Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1 2022

Harjoitus 5: ratkaisuja

1. Ratkaise alkuarvotehtävä

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}, \qquad x(0) = p$$

kaikille $p \in \mathbb{R}^2$.

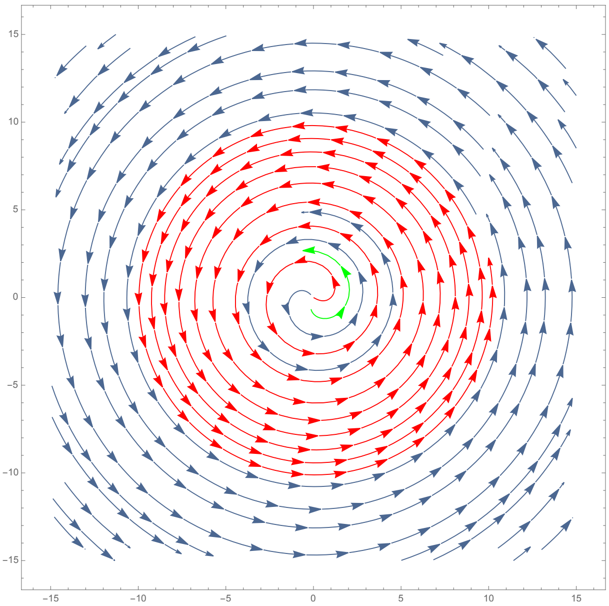
Ratkaisu. Differentiaaliyhtälö kirjoitettuna karteesisten koordinaattien mukaan komponenteittan, joissa käytetään napakoordinaatteja, on

$$\begin{aligned} \dot{r}\cos\theta - r\sin\theta\dot{\theta} &= r\cos\theta - r^3\sin\theta \\ \dot{r}\sin\theta + r\cos\theta\dot{\theta} &= r\sin\theta + r^3\cos\theta\,. \end{aligned}$$

Saamme siis yhtälöparin $\begin{cases} \dot{r} = r \\ \dot{\theta} = r^2 \end{cases}$, jonka ratkaisu alkuarvoilla (r_0, θ_0) on

$$\begin{cases} r = r_0 e^t \\ \theta(t) = \theta_0 + \frac{r_0^2}{2}(e^{2t} - 1) \end{cases}.$$

Ratkaisun muuttaminen karteesisiin koordinaatteihin ei tunnu mielekkäältä. Napakoordinaateissa annetusta ratkaisusta näkee, että $r(t) \to \infty$, kun $t \to \infty$ ja $r(t) \to 0$, kun $t \to -\infty$. Kulmalle taas pätee $\theta(t) \to \infty$, kun $t \to \infty$ ja mielenkiintoisemmin $\theta(t) \to \theta_0 - \frac{r_0}{2}$, kun $t \to -\infty$. Siis lauseke $\theta - \frac{r^2}{2}$ on vakio jokaisella radalla, joten radat ovat yhtälöiden $\theta - \frac{r^2}{2} = C_0 = \theta_0 - \frac{r_0}{2}$ määräämiä spiraaleja.



Kuva 1: Tehtävän 1 ratkaisuja

2. Olkoon $0 < \tau < \infty$ ja olkoon $g\colon [0,\tau[\to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-jatkuva kuvaus. Osoita, että sillä on vasen raja-arvo $\lim_{t\to\tau-} g(t)$.

Ratkaisu. Oletetaan, että g on K-Lipschitz-jatkuva. Olkoon $0 < \delta < \tau$. Tällöin jokaiselle $\tau-\delta \leqslant s < \tau$ pätee $\|g(\tau-\delta)-g(s)\| \leqslant K|\tau-\delta-s| < K\delta$. Siis $g([\tau-\delta,\tau[) \subset B(g(\tau-\delta),K\delta))$ ja $\overline{g([\tau-\delta,\tau[)} \subset \overline{B}(g(\tau-\delta),K\delta))$. Lisäksi että $g([\tau-\delta',\tau[) \subset g([\tau-\delta,\tau[)$, jos $\delta' < \delta$, joten Cantorin lemman nojalla leikkausjoukko

$$\bigcap_{0<\delta<\tau} \overline{g([\tau-\delta,\tau[)}$$

on yhden pisteen joukko $\{z\}$ jollain $z \in \mathbb{R}^n$. Erityisesti $z \in \overline{g([\tau-\delta,\tau[)}$ jokaisella $0 < \delta < \tau$.

Olkoon $\epsilon > 0$. Jos $\tau - \frac{\epsilon}{2K} < \tau$, niin

$$\|g(t)-z\| \leqslant \|g(t) - g(\tau - \frac{\epsilon}{2K})\| + \|g(\tau - \frac{\epsilon}{2K}) - z\| \leqslant \epsilon\,,$$

joten väite on todistettu.

Väite voidaan myös todistaa tarkastelemalla kaikkien välin $[0,\tau]$ alkioiden päätepisteeseen τ suppenevien jonojen kuvia ja osoittaa, että ne suppenevat kaikki samaan raja-arvoon.

3. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

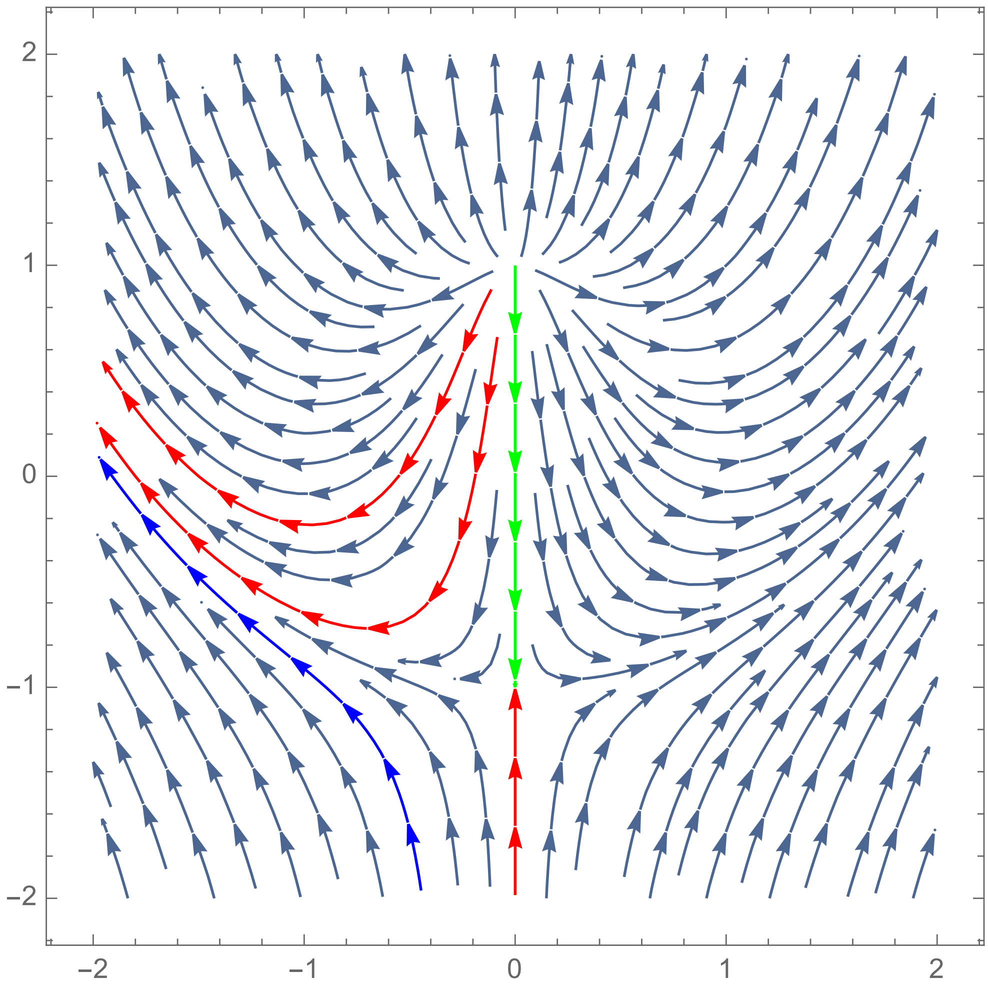
$$f(x) = (x_1, \|x\|^2 - 1).$$

- Etsi differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ tasapainopisteet.
- Ovatko tasapainopisteet hyperbolisia?
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Hahmottele vektorikenttää f ja kuvaile differentiaaliyhtälön $\dot{x} = f(x)$ ratkaisujen käyttäytymistä käsin tai Mathematicalla.

Ratkaisu. Tasapainopisteessä $x_1 = 0$ ja $x_1^2 + x_2^2 = 1$, joten $x_2 = \pm 1$. Siis yhtälöllä on kaksi tasapainopistettä $(0,1)$ ja $0,-1)$. Vektorikentän differentiaali on $Df(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1 & 2x_2 \end{pmatrix}$. Siis linearisointi pisteessä $(0,1) = Df(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ja pisteessä $(0,-1) = Df(0,-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Siis molemmat tasapainopisteet ovat hyperbolisia, $(0,1)$ on epälineaarinen lähde ja $(0,-1)$ on epälineaarinen satulapiste.

4. Olkoon $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^∞-funktio. Osoita, että differentiaaliyhtälön $\dot{x} = -\nabla V(x)$ linearisoinneilla tasapainopisteissä on vain reaalisia ominaisarvoja.

Ratkaisu. Differentiaalin $DV(x)$ matriisi on $A(x) = (\partial_i\partial_j V(x))_{i,i=1}^n$. Koska V on sileä, matriisi $A(x)$ on symmetrinen Schwarzin lauseen nojalla. Siis sen ominaisarvot ovat reaalisia.



Kuva 2: Tehtävän 3 ratkaisuja

5. Olkoon $V\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$$V(x) = x_1^2(x_1-1)^2 + x_2^2\,.$$

Tarkastellaan differentiaaliyhtälöä $\dot{x} = -\nabla V(x)$.

- Määritä differentiaaliyhtälön tasapainopisteet.
- Linearisoi yhtälö tasapainopisteissä.
- Määritä hyperbolisten tasapainopisteiden tyypit.
- Miten vektorikenttä $-\nabla V$ ja funktion V tasa-arvokäyrät suhtautuvat toisiinsa?
- Hahmottele differentiaaliyhtälön ratkaisujen käyttäytymistä.

Ratkaisu. Lasku osoittaa, että

$$-\nabla V(x) = (-4x_1(x_1-1)(x_1-\frac{1}{2}), -2x_2)\,.$$

Tasapainopisteet ovat selvästi $(0,0)$, $(\frac{1}{2},0)$ ja $(1,0)$. Vektorikentän $-\nabla V$ differentiaali on

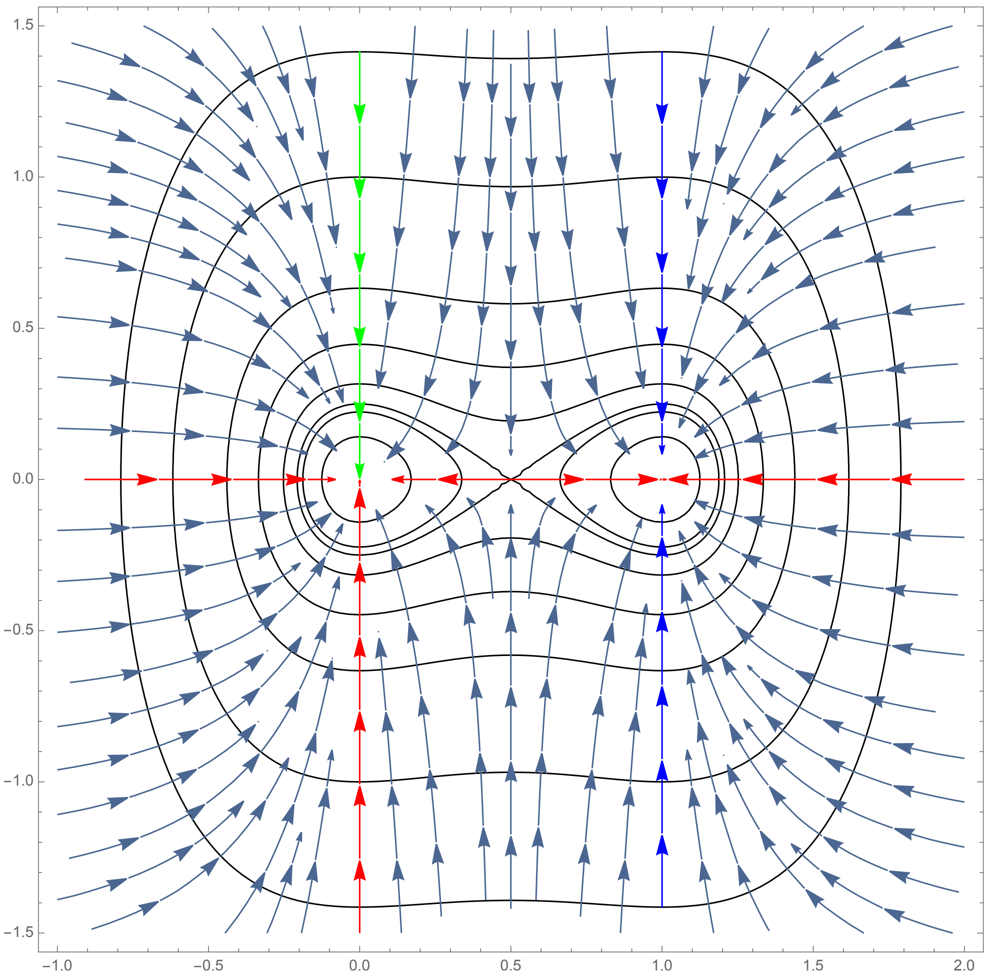
$$-D\nabla V(x) = \begin{pmatrix} -12x_1^2 + 12x_1 - 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Linearisointi pisteessä 0 on $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, joten 0 on nielu. Linearisointi pisteessä $(0, \frac{1}{2})$ on $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, joten$(0, \frac{1}{2})$ on satula. Linearisointi pisteessä $(0, 1)$ on $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, joten$(0, 1)$ on nielu.

Vektorianalyysista tai vektoricalculuksesta muistanemme, että ∇V on kohtisuorassa funktion V tasa-arvokäyriä vastaan niissä pisteissä, joissa ∇V ei ole nolla, siis tasapainopisteissä. Havainto todistetaan yleisessä tapauksessa näin: Olkoon $x_0 \in V^{-1}(c)$ säännöllinen piste ja olkoon $\gamma\colon]-\delta, \delta[\to V^{-1}(c)$ sileä polku, jolle $\gamma(0) = x_0$. Polun γ määritelmän ja ketjusäännön nojalla

$$0 = \frac{d}{dt}(V \circ \gamma)(t) = DV(\gamma(0))\dot{\gamma}(0) = (\nabla V(x_0) \mid \gamma(0))\,.$$

Vektori γ_0 voi olla mikä tahansa pinnan $V^{-1}(c)$ tangenttivektoreista, joten väite seuraa.



Kuva 3: Tehtävän 5 ratkaisuja

6. Analysoi epälineaarisen heilurin differentiaaliyhtälön tasapainopisteiden linearisoinnit kitkan b eri arvoilla. Mitä tapahtuisi, jos kitkaa kuvaava parametri olisikin negatiivinen?

Ratkaisu. Differentiaaliyhtälö

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{v} = -\sin\theta - bv \end{cases} . \tag{1}$$

määräytyy vektorikentästä $f(\theta, v) = (v, -\sin\theta - bv)$. Vektorikentän f differentiaali on

$$Df(\theta, v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos\theta & -b \end{pmatrix} .$$

Sen linearisoinnit tasapainopisteissä ovat

$$Df(2k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -b \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad Df((2k+1)\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b \end{pmatrix}$$

kaikilla $k \in \mathbb{Z}$. Linearisoinnin ominaisarvot pisteissä $(2k\pi, 0)$ ovat $\lambda = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4}}{2}$. Jos $b = 0$, niin tämä tasapainopiste on keskus ja tilanne tarkastellaan Esimerkissä **??**. Jos $0 < b < 2$, niin linearisoinnilla on kaksi kompleksista ominaisarvoa, joilla on negatiivinen reaaliosa. Siis tasapainopisteet ovat spiraalinieluja. Jos $b = 2$, niin linearisoinnilla on algebrallisesti kaksinkertainen ja geometrisesti yksinkertainen ominaisarvo -2, joten kyseessä on surkastunut nielu. Suuremmilla kitkan arvoilla linearisoinnilla on kaksi negatiivista ominaisarvoa.

Linearisoinnin ominaisarvot pisteissä $((2k-1)\pi, 0)$ ovat $\lambda = \frac{-b\pm\sqrt{b^2+4}}{2}$. Tällöin tasapainopisteellä on positiivinen ja negatiivinen ominaisarvo eli kyseessä on epälineaarinen satula.