Ryhmät 2021

Harjoitus 6: ratkaisuja

1. Olkoon G ryhmä, olkoon $I \neq \varnothing$ jokin indeksijoukko ja olkoot $H_i \trianglelefteq G$, $i \in I$. Osoita, että

$$\bigcap_{i \in I} H_i \trianglelefteq G\,.$$

Ratkaisu. Proposition 9.10 nojalla $\bigcap_{i \in I} H_i \leqslant G$. Olkoon $h \in \bigcap_{i \in I} H_i$ ja olkoon $g \in G$. Koska $H_j \trianglelefteq G$ kaikilla $j \in I$, pätee $ghg^{-1} \in H_j$ kaikilla $j \in I$. Siis $ghg^{-1} \in \bigcap_{i \in I} H_i$. Proposition 12.5 nojalla $\bigcap_{i \in I} H_i \trianglelefteq G$.

2. Todista Propositio 12.16.

Ratkaisu. Ryhmähomomorfismin ydin on normaali Seurauksen 12.8 nojalla. Jos $H \trianglelefteq G$, niin ryhmähomomorfismin $\pi\colon G \to G/H$ ydin on $H \leqslant G$, sillä $H \in G/H$ on tekijäryhmän neutraalialkio.

3. Osoita, että $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_+ \cong \mathbb{S}^1$.

Ratkaisu. Kuvaus $\phi\colon \mathbb{C}^\times \to \mathbb{S}^1$, $\phi(z) = \frac{z}{|z|}$ on homomorfismi, sillä kaikille $z, w \in \mathbb{C}^\times$ pätee

$$\phi(zw) = \frac{zw}{|zw|} = \frac{zw}{|z||w|} = \frac{z}{|z|}\frac{w}{|w|} = \phi(z)\phi(w)\,.$$

Homomorfismi ϕ on surjektio, sillä $\phi(z) = z$ kaikille $z \in \mathbb{S}^1$. Lisäksi

$$\ker \phi = \{z \in \mathbb{C}^\times : z = |z|\} = \mathbb{R}_+\,,$$

joten väite seuraa ryhmien isomorfismilauseesta

4. Osoita, että tekijäryhmä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on ääretön. Osoita, että ryhmän $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ jokaisen alkion kertaluku on äärellinen ja että ryhmä $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ei ole syklinen.

Ratkaisu. Huomataan ensin, että kuvaus $b\colon [0,1[\, \cap\, \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on bijektio: Jos $x \neq y$ ja $x - y \in \mathbb{Z}$, niin $|x - y| \geqslant 1$ ja toisaalta, jos $0 \leqslant x < y < 1$, niin $0 < y - x < 1$. Siis $x + \mathbb{Z} \neq y + \mathbb{Z}$, jos $x \neq y$ ja $x, y \in [0,1[\, \cap\, \mathbb{Q}$. Toisaalta, jos $x \in \mathbb{Q}$, niin on $x_0 \in [0,1[\, \cap\, \mathbb{Q}$, jolle $x - x_0 \in \mathbb{Z}$, joten $x + \mathbb{Z} = x_0 + \mathbb{Z}$. Joukko $[0,1[\, \cap\, \mathbb{Q}$ on ääretön, joten $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on ääretön.

Jos $x = \frac{p}{q}$ joillain $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, niin $qz = p \in \mathbb{Z}$. Siis $q(\frac{p}{q} + \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, joten $\operatorname{ord}(pq + \mathbb{Z}) \leqslant q$.

Jos $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \langle x + \mathbb{Z} \rangle$ jollain $x + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, niin $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ on äärellinen, koska $\operatorname{ord}(x + \mathbb{Z})$ on äärellinen. Siis $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ei ole syklinen ryhmä.

5. Olkoot $N_1 \trianglelefteq G_1$ ja $N_2 \trianglelefteq G_2$. Osoita, että $N_1 \times N_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ ja

$$(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)\,.$$

Ratkaisu. Olkoon $\pi_i\colon G_i \to G_i/N_i$ luonnollinen homomorfismi, kun $i \in \{1, 2\}$. Tällöin kuvaus $\phi\colon G_1 \times G_2 \to (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$, $\phi(g_1, g_2) = (\pi_1(g_1), \pi_2(g_2))$ on homomorfismi: Kaikille $(g_1, g_2), (h_1, h_2) \in G_1 \times G_2$ pätee

$$\begin{aligned}\phi((g_1, g_2)(h_1, h_2)) &= \phi((g_1h_1, g_2h_2)) = (\pi_1(g_1h_1), \pi_2(g_2h_2))\\ &= (\pi_1(g_1)\pi_1(h_1), \pi_2(g_2)\pi_2(h_2))\\ &= (\pi_1(g_1), \pi_2(g_2))(\pi_1(h_1), \pi_2(h_2)) = \phi((g_1, g_2))\phi((h_1, h_2))\,.\end{aligned}$$

Homomorfismi ϕ on surjektio, koska luonnolliset homomorfismit π_1 ja π_2 ovat surjektioita, katso Propositio 2.7.

Olkoot $e_1 \in G_1$ ja $e_2 \in G_2$ neutraalialkiot. Tällöin $(e_1, e_2) \in G_1 \times G_2$ on neutraalialkio. Ryhmän $(G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$ neutraalialkio on $\phi(e_1, e_2) = (N_1, N_2)$. Proposition 11.4 nojalla $\phi(g_1, g_2) = (N_1, N_2)$, jos ja vain jos $g_1 \in N_1$ ja $g_2 \in N_2$. Siis $\ker\phi = N_1 \times N_2$. Väite seuraa ryhmien isomorfismilauseesta.

6. Todista Propositio 12.22.

Ratkaisu. Huomataan ensin, että $NT = TN$: Olkoon $nt \in NT$. Koska $N \trianglelefteq G$ ja $T \leqslant G$, pätee $Nt = tN$. Siis on $n' \in N$, jolle $nt = tn' \in TN$, mistä saadaan $NT \subset TN$. Vastaavasti on $n'' \in N$, jolle $tn = n't \in NT$, joten $TN \subset NT$.

Osoitetaan, että NT on ryhmä. Ryhmän G neutraalialkio e on molempien ryhmien N ja T (neutraali)alkio, joten $e \in NT$. Olkoot $n_1, n_2 \in N$ ja $t_1, t_2 \in T$. Koska $N \lhd G$ ja $T \leqslant G$, pätee $t_1N = Nt_1$. Erityisesti on $n_3 \in N$ siten, että $t_1n_2 = n_3t_1$.[1] Siis

$$n_1t_1n_2t_2 = n_1n_3t_1t_2 \in NT\,.$$

Samoin, koska N on normaali on $n_4 \in N$, jolle $t_1^{-1}n_1^{-1} = n_4t^{-1}$, joten

$$(n_1t_1)^{-1} = t_1^{-1}n_1^{-1} = n_4t_1^{-1} \in NT\,.$$

Aliryhmätestin nojalla $NT \leqslant G$.

Proposition 9.12 nojalla

$$N \cup T \subset NT = \{nt : n \in N,\ t \in T\} \subset \langle N \cup T\rangle\,.$$

Määritelmästä seuraa,[2] että $\langle N \cup T\rangle$ on pienin ryhmän G aliryhmä, joka sisältää joukon $N \cup T$. Siis $NT \supset \langle N \cup T\rangle$, joten $NT = \langle N \cup T\rangle$.

7. Osoita, että $[G, G] \trianglelefteq G$.

Ratkaisu. Määritelmänsä mukaan $[G, G] \leqslant G$. Proposition 9.12 nojalla $[G, G]$ koostuu alkioista $[a_1, b_1]^{\pm}[a_2, b_2]^{\pm} \cdots [a_k, b_k]^{\pm}$, missä $a_1, a_2, \ldots a_k, b_1, b_2, \ldots b_k \in G$. Tarkastelua helpottaa, kun huomaa, että kommutaattorin käänteisalkio on kommutaattori:

$$[a, b][b, a] = aba^{-1}b^{-1}bab^{-1}a^{-1} = e\,,$$

missä $e \in G$ on neutraalialkio. Siis ryhmän $[G, G]$ alkiot ovat muotoa $[a_1, b_1][a_2, b_2] \cdots [a_k, b_k]$, missä $a_1, a_2, \ldots a_k, b_1, b_2, \ldots b_k \in G$.

[1] Alkioksi n_3 voidaan ottaa $t_1n_2t_1^{-1}$, sillä $t_1n_2 = t_1n_2t_1^{-1}t_1$ ja koska N on normaali, pätee $t_1n_2t_1^{-1} \in N$.

[2] Katso luku 9.3

Huomataan, että

$$g[a,b]g^{-1} = gaba^{-1}b^{-1}g^{-1} = (gag^{-1})(gbg^{-1})(ga^{-1}g^{-1})(gb^{-1}g^{-1}) = [gag^{-1}, gbg^{-1}]\,.$$

Siispä alkioille $[a_1,b_1][a_2,b_2]\cdots[a_k,b_k] \in [G,G]$ ja $g \in G$ pätee

$$\begin{aligned}
g[a_1,b_1][a_2,b_2]\cdots[a_k,b_k]g^{-1} &= (g[a_1,b_1]g^{-1})(g[a_2,b_2]g^{-1})\cdots(g[a_k,b_k]g^{-1})\\
&= [ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}][ga_2g^{-1}, gb_2g^{-1}]\cdots[ga_kg^{-1}, gb_kg^{-1}]\\
&= [ga_1g^{-1}, gb_1g^{-1}][ga_2g^{-1}, gb_2g^{-1}]\cdots[ga_kg^{-1}, gb_kg^{-1}] \in [G,G]\,.
\end{aligned}$$

Proposition 12.5 nojalla $[G,G] \trianglelefteq G$.

8. Osoita, että $G/[G,G]$ on kommutatiivinen ryhmä.

Ratkaisu. Olkoot $g,h \in G$. Tällöin alkioille $g[G,G], h[G,G] \in G/[G,G]$ pätee

$$\begin{aligned}
g[G,G]h[G,G](g[G,G])^{-1}(h[G,G])^{-1} &= g[G,G]h[G,G]g^{-1}[G,G]h^{-1}[G,G]\\
&= ghg^{-1}h^{-1}[G,G] = [G,G]\,,
\end{aligned}$$

joten $g[G,G]h[G,G] = h[G,G]g[G,G]$.