# Johdatus dynaamisiin systeemeihin 2022

## Harjoitus 1: ratkaisuja

Olkoon $I \subset \mathbb{R}$ suljettu ja rajoitettu väli. Olkoon $f\colon I \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Oletetaan, että

(1) $f(I) \subset I$ tai

(2) $I \subset f(I)$.

**1.** Osoita, että välillä $I$ on piste $x$, jolle $f(x) = x$.[1]
Osoita esimerkkien avulla, että väliä $I$ koskevat oletukset[2] ovat tarpeellisia.

*Todistus.* Olkoon $I = [a, b]$ ja olkoon $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t) - t$.
(1) Oletuksen nojalla $f(a) \geqslant a$ ja $f(b) \leqslant b$. Siis $g(a) \geqslant 0$ ja $g(b) \leqslant 0$. Koska $g$ on jatkuva, sillä on nollakohta $c \in [a, b]$. Tällöin $f(c) - c = 0$, joten $f(c) = c$.
(2) Oletuksen nojalla on $c, d \in [a, b]$, joille $f(c) \leqslant a \leqslant c$ ja $f(d) \geqslant b \geqslant d$. Siis $g(c) = f(c) - c \leqslant 0$ ja $g(d) = f(d) - d \geqslant 0$. Siis pisteiden $c$ ja $d$ välissä on kiintopiste kuten kohdassa (1).

Kuvauksella $f\colon ]0, 1[ \to ]0, 1[$, $f(x) = x^2$ ei ole kiintopistettä, joten ei riitä, että väli $I$ on rajoitettu. Kuvauksella $f\colon [1, \infty[ \to [1, \infty[$, $f(x) = x + 1$ ei ole kiintopistettä, joten ei riitä, että väli $I$ on suljettu. □

**2.** Todista Lemma 1.3.

**Ratkaisu.** Olkoon $x \in I$. Jono $(f^k(x))_{k=1}^n$ on kasvava, koska $f$ on kasvava. Kaikki jonon pisteet ovat välissä $I$, joten $(f^k(x))_{k=1}^n$ on kasvava ylhäältä rajoitettu jono. JMA:n nojalla sillä on raja-arvo $x_\infty \in I$. Osoitetaan, että $x_\infty$ on kiintopiste. Jatkuvuuden nojalla

$$x_\infty = \lim_{k\to\infty} f^k(x) = \lim_{k\to\infty} f(f^k(x)) = f(\lim_{k\to\infty} f^k(x)) = f(x_\infty)\,.$$

**3.** Todista Lemma 1.6.

**Ratkaisu.** Olkoon $U$ pisteen $x$ ympäristö, jonka sulkeuma $\overline{U}$ on kompakti ja jolle pätee $f^p(\overline{U}) \subset U$ ja $\bigcap_{n=1}^\infty f^n(U) = \{x\}$. Olkoon $1 \leqslant k < p$. Tällöin $f^k(x) \in f^k(U) \subset f^k(\overline{U})$ ja joukko $f^k(\overline{U})$ on kompaktin joukon kuvana kompakti. Oletuksen mukaan $f^{p-k}(f^k(\overline{U})) = f^p(\overline{U}) \subset U$, joten $f^k(\overline{U}) \subset f^{-(p-k)}(U)$.

Olkoon $U_k \subset f^{-(p-k)}(U)$ joukon $f^k(\overline{U})$ avoin ympäristö, jonka sulkeuma on kompakti. Tällainen ympäristö on, koska $X$ on lokaalisti kompakti metrinen avaruus ja $f^k(\overline{U})$ on kompakti. Joukon $U_k$ määritelmä takaa, että $f^{p-k}(U_k) \subset U$, joten $f^p(\overline{U_k}) \subset f^k(\overline{U}) \subset U_k$. Lisäksi $\bigcap_m f^{k+mp}(U) = f^k(\bigcap_m f^{mp}(U)) = \{f^k(x)\}$, joten $f^k$ on puoleensavetävä.

**4.** Olkoot $f_1, f_2, f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_1(x) = x + x^3\,,$$

$$f_2(x) = x - x^3$$

[1] Käytä JMA-kurssien tietoja.
[2] Siis se, että $I$ on suljettu ja rajoitettu.

ja

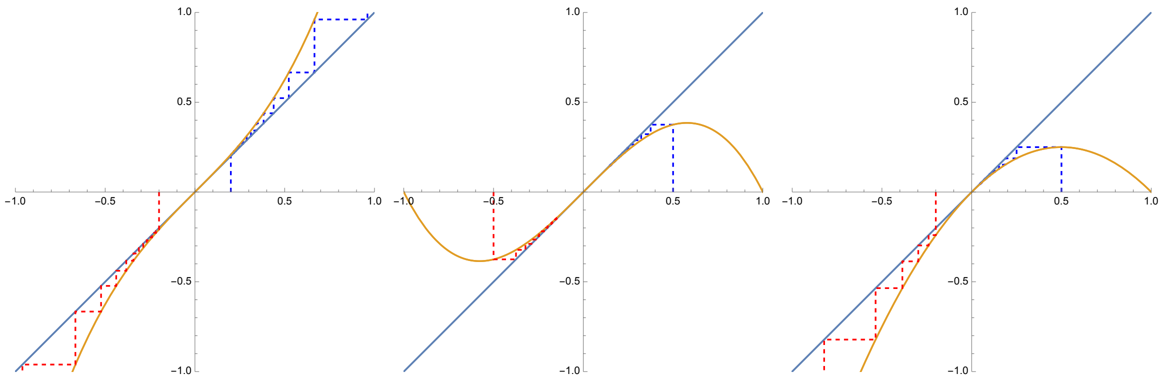
$$f_3(x) = x - x^2 \,.$$

Piste 0 on kaikkien kuvausten $f_1$, $f_2$ ja $f_3$ kiintopiste. Kuvaile lähellä origoa olevien pisteiden käyttäytyminen näitä funktioita iteroitaessa.

**Ratkaisu.** Funktiolle $f_1$ pätee $f_1(x) - x = x^3 > 0$ kaikilla $x > 0$ ja $f_1(x) - x = -x^3 < 0$ kaikilla $x < 0$ , joten 0 on hylkivä.

Funktiolle $f_2$ pätee $f_1(x) - x = -x^3 > 0$ kaikilla $x < 0$ ja $f_1(x) - x = -x^3 < 0$ kaikilla $x > 0$ , joten Lemman 1.3 nojalla 0 on puoleensavetävä.

Funktiolle $f_1$ pätee $f_1(x) - x = -x^2 < 0$ kaikilla $x \neq 0$, joten iteraattien jono on vähenevä. Siis 0 on positiiviselta puolelta puoleensavetävä ja negatiiviselta puolelta hylkivä.




Kuva 0.1: Graafinen analyysi funktioille $f_1$, $f_2$ ja $f_3$.

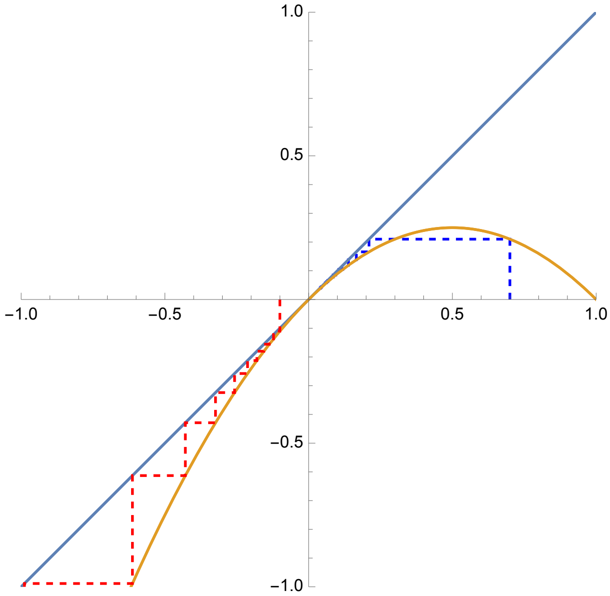
**5.** Määritä logistisen funktion $F_\mu$ kiintopisteet ja niiden tyypit, kun $\mu > 0$. Havainnollista graafisella analyysilla joillakin hyvin valituilla parametrin $\mu$ arvoilla.[3]

**Ratkaisu.** Yhtälö $x = F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ muuntuu muotoon $x((\mu - 1) - \mu x) = 0$, josta saamme helposti kiintopisteet 0 ja $\frac{\mu-1}{\mu}$.

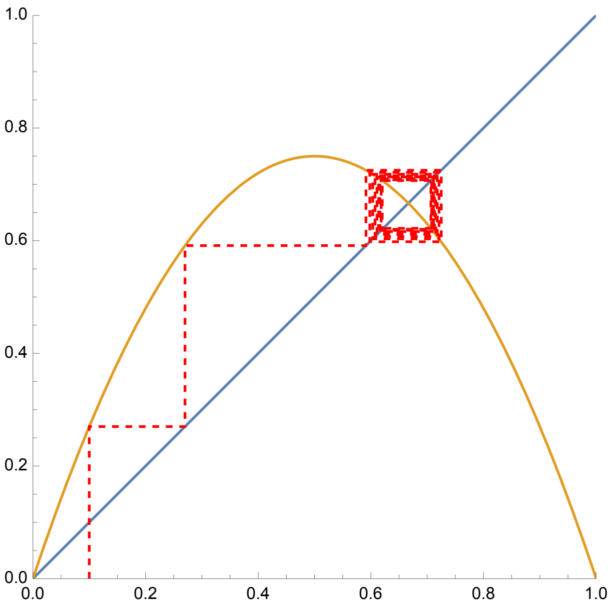
Kiintopisteen tyypin määrittämiseksi laskemme, $F'_\mu(x) = \mu(1 - 2x)$. Siis $F'(0) = \mu$, joten Proposition 1.12 nojalla 0 on puoleensavetävä, kun $0 < \mu < 1$, epämääräinen, kun $\mu = 1$ ja hylkivä, kun $\mu > 1$. Vastaavasti $F'_\mu(\frac{\mu-1}{\mu}) = 2 - \mu$, joten $\frac{\mu-1}{\mu}$ on puoleensavetävä, kun $1 < \mu < 3$, epämääräinen, kun $\mu = 2$ ja hylkivä, kun $0 < \mu < 1$ tai $\mu > 3$. On hyvä huomata, että parametrin arvolla $\mu = 1$ on vain yksi kiintopiste $x = 0$.

Kuvat havainnollistavat epämääräisten kiintopisteiden luonnetta.

[3]Graafisen analyysin tekemiseen on hyvä Geogebra-paketti osoitteessa `https://www.geogebra.org/m/uvsfvNDt`.




Kuva 0.2: $\mu = 1$




Kuva 0.3: $\mu = 3$