Differentiaaliyhtälöiden jatkokurssi 1 2022

Harjoitus 4: ratkaisuja

1. Olkoon $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ ja olkoon λ on sen ominaisarvo. Olkoon $k \in \mathbb{N} - \{0\}$. Osoita, että $E_\lambda^k(A)$ on A-invariantti aliavaruus.

Ratkaisu. Huomataan, että

$$(A - \lambda I_n)A = A^2 - A\lambda I_n = A(A - \lambda I_n)\,.$$

Induktiolla saamme helposti $(A - \lambda I_n)kA = A(A - \lambda I_n)^k$. Olkoon $x \in E_\lambda^k(A)$. Edellä tehdyn havainnon nojalla

$$(A - \lambda I_n)k(Ax) = A(A - \lambda I_n)^k x = A0 = 0\,,$$

joten $Ak \in E_\lambda^k(A)\,.$

2. Määritä matriisin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

reaalinen Jordanin kanoninen muoto.

Ratkaisu. Matriisin A ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin

$$\lambda^4 - 6\lambda^3 + 13\lambda^2 - 12\lambda + 4 = (x-1)^2(x-2)^2$$

kaksinkertaiset juuret $\lambda = 1$ ja $\lambda = 2$. Esimerkiksi Gaussin ja Jordanin menetelmällä näemme, että ominaisavaruus E_1 on 1-ulotteinen ja sen virittää esimerkiksi ominaisvektori $(1,0,1,0)$ ja E_2 on 1-ulotteinen ja sen virittää esimerkiksi ominaisvektori $(1,1,1,1)$. Matriisin A Jordanin kanoninen muoto on siis

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix})\,.$$

3. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Määritä alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{y} = Ay \\ y(0) = (1,0,1) \end{cases}$ ratkaisu.

Ratkaisu. Matriisin A ominaisarvot ovat karakteristisen polynomin

$$-\lambda^3 + 8\lambda^2 - 20\lambda + 16 = -(x-2)^2(x-4)$$

juuret $\lambda = 2$ ja $\lambda = 4$. Esimerkiksi Gaussin ja Jordanin menetelmällä saadaan $E_1 = \langle(1,-1,-1)\rangle$ ja $E_4 = \langle(1,-1,1)\rangle$. Ominaisarvo on siis algebrallisesti kaksinkertainen ja geometrisesti yksinkertainen.

Vektori $x = (-1, 0, 1)$ on yhtälön

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (A - 2I_2)x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ratkaisu. Kuten Esimerkissä 4.2, matriisi

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(K^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)$$

antaa kannanvaihdon, jolla A saadaan reaaliseen Jordanin kanoniseen muotoon. Kannanvaihtolemman, Lemman 4.6 ja Harjoitustehtävän 2.7/Proposition 4.10 (1) nojalla alkuarvotehtävän ratkaisu on

$$\begin{aligned} y(t) &= K \, \exp\left(t \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) K^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{4t} - te^{2t} \\ (1+t)e^{2t} - e^{4t} \\ e^{4t} + te^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

4. Ratkaise Esimerkissä 4.11 käsitelty kytkettyjen harmonisten värähtelijöiden alkuarvotehtävä $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ alkuarvoilla $a = (r, r, 0, 0)$ ja $a = (r, -r, 0, 0)$, kun $r \in \mathbb{R}$. Miten kytketyt massat liikkuvat näissä tilanteissa?

Ratkaisu. Kannanvaihtomatriisin C käänteismatriisi on

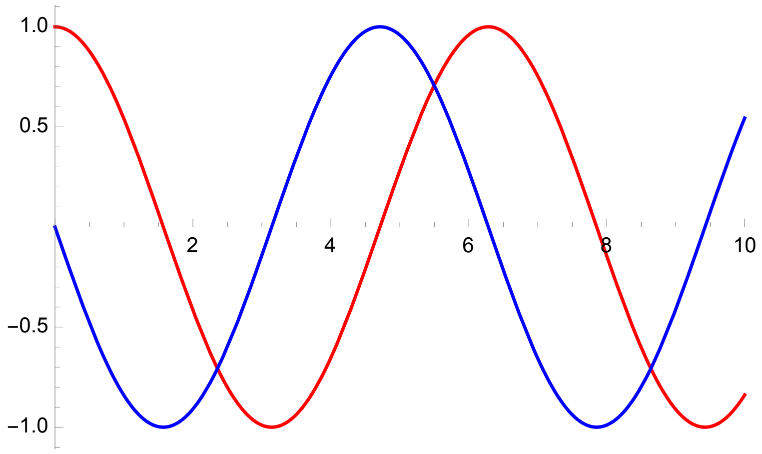
$$C^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\sqrt{k} & -\sqrt{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -\sqrt{k+2K} & \sqrt{k+2K} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Siispä $C^{-1}\big({}^t(r, r, 0, 0)\big) = {}^t(0, -r\sqrt{k}, 0, 0)$ ja $C^{-1}\big({}^t(r, -r, 0, 0\big) = {}^t(0, 0, 0, -r\sqrt{k+2K})$. Proposition 2.20 nojalla alkuarvotehtävän $\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ x(0) = a \end{cases}$ ratkaisu on $x_a(t) = Cy_{C^{-1}a}(t)$.

Jos $a = {}^t(r, r, 0, 0)$, niin $C^{-1}\big({}^t(r, r, 0, 0)\big) = {}^t(0, -r\sqrt{k}, 0, 0)$, joten

$$\begin{aligned} x(t) = Cy_{C^{-1}a}(t) &= C \begin{pmatrix} \cos\sqrt{k}t & \sin\sqrt{k}t & 0 & 0 \\ -\sin\sqrt{k}t & \cos\sqrt{k}t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sqrt{k+2K}t & \sin\sqrt{k+2K}t \\ 0 & 0 & -\sin\sqrt{k+2K}t & \cos\sqrt{k+2K}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -r\sqrt{k} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{k}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{k+2K}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{k}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{k+2K}} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}\,t) \\ -r\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}\,t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\sqrt{k}\,t) \\ r\cos(\sqrt{k}\,t) \\ -r\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}\,t) \\ -r\sqrt{k}\sin(\sqrt{k}\,t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

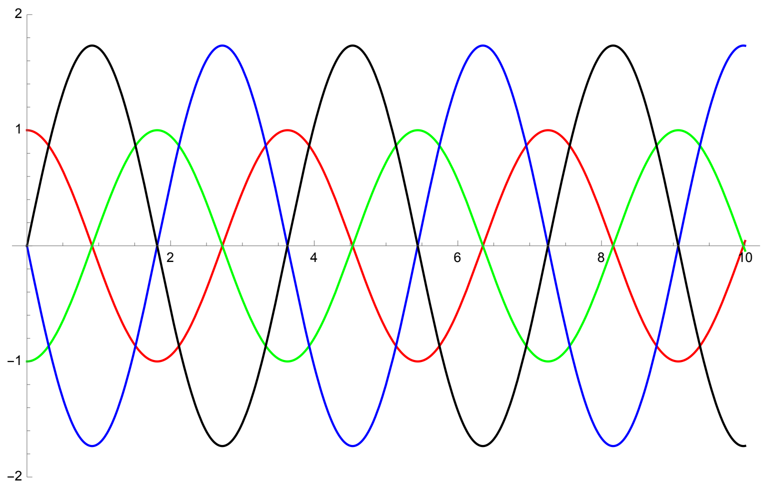
Kappaleet liikkuvat siis samaan suuntaan samaa nopeutta jokaisella $t \in \mathbb{R}$.



Jos $a = {}^t(r, -r, 0, 0)$, niin $C^{-1}\big({}^t(r, -r, 0, 0)\big) = {}^t(0, 0, 0, -r\sqrt{k + 2K})$ ja castaava lasku antaa ratkaisun

$$x(t) = \begin{pmatrix} r\cos(\sqrt{k+2K}\,t) \\ -r\cos(\sqrt{k+2K}\,t) \\ -r\sqrt{k+2K}\sin(\sqrt{k+2K}\,t) \\ r\sqrt{k+2K}\sin(\sqrt{k+2K}\,t) \end{pmatrix}$$

Kappaleet liikkuvat siis vastakkaisiin suuntiin vastakkaisilla mutta itseisarvoltaan yhtä suurilla nopeuksilla jokaisella $t \in \mathbb{R}$.



5. Iteroi Picardin operaattoria kolme kertaa alkuarvotehtävälle

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu. Valitaan alkuarvaukseksi vakiokuvaus $x_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tällöin

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \\ x_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, \\ x_3(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 1 - \frac{t^2}{2} \\ -t \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t - \frac{t^3}{6} \\ 1 - \frac{t^2}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

joten komponenttifunktioina näkyvät sinin kolmas ja kosinin toinen Taylorin polynomi nollassa. Esimerkissä 2.17 näimme, että alkuarvotehtävän ratkaisu onkin $x(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$.