Johdatus dynaamisiin systeemeihin 2022

Harjoitus 3: ratkaisuja

1. Olkoon
$$[K] = \{[x] \in \mathbb{S}^1 : x \in K\}\,.$$
Olkoon $s\colon [K] \to \mathbb{S}^1$ kuvaus, joka määritellään asettamalla
$$s([\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}]) = [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i/2}{2^i}] = [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^{i+1}}]\,.$$
Osoita, että s on hyvin määritelty jatkuva surjektio, joka ei ole injektio. Osana tätä osoita, että pisteillä, jotka ovat muotoa $\frac{k}{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ on kaksi 2-kantaista esitystä. Osoita, että
$$s \circ E_3 = E_2 \circ s\,.$$

Ratkaisu. Cantorin joukon pisteet 0 ja $1 = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}$ vastaavat samaa ympyrän $\mathbb{S}^1$ pistettä. Kuvauksen s lausekkeen mukaan $0 \mapsto 0$ ja $2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$, joten kuvauksen tarkastelu ympyrällä on kunnossa, kunhan kuvauksen s lauseke määrää kuvauksen yksikäsitteisesti muissakin pisteissä. Riittää osoittaa, että Cantorin joukon pisteen sarjaesitys on yksikäsitteinen. Olkoot $a_j, b_j \in \{0, 2\}$ kaikilla $i \in \mathbb{N} - \{0\}$. Oletetaan, että $a_j = b_j$ kaikilla $1 \leqslant j \leqslant k-1$ ja $a_k \neq b_k$. Tällöin
$$|\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}| \leqslant \frac{2}{3^k} - \frac{1}{3^{k+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} = \frac{1}{3^k} > 0\,.$$
Siis $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \neq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}$, joten kuvaus on hyvin määritelty.

Olkoot $a'_i, b'_i \in \{0, 1\}$. Jos $a_i = 2a'_i$ ja $b_i = 2b'i$, niin
$$s(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a'_i}{2^i}\,,$$
joten s on surjektio. Vastaavalla laskulla kuin edellä näemme, että $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a'_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b'_i}{2^i}$, jos ja vain jos jollekin $k \in \mathbb{N} - \{0\}$ pätee $a'_j = b'_j$ kaikilla $1 \leqslant j \leqslant k-1$ ja $a'_k = 1$, $b'_k = 0$, $a'_j = 0$ ja $b'_j = 1$ kaikilla $j \geqslant k+1$ tai jonojen a_k ja b_k roolit voidaan vaihtaa. Siis
$$s(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a'_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b'_i}{2^i} = s(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i})\,,$$
joten s ei ole injektio.

Olkoon $x = [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}] \in [K]$. Osoitetaan, että s on jatkuva pisteessä x. Jos $x = [1]$, valitaan sitä esittäväksi sarjaksi tarpeen mukaan 0 tai $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k}$. Jos $y = [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i}] \in [K]$ ja $d(x, y) < 3^{-N}$, niin $a_1 = b_1, \ldots, a_N = b_N$. Tällöin $d(s(x), s(y)) < 2^{-N}$, koska pisteitä $s(x)$ ja $s(y)$ esittävissä sarjoissa on alussa $'N$ samaa kerrointa. Olkoon $\epsilon > 0$ pieni. Valitsemalla N riittävän suureksi, että $2^{-N} < \epsilon$, näemme, että kaikille y, joille $d(x, y) < 3^{-N}$ pätee $d(s(x), s(y)) < \epsilon$.

Viimeinen väite seuraa suorasta laskusta:
$$s(E_3[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}]) = s([\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{3^i}]) = [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a'_{i+1}}{2^i}]$$
ja toisaalta
$$E_2(s([\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}])) = E_2([\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a'_i}{2^i}]) = [\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a'_{i+1}}{2^i}]\,.$$

2. Todista Propositio 5.3.

Ratkaisu. Määritelmän nojalla d saa arvoja joukossa $[0, \infty[$. Jos $\omega = \omega'$, niin jollain k pätee $\omega(k) \neq \omega'(k)$, joten $0 \leqslant m(\omega, \omega') < \infty$ ja $d(\omega, \omega') > 0$.

Symmetrisyys seuraa kuvauksen m symmetrisyydestä, joten kolmioepäyhtälö on ainoa, jossa on todistamista. Olkoot $\omega, \omega', \omega''$ eri jonoja samassa jonoavaruudessa. Oletetaan, että $m(\omega, \omega') = k$. Jos $m(\omega, \omega'') > k$ ja $m(\omega'', \omega') > k$, niin $\omega(k) = \omega'(k) = \omega''(k)$, niin $m(\omega, \omega') \neq k$. Täytyy siis olla $m(\omega, \omega') \geqslant \min(m(\omega, \omega''), m(\omega'', \omega'))$. Siis

$$d(\omega, \omega') = 2^{-m(\omega,\omega')} \leqslant 2^{-\min(m(\omega,\omega''),m(\omega'',\omega'))} = \max(d(\omega, \omega''), d(\omega'', \omega')) \ .$$

3. Olkoot $x, y \in \Sigma_2$ ja olkoot $0 < r \leqslant s$. Mitä voit sanoa leikkausjoukosta $B(x, r) \cap B(y, s)$?

Ratkaisu. Oletetaan, että $B(x, r) \cap B(y, s) \neq \emptyset$. Olkoon $z \in B(x, r) \cap B(y, s)$. Proposition 5.4 nojalla $B(x, r) = B(z, r) \subset B(z, s) = B(y, s)$.

4. Todista Lemma 5.6.

Ratkaisu. Se, että pallot ovat sylintereitä tehtiin Esimerkissä 5.5. Erityisesti palloja vastaavat sylinterit ovat avoimia ja suljettuja joukkoja Proposition 5.4(2) nojalla.

Olkoot $n = (n_1 < n_2 < \cdots < n_K)$ ja olkoot $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_K \in \mathscr{A}^K$. Tarkastellaan yksipuolista jonoavaruutta Σ_N. Joukko

$$I = \{\beta \in \{0, 1, \ldots, N-1\}^{n_K} : \beta_{n_i} = \alpha_i \text{ kaikilla } 0 \leqslant i \leqslant n_K\}$$

on äärellinen ja

$$C^{(n_1<\cdots<n_k)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \bigcup_{\beta\in I} C^{\mathbb{N}\cap[0,n_K]}_{\beta}$$

on suljettujen ja avoimien pallojen äärellisenä yhdisteenä suljettu ja avoin. Kaksipuolisten jonojen tapaus tehdää samaan tapaan.

Jos oletamme Proposition 5.8 tunnetuksi, niin väitteen voi todistaa myös huomaamalla, että

$$C^{(n_1<\cdots<n_k)}_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k} = \bigcap_{j=1}^{k} \sigma^{-n_j} \overline{B}\big(\overline{\alpha_i}, \frac{1}{2}\big) \ .$$

Väite seuraa tästä, sillä sylinteri on nyt avoimien joukkojen äärellinen leikkaus ja suljettujen joukkojen äärellinen leikkaus.

5. Osoita, että jokaisella jonoavaruuden Σ_2 jonolla on suppeneva osajono. [1]

Ratkaisu. Olkoon $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ ääretön jono. Tällöin äärettömän monelle n pätee $\omega_n(0) = 0$ tai äärettömän monelle n pätee $\omega_n(0) = 1$. Valitaan tarvittaessa toinen näistä vaihtoehdoista ja määritellään näin osajono $(\omega^0_k)_k$. Jonolla $(\omega^0_k)_k$ on osajono $(\omega^1_k)_k$, jossa arvo $\omega^1_k(1)$ on vakio. Jatketaan näin ja muodostetaan alkupoeräisen jonon osajonot ω^ℓ_k, joille arvojen muodostamat jonot $\omega^\ell_k(0), \ldots, \omega^\ell_k(\ell)$ ovat vakiojonoja. Määritellään alkio $\omega^\infty \in \Sigma_2$ asettamalla $\omega^\infty(k) = \omega^k_0(k)$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Alkuperäisen jonon osajono $\widetilde{\omega}_k = \omega^k_k$ on suppeneva jono, jonka raja-arvo on ω^∞.

[1] Tämä osoittaa, että metrinen avaruus Σ_2 on kompakti. Olkoon $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ ääretön jono. Tällöin äärettömän monelle n pätee $\omega_n(0) = 0$ tai äärettömän monelle n pätee $\omega_n(0) = 1$. Siirry osajonoon ja tarkastele jonon alkioiden arvoja $\omega_n(1)$.

6. Osoita, että avaruudet Ω_2 ja Σ_2 ovat homeomorfiset.

Ratkaisu. Olkoon $F\colon \Omega_2 \to \Sigma_2$,

$$F(\omega)(k) = \begin{cases} \omega(\frac{k}{2})\,, & \text{kun } k \in 2\mathbb{N} \\ \omega(-\frac{k+1}{2}) & \text{muulloin.} \end{cases}$$

Tämä kuvaus on bijektio. Se kuvaa sylinterit sylintereiksi ja sylinterien alkukuvat ovat sylintereitä. Lemman 5.6 nojalla pallot ovat sylintereitä ja sylinterit ovat avoimia ja suljettuja, joten kuvaus on jatkuva.