Johdatus dynaamisiin systeemeihin 2022

Harjoitus 2: ratkaisuja

1. Todista Lemma 3.3.

Ratkaisu. Olkoot a_1 ja a_2 välien Δ_1 ja Δ_2 alkupisteet. Olkoon $\delta = \lambda(\Delta_2) - \lambda(\Delta_1)$. Koska pisteen a_2 rata on tiheä, on $N \in \mathbb{N}$, jolle $R_\alpha^N(a_1) \in \Delta_2$ ja $d(a_2, R_\alpha^N(a_1)) < \delta$. Tällöin $R_\alpha^N(a_1)(\Delta_1) \subset \Delta_2$, joten jokaiselle x, jolle $R_\alpha^k(x) \in \Delta_1$, pätee $R_\alpha^{k+N}(x) \in \Delta_1$. Väite seuraa tästä.

2. Olkoon $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Osoita, että on $n \in \mathbb{N}$, jolle luvun 2^n ensimmäiset numerot ovat k.

Ratkaisu. Luvun 2^n ensimmäiset numerot ovat k, jos ja vain jos

$$k \cdot 10^\ell \leqslant 2^n < (k+1) \cdot 10^\ell$$

jollain $\ell \in \mathbb{N}$. Toisin sanoen

$$\log_{10} k + \ell \leqslant n \log_{10} 2 < \log_{10}(k+1) + \ell \tag{1}$$

eli $R_\alpha^n(0) \in [\log_{10} k, \log_{10}(k+1)[$. Tällaisia lukuja n on Proposition **??**(2) nojalla, koska $\log_{10} 2$ on irrationaaliluku.

3. Todista Propositio 4.2.

Ratkaisu. $x + \mathbb{Z} = E_m^n(x + \mathbb{Z}) = m^n x + \mathbb{Z}$, jos ja vain jos $m^n x = x + \ell$ jollain $\ell \in \mathbb{Z}$, Siis $x = \frac{\ell}{m^n - 1}$.

4. Todista Propositio 4.3.

Ratkaisu. Kuvauksen E_m n-jaksolliset pisteet jakavat ympyrän $m^n - 1$ yhtä pitkään väliin. Olkoon $\delta > 0$. Jokaisella välillä, jonka pituus on δ on ainakin yksi n-jaksollinen piste, kun $n > \log_m(1 + \frac{1}{\delta})$.

5. Määritä kaikki systeemin $E_3 \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ radat, joiden jaksot ovat 1, 2 tai 3.

Ratkaisu. Proposition 4.2 nojalla kiintopisteet ovat $0 + \mathbb{Z}$ ja $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. Vastaavasti 2-jaksolliset radaat ovat kiintopisteiden lisäksi $\{\frac{1}{8} + \mathbb{Z}, \frac{3}{8} + \mathbb{Z}\}$, $\{\frac{1}{4} + \mathbb{Z} = \frac{2}{8} + \mathbb{Z}, \frac{3}{4}\}$ ja $\{\frac{5}{8} + \mathbb{Z}, \frac{7}{8} + \mathbb{Z}\}$. Proposition 4.2 nojalla 3-jaksollisia pisteitä on kiintopisteiden lisäksi 24 pistettä, jotka jakaantuvat 8 rataan $\{\frac{1}{26}, \frac{3}{26}, \frac{9}{26}\}$, $\{\frac{1}{13}, \frac{3}{13}, \frac{9}{13}\}$, $\{\frac{2}{13}, \frac{6}{13}, \frac{5}{13}\}$, $\{\frac{5}{26}, \frac{15}{26}, \frac{19}{26}\}$, $\{\frac{7}{26}, \frac{21}{26}, \frac{11}{26}\}$, $\{\frac{4}{13}, \frac{12}{13}, \frac{10}{13}\}$, $\{\frac{7}{13}, \frac{8}{13}, \frac{11}{13}\}$ ja $\{\frac{17}{26}, \frac{25}{26}, \frac{23}{26}\}$, jotka on lueteltu edustajiensa avulla hahmotuksen helpottamiseksi.