Algebra 1: Ryhmät

Tentti 20.5.2020

Muista perustella vastauksesi huolellisesti!
Kurssin materiaalin käyttäminen tentissä on sallittua.

Ryhmien $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, $\mathrm{Perm}(X)$ ja $Z(G)$ määritelmät on kerrattu toisella sivulla.
Ne ovat tunnetusti ryhmiä
Ryhmän G keskus $Z(G)$ on tunnetusti ryhmän G normaali aliryhmä.
Näitä tunnettuja asioita ei tarvitse todistaa.

1. Olkoon

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R}, a \neq 0,\ d \neq 0 \right\}.$$

Olkoon $\phi\colon B \to \mathbb{R}^\times$,

$$\phi(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}) = \frac{a}{d}.$$

(a) Osoita, että $B \leq \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

(b) Osoita, että kuvaus ϕ on homomorfismi.

(c) Määritä homomorfismin ϕ ydin ja kuvajoukko.

2. (a) Olkoot $a, b, c, d, e \geq 1$ viisi eri kokonaislukua. Olkoot $\alpha = (acd)$ ja $\beta = (bce)$. Kirjoita permutaatio $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ erillisten syklien tulona.

(b) Olkoon X joukko ja olkoon $x_0 \in X$. Olkoon

$$F = \{f \in \mathrm{Perm}(X) : f(x_0) = x_0\}$$

Osoita, että F on ryhmän $\mathrm{Perm}(X)$ aliryhmä.

3. Olkoon G ryhmä ja olkoon $H \trianglelefteq G$. Olkoon

$$\mathscr{A}(H) = \{\psi\colon H \to H : \psi \text{ on isomorfismi } \}.$$

(a) Olkoon $g \in G$. Osoita, että lauseke

$$\phi_g(h) = ghg^{-1}$$

määrittelee kuvauksen $\phi_g\colon H \to H$, jolle pätee $\phi_g \in \mathscr{A}(H)$.
(b) Olkoon $K \leq H$ aliryhmä, jolle $\phi(K) = K$ kaikilla $\phi \in \mathscr{A}(H)$. Osoita, että $K \trianglelefteq G$.

4. Olkoon G ryhmä. Olkoon $Z(G)$ ryhmän G keskus.

(a) Oletetaan, että $G/Z(G)$ on syklinen. Osoita, että G on kommutatiivinen ryhmä.

(b) Oletetaan, että G ei ole kommutatiivinen ryhmä. Osoita, että $[G : Z(G)] \geq 4$.

Matriisien kertolaskulla varustettu joukko

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$$

on $\mathbb{R}$-kertoiminen yleinen lineaarinen ryhmä.

Olkoon X epätyhjä joukko. Laskutoimituksella varustettu joukko

$$\mathrm{Perm}(X) = (\{f\colon X \to X : f \text{ on bijektio}\}, \circ)$$

on joukon X permutaatioryhmä.

Ryhmän G keskus on

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz \text{ kaikilla } g \in G\}.$$