiksi seuraavasti (huomaa, että uusi käsite korostetaan esittelynsä yhteydessä kursivoimalla se):

Määritelmä 1.1. Joukko $A \subset \mathbb{R}$ on *ylöspäin rajoitettu*, jos on olemassa luku $M \in \mathbb{R}$ siten, että kaikille $x \in A$ on voimassa $x \leq M$.

Määritelmien esittäminen tällä tavalla ympäröivästä tekstistä irrotettuna ei ole välttämätöntä, mutta *uusien* käsitteiden kohdalla tällainen tapa voi helpottaa lukijan elämää. Määritelmiä voi esittää varsinaisen tekstin seassakin varsinkin, jos käsitteet ovat lukijalle enimmäkseen tuttuja, mutta ne on tarpeellista palauttaa mieleen siinä täsmällisessä muodossaan, jossa niitä on tarkoitus käyttää, tai niihin liittyvien merkintöjen esittelemiseksi.

Silloin kun määritelmä esitetään ympäröivästä tekstistä irrotettuna, ei määritelmän sisään tule laittaa mitään muuta selittävää tekstiä. Jos sellaista tarvitaan, ylimääräiset selitykset kuuluvat ennen määritelmää tulevaan johdattelevaan tekstiin tai määritelmän jälkeen. Esimerkiksi vaikka näin:

... Geometrisesti erotusosamäärä $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tarkoittaa funktion f kuvaajan pisteiden $(x, f(x))$ ja $(x+h, f(x+h))$ kautta piirretyn sekantin kulmakerrointa [piirrä kuva]. Kun h itseisarvoltaan pienenee, piste $x+h$ lähestyy pistettä x, ja sekantti lähestyy funktion f kuvaajalle pisteeseen x piirrettyä tangenttia. Syntyvän tangentin kulmakerrointa kutsutaan funktion f *derivaataksi* pisteessä x. Tämän pohjalta asetetaan

MÄÄRITELMÄ 1.2. Funktio f on *derivoituva pisteessä* x, jos raja-arvo

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

on olemassa ja äärellinen.

Kun f on derivoituva pisteessä x, on raja-arvo $(*)$ *funktion* f *derivaatta pisteessä* x, ja sitä merkitään $f'(x)$ tai $Df(x)$.

Määritelmät eivät juurikaan esittele pelkästään *merkintöjä*, vaan enemmän käsitteitä. Jos niihin liittyy merkintöjä, ne tulevat yleensä määritelmän ”sivutuotteena” kuten derivaatan merkinnät yllä. Jos on tarve esitellä kirjoitelmassa käytettäviä merkintöjä, joihin liittyvät käsitteet oletetaan tunnetuksi, nimityksen ”määritelmä” sijasta on oikeampaa käyttää vaikka ”merkintöjä”. Määritelmä-tyyppisen struktuurin sijasta voi (ehkä mieluummin pitäisi) käyttää väliotsikkoa ”Esitietoja ja merkintöjä” ja sijoittaa lukijalta oletettujen esitietojen ja käytettävien merkintöjen kuvaukset tällaisen otsikon alle. Jos käytettyjä merkintöjä on runsaasti, voidaan niistä koota luettelo, jollainen voidaan sijoittaa kirjoitelman liitteeksi.

”Määrittelyä” ei ole seuraavankaltaiseen tilanteeseen liittyvä toiminta;
”Olkoon $f(x) := e^x \sin x$. Määritellään seuraavaksi funktion f derivaatta $f'(x)\ldots$”. Kun *derivaatta* on jo määritelty, ei sitä tähän erityistapaukseen tarvitse/pidä määritellä uudestaan. Tässä tilanteessa kyse on *määräämisestä* tai *määrittämisestä*: ”Olkoon $f(x) := e^x \sin x$. Määrätään seuraavaksi funktion f derivaatta $f'(x)\ldots$”.

Vastaavasti kuin verbille määritellä on matemaattisessa tekstissä varattu tietty käyttötarkoitus, on myös verbiä *ratkaista* syytä käyttää oikein. Vaikka edellisen esimerkin funktion f derivaatan määrääminen miellettäisiinkin ongelmaksi, ei ole syytä käyttää ilmaisua ”Ratkaistaan seuraavaksi funktion f derivaatta $f'(x)\ldots$”. Ratkaiseminen liittyy puhekielessä ongelmien ratkaisemiseen, matematiikassa *yhtälöiden.*

Moni matemaatikko saattaisi kirjoittaa ”Olkoon $f(x) = e^x \sin x\ldots$”, jolloin funktion f esittely näyttää yhtälöltä. Esiintyvää yhtäsuuruusmerkkiä ei kuitenkaan pidä lukea ympäröivästä tekstistä irrallaan. Tässä lauseen aloittava ”olkoon” kertoo, että kyse on funktion f määritelmästä. Tämän tekstin kirjoittaja pyrkii käyttämään tapaa, jossa määrittely-yhtäsuuruuden kohdalla käytetään kaksoispistettä erottamaan yhtäsuuruusmerkki yhtälöyhtäsuuruudesta. Kun kaksoispiste sallitaan lisättäväksi yhtäsuuruusmerkin kummalle tahansa puolelle, jolla uusi suure on, voidaan merkintää käyttää myös näin: "... Syntyvä summa jaetaan kahteen osaan $(a^2+b^2+c^2)+(2\,a\,b+2\,b\,c+2\,a\,c) =: S_1 + S_2$." Tällaisen tekstin lukijan voidaan olettaa osaavan lukea niin, että S_1 ja S_2 määritellään tässä kaavassa tarkoittamaan summia $S_1 = a^2 + b^2 + c^2$ ja $S_2 = 2\,a\,b+2\,b\,c+2\,a\,c$. Huomaa, että merkintää := pitää käyttää vain kerran siinä yhteydessä, jossa uusi suure määritellään. Sen jälkeen käytetään tavallista yhtäsuuruusmerkkiä. Vastaava pätee myös ilmaisun "olkoon" käyttämiseen: "Olkoon $f(x) := \dots$. Koska $f(x) = \dots$."

1.3. Lause. Jos käsitteet esitelläänkin usein yhden ja samaisen otsakkeen Määritelmä alla, esiintyvät väitteenä esitetyt kohdat monella eri nimellä. Tavallisimmin väite puetaan *Lauseeksi* (tai, kuten vanhakantaisemmissa matemaattisissa kirjoituksissa sanottaisiin, *Teoreemaksi*). Lauseiksi kootaan selkeään ja tiiviiseen muotoon puettuja tärkeitä tuloksia. Samalla lause irrotetaan ympäröivästä muusta tekstistä selkeämmin erottuvaksi ja lauseen olemusta edelleen korostetaan kursivoimalla sisällön teksti. (Huomaa ero määritelmiin: määritelmätekstiä ei kursivoida.) Lauseen sisältöön kuuluu tarkasteltaville olioille asetetut oletukset ja niitä koskeva väite. Mitään oletuksia tai väitettä selventäviä selityksiä ei varsinaiseen lausetekstiin kuulu; sellaiset tulee sijoittaa ennen lauseen muotoilua, välittömästi sen jälkeen tai (usein) vasta lauseen todistuksen jälkeen. Jos oletukset ja lauseen muotoiluun tarpeelliset merkinnät ovat yksinkertaisia, voi lauseen esittää yksinkertaisessa "jos... niin" -muodossa:

LAUSE 1.3. *Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on derivoituva ja kasvava, niin $f'(x) \geq 0$ kaikille $x \in [a,b]$.*

Mutkikkaammissa tapauksissa lauseen sisällön voi jakaa osiin a) annetut suureet (josta käytettävät merkinnät käyvät ilmi); b) oletukset; ja c) varsinainen väite. Esimerkiksi edellinen lause muuttuu näin muotoon

LAUSE 1.4. *Olkoon $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio.*
Oletetaan, että f on kasvava.
Tällöin $f'(x) \geq 0$ kaikille $x \in [a,b]$.

Huomaa, että yllä esitetty osajaottelu heijastuu käytettyihin ilmaisuihin:
"Olkoon.... Oletetaan.... Tällöin...".

Seuraavassa on esimerkki hieman mutkikkaamman väitteen muotoilusta. Oletusosio ei poikkea rakenteeltaan edellisestä, mutta jotta mutkikkaampi väiteosa olisi helpompi "pureskella", on se pilkottu pienempiin osiin:

LAUSE/MÄÄRITELMÄ 1.5. *Olkoot $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1-funktio ja $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$.*
Oletetaan, että $f(x_0,y_0) = 0$ ja $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$.
Tällöin on olemassa avoin väli $I \subset \mathbb{R}$ ja C^1-funktio $g\colon I \to \mathbb{R}$ siten, että

(i) $x_0 \in I$,
(ii) $g(x_0) = y_0$, ja
(iii) $f(x,g(x)) = 0$ kaikille $x \in I$.

Funktiota g kutsutaan yhtälön $f(x,y) = 0$ määräämäksi implisiittifunktioksi.

Huomaa, että lause on nyt leimattu sekä lauseeksi että määritelmäksi; lauseen sisällä väitteen antama funktio nimetään. Usein tämänkaltaiset kohdat esitetään vain ”lauseina” (ja tällaiseen tyyliin kannattaa ainakin aluksi tukeutua). Otsikko lause/määritelmä (tms) on matemaattisessa kirjallisuudessa harvinainen, vaikka loogisesti esimerkiksi yllä oleva implisiittifunktion määritelmä lauseen sisällä tekee lauseesta myös määritelmän.

Implisiittifunktiolause-esimerkissä on hyvä huomata alun *olkoot*: verbi viittaa kahteen olioon, f ja (x_0, y_0), joten tarvitaan monikko. Tosin alun voisi muotoilla yhtä hyvin: ”Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^1-funktio ja olkoon $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.” Väiteosassa moni kirjoittaja jättää myös sanan olemassa pois: ”Tällöin on avoin väli. . . ”.

Lause on yleisin otsikko matemaattisen tekstin teoreemoille. Vanhemmassa matemaattisessa kirjallisuudessa lauseet on saatettu esittää kuten tässäkin tekstissä, mutta ilman otsikkoa ”Lause” ja joskus myös ilman lauseen järjestysnumeroa. Muusta tekstistä lauseen sisällön erottaa tällöin pieni vertikaali väli ja tekstin korostaminen kursivoinnilla. Esimerkiksi

Jos $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ *on derivoituva ja kasvava, niin* $f'(x) \geq 0$ *kaikille* $x \in [a, b]$.

Lauseen järjestysnumeron poisjättäminen ei ole toivottavaa, se kun hankaloittaa kyseiseen tulokseen viittaamista. Lauseen järjestysnumero voidaan jättää pois, jos kyse on ”suuresta lauseesta”, jollaisille on tapana antaa nimi. Esimerkiksi edellä implisiittifunktion määrittelevä lause voitaisiin esittää seuraavasti (tähän on kopioitu vain ”kehys”):

Implisiittifunktiolause. *Olkoot* $f \ldots$
$\ldots$ *yhtälön* $f(x, y) = 0$ *määräämäksi* implisiittifunktioksi.

Muita otsikoita, joita lauseen kaltaisille elementeille käytetään ovat *Lemma* (eli *Apulause*), *Seuraus* (eli *Korollaari*) ja *Propositio* (eli *Väite*). Lemmaa ja seurausta on syytä käyttää otsikoidensa mukaisesti. Propositioita käytetään suomenkielisissä teksteissä harvoin (edes suomennetussa muodossaan); ne ovat ”vähäpätöisempiä lauseita”, joissa kirjoittaja ei kuitenkaan näe lemman luonnetta. Seurauksena esitetyt lauseet saadaan yleensä melko yksinkertaisena seurauksena edellä esitystä lauseesta.

1.4. Todistus. Matemaattisessa esityksessä esitetyille väitteille tulee antaa todistus tai joissakin poikkeustapauksissa viite luotettavaan lähteeseen (usein laadukkaaseen kirjaan; nettiviitteitä on syytä välttää). Todistuksen tarkoitus on näyttää, miten väite seuraa annetuista oletuksista, ja antaa lukijalle mahdollisuus tarkistaa päättelyn virheettömyys. Tavanomainen matemaattinen kirjoitelma ei siis ole luettelo tietyn matematiikan alan keskeisistä tuloksista.[2]

Matemaattinen teksti kirjoitetaan aina jollekin kohdeyleisölle. Tutkielmien kohdalla pitää huomata, että oikea kohdeyleisö ei ole tutkielman ohjaaja. Tämän vuoksi pitää huolellisesti miettiä, miten käsiteltävä asia pitää esittää, jotta teksti olisi toisaalta mahdollisimman helposti luettavissa ja toisaalta mahdollisimman täsmällistä. Jos

[2] Tällaisiakin on, matematiikan *sanakirjat* (engl. *dictionary*), ja matematiikan historian esitykset omalla tavallaan.

tekstin helppolukuisuutta yritetään lisätä käyttämällä tarkkojen määritelmien sijasta heuristisia selityksiä ja todistuksissa vältetään mukikkaita kaavoja, voi lopputulos olla päinvastainen: määritelmä voi sanoa jotain muuta kuin miten sitä sovelletaan; todistusten laskut jäävät lukijan tehtäväksi; jne. Toisaalta turhan yksityiskohtaiset laskut saattavat johtaa lukijan harhaan. Todistusten tulisi osoittaa hyvää tasapainoa riittävien yksityiskohtien osalta, jotta lukija voi tarkistaa päättelyn oikeellisuuden, ja toisaalta todistuksen yleisen idean esiintuomisen osalta, jotta lukija voi hahmottaa ”suuret suuntaviivat”. Joskus pitkä tai vaikea todistus onnistuu parhaiten kirjoittamalla sen alkuun hahmotelman ideatasolla tai todistuksen yksinkertaisessa erikoistapauksessa ja sen jälkeen palasiksi puretun todistuksen, joka noudattaa hahmotelman antamaa struktuuria.

Jos lauseen todistus syystä tai toisesta sivuutetaan, tulee lukijalle antaa mahdollisuus tarkistaa väitteen todenperäisyys antamalla kirjallisuusviite. Viitteen pitäisi olla tarkka, jotta lukijan olisi helppo paikantaa tarkistettava kohta. Viittaustarkkuus tarkoittaa, että lähteen, sanotaan vaikka kirjan, bibliografisten tietojen (tekijät, otsikko, julkaisija, julkaisuvuosi, mahdollinen uusintapainos/-laitos) pitää olla oikein ja laajemman teoksen ollessa kyseessä myös tarkempi sisältökohta pitää mainita. Pelkkä viittaus ”katso kirjasta X” ei ole erityisen avulias ohje, jos kirja on esimerkiksi tuhatsivuinen.

Joskus jokin teknisesti hankala todistus voidaan jättää esitettäväksi vaikka kirjoitelman liitteessä. Tällöin lukijalle pitää tehdä selväksi, että näin tehdään. Samalla kirjoittajan pitää huolehtia, ettei varsinaista todistusta rakennettaessa synny kehäpäätelmiä. Varsinaisen lauseen esittämisen jälkeen, mutta ennen todistusta, tekstiin on saattanut syntyä paljon hyödyllisiä aputuloksia, joiden avulla todistus olisi varsin helppo esittää. Voi kuitenkin olla, usein onkin, että tällaiset tulokset perustuvat esitettyyn lauseeseen, jota siis vielä ei ole todistettu.

Nykyaikainen tapa lauseen todistuksen esittämiseen on sijoittaa todistus lauseen jälkeen. Jos välittömästi lauseen muotoilun jälkeen tulee jotain muuta selittävää tekstiä, on tavanomaisen otsikon ”Todistus” sijasta hyvä käyttää esimerkiksi seuraavankaltaista:

Lauseen 1.3 todistus. Koska kasvavalle funktiolle f on $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$ kaikille $h \neq 0$, on myös raja-arvolle

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0. \qquad \square$$

Vanhemmasta matemaattisesta kirjallisuudesta löytyy paljon esimerkkejä siitä, että lauseen todistuksen voi kirjoittaa ennen lauseen varsinaista muotoilua. Tällainen esitys on usein ongelmaa pohdiskelevaa, ja lukijan ajatus ohjataan esitettävien päättelyiden kautta toteamaan, että ”Edellisistä tarkasteluista saamme seuraavan

Jos $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on derivoituva ja kasvava, niin $f'(x) \geq 0$ kaikille $x \in [a,b]$. ”

Tällainen esitystapa on edelleenkin sovelias, mutta sen ongelmana on, että lukijan ajatukset pitää saada pysymään hyvin kurissa, jotta hän voi lauseen muotoiluun päätyessään heti todeta, että kyseinen väite on edellä osoitettu todeksi käyttäen vain lauseessa esitettyjä oletuksia.

Lauseille on olemassa yksi ”sukulainen”, jollaista tutkielmissa ei juuri tarvita, eikä sellaista kovin monesta matematiikan oppikirjastakaan löydy, nimittäin *Konjektuuri*, jolle sovelias suomennus lienee *Otaksuma*. Konjektuuri on normaalin lauseen tapaan muotoiltu tulos (oletukset ja väite), mutta jota ei vielä ole pystytty todistamaan. Konjektuurien merkitys on siinä, että niiden avulla ”energia” voidaan kohdistaa oikein. Matemaattisessa tutkimuksessa hyvä kysymys on usein tärkeämpi uusien tulosten lähde kuin ongelman ratkaisu.

1.5. Huomautus ja esimerkki. Matemaattiseen tekstiin sijoitetaan usein huomautukseksi otsikoituja tekstikohtia. Tällaiset tekstikohdat eivät välttämättä poikkea muusta tekstistä paljoakaan, mutta kun ne usein numeroidaan vastaavaan tapaan kuin määritelmät ja lauseet, on niihin helppo viitata. Niitä voi näin käyttää määritelmien ja lauseiden sijasta silloin, kun sisältö ei nosta niitä määritelmän tai lauseen tasolle. Lauseiden kaltaiset tulokset, jotka eivät esityksen kannalta ole keskeisiä ja jotka jätetään todistamatta, on sopivaa sijoittaa huomatuksiksi.

Matemaattinen teksti kaipaa teorian seuraksi esimerkkejä, joilla lauseiden käyttöä havainnollistetaan. Esimerkitkin on luonnollista numeroida ja asemoida samaan tapaan kuin määritelmät, jotta ne erottuvat muusta tekstistä paremmin ja niihin on mahdollista viitata muista tekstikohdista. Esimerkkeihin, kuten huomautuksiinkin, kuuluu selittävä, osin laveasanainenkin tyyli toisin kuin määritelmiin ja lauseisiin. Tässäkin pitää pyrkiä hyvään tasapainoon; tiivis esitys voi tuoda ideat selkeämmin esiin, mutta saattaa edellyttää lukijalta enemmän tarkkaavaisuutta, kun taas runsaat yksityiskohdat voivat auttaa lukijaa mutkikkaiden laskujen läpikäymisessä, mutta toisaalta voivat piilottaa keskeisen ajatuksenjuoksun.

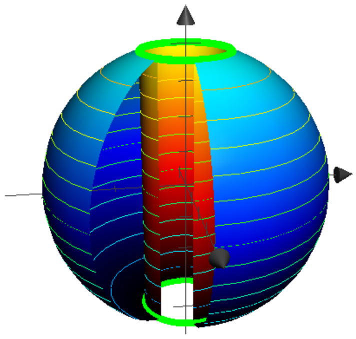
1.6. Sivu- ja rivijaosta. Kun matemaattisen tekstin kirjoittaminen on jatkuvaa tasapainottelua oleellisten ideoiden esiintuomisen ja hankalien laskujen yksityiskohtien esittämisen välillä, on kirjoittaminen toistuvaa jo kirjoitetun tekstin uudelleenkirjoittamista. Tämän seurauksena tekstin jakautuminen riveiksi voi joskus näyttää huonolta. Matemaattisessa tekstissä tämä ongelma on paljon arkisempi kuin suorasanaisssa tekstissä, koska tekstin sekaan sijoitetut kaavat ei voi katketa miten tahansa; niiden jakamiseen eri riveille on omat ”tavutussääntönsä”.

Vaikka rivijaot näyttäisivät korjaamista kaipaavilta, ei ongelmalle kannata, oikeastaan ei pidä tehdä mitään ennenkuin teksti alkaa olla viimeistä silausta vaille valmis. Tukielmia kirjoitettaessa apua kannattaa kysyä ohjaajalta, koska tekijän ja ohjaajan näkemykset tutkielman tilasta voivat erota toisistaan paljonkin. Sitten kun viimeisten korjausten aika on käsillä, on myös rivijakojen hienosäädön aika. Tekstiriveille sijoitettujen kaavojen aiheuttamat ongelmat on usein helpointa ratkaista miettimällä ympäröivää tekstiä. Tekstistä voi poistaa turhia sanoja tai lisätä sopivia lisäsanoja kaavaan siirtämiseksi taakse- tai eteenpäin. Yhtä hyvin voidaan käyttää lyhyempiä tai pitempiä synonymeejä. Tekstin tai kaavan jakaminen pakottamalla eri riveille tulee kyseeseen vasta äärimmäisessä tilanteessa.

Rivijakoja vastaava ongelma toistuu tekstin jakautumisessa sivuiksi. Omalle rivilleen sijoitettu kaava, varsinkin jos se on monirivinen, aiheuttaa usein sivunjako-ongelmia. Kun iso kaava siirtyy seuraavalle sivulle, saattaa edellinen sivu jäädä varsin tyhjän näköiseksi. Tätä ongelmaa ratkotaan parhaiten samaan tapaan kuin rivinjako-ongelmaa: mietitään tekstin poistamista tai lisäämistä. Nyt voidaan lisäksi miettiä,

$$\int_{S} d\omega \overset{\text{Stokes-}}{\underset{\text{Cartan}}{=}} \int_{\partial S} \omega$$

$$= \int_{\partial C} \omega \overset{\text{Stokes-}}{\underset{\text{Cartan}}{=}} \int_{C} d\omega$$



Kuva 1.1. Esimerkkikuva, joka tekstissä on sijoitettu liikkuvaksi objektiksi juuri ennen kappaletta ”Kuvien sijoittaminen. . . ”. Koska kuva ei mahdu kappaleen ”Kun rivi- ja sivujakoa. . . ” jälkeen sivun alaosaan, se sijoittuu automaattisesti seuraavan sivun yläreunaan.

mitkä kaavat ansaitsevat tulla esitetyksi omalla kaavarivillään, ja minkä kaavojen on tyytyminen tekstin sisään jätetyksi.

Kun rivi- ja sivujakoa ruvetaan siistimään, se kannattaa aloittaa tekstin alusta ja edetä järjestelmällisesti loppua kohti. Esimerkiksi TEX-järjestelmässä pieni tekstimuutos voi johtaa monen sivun päähän ulottuvaan rivi- ja sivujakojen muuttumiseen.

Kuvien sijoittaminen tuo osin samankaltaisia ongelmia kuin monirivisten kaavojen. Kuvien sijoittumista voi kuitenkin helpottaa sijoittamalla ne ”liikkuviksi objekteiksi”, eli sellaisiksi, joita varsinainen teksti kiertää. Kuvat sijoitetaan tällöin usein sivun yläreunaan, ja jos tekstissä kuvaan on tarkoitus viitata, pitää kuvalle antaa järjestysnumero ja mielellään myös lyhyt selittävä kuvateksti. Vertaa kuvaan 1.1.

2. Kaavat

2.1. Tekstikaavat. Matematiikkaa on tuskin mahdollista kirjoittaa käyttämättä kaavoja osana tekstiä. Kaavat eivät ole tekstistä mitenkään irrallisia, vaan ne tulee kuitenkin oppia lukemaan sujuvana osana ympäröivää tekstiä. Kaavan oikea lukeminen mahdollistaa sen, että matemaattisen tekstin virkkeessä ei tarvitse olla verbiä kuten suorasanaisen tekstin virkkeessä. Esimerkiksi kaikki binääriset relaatiot ovat verbin luonteisia symboleita. Näiden verbin luonne ilmenee, kun kaava luetaan ääneen. Esimerkiksi $a = b$ luetaan ”a on yhtä suuri kuin b”. Vastaavasti $A \subset B$ luetaan ”A sisältyy joukkoon B” ja $x \in A$ luetaan ”x on joukon A alkio”. Kaikille matemaattisille symboleille ei toki ole näin yksinkertaista tai vakiintunutta luettua muotoa, mutta kun tämä symbolien mahdollinen verbiluonne pidetään mielessä, on kaavat helpompi lukea ja samalla kaavoja sisältävän tekstin kirjoittaminen helpottuu.

Tekstiin sekaan sijoitettujen kaavojen jakaminen eri riveille tehdään tarvittaessa kaavaan liittyvien osien loogisen rakenteen perusteella. Esimerkiksi kaavassa

$$f(x, y) := (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

määrittelyn vasemman puolen $f(x, y)$ pitää säilyä sellaiseen; kyse on vain yhdestä objektista, funktion f arvo pisteessä (x, y). Samoin (tapoihin kuuluu, että) määrittely-yhtäsuuruusmerkki $:=$ on samalla rivillä kuin edeltä suure. Siis koko aloitus $f(x, y) :=$ kuuluu samalle riville. Sen sijaan rivin vaihto voi tulla heti merkin $:=$ jälkeen. Tämän jälkeen rivin vaihto voi tulla merkkien $+$, $-$ ja $-$ jälkeen (ei ennen niitä). Samoin rivin vaihto voi tulla merkitsemättä jätetyn kertomerkin jälkeen, tekijöiden $(x+y)$ ja $(x-y)$ väliin. Tällaisessä tilanteessa voidaan käyttää rivin loppuun jäävän tekijän perässä kertomerkkiä $\times$ ilmaisemaan, että rivinjako osuu kertolaskun kohdalle. Esimerkiksi LaTeX-järjestelmässä tätä tarkoitusta varten on komento `\*`, joka tuo näkyvän kertomerkin kohdalleen, jos komennon sijaintikohtaan tulee rivin vaihto; muuten komento ei tee mitään. LaTeX on matematiikan kirjoitttamiseen muutenkin ”älykäs”: suurin osa kaavojen riveiksi jakamiseen liittyvistä säännöistä toimii automaattisesti.

2.2. Kaavarivit. Kun kaava esitetään omalla kaavarivillään, joutuu kirjoittaja päättämään mahdollisen eri riveiksi jakamisen itse; tähän ei ole olemassa automaattisia mekanismeja. Tässä kirjoittajan pitää päättää, miten hän haluaa kaavan luettavan. Ensimmäisenä periaatteena pidettäköön, että rivin vaihtokohta antaa lukijalle ”hengähdystauon”; kaava luetaan rivi kerrallaan ja rivin vaihdon kohdalla (viimeistään) on mahdollisuus pysähtyä sulattelemaan luettua kaavaa. Yksittäisellä rivillä kaava kannattaa ajatella jaetuksi loogisen lukemisen mukaisiin osiin. Esimerkiksi edellä ollut kaava $f(x,y) := (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ jakautuu luonnollisimmin yhtäsuuruusmerkkien kohdilta. Muut binääriset relaatiot toimivat vastaavalla tavalla jakavina elementteinä. Sulkumerkit ovat selkeästi kaavaa osiin jakavia merkkejä.

Jos usealle riville sijoitettu kaava koostuu peräkkäisistä yhtälöistä (tai yhtä lailla epäyhtälöistä), on peräkkäiset rivit tapana linjata yhtäsuuruusmerkkien (tai ’pienempi kuin’ -merkkien, jne) kohdalta. Esimerkiksi kuvaan 1.1 sijoitettu kaava ei siis ole jaettu riveiksi oikeaoppisesti, vaan jako voisi olla näin:

$$\begin{aligned}\int_S d\omega &= \int_{\partial S} \omega \\ &= \int_{\partial C} \omega \\ &= \int_C d\omega\end{aligned}$$

Tässä tilanteessa kaavan jako usealle riville ei kuitenkaan ole perusteltua, koska koko kaava mahtuu hyvin yhdellekin. Jos sen sijaan kuvan 1.1 kaavaan sijoitetut ”perustelut” halutaan lisätä selittämään yhtäsuuruuksia, saadaan kaava

$$\begin{aligned}\int_S d\omega &= \int_{\partial S} \omega && \text{Stokesin ja Cartanin lauseen nojalla} \\ &= \int_{\partial C} \omega && \text{koska } \partial S = \partial C \\ &= \int_C d\omega && \text{Stokesin ja Cartanin lauseen nojalla}\end{aligned}$$

Huolitellussa esityksessä, kuten tutkielmissa, tällaisen monirivisen, lyhyin selityksin täydennetyn kaavan sijasta parempi tapa olisi kirjoittaa täydellisiä virkkeitä, joissa yllä olevan kaavan osat saavat kunnolliset perustelut. Esimerkiksi (koska potentiaalisilla lukijoilla on hyvät matemaattiset perustiedot, ei tekstin pidä olla turhan ”jaarittelevaa”):

> ”Stokesin ja Cartanin lauseen nojalla saadaan aluksi $\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$. Koska $\partial S = \partial C$, on $\int_{\partial S} \omega = \int_{\partial C} \omega$. Sovelletamalla Stokesin ja Cartanin lausetta uuudestaan, saadaan $\int_{\partial C} \omega = \int_C d\omega$. Siis $\int_S d\omega = \int_C d\omega$.”

2.3. Merkinnöistä. Matemaattisen typografian perinteisiin kuuluu, että muuttujien ja funktioiden nimet yms *korostetaan kursivoimalla*, jotta ne erottuisivat ympäröivästä suorasanaisesta tekstistä paremmin. Siis jo yksittäinen muuttuja x kuuluu esittää kursivoituna, vaikka tekstin kirjoittamisvaiheessa se olisi paljon helpompi kirjoittaa sellaisenaan, x.[3] Tähän sääntöön on kuitenkin välitön poikkeus: jos funktion nimi on monikirjaiminen, ei tällaista nimeä kursivoida. Siis esimerkiksi pitää olla $\sin x$ eikä $sin\, x$. Huomaa, että useampikirjaimisen funktion nimen jälkeen, ennen muuttujan nimeä on tapana jättää pieni väli erottamaan funktion nimi ja muuttuja toisistaan, vaikka kirjasimen tyylikin jo toimisi erottajana. Siis ei $\mathrm{sin}x$. Jos taas muuttuja ympäröidään suluilla, tällaista väliä ei käytetä: $\sin(x)$.

Toisinaan matemaattisen tekstin tiivistämiseen käytetään merkintöjä $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\neg$ jne. **Vältä niitä!** Niitä käytettäessä vain harva ajattelee, mitä merkinnät tarkoittavat, ja miten niitä pitäisi korrektisti käyttää.[4] Käytä niiden tilalla täydellisiä suomen kielen sanontoja. Merkintöjä voi pitää lähinnä matemaattisen pikakirjoituksen välineinä, jotka sopivat luentomuistiipanojen kirjoittamiseen.

2.4. Lopuksi. Hyvää matemaattista kirjallisuutta kannattaa lukea. Vaikka suuri osa olisikin vieraskielistä, sellaisesta oppii näkemään, miten matematiikkaa esitetään. Luentoja varten kirjoitetut luentomonisteet pääsevät harvoin samalle huolellisuuden tasolle kuin varsinaiset oppikirjat.

> ”It is not generally recognized that some of the major difficulties in teaching mathematics are analogous to those in teaching a foreign language. (The secondary schools are responsible for this. Proper training in the secondary schools could entirely eliminate this difficulty.) Consequently, I have made great effort to carry the student verbally, so to say, in using proper mathematical language. It seems to me essential that students be required to write their mathematical papers in full and coherent sentences. A large portion of their difficulties with mathematics stems from their slapping down mathematical symbols and formulas isolated from a meaningful sentence and appropriate quantifiers. Papers should also be required to be neat and legible. They should not look as if a stoned fly had just crawled out of an inkwell. Insisting on reasonable standards of expression will result in drastic improvements of mathematical performance. . . ”
>
> Serge Lang
> *A first course in calculus*, viides laitos,
> Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1986

[3]Joissakin vanhemmissa kirjoissa saattaa tästä korostamisesta nähdä vahvemman muodon: kursivoituna esitetyn lauseen sisällä kaavoja ei kursivoida. Esimerkiksi, jos suorassa tekstissä on ”Olkoon $f(x) := x^2$. Tällöin. . . ”, niin lausetekstissä olisi ”*Olkoon* f(x) := x^2*. Tällöin. . .* ”. Tätä tapaa ei enää käytetä.

[4]Matematiikassa on toki osa-alueita, joilla nämäkin merkinnät kuuluvat asiaan. Propositiologiikkaa lienee yksi sellainen.