Lukuteoria 1 2023

Harjoitus 1: ratkaisuja

1. Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja $m \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Todista induktiolla, että

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})\,.$$

Ratkaisu. Kun $m = 2$, väite on $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, joten väite pätee. Tehdään induktio-oletus, että $a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1})$. Käyttämällä kolmannessa yhtäsuuruudessa induktio-oletusta saadaan

$$\begin{aligned}
a^{m+1} - b^{m+1} &= a^{m+1} - ab^m + ab^m - b^{m+1} \\
&= a(a^m - b^m) + (a-b)b^m \\
&= a(a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}) + (a-b)b^m \\
&= (a-b)(a^m + a^{m-1}b + \cdots + a^2b^{m-2} + ab^{m-1}) + (a-b)b^m \\
&= (a-b)(a^m + a^{m-1}b + \cdots + a^2b^{m-2} + ab^{m-1} + b^m)\,.
\end{aligned}$$

Siis väite pätee induktioperiaatteen nojalla.

2. Todista Lauseen 1.3 kohdat (3), (4) ja (7).

Ratkaisu. (3) Jos $d \mid n$, niin on $k_1 \in \mathbb{Z}$, jolle $n = k_1 d$. Jos $d \mid m$, niin on $k_2 \in \mathbb{Z}$, jolle $m = k_2 d$. Tällöin

$$an + bm = ak_1 d + bk_2 d = (ak_1 + bk_2)d\,,$$

joten $d \mid an + bm$.

(4) Jos $d \mid n$, niin on $k \in \mathbb{Z}$, jolle $n = kd$. Tällöin $an = a(kd) = (ak)d$, joten $ad \mid an$.

(7) Luvun 0 ominaisuuksista seuraa, että $0 = 0n$, joten $n \mid 0$.

3. Olkoot $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Ovatko seuraavat väitteet totta? Todista tai keksi vastaesimerkki.

(1) Jos $a \mid b$ ja $c \mid d$, niin $(a+c) \mid (b+d)$.

(2) Jos $a \mid b$ ja $c \mid d$, niin $ac \mid bd$.

Ratkaisu. (1) Tämä väite ei pidä paikkaansa. Vastaesimerkki: $2 \mid 4$ ja $3 \mid 3$ mutta $2 + 3 = 5 \nmid 7 = 4 + 3$.

(2) Tämä väite on tosi. Oletuksista saadaan $b = ae$ ja $d = cf$ joillain $e, f \in \mathbb{Z}$. Tällöin $bd = aecf = (ac)(ef)$, joten $ac \mid bd$.

4. Olkoot a ja b parittomia lukuja. Osoita, että $a + b$ ja $a - b$ ovat parillisia ja että ab on pariton.

Ratkaisu. Koska luvut a ja b ovat parittomia, ne voidaan esittää muodossa $a = 2k_a + 1$ ja $b = 2k_b + 1$, joillain $k_a, k_b \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$a + b = 2k_a + 1 + 2k_b + 1 = 2(k_a + k_b + 1),$$

$$a - b = 2k_a + 1 - (2k_b + 1) = 2(k_a - k_b) \text{ ja}$$

$$
\begin{aligned}
ab &= (2k_a + 1)(2k_b + 1) \\
&= 4k_a k_b + 2k_a + 2k_b + 1 \\
&= 2(2k_a k_b + k_a + k_b) + 1.
\end{aligned}
$$

Täten jakoyhtälön nojalla $a + b$ ja $a - b$ ovat parillisia ja ab on pariton.

5. Olkoon $n \in \mathbb{Z}$ kokonaisluku.

(1) Osoita, että $n^2 - n$ on parillinen.

(2) Osoita, että $n^2 + n$ on parillinen.

Ratkaisu. (1) Jos n on parillinen, niin $n = 2k$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin $n^2 - n = (2k)^2 - k = 2(2k^2 - k)$, joten $2 \mid n$. Jos n on pariton, niin $n = 2k + 1$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin $n^2 - n = (2k + 1)^2 - (2k + 1) = 2(2k^2 + k)$, joten $2 \mid n$.

(2) $n^2 + n = n^2 - n + 2n$ on kahden parillisen luvun summana parillinen.

6. Olkoon n pariton kokonaisluku. Osoita, että $8 \mid n^2 - 1$.

Ratkaisu. Koska n on pariton, niin $n = 2k - 1$ jollain $k \in \mathbb{Z}$. Tällöin

$$
n^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4(k^2 - k)\,.
$$

Tehtävän 5 nojalla $2 \mid k^2 - k$. Lauseen 1.3(4) nojalla $8 \mid n^2 - 1$.

7. Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$. Osoita, että $3 \mid a^3 b - b^3 a$.

Ratkaisu. Lauseen 1.6 perusteella kaikille $n \in \mathbb{Z}$ on olemassa $k \in \mathbb{Z}$ siten, että $n = 3k$, $n = 3k + 1$ tai $n = 3k + 2$. Huomioidaan lisäksi, että $a^3 b - b^3 a = ab(a + b)(a - b)$. Jos $a = 3k_a$ tai $b = 3k_b$ jollain $k_a, k_b \in \mathbb{Z}$, Lauseen 1.3(3) nojalla $3 \mid ab(a + b)(a - b)$. Jos $a = 3k_a + 1$ ja $b = 3k_b + 1$ tai, jos $a = 3k_a + 2$ ja $b = 3k_b + 2$ jollain $k_a, k_b \in \mathbb{Z}$, saadaan tulos $a - b = 3(k_a - k_b)$ ja täten Lauseen 1.3(3) nojalla $3 \mid ab(a + b)(a - b)$. Jos $a = 3k_a + 1$ ja $b = 3k_b + 2$ tai, jos $a = 3k_a + 2$ ja $b = 3k_b + 1$ jollain $k_a, k_b \in \mathbb{Z}$, saadaan tulos $a + b = 3k_a + 3k_b + 3 = 3(k_a + k_b + 1)$ ja taas Lauseen 1.3(3) nojalla $3 \mid ab(a + b)(a - b)$. Täten $3 \mid a^3 b - b^3 a$ kaikilla $a, b \in \mathbb{Z}$.

8. Olkoon $k \in \mathbb{Z}$. Osoita, että $9 \mid k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$.

Ratkaisu. Kun $k = 0$, $k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 = 1^3 + 2^3 = 9$, joten väite pätee. Todistetaan induktiolla ensin, että väite pätee positiivisilla kokonaisluvuilla. Induktio-oletus: $9 \mid k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$.

$$
\begin{aligned}
(k + 1)^3 + ((k + 1) + 1)^3 + ((k + 1) + 2)^3 &= (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + (k + 3)^3 \\
&= (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + k^3 + 9k^2 + 27k + 27 \\
&= k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3)
\end{aligned}
$$

Koska $9 \mid 9(k^2 + 3k + 3)$ ja induktio-oletuksen nojalla $9 \mid k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3$, saadaan tulos $9 \mid k^3 + (k + 1)^3 + (k + 2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3)$.

Todistetaan vastaavasti induktiolla, että väite pätee negatiivisille kokonaisluvuille. Induktio-oletus: $9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$.

$$\begin{aligned}
(k-1)^3 + ((k-1)+1)^3 + ((k-1)+2)^3 &= (k-1)^3 + (k)^3 + (k+1)^3 \\
&= ((k+2)-3)^3 + (k)^3 + (k+1)^3 \\
&= (k+2)^3 - 9k^2 + 27k - 27 + (k)^3 + (k+1)^3 \\
&= k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(-k^2 + 3k - 3)
\end{aligned}$$

Koska $9 \mid 9(-k^2 + 3k - 3)$ ja induktio-oletuksen nojalla $9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$, saadaan tulos $9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3 + 9(k^2 + 3k + 3)$. Täten $9 \mid k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$ kaikilla $k \in \mathbb{Z}$.