Renkaat ja kunnat 2.2.2021

$u \in K$ on yksikkö, jos $\exists\, u^{-1} \in K$.

4.2 Jakorenkaat ja kunnat

Olkoon K rengas, jossa on ainakin kaksi alkiota. Jos kaikki renkaan K nollasta poikkeavat alkiot ovat yksiköitä, niin K on *jakorengas*. division ring
Kommutatiivinen jakorengas on *kunta*.
Jakorengas, joka ei ole kunta on *vino kunta*.
Jos K ja K' ovat kuntia, niin rengashomomorfismi $\phi\colon K \to K'$ on *kuntahomomorfismi*.

Jos k on kunnan K alirengas ja k on kunta, niin k on kunnan K *alikunta*. Tällöin kunta K on kunnan k *kuntalaajennus*.

Luvussa 1 os. että jos $z \in \mathbb{C} - \{0\}$, niin $\exists\, z^{-1} = \frac{\bar{z}}{n(z)}$ $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}$ on kunta.

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. $\mathbb{R}$ on $\mathbb{C}$:n alirengas, joka on kunta $\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}$ on $\mathbb{C}$:n alikunta
$\| \{a + i0 : a \in \mathbb{R}\}$ $\mathbb{C}$ on $\mathbb{R}$:n kuntalaajennus

Prop. 4.6 K kunta, $K' \subset K$ on alikunta, jos ja vain jos
1) $\# K' \geq 2$
2) $a - b \in K'$ $\forall a, b \in K'$
c) $ab^{-1} \in K'$ $\forall a, b \in K'$, $b \neq 0$

Tunnettu asia: $\forall\ x \geq 0\ \exists \sqrt{x} \geq 0$ s.e. $(\sqrt{x})^2 = x$.

Jos $x < 0$, niin $(i\sqrt{-x})^2 = i^2(\sqrt{-x})^2 = (-1)(-x) = x$.

Siis $i\sqrt{-x}$ on x:n neliöjuuri $\sqrt{x} \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Esim. $\sqrt{-1} = i$. $\sqrt{-2} = i\sqrt{2}$ jne.

Esim. Olk. $d \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\} \begin{array}{l} \subset \mathbb{C}, \text{ jos } d < 0 \\ \subset \mathbb{R}, \text{ jos } d > 0 \end{array}$$

Harjoitus: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ on $\mathbb{Q}$:n kuntalaajennus. Se on $\mathbb{R}$:n tai $\mathbb{C}$:n alikunta d:n merkistä riippuen.

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{Q}$:n toisen asteen kuntalaajennus

$$\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$$ on kunnan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ alirengas.

Esim. $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}$ on Gaussin kokonaislukujen rengas.

(liittyy mm. kahden neliön summiin, sillä $n(a+ib) = a^2 + b^2$ on kahden neliön summa)

Alirengastesti: olk. $a+ib, c+id \in \mathbb{Z}[i]$. Tällöin $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$

$$(a+ib)+(c+id) = \underbrace{(a+c)}_{\in \mathbb{Z}} + i\underbrace{(b+d)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}[i]$$

$$(a+ib)(c+id) = \underbrace{(ac-bd)}_{\in \mathbb{Z}} + i\underbrace{(ad+bc)}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}[i]$$

$$-1_{\mathbb{C}} = -1 + 0i \in \mathbb{Z}[i].$$

Alirengastesti $\Rightarrow$ $\mathbb{Z}[i]$ on $\mathbb{C}$:n alirengas. Siis $\mathbb{Z}[i]$ on rengas.

Esim. Hamiltonin Kvaterniot $\quad \left(X = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k \right.$

$\left. i^2 = -1 = j^2 = k^2 \quad \ldots\ldots \right)$

$\mathbb{H}$ on jakorengas (selvästi $\#\mathbb{H} \geq 2$)

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\} \subset \underbrace{M_2(\mathbb{C})}_{\text{rengas}}.$$

Hamiltonin Kvaterniot.

Harj: $\mathbb{H}$ on rengas.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = a\bar{a} + b\bar{b} = n(a) + n(b) = 0 \iff a = b = 0 \in \mathbb{C}.$$

$\Rightarrow$ Jos $a \neq 0 \neq b$, niin $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ on kääntyvä ja $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}^{-1} = \overbrace{\begin{pmatrix} \bar{a} & -b \\ \bar{b} & a \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{n(a)+n(b)}}^{\in \mathbb{H}}$

3

$\mathbb{H}$ on <u>vino kunta</u> (jakorengas, joka ei ole kommutatiivinen)

$\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, $\underline{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$\underline{i}\,\underline{j} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \underline{k} \neq \underline{j}\,\underline{i} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\underline{k}$

$$\boxed{\underline{i}^2 = -1 = \underline{j}^2 = \underline{k}^2}$$

Jos $x \in \mathbb{H}$, niin

$$x = \begin{pmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{pmatrix} = a\underline{1} + b\underline{i} + c\underline{j} + d\underline{k}.$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

---

5. Jaollisuus

$\boxed{K \text{ kommutatiivinen rengas}}$. $a, b, c \in K$.

Jos $ab = c$, niin
- a ja b ovat c:n <u>tekijöitä</u>.
- a ja b <u>jakavat</u> c:n, merk. $a \mid c$.

Olk. K komm. rengas.

Prop. 5.1

1) $a \mid a \quad \forall a \in K$.

2) $(a \mid b$ ja $b \mid c) \Rightarrow a \mid c \quad \forall a, b, c \in K$

3) $(a \mid b$ ja $a \mid c) \Rightarrow a \mid (b+c)$

$a \mid b+c$

Tod. Harj.

Määr. Olk. R rengas, $\# R \geq 2$. Jos $a, b \in R - \{0_R\}$ ja $ab = 0_R$, niin a ja b ovat <u>nollan jakajia</u>. Jos K on komm. rengas, jossa ei ole nollan jakajia, niin K on <u>kokonaisalue</u>.

Esim. 1) $\mathbb{Z}$ on kokonaisalue

2) $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ei ole kokonaisalue, sillä $(2+4\mathbb{Z})(2+4\mathbb{Z}) = 4+4\mathbb{Z} = 0+4\mathbb{Z}$
$= 0_{\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}}$.

$(2+4\mathbb{Z})$ on nollan jakaja.

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_2(\mathbb{R})$:ssä on nollan jakajia.

Prop. 5.4 Yksikkö ei ole nollan jakaja.

Tod. Olk. R rengas, $\#R \geq 2$ $(\Rightarrow 0_R \neq 1_R)$.
Olk. $a \in R$ yksikkö. Op. että $ab = 0$ jollain $b \in R$.

$$\Rightarrow \quad a^{-1}(ab) = a^{-1}0 = 0 \, .$$

$$\overset{\text{assos.}}{\parallel}$$

$$(a^{-1}a)b = b$$

Siis a ei ole nollan jakaja. $\square$

Seuraus. Kunnat ovat kokonaisalueita. $\square$

Määr. Renkaassa R pätee kertolaskun supistussääntö, jos

$$ab = ac \Rightarrow b = c$$
$$ba = ca \Rightarrow b = c$$

, kun $a, b, c \in R$ ja $a \neq 0$

Esim. 1) Renkaassa $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ pätee kertolaskun supistussääntö.

2) $(2+4\mathbb{Z})(2+4\mathbb{Z}) = 0 = 0(2+4\mathbb{Z})$ $\rightsquigarrow$ kertolaskun supistussääntö ei päde $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$:ssa.

Prop. 5.6 Komm. rengas K on kokonaisalue $\Leftrightarrow$ Kertolaskun supistussääntö pätee K:ssa.

Tod. Harj.