# Ryhmät 2021

## Harjoitus 4: ratkaisuja

**1.** Olkoot $X$ ja $Y$ epätyhjiä joukkoja ja olkoon $f\colon X \to Y$ bijektio. Osoita, että permutaatioryhmät $\mathrm{Perm}(X)$ ja $\mathrm{Perm}(Y)$ ovat isomorfisia.

**Ratkaisu.** Jos $b \in \mathrm{Perm}(X)$, niin $f \circ b \circ f^{-1}\colon Y \to Y$ on bijektioiden yhdistettynä kuvauksena bijektio, joten se on ryhmän $\mathrm{Perm}(Y)$ alkio. Kuvaus $\Phi\colon \mathrm{Perm}(X) \to \mathrm{Perm}(Y)$, $\Phi(b) = f \circ b \circ f^{-1}$ on homomorfismi, sillä kaikille $b_1, b_2 \in \mathrm{Perm}(X)$ pätee

$$\Phi(b_1 \circ b_2) = f \circ b_1 \circ b_2 \circ f^{-1} = f \circ b_1 \circ f^{-1} \circ f \circ b_2 \circ f^{-1} = \Phi(b_1) \circ \Phi(b_2)\,.$$

Olkoon $\widetilde{b} \in \mathrm{Perm}(Y)$. Tällöin $f^{-1} \circ \widetilde{b} \circ f \in \mathrm{Perm}(X)$ ja

$$\Phi(f^{-1} \circ \widetilde{b} \circ f) = f \circ f^{-1} \circ \widetilde{b} \circ f \circ f^{-1} = \widetilde{b}\,,$$

joten $\Phi$ on surjektio. Jos $\Phi(b) = \mathrm{id}_Y$, niin $f \circ b \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$, joten

$$f \circ b = f \circ b \circ f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_Y \circ f = f\,.$$

Siis

$$b = f^{-1} \circ f \circ b = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X\,,$$

joten $\ker \Phi = \{\mathrm{id}_X\}$. Proposition 9.14 nojalla $\Phi$ on injektio.

**2.** Täydennä Proposition 10.5 todistus induktiotodistukseksi.

**Ratkaisu.** Sykli, jonka pituus on 2 on vaihto. Oletetaan, että kaikki syklit, joiden pituus on korkeintaan $m-1$ ovat vaihtojen tuloja. Olkoon $(a_1 a_2 \cdots a_m)$ sykli, jonka pituus on $m$. Tällöin on vaihdot $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ siten, että $(a_1 a_2 \cdots a_{m-1}) = \tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n$. Proposition 10.5. todistusideassa olleen vihjeen perusteella huomaamme, että

$$(a_1 a_2 \cdots a_m) = (a_1 a_m)(a_1 a_2 \cdots a_{m-1}) = (a_1 a_m)\tau_1 \tau_2 \cdots \tau_n\,,$$

joten $(a_1 a_2 \cdots a_m)$ on vaihtojen tulo. Väite seuraa induktioperiaatteesta.

**3.** Olkoot $\alpha_n = (123 \cdots n)$ ja $\beta = (123)$. Määritä permutaatiot

$$\sigma_1 = \alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} \quad \text{ja} \quad \sigma_2 = \beta^{-1} \alpha_n (12x) \alpha_n^{-1} \beta$$

jokaiselle $3 \leqslant x < n$.

**Ratkaisu.** Jos $y \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{2, 3, x+1\}$, niin $\alpha_n^{-1}(y) \notin \{1, 2, x\}$ ja selvästi $\sigma_1(y) = y$. Jäljelle jäävät alkiot muodostavat 3-syklin ja $\sigma_1 = (2\,3\,x+1)$. Siis

$$\sigma_2 = (321)\sigma_1(123) = (321)(2\,3\,x+1)(123) = (1\,2\,x+1)\,.$$

**4.** Määritä permutaatiot

- $(1y2)(12x)(12y)$ kaikille $x, y \geqslant 3$, $x \neq y$ ja

- $(1xt)(1yz)(1tx)$ kaikille $x, y, t, z > 1$, kun $\#\{x, y, t, z\} = 4$. [1]

**Ratkaisu.** $(1y2)(12x)(12y) = (1\,x\,y)$ ja $(1xt)(1yz)(1tx) = (x\,y\,z)$.

**5.** Osoita, että jokaiselle parittomalle $n \geqslant 5$ pätee $A_n = \langle(123), (123\cdots n)\rangle$.

**Ratkaisu.** 3-syklit ovat parillisia ja koska $n$ on pariton, myös $n$-sykli $(123\cdots n)$ on parillinen. Siis $\langle(123), (123\cdots n)\rangle \leqslant A_n$. Tehtävän 3 nojalla $(12x) \in \langle(123), (123\cdots n)\rangle$ kaikilla $3 \leqslant x \leqslant n$. Tehtävän 4 nojalla kaikki muutkin 3-syklit ovat aliryhmässä $\langle(123), (123\cdots n)\rangle$, joten Proposition 10.21 nojalla $\langle(123), (123\cdots n)\rangle = A_n$

**6.** Olkoon $\sigma \in A_5 - \{\mathrm{id}\}$. Osoita, että $\sigma$ on 3-sykli, 5-sykli tai kahden erillisen vaihdon tulo.

**Ratkaisu.** Jokainen permutaatio on erillisten syklien tulo. Viiden alkion joukossa mahdollisuuksia ovat siis identtinen kuvaus, vaihto, kahden erillisen vaihdon tulo, 3-sykli, vaihdon ja sen kanssa erillisen 3-syklin tulo, 4-sykli ja 5-sykli. Näistä vaihdot ja 4-syklit ovat parittomia.

**7.** Olkoot $a, b, c, d, e \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ siten, että $\{a, b, c, d, e\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Määritä permutaatiot

(1) $(ab)(cd)(abc)(cd)(ab)$,

(2) $(acb)(abcde)(abc)$,

(3) $(abcde)(abdec)^{-1}$,

(4) $(aeb)(ab)(cd)(abe)$ ja

(5) $(ab)(cd)(ae)(cd)$.

**Ratkaisu.** (1) $(ab)(cd)(abc)(cd)(ab) = (adb)$,

(2) $(acb)(abcde)(abc) = (abdec)$,

(3) $(abcde)(abdec) = (abcde)(acedb) = (adc)$,

(4) $(aeb)(ab)(cd)(abe) = (ae)(cd)$,

(5) $(ab)(cd)(ae)(cd) = (aeb)$.

**8.** Tämän tehtävän täsmällinen ratkaisu on kovin tekninen. Harjoituspisteen saa idean hahmottamisesta.

Olkoot $\sigma, \tau, \omega \in S_n$ siten, että $\sigma = \omega\tau\omega^{-1}$. Tämä on yhtäpitävää yhtälön $\sigma\omega = \omega\tau$ kanssa. Olkoon $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ syklin $\tau$ syklirakenne ja olkoon $\tau = \tau_1\tau_2\cdots\tau_k$ siten, että $\tau_i$ on $n_i$-sykli jokaisella $1 \leqslant i \leqslant k$. Olkoon $x \in \mathcal{O}_{\tau_i}$. Tällöin

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_{\tau_i}(x) =& \{\omega(x), \omega(\tau(x)), \omega(\tau^2(x)), \ldots, \omega(\tau^{n_i-1}(x))\}\\ =& \{\omega(x), \sigma(\omega(x)), \sigma(\omega(\tau(x))), \ldots, \sigma(\omega(\tau^{n_i-2}(x)))\}\\ =& \{\omega(x), \sigma(\omega(x)), \sigma^2(\omega(x)), \ldots, \sigma^{n_i-1}(\omega(x))\}.\end{aligned}$$

[1]Ehto $\#\{x, y, t, z\} = 4$ tarkoittaa, että mitkään kaksi alkioista $x, y, t, z$ eivät ole samoja.

Siis pisteen $\omega(x)$ rata on $n_i$-syklin $\sigma_i = \sigma|\omega(\mathscr{O}_{\tau_i}(x))$ rata. Tämä pätee kaikille $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, joten syklin $\sigma$ syklirakenne on $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$.

Toisen suunnan todistusta varten todistetaan ensin aputulos: Olkoot $\alpha, \beta \in S_n$ $j$-syklejä. Olkoot $x, y \in \{1, 2, \ldots, n\}$ siten, että $\alpha(x) \neq x$ ja $\beta(y) \neq y$. Olkoon $\omega_{\alpha,\beta} \in S_n$ mikä tahansa permutaatio, jolle pätee $\omega_{\alpha,\beta}(\alpha^i(x)) = \beta^i(y)$ kaikilla $0 \leqslant i \leqslant j-1$. Rekursiivisesti saadaan siis

$$\omega_{\alpha,\beta}(\alpha^i(x)) = \beta^i(\omega(x)) = \beta(\beta^{i-1}(\omega(x)) = \beta\omega(\alpha^{i-1}(x))$$

kaikilla $0 \leqslant i \leqslant j-1$. Siis pisteen $x$ $\alpha$-radalla $\mathscr{O}_\alpha(x)$ pätee $\omega\alpha|_{\mathscr{O}_\alpha(x)} = \beta\omega|_{\mathscr{O}_\alpha(x)}$. Jos $y \notin \mathscr{O}(x)$, niin $\omega\alpha(y) = \omega(y) = \beta\omega(y)$. Siis $\omega\alpha = \beta\omega$.

Olkoon $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ permutaatioiden $\sigma \in S_n$ ja $\tau \in S_n$ syklityyppi. Tällöin jokaisella $1 \leqslant j \leqslant k$ on $n_k$-syklit $\sigma_j$ ja $\tau_j$ siten, että syklit $\sigma_i$ ja $\sigma_j$ ovat erillisiä ja syklit $\tau_i$ ja $\tau_j$ ovat erillisiä, jos $i \neq j$ ja $\sigma = \sigma_1\sigma_2 \cdots \sigma_k$ ja $\tau = \tau_1\tau_2 \cdots \tau_k$. Määritellään permutaatio $\omega \in S_n$siten, että $\omega|_{\mathscr{O}_{\sigma_i}} = \omega_{\sigma_i,\tau_i}$ kaikilla $1 \leqslant i \leqslant k$. Aputuloksen nojalla $\omega\sigma = \tau\omega$.